

CHRISTINE REDER

**Familles de convexes invariantes et équations  
de diffusion-réaction**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 32, n° 1 (1982), p. 71-103

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1982\\_\\_32\\_1\\_71\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_1_71_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# **FAMILLES DE CONVEXES INVARIANTES ET ÉQUATIONS DE DIFFUSION-RÉACTION**

par Christine REDER

## **PLAN**

### **0. INTRODUCTION**

### **I. LOCALISATION DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION DE DIFFUSION-REACTION**

### **II. EXEMPLES D'APPLICATION DU THEOREME 1**

### **III. EXISTENCE ET PROPRIETES DES FAMILLES DE CONVEXES INVARIANTES ET BORNEES**

1. Construction de la famille minimale.
2. Résultats intermédiaires sur les familles invariantes de polyèdres.
3. Dérivabilité à droite de la famille minimale.
4. Remarques sur la réciproque du théorème 2.

### **CONCLUSION**

### **APPENDICE**

### **BIBLIOGRAPHIE**

## 0. INTRODUCTION

On s'intéresse à la localisation des solutions d'une équation de diffusion réaction du type :

$$(EDR) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = A \Delta U + X(U) \\ U : \Omega \times [0, +T[ \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial U}{\partial \nu|_{\partial\Omega}} = 0 \end{array} \right.$$

où

- $\Omega$  est un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^p$  ( $p \geq 1$ ),
- $A$  est une matrice  $n \times n$  diagonalisable à valeurs propres strictement positives,
- $X$  est un champ de vecteurs localement lipschitzien de  $\mathbb{R}^n$ ,

et si  $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ ,  $\Delta U$  représente le vecteur  $\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{bmatrix}$  et

$$\frac{\partial U}{\partial \nu|_{\partial\Omega}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \nu|_{\partial\Omega}} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial \nu|_{\partial\Omega}} \end{bmatrix}.$$

Notons (EDO) l'équation différentielle ordinaire :

$$(EDO) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dZ}{dt} = X(Z) \\ Z : [0, +T[ \longrightarrow \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

Rappelons que d'après l'article [2] de Conway, Hoff, Smoller, si les valeurs propres de  $A$  sont suffisamment grandes, une solution  $U$  de l'(EDR) tend asymptotiquement vers une solution homogène en  $x$ .

Sans cette hypothèse on sait d'après l'article [1] de Chuech, Conley, Smoller que pour qu'une région  $F$  de  $\mathbf{R}^n$  soit invariante, pour l'(EDR), il faut et il suffit qu'elle le soit pour l'(EDO), qu'elle soit convexe et que l'ensemble des vecteurs propres à gauche de  $A$  soit une partie génératrice de ce convexe.

Dans le premier chapitre, on montre que si  $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une famille de convexes vérifiant des propriétés analogues aux précédentes par rapport à  $A$  et invariante par le flot associé à  $X$  (dans un sens que l'on précisera), si  $U$  est une solution de l'(EDR) prenant ses valeurs à l'instant zéro dans  $K_0$ ,  $U$  prend ses valeurs dans  $K_t$  à l'instant  $t$ .

Ce résultat permet, outre de localiser les solutions d'une (EDR), d'étudier leur existence globale en temps.

Dans le deuxième chapitre, on donne les résultats que l'on peut obtenir grâce à ce théorème dans un exemple très simple.

Dans le troisième chapitre, on prouve l'existence de familles  $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$  vérifiant les hypothèses du théorème du premier chapitre et on étudie les propriétés de continuité et dérivabilité des fonctions d'appui associées à ces familles.

En conclusion, on utilise ce dernier chapitre pour comparer le premier théorème aux résultats obtenus par Conway, Smoller [3] et Lakshmikantham [5].

(Note : Quelques démonstrations techniques sont regroupées en appendice. D'autres sont omises mais peuvent être consultées dans [6]).

## CHAPITRE PREMIER

LOCALISATION DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION  
DE DIFFUSION-REACTION

*Rappels.* — Soit  $K$  un convexe compact de  $\mathbf{R}^n$  et  $V$  un vecteur de  $\mathbf{R}^n$  non nul. La fonction d'appui de  $K$  dans la direction  $V$  est définie par :

$$\psi(V; K) = \max_{z \in K} z \cdot V.$$

Une partie  $S$  de  $\mathbf{R}^n$  est dite génératrice de  $K$  si on a :

$$K = \{z \in \mathbf{R}^n, \forall V \in S, z \cdot V \leq \psi(V; K)\}.$$

DEFINITION 1. — Soit  $(F_t)_{0 \leq t < T}$  ( $0 < T \leq +\infty$ ), une famille de parties de  $\mathbf{R}^n$ . On dira qu'elle est invariante par rapport à  $X$  si :

1) Pour tous  $t$  et  $h$  tels que  $0 \leq t \leq t+h < T$ ,  $X_h(F_t) \subset F_{t+h}$  où  $X_h$  représente le flot associé à  $X$ .

— On dira qu'elle est bornée si :

2)  $\forall 0 \leq t < T$ ,  $\bigcup_{0 \leq \tau \leq t} F_\tau$  est bornée.

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat de ce paragraphe.

THEOREME 1. — On suppose le champ  $X$  localement lipschitzien. Soit  $(K_t)_{0 \leq t < T}$  une famille invariante et bornée de convexes compacts d'intérieur non vide de  $\mathbf{R}^n$  telle que, quel que soit  $t$  dans  $[0, T[$ , l'ensemble  $S$  des vecteurs propres à gauche de  $A$  soit une partie génératrice de  $K_t$ .

Soit  $U_0$  une donnée initiale de classe  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  ( $\alpha > 0$ ) à dérivée normale nulle au bord de  $\Omega$  et prenant ses valeurs dans  $K_0$ . Alors, la solution  $U$  de l'(EDR) associée à cette donnée initiale est définie sur  $[0, T[$  au moins et quel que soit  $t$  dans  $[0, T[$ ,  $U$  prend ses valeurs à l'instant  $t$  dans  $K_t$ .

*Remarques.* — Si on prend pour famille  $(K_t)_{0 \leq t < T}$  une famille constante (i.e.,  $\forall t \in [0, T[, K_t = K$ ), on retrouve le résultat de [1] (p. 378).

La condition “S génératrice de  $K_t$ ” est vérifiée dans le cas où  $A$  est une matrice scalaire,  $K_t$  étant convexe. Si  $A$  est diagonale à valeurs propres toutes distinctes, elle est équivalente à dire que  $K_t$  est un “rectangle” à faces orthogonales aux axes.

Le théorème se déduit de la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.** — *Sous les hypothèses du théorème, on suppose de plus le champ  $X$  lipschitzien et qu'il existe  $\epsilon$  strictement positif tel que :*

$$(1_\epsilon) \forall t, \forall h, 0 \leq t \leq t+h < T, X_h(K_t) + hB(0, \epsilon) \subset K_{t+h}.$$

Alors, si  $U$  prend ses valeurs à l'instant zéro dans l'intérieur de  $K_0$ , quel que soit  $t$  dans  $[0, T[$   $U$  prend ses valeurs à l'instant  $t$  dans l'intérieur de  $K_t$ .

*Démonstration de la proposition.* — On raisonne par l'absurde ; posons :  $t_0 = \inf \{t \geq 0 ; \exists x \in \bar{\Omega} ; U(x, t) \notin \text{Int } K_t\}$ , et supposons  $t_0$  strictement inférieur à  $T$ . On va voir qu'on aboutit à une contradiction, en appliquant un principe faible du maximum.

Remarquons que les hypothèses  $X$  lipschitzien et  $U_0$  dans  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  à dérivée normale nulle au bord entraînent l'existence globale de la solution  $U$  et sa régularité  $C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T])$ . (Une démonstration de ce résultat est donnée en appendice p. 98).

Vérifions maintenant qu'il suffit de prouver que  $t_0$  est strictement positif et qu'il existe  $x_0$  dans  $\bar{\Omega}$ ,  $V_0$  dans  $S \cap S^{n-1}$  ( $S^{n-1}$  étant la sphère unité de  $\mathbf{R}^n$ ) tels que :

$$\begin{cases} U(x_0, t_0) \cdot V_0 = \psi(V_0 ; K_{t_0}) \\ \forall x \in \Omega, U(x, t_0) \cdot V_0 \leq \psi(V_0 ; K_{t_0}). \end{cases}$$

En effet, la fonction scalaire définie sur  $\bar{\Omega}$  par :

$$x \longrightarrow U(x, t_0) \cdot V_0$$

atteint son maximum en  $x_0$ , est dans  $C^2(\bar{\Omega})$  et sa dérivée normale est nulle au bord de  $\Omega$ , donc :

$$\Delta U(x_0, t_0) \cdot V_0 = \Delta(U(\cdot, t_0) \cdot V_0)|_{x_0} \leq 0.$$

D'autre part, on tire de la relation  $(1_\epsilon)$  l'inégalité :

$$[X_h(U(x_0, t_0 - h)) + h \epsilon V_0] \cdot V_0 \leq \psi(V_0; K_{t_0}); 0 \leq t_0 - h < t_0$$

d'où par passage à la limite :

$$\left[ X(U(x_0, t_0)) - \frac{\partial U}{\partial t}(x_0, t_0) \right] \cdot V_0 \leq -\epsilon.$$

$V_0$  étant un vecteur propre à gauche de  $A$  associé à une valeur propre  $\alpha$  positive, et  $U$  étant solution de l'(EDR) sur  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ , on a les égalités :

$$\begin{aligned} \left[ X(U(x_0, t_0)) - \frac{\partial U}{\partial t}(x_0, t_0) \right] \cdot V_0 &= -[A \Delta U(x_0, t_0)] \cdot V_0 \\ &= -\Delta U(x_0, t_0) \cdot {}^t A V_0 \\ &= -\alpha \Delta U(x_0, t_0) \cdot V_0. \end{aligned}$$

Il y a contradiction car le terme de gauche est strictement négatif et on a vu précédemment que celui de droite est positif ou nul.

Prouvons maintenant le résultat intermédiaire énoncé au début de cette démonstration.

Remarquons que pour  $t$  dans  $[0, T[$  on a l'implication :

$$U(\bar{\Omega}, t) \subset \text{Int } K_t \implies \exists \tau > 0; \forall t' \in [t, t + \tau[; U(\bar{\Omega}, t') \subset \text{Int}(K_{t'}).$$

En effet, si

$$U(\bar{\Omega}, t) \subset \text{Int } K_t,$$

il existe  $\eta > 0$  tel que

$$U(\bar{\Omega}, t) + B(0, \eta) \subset K_t.$$

$U(\bar{\Omega}, t)$  étant compact et le flot associé à  $X$  étant continu, pour  $\tau$  assez petit, on aura :

$$X_{-\tau}[U(\bar{\Omega}, t) + B(0, \eta/2)] \subset U(\bar{\Omega}, t) + B(0, \eta)$$

d'où

$$U(\bar{\Omega}, t) + B(0, \eta/2) \subset X_\tau(K_t) \subset K_{t+\tau}.$$

Comme  $U$  est continu par rapport à  $x$  et  $t$ , on a également pour  $\tau$  assez petit :

$$U(\bar{\Omega}, t + \tau) + B(0, \eta/4) \subset U(\bar{\Omega}, t) + B(0, \eta/2)$$

d'où

$$U(\bar{\Omega}, t + \tau) \subset \text{Int } K_{t+\tau}.$$

$t_0$  est donc strictement positif et  $U(\bar{\Omega}, t_0)$  n'est pas inclus dans l'intérieur de  $K_{t_0}$ .

Mais d'autre part, pour  $h$  positif tel que  $t_0 - h \geq 0$ , on a l'inclusion :

$$U(\bar{\Omega}, t_0 - h) \subset K_{t_0-h}$$

d'où

$$X_h[U(\bar{\Omega}, t_0 - h)] \subset X_h(K_{t_0-h}) \subset K_{t_0}$$

et donc par passage à la limite,  $U$  et le flot associé à  $X$  étant continus,

$$U(\bar{\Omega}, t_0) \subset K_{t_0}$$

$U(\bar{\Omega}, t_0)$  n'étant pas inclus dans l'intérieur de  $K_{t_0}$ , il existe  $x_0$  dans  $\bar{\Omega}$  et  $V_0$  dans  $S$  vérifiant les propriétés voulues.

*Preuve du théorème 1.* — On suppose encore dans une première étape le champ  $X$  lipschitzien. Notons  $\lambda$  sa constante de Lipschitz.

On va construire une famille  $(K_t^\epsilon)_{0 \leq t < T}$ ,  $\epsilon > 0$ , vérifiant les hypothèses  $(1_\epsilon)$  de la proposition 1 et approchant la famille  $(K_t)_{0 \leq t < T}$ , en utilisant le lemme suivant, (prouvé dans [6]).

LEMME 1. — Définissons le convexe  $K_t(S, \alpha)$  par :

$$K_t(S, \alpha) = \{z \in \mathbb{R}^n ; \forall V \in S, z \cdot V \leq \psi(V; K_t) + \alpha |V|\}.$$

Il existe une constante  $\mu$  ne dépendant que de  $S$  telle que, quelque soit  $z$  dans  $K_t(S, \alpha)$ , et  $V$  dans  $S$  il existe  $z_0$  dans  $K_t$  tel que :

$$\text{i) } |(z - z_0) \cdot V| \leq \alpha |V|$$

$$\text{ii) } |z - z_0| \leq \mu \alpha.$$

Définissons maintenant la famille  $(K_t^\epsilon)_{0 \leq t < T}$  par :

$$K_t^\epsilon = K_t(S, \epsilon e^{(1+\lambda+\lambda\mu)t}).$$

Pour prouver la propriété  $(1_\epsilon)$ , il faut montrer que quels que soient  $t$  dans  $[0, T[$ ,  $z$  dans  $K_t^\epsilon$  et  $V$  dans  $S$ , quel que soit  $h$  positif tel que  $t + h$  soit dans  $[0, T[$  on a :



$$X_h(z) \cdot V + h\epsilon \leq \psi(V; K_{t+h}) + \epsilon e^{(1+\lambda+\lambda\mu)(t+h)}.$$

Soit  $z_0$  un élément de  $K_t$  vérifiant les conditions du lemme précédent. On a d'après l'hypothèse d'invariance de la famille  $(K_t)$  :

$$X_h(z_0) \cdot V \leq \psi(V; K_{t+h})$$

et d'autre part, il est facile de voir qu'on a la majoration :

$$\begin{aligned} [X_h(z) - X_h(z_0)] \cdot V &\leq (z - z_0) \cdot V + \int_0^h h |X_\tau(z) - X_\tau(z_0)| d\tau \\ &\leq (z - z_0) \cdot V + (e^{\lambda h} - 1) |z - z_0| \end{aligned}$$

d'où finalement, grâce aux propriétés de  $z_0$  par rapport à  $z$  et  $V$  :

$$X_h(z) \cdot V \leq \psi(V; K_{t+h}) + \epsilon e^{(1+\lambda+\lambda\mu)t} [1 + \mu(e^{\lambda h} - 1)].$$

Il suffit donc de vérifier que l'on a :

$$h\epsilon + \epsilon e^{(1+\lambda+\lambda\mu)t} [1 + \mu(e^{\lambda h} - 1)] \leq \epsilon e^{(1+\lambda\mu+\lambda)(t+h)}$$

ce qui est trivial. La famille  $(K_t^\epsilon)$  vérifie donc la relation  $(1_\epsilon)$ . Comme quels que soient  $t$  dans  $[0, T[$  et  $\epsilon$  positif,  $K_t$  est inclus dans l'intérieur de  $K_t^\epsilon$  et que, d'après le lemme, la distance de  $K_t^\epsilon$  à  $K_t$  est majorée par  $\mu \epsilon e^{(1+\lambda+\lambda\mu)t}$ , donc tend vers zéro quand  $\epsilon$  tend vers zéro, on obtient le résultat du théorème par "passage à la limite".

Prouvons maintenant le théorème sans l'hypothèse  $X$  globalement lipschitzien.  $X$  étant localement lipschitzien, on a l'existence locale de la solution  $U$ . Soit donc  $[0, T_1[$  l'intervalle maximal sur lequel elle est définie. Fixons  $t$  dans  $[0, T[ \cap [0, T_1[$ . Il existe par hypothèse une boule  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $\bigcup_{0 \leq \tau \leq t} K_\tau$ .  $X$  étant localement lipschitzien, il existe un champ  $Y$  globalement lipschitzien sur  $\mathbb{R}^n$ , coïncidant avec  $X$  sur  $B$ . D'après ce qui précède, la famille  $(K_\tau)_{0 \leq \tau \leq t}$  est invariante par l'(EDR) associée à  $Y$  et donc pour celle associée à  $X$ . La famille  $(K_t)_{0 \leq t < \min(T, T_1)}$  est donc invariante. Mais ceci prouve également que  $T_1$  est supérieur ou égal à  $T$  car, si  $U$  est défini sur  $[0, t[$ , avec  $0 \leq t < T$  la famille  $(K_\tau)_{0 \leq \tau < T}$  étant borné, la solution  $U$  est prolongeable sur  $[0, t]$  et donc sur un intervalle ouvert convenant  $[0, t]$ . Ceci achève donc la démonstration du théorème 1.

## CHAPITRE II

## EXEMPLES D'APPLICATION DU THEOREME 1

## 1.

Considérons le cas où  $n = 2$ ,  $A = \alpha \text{Id}$  avec  $\alpha > 0$  et  $X$  est le champ de vecteurs défini en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \rho(1 - \rho) \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}$$

Pour l'(EDO), le cercle unité est un cycle limite asymptotiquement stable.

Supposons qu'à l'instant zéro, une solution  $U$  de l'(EDR) prenne ses valeurs dans une couronne  $C$  du type :

$$C = \{(\rho, \theta), \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2\} \quad \text{où} \quad \rho_1 < 1 \leq \rho_2.$$

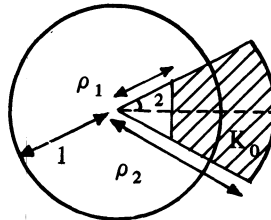
En appliquant les résultats de [1], on peut seulement conclure que  $U$  restera dans la boule du rayon  $\rho_2$ , mais  $C$  n'étant pas convexe, elle n'est pas invariante.

Supposons de plus qu'à l'instant zéro,  $U$  est suffisamment homogène ; plus précisément qu'il existe un convexe  $K_0$  contenant  $U(\bar{\Omega}, 0)$  du type :

$$K_0 = \left\{ (\rho, \theta), |\theta| \leq \varphi; \rho_1 \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \leq \rho \leq \rho_2 \right\}$$

où

$$\begin{cases} 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \rho_1 \leq 1 \leq \rho_2. \end{cases}$$



Il est facile de vérifier que la famille  $(K_t)_{t \geq 0}$  définie par :

$$K_t = \left\{ (\rho, \theta), |\theta - t| \leq \varphi; \frac{\rho_1 \cos \varphi}{\cos(\theta - t) [\rho_1 + e^{-t}(\rho_1 - 1)]} \leq \rho \leq \frac{\rho_2}{\rho_2 - e^t(\rho_2 - 1)} \right\}$$

est invariante.

Quel que soit  $t \geq 0$ ,  $K_t$  est contenu dans la couronne  $\{\rho_1 \cos \varphi \leq \rho \leq \rho_2\}$  donc  $U$  restera dans cette couronne.

De plus, on a pour tout  $t$  positif ou nul :

$$K_{t+2\pi} \subset K_t$$

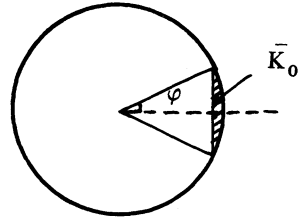
donc, bien que la solution ne soit pas périodique, elle est oscillante (dans le sens où l'image par la rotation d'angle  $-t$  de  $U(\bar{\Omega}; t)$  est contenue dans un petit voisinage fixe d'un point du cercle unité).

Remarquons de plus que le convexe  $K_{t+2n\pi}$  tend, quand  $n$  tend vers l'infini, vers le convexe  $\bar{K}_t$  défini par :

$$\bar{K}_t = \left\{ (\rho, \theta); |\theta - t| \leq \varphi; \frac{\cos \varphi}{\cos(\theta - t)} \leq \rho \leq 1 \right\}$$

donc asymptotiquement,

— la distance de la solution  $U$  de  $P'(EDR)$  au cercle unité est majorée par  $(1 - \cos \varphi)$ .



— la distance entre deux points  $U(x, t)$  et  $U(y, t)$ , ( $x \in \Omega$ ,  $y \in \Omega$ ) est majorée par  $2 \sin \varphi$ .

*Remarque.* — Rappelons que lorsque le coefficient de diffusion  $\alpha$  est suffisamment grand, on sait d'après [2] que la solution  $U$  tend vers une solution homogène en  $x$  située sur le cercle unité. Le résultat qu'on a obtenu ici est plus faible mais est indépendant du coefficient  $\alpha$ ; on voit que la solution ne perd pas son homogénéité et ne s'éloigne pas du cercle unité.

## 2. Un résultat négatif.

Etudions ce même exemple, mais dans le cas où la matrice de diffusion est diagonale à valeurs propres positives distinctes. On ne

peut alors localiser la solution de l'(EDR) qu'avec des rectangles à côtés parallèles aux axes. On va voir qu'on ne peut pas obtenir de résultats d'oscillations analogues à ceux du paragraphe 1.

Plus précisément, on peut montrer (cf. [6]) que si  $C_0$  est un rectangle qui est un petit voisinage d'un point du cercle unité, alors, il existe un instant  $T$  tel que, quelle que soit la famille  $(R_t)_{t>0}$  de rectangles invariante et telle que  $R_0$  contienne  $C_0$ , pour tout  $t$  supérieur à  $T$ ,  $R_t$  contient la boule unité.

*Remarque.* — Le théorème du chapitre I ne permet pas de distinguer du cas général le cas où les valeurs propres de la matrice  $A$  sont infiniment proches; il est donc préférable dans ce cas pour localiser une solution, sur un intervalle de temps borné de combiner un résultat de dépendance continue par rapport aux coefficients de diffusion avec celui du théorème 1, appliqué au cas où les valeurs propres de  $A$  sont égales.

### 3.

Revenons à l'exemple 1) c'est-à-dire au cas où les deux coefficients de diffusion sont égaux. On peut se demander si le caractère oscillant de la solution n'est pas dû à l'extrême régularité du champ  $X$ .

— Par un calcul un peu fastidieux, on peut montrer le résultat suivant.

Supposons le champ  $X$  défini en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = F(\rho, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} = G(\theta) \end{cases}$$

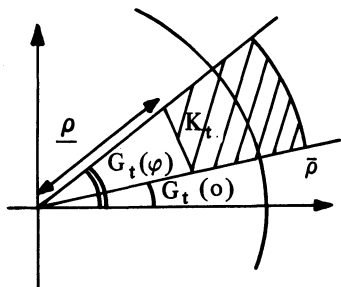
avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ et } G \text{ lipschitziennes et périodiques de période } 2\pi \text{ par rapport à } \theta. \\ G \text{ strictement positive.} \\ F \text{ telle qu'il existe } \rho_0 \in ]0, 1[, \beta > 0 \text{ tels que} \\ \quad \left| \begin{array}{ll} \forall \theta, \forall \rho \geq 1, & F(\rho, \theta) \leq 0 \\ \forall \theta, \forall \rho \in ]\rho_0, 1] & F(\rho, \theta) \geq \beta(1 - \rho). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Soit  $(K_t)_{t \geq 0}$  la famille de convexes telle que  $K_t$  soit l'enveloppe convexe de l'ensemble :

$$\{\rho = \bar{\rho} ; G_t(0) \leq \theta \leq G_t(\varphi)\} \cup \{\underline{\rho} \leq \rho \leq \bar{\rho} ; \theta = G_t(0) \text{ ou } G_t(\varphi)\}.$$

Alors quelque soit  $\bar{\rho}$  supérieur ou égal à 1, et  $\underline{\rho}$  dans  $]\rho_0, 1[$ , il existe  $\varphi_0$  tel que, quelque soit  $\varphi$  inférieur ou égal à  $\varphi_0$ , la famille  $K_t$  est invariante.



Ceci prouve qu'à condition que la condition initiale de l'(EDR) soit suffisamment proche du cercle unité et suffisamment homogène, la solution associée reste dans une couronne et oscille.

— Par contre, dans le cas où la vitesse de rotation  $G$  dépend de  $\rho$ , je ne pense pas qu'on puisse obtenir dans le cas général de tels résultats d'oscillation et, de même que dans le cas des valeurs propres de  $A$  distinctes la trajectoire périodique de l'(EDO) située sur le cercle unité peut vraisemblablement en tant que solution de l'(EDR) perdre sa stabilité.

## CHAPITRE III

EXISTENCE ET PROPRIETES DES FAMILLES DE  
CONVEXES INVARIANTES ET BORNEES

Le théorème 1 nous amène à nous poser la question suivante : si  $S$  est l'ensemble des vecteurs propres à gauche de  $A$  et si  $C$  est un convexe compact d'intérieur non vide de  $\mathbf{R}^n$  engendré par  $S$ , existe-t-il une famille  $(K_t)_{0 \leq t < T}$  vérifiant les hypothèses du théorème 1 et telle que  $K_0$  contienne  $C$ . On va voir que si le champ  $X$  est localement lipschitzien, la réponse est oui et que de plus, la famille minimale pour l'inclusion vérifiant les propriétés précédentes a des fonctions d'appui continues, dérivables à droite et solution du système :

$$\begin{cases} \frac{d^+ \psi}{dt^+} (V; K_t) = \max_{\substack{z \in K_t \\ z \cdot V = \psi(V; K_t)}} X(z) \cdot V \\ \psi(V; K_0) = \psi(V; C). \end{cases}$$

On verra ensuite que ce système suffit à caractériser la famille invariante minimale si  $S$  est une union finie de sous-espaces de dimension 1, mais n'est pas suffisant dans le cas général.

On donne également un exemple de champ localement lipschitzien complet et d'un convexe  $C$  tels que la famille invariante minimale associée n'est pas bornée sur  $[0, +\infty[$ . (Rappelons qu'un champ  $X$  localement lipschitzien est dit complet si toutes les solutions de l'(EDO) associée sont définies sur  $\mathbf{R}$  tout entier).

## 1. Construction de la famille minimale.

Dans ce paragraphe, on va construire la famille minimale invariante de convexes vérifiant les hypothèses du théorème 1 et coïncidant à l'instant zéro avec un convexe donné.

On se donne  $A$  une matrice positive et on note  $S$  l'ensemble de ