ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCELO MORALES

Une propriété asymptotique des puissances symboliques d'un idéal. Application à la théorie de l'intersection sur les surfaces normales

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 2 (1982), p. 219-228

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_2_219_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 2 (1982), 219-228.

UNE PROPRIÉTÉ ASYMPTOTIQUE DES PUISSANCES SYMBOLIQUES D'UN IDÉAL. APPLICATION A LA THÉORIE DE L'INTERSECTION SUR LES SURFACES NORMALES

par Marcelo MORALES

0. Introduction.

Soit R un anneau local noethérien excellent, intègre normal de dimension de Krull 2, dont le corps résiduel k est algébriquement clos.

Mumford ([6]) définit à l'aide d'une résolution de singularités de Spec R la multiplicité d'intersection $(C_1 . C_2)_x$ de 2 sous-schémas fermés, irréductibles de dimension 1 distincts C_1 et C_2 dans Spec R en x l'unique point fermé de Spec R.

Soit P_i l'idéal premier de R définissant C_i, $P_i^{(n)}$ ses puissances symboliques, $(\bar{C}_i, \bar{x}_i)$ le normalisé de C_i,

$$h_i : (\bar{C}_i, \bar{x}_i) \to (C_i, x_i) \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$$

le germe de morphisme obtenu par composition. Alors nous montrons que

$$(C_1 . C_2)_x = \lim_{n \to \infty} \frac{v_i(P_j^{(n)} \circ h_i)}{n}, \qquad i, j = 1, 2, \qquad i \neq j,$$

où v_i est la valuation de l'anneau $\mathcal{O}_{\bar{C}_i, \bar{x}_i}$.

0.1. *Diviseurs de Weil et de Cartier* ([4], Chap. II.6).

Soit X un schéma noethérien intègre, séparé, régulier en codimension 1. Par définition, un diviseur de Weil est un élément du groupe libre Div X engendré par l'ensemble des sous-schémas fermés réduits et irréductibles de codimension 1 de X. $D \in \operatorname{Div} X$ tel que $D = \Sigma n_i Y_i$ est dit effectif si $n_i \geqslant 0$ pour tout i.

Si Y est un sous-schéma fermé réduit et irréductible de codimension 1 de X, ξ son point générique, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,\xi}$ est un anneau de valuation discrète et définit une valuation v_Y sur le corps de fractions K de X, dont le corps résiduel est K(Y) le corps de fractions de Y. Si $f \in K^*$, le diviseur $\operatorname{div}(f) = \Sigma v_Y(f) Y$ est appelé diviseur principal.

Les diviseurs de Cartier sur X, sont les diviseurs de Weil localement principaux. Si D est un diviseur de Cartier on lui associe $\mathcal{O}_X(D)$ un $\mathcal{O}_X$-Module inversible. Si en plus X est régulier, alors tout diviseur de Weil est de Cartier.

Nous utiliserons aussi des diviseurs de Weil et de Cartier à coefficients rationnels.

0.2. *Degré d'un faisceau localement libre sur une courbe* C.

- Une courbe est un schéma noethérien de dim 1.
- Une composante d'une courbe est un sous-schéma fermé de C de dim 1 réduit et irréductible.

Soit k un corps. Si C est propre au-dessus de k, pour tout $\mathcal{O}_C$-Module cohérent $\mathcal{F}$, $h^i(\mathcal{F}) = \operatorname{rg}_k H^i(C,\mathcal{F})$ est fini et on pose $\chi(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F})$. Si $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_C$-Module inversible on pose $\deg_C(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{O}_C)$.

0.3. *Courbes exceptionnelles d'un morphisme propre.*

Soit R un anneau noethérien, soit $\pi : X \to \operatorname{Spec} R$ un morphisme propre. Une courbe est dite exceptionnelle (relativement à π) si $\pi(C)$ est de dim 0.

Si $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible et C une courbe exceptionnelle, on pose

$$\mathcal{L}.C = \deg_C i_C^*(\mathcal{L})$$

où $i_C : C \to X$ est l'immersion fermée canonique. De même si D est un diviseur de Cartier sur X. on pose

$$D.C = \mathcal{O}_X(D).C = \deg_C \mathcal{O}_C(D) \qquad \text{où} \qquad \mathcal{O}_C(D) = \mathcal{O}_X(D) \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_C.$$

0.4. Soit R un anneau local noethérien régulier de dimension 2, x l'unique point fermé de Spec R, k le corps résiduel en x, k algébriquement clos. $\pi : X \to \operatorname{Spec} R$ l'éclatement de centre x, $E = \pi^{-1}(x) = \mathbf{P}^1(k)$.

Soit C un diviseur de Cartier effectif sur R, défini par l'idéal P, la transformée totale $\pi^*(C)$ par π est par définition le diviseur de Cartier correspondant à l'idéal $P.\mathcal{O}_X$ et l'on a

1) $\pi^*C.E = 0$

et si C_1 et C_2 sont deux diviseurs de Cartier effectifs distincts sur Spec R alors

2) $\sum_{x' \to x} (\pi^*C_1 . \pi^*C_2)_{x'} = (C_1 . C_2)_x$

où x étant un point fermé d'un schéma régulier V, on a par définition $(C_1 . C_2)_x = \dim_k R/(f_1, f_2)$, f_1 (resp. f_2) étant une équation de C_1 (resp. C_2) au voisinage de x et $R = \mathcal{O}_{V,x}$.

0.5. *Vanishing theorem* ([7], p. 46).

Soit $f : X \to Y$ un morphisme birationnel propre d'une surface non singulière X sur une surface normale Y. Soit L un diviseur de Cartier sur X, on notera $L \gtrsim 0$ (resp. $L \gg 0$) si $L.E \leqslant 0$ (resp. $L.E < 0$) pour toute courbe E exceptionnelle réduite et irréductible de f.

Soit K le diviseur canonique sur X, si $K - L \gtrsim 0$ alors $R^1 f_* (\mathcal{O}_X(L)) = 0$.

1. Transformée totale d'un diviseur de Weil sur une surface normale par une résolution de singularités.

Soit R un anneau excellent, intègre normal de dimension 2. $\pi : X \to \operatorname{Spec} R$ une désingularisation, i.e., π est propre, birationnelle et X est régulier; $E_1, E_2, \ldots, E_r$ l'ensemble des courbes exceptionnelles réduites et irréductibles de π.

THÉORÈME (Du Val, Mumford). — *La matrice d'intersection* $(E_i . E_j)$ *est définie négative.*

1.1. Si C est une courbe réduite irréductible sur Spec R, x son unique point fermé, la transformée stricte $\tilde{C}$ est par définition l'adhérence schématique de $\pi^{-1}(C-\{x\})$ dans X.

DÉFINITION ([6]). — *La transformée totale* π^*C *est le diviseur de Cartier à coefficients rationnels* $\tilde{C} + \sum_{i=1}^{r} r_i E_i$, $(r_1, \ldots, r_r)$ *étant l'unique solution du système de Cramer*

$$(\tilde{C} + \sum_{i=1}^{r} r_i E_i).E_j = 0, \qquad \forall j = 1, \ldots, r.$$

Si C_1 et C_2 sont deux courbes intègres distinctes dans Spec R, Mumford définit la multiplicité d'intersection (en x)

$$\begin{aligned}(C_1.C_2)_x &= \sum_{x' \to x} (\pi^*C_1 . \tilde{C}_2)_{x'} \\ &= \sum_{x' \to x} (\tilde{C}_1 . \pi^*C_2)_{x'}\end{aligned}$$

et il montre ([6]) que cette définition ne dépend pas de la résolution de singularités.

En général, si P désigne l'idéal de hauteur 1 définissant C, $P.\mathcal{O}_X$ n'est pas un $\mathcal{O}_X$-module inversible. La courbe qu'il définit sur X peut avoir des points immergés dans $\pi^{-1}(C)$. Si v_i désigne la valuation sur K, le corps de fractions de R, déterminée par E_i, il se peut que $r_i \neq v_i(P)$, $nr_i \neq v_i(P^{(n)})$, $v_i(P^{(n)}) \neq nv_i(P)$.

Cependant,

1.2. PROPOSITION. — *Soit* P *l'idéal premier définissant* C *une courbe intègre. Soit* $P^{(n)}$ $n \in \mathbf{N}$ *les puissances symboliques de* P, $\pi^*C = \tilde{C} + \sum_{i=1}^{r} r_i E_i$ *la transformée totale de* C *par* π, *alors la suite* $\dfrac{v_i(P^{(n)})}{n}$ *converge vers* r_i, $i = 1, \ldots, r$.

Démonstration.

1.2.1. LEMME. — *La suite* $\dfrac{v_i(P^{(n)})}{n}$ *converge.*

En effet, $\mathrm{P}^{(n)}.\mathrm{P}^{(m)} \subset \mathrm{P}^{(n+m)}$ et donc

$$\nu_i(\mathrm{P}^{(n+m)}) \leqslant \nu_i(\mathrm{P}^{(n)}) + \nu_i(\mathrm{P}^{(m)})$$

et on sait que cette propriété implique le lemme.

1.2.2. Lemme. — $\mathrm{P}^{(n)}$ *est le germe en* x *de* $\pi_*\mathcal{O}_\mathrm{X}(-n\tilde{\mathrm{C}})$ *pour* $n \geqslant 0$.

En effet, $\tilde{\mathrm{C}}$ étant un diviseur de Cartier effectif sur X, $\mathcal{O}_\mathrm{X}(-n\tilde{\mathrm{C}})$ est un faisceau d'idéaux sur $\mathcal{O}_\mathrm{X}$, π_* étant exact à gauche, $\pi_*(\mathcal{O}_\mathrm{X}(-n\tilde{\mathrm{C}}))$ est un sous-$\pi_*\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module, mais R étant normal $(\pi_*\mathcal{O}_\mathrm{X})_x = \mathrm{R}$. Par ailleurs, on sait que $(\pi_*\mathcal{O}_\mathrm{X}(-n\tilde{\mathrm{C}}))_x = \{f \in \mathrm{R} \mid \operatorname{div}(f \circ \pi) \geqslant n\tilde{\mathrm{C}}\}$. $(\pi_*\mathcal{O}_\mathrm{X}(-n\tilde{\mathrm{C}}))_x$ est un idéal primaire contenant $\mathrm{P}^{(n)}$ et coïncide avec $\mathrm{P}^{(n)}$ sur $\operatorname{Spec}\mathrm{R} - \{x\}$, car π est birationnel. Ces deux idéaux sont donc égaux par définition de $\mathrm{P}^{(n)}$.

1.2.3. Définition. — *Soit* $s_1, \ldots, s_r \in \mathbf{N}^r$ *on pose*

$$\mathrm{F}_{s_1,\ldots,s_r} = \pi_*\left(\mathcal{O}\left(-\sum_{i=1}^{r} s_i\mathrm{E}_i\right)\right)_x = \{f \in \mathrm{R} \mid \nu_i(f) \geqslant s_i,\ i = 1, \ldots, r\}$$

et

$$\mathrm{P}^{(n)}_{s_1,\ldots,s_r} = \mathrm{P}^{(n)} \cap \mathrm{F}_{s_1,\ldots,s_r} = \pi_*\left(\mathcal{O}_\mathrm{X}\left(-n\tilde{\mathrm{C}} - \sum_{i=1}^{r} s_i\mathrm{E}_i\right)\right)_x.$$

1.2.3.1. *Remarque.* — Posons $t_i(n) = \nu_i(\mathrm{P}^{(n)})$; on a alors

i) Si $s_i \leqslant t_i(n)$, $i = 1, \ldots, r$, $\mathrm{P}^{(n)}_{s_1,\ldots,s_r} = \mathrm{P}^{(n)}$.

ii) L'inclusion de

$$\mathrm{P}^{(n)}_{t_1(n),\ldots,t_j(n)+1,\ldots,t_r(n)} \quad \text{dans} \quad \mathrm{P}^{(n)}_{t_1(n),\ldots,t_j(n),\ldots,t_r(n)}$$

est stricte pour tout $j = 1, \ldots, r$.

iii) Si l'inclusion de

$$\mathrm{P}^{(n)}_{s_1,\ldots,s_j+1,\ldots,s_r} \quad \text{dans} \quad \mathrm{P}^{(n)}_{s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_r}$$

est stricte on a $s_j \geqslant t_j(n)$.

1.2.4. Considérons pour tout $j = 1, \ldots, r$ la suite exacte courte de $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Modules

$$0 \to \mathcal{O}_\mathrm{X}(-\mathrm{E}_j) \to \mathcal{O}_\mathrm{X} \to \mathcal{O}_{\mathrm{E}_j} \to 0$$

et celle obtenue par tensorisation avec $\mathcal{O}_X\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^{r} s_i E_i\right)$

$$0 \to \mathcal{O}_X\left(-n\tilde{C} - \sum_{i \neq j} s_i E_i - (s_j+1)E_j\right) \to \mathcal{O}_X\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^{r} s_i E_i\right)$$
$$\to \mathcal{O}_{E_j}\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^{r} s_i E_i\right) \to 0.$$

On en déduit une suite exacte longue de R-modules.

$$(*) \qquad \begin{aligned} 0 \to \mathrm{P}^{(n)}_{s_1,\ldots,s_j+1,\ldots,s_r} \to \mathrm{P}^{(n)}_{s_1,\ldots,s_r} & \\ \to \mathrm{H}^0\left(E_j, \mathcal{O}_{E_j}\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^{r} s_i E_i\right)\right) & \\ \to \mathrm{R}^1\pi_*\mathcal{O}_X\left(-n\tilde{C} - \sum_{i \neq j} s_i E_i - (s_j+1)E_j\right)_x & \\ \to \mathrm{R}^1\pi_*\mathcal{O}_X\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^{r} s_i E_i\right)_x & \\ \to \mathrm{H}^1\left(E_j, \mathcal{O}_{E_j}\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^{r} s_i E_i\right)\right) \to 0 & \end{aligned}$$

π étant une désingularisation d'une surface, si $\mathscr{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathrm{R}^i\pi_*(\mathscr{L}) = 0$, $i \geqslant 2$ et $\mathrm{R}^1\pi_*(\mathscr{L})$ est concentré à l'origine.

1.2.5. LEMME. — *Pour tout* $n > 0$, $t_i(n) \geqslant nr_i$.

Preuve. — D'après 1.2.3.1 ii) l'inclusion de

$$\mathrm{P}^{(n)}_{t_1(n),\ldots,t_j(n)+1,\ldots,t_r(n)} \qquad \text{dans} \qquad \mathrm{P}^{(n)}_{t_1(n),\ldots,t_j(n),\ldots,t_r(n)}$$

est stricte. La suite exacte longue (*) avec $s_i = t_i(n)$, $i = 1, \ldots, r$ montre que

$$\mathrm{H}^0\left(E_j, \mathcal{O}_{E_j}\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^{r} t_i(n) E_i\right)\right) \neq 0,$$

et par conséquent

$$\deg_{E_j}\left(\mathcal{O}_{E_j}\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^{r} t_i(n) E_i\right)\right) = -n\tilde{C}.E_j - \sum_{i=1}^{r} t_i(n) E_i . E_j \geqslant 0,$$
$$\forall j = 1, \ldots, r.$$

Mais $\tilde{C}.E_j = -\sum_{i=1}^{r} r_i E_i . E_j$, donc

$$\sum_{i=1}^{r} (t_i(n) - nr_i) E_i . E_j \leqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Posons $Y(n) = \left(\sum_{i=1}^{r} (t_i(n) - nr_i) E_i\right) d$, où $d = |\det(E_i . E_j)|$, $Y(n)$ est un diviseur à coefficients entiers tel que $Y(n).E_j \leqslant 0$, $j = 1, \ldots, r$, et cela implique ([1], prop. 2) que $Y(n)$ est effectif complétant la démonstration du lemme. En effet, si $Y(n) = A - B$ où A et B sont effectifs sans composantes communes, on aura $Y(n).B \leqslant 0$, donc $A.B \leqslant B.B$, or $A.B \geqslant 0$, par conséquent $B.B \geqslant 0$, mais la matrice d'intersection est définie négative, donc $B = 0$.

1.2.6. LEMME. — *Pour tout* $n > 0$, $n \in \det(E_i, E_j)\mathbf{Z}$ *on a* $t_i(n) \leqslant nr_i + b_i$ *où* $Z = \sum_{i=1}^{r} b_i E_i$ *est un diviseur effectif qui ne dépend pas de* n.

Démonstration. — Soit K le diviseur canonique sur X, remarquons qu'il existe une infinité de diviseurs exceptionnels effectifs $Z = \sum_{i=1}^{r} b_i E_i$ tels que :

(1) $K + Z + E_j \gtrsim 0, \forall j = 1, \ldots, r$

(2) $Z + \frac{1}{2}(K + E_j) \gg 0, \ \forall j = 1, \ldots, r.$

Posons $L = -n\tilde{C} - \sum_{i=1}^{r} nr_i E_i - Z$, L est donc un diviseur de Cartier sur X à coefficients entiers. Nous avons la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{O}_X(L - E_j) \to \mathcal{O}_X(L) \to \mathcal{O}_{E_j}(L) \to 0$$

qui donne la suite exacte longue

$$0 \to \pi_* \mathcal{O}_X(L - E_j) \to \pi_* \mathcal{O}_X(L) \to \pi_* \mathcal{O}_{E_j}(L) \to R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(L - E_j)$$

mais (1) entraîne que $K - (L - E_j) \gtrsim 0$ donc d'après le « vanishing » $R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(L - E_j) = 0$.

Par ailleurs $(\pi_*\mathcal{O}_{E_j}(L))_x = H^o(E_j,\mathcal{O}_{E_j}(L))$ et

$$\begin{aligned}\dim H^o(E_j,\mathcal{O}_{E_j}(L)) &\geqslant L.E_j + \chi(\mathcal{O}_{E_j})\\ &= L.E_j - E_j(E_j+K)/2\\ &= -\left(Z + \frac{1}{2}(E_j+K)\right).E_j > 0 \quad \text{d'après (2).}\end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $j = 1, \ldots, r$, l'inclusion de $(\pi_*\mathcal{O}_X(L-E_j))_x$ dans $(\pi_*\mathcal{O}_X(L))_x$ est stricte et la remarque 1.2.3.1, iii) implique $nr_j + b_j \geqslant t_j(n)$.

Nota. — Le lemme est vrai pour tout $n > 0$. Sa démonstration utilise un « vanishing theorem » plus fin que celui de **0.5** démontré par Giraud [2].

2. Preuve du résultat énoncé dans l'introduction.

THÉORÈME. — *Soit* R *un anneau local noéthérien, excellent, intègre normal de dimension de Krull* 2, *dont le corps résiduel* k *est algébriquement clos.* C_1, C_2 *deux sous-schémas fermés réduits et irréductibles distincts de* Spec R ; P_1, P_2 *les idéaux premiers tels que* $\mathrm{Spec}(R/P_i) = C_i$, $i = 1, 2$, *alors*

$$(C_1.C_2)_x = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_i(P_j^{(n)} \circ h_i)}{n}, \qquad i, j = 1,\ 2, \qquad i \neq j$$

où ν_i *est la valuation du normalisé* $\mathcal{O}_{\bar{C}_i,\bar{x}_i}$ de $\mathcal{O}_{C_i}$.

Démonstration. — En effet, les hypothèses nous assurent l'existence d'une résolution de singularités $\pi : X \to \mathrm{Spec}\,R$ telle que les transformées strictes $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ de C_1 et C_2 ne se rencontrent pas et que $\tilde{C}_2$ (resp. $\tilde{C}_1$) rencontre une seule composante lisse E_j resp. $E_{j'}$) du diviseur exceptionnel avec $\tilde{C}_2.E_j = 1$ (resp. $\tilde{C}_1.E_{j'} = 1$).

Par conséquent, d'après la définition

$$(C_1.C_2)_x = \sum_{y\to x} (\pi^*C_1.\tilde{C}_2)_y = r_j$$

où $\pi^*C_1 = \tilde{C}_1 + \sum_{i=1}^{r} r_iE_i$ et l'on sait que $r_j = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\nu_{E_j}(P_1^{(n)} \circ \pi)}{n}$.

Soit $\{y\} = \tilde{C}_2 \cap E_j$ et u (resp. v) une équation locale de E_j (resp. $\tilde{C}_2$) alors (u,v) engendrent l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,y}$.

Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi"] \\ (\bar{C}_2, \bar{x}_2) \arrow[ur, "H"] \arrow[r, "h"'] & \operatorname{Spec} R \end{tikzcd}$$

où h est la composée de la normalisation de C_2 et l'injection canonique de C_2 dans $\operatorname{Spec} R$. H existe et est unique d'après le critère valuatif de propreté.

Soit $k = \nu_{E_j}(P_1^{(n)} \circ \pi)$ cela veut dire que dans $\mathcal{O}_{X,y}$,

$$P_1^{(n)} \circ \pi = (u^k \varphi_1(u,v), \ldots, u^k \varphi_s(u,v))$$

où l'un des $\varphi_i(u,v) \notin (u)$.

Par ailleurs, on sait que $\tilde{C}_1$ ne passe pas par y, donc il existe des $\lambda_i(u,v) \in \mathcal{O}_{X,y}$ tels que

$$1 = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(u,v) \varphi_i(u,v),$$

cela entraîne qu'on aura la même relation dans $\mathcal{O}_{X,y}/(v)$

$$1 = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(u,0) \varphi_i(u,0).$$

Mais dans $\mathcal{O}_{\bar{C}_2, \bar{x}_2} \simeq \mathcal{O}_{X,y}/(v)$ nous aurons

$$P_1^{(n)} \circ h(u,0) = (u^k \varphi_1(u,0), \ldots, u^k \varphi_s(u,0)),$$

ce qui implique que $k = \nu_2(P_1^{(n)} \circ h_2)$, et finit la preuve du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin, On isolated rational singularities of surfaces, *Amer. J. of Maths.*, 88, (1966), 129-136.

[2] J. Giraud, Improvement of Grauert-Riemenschneider's theorem for a normal surface, à paraître.

[3] A. Grothendieck, E.G.A. III, *Pub. Math. IHES*, n° 11 (1961).

[4] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, 1977, Springer-Verlag.

[5] J. Lipman, Rational singularities... *Pub. Math. IHES*, n° 36 (1969).

[6] D. MUMFORD, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, *Pub. Math. IHES*, n° 9 (1961).

[7] C. P. RAMANUJAM, Remarks on the Kodaira Vanishing Theorem, *Journal of the Indian Math. Soc.*, 36 (1972), 41-51.

[8] REEVE, A note on fractional intersection multiplicities, *Rend. Circolo Mat. Palermo*, 1 (1958).

[9] P. SAMUEL, Multiplicités de certaines composantes singulières, III. *J. Math.*, 3 (1959).

[10] ZARISKI-SAMUEL, *Algèbre commutative.* (Vol. I, II), Van Nostrand, Princeton (1958, 1960).

Manuscrit reçu le 19 juin 1981.

Marcelo MORALÈS,
Laboratoire de Mathématiques Pures
associé au CNRS
Institut Fourier
Université de Grenoble I
B.P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex.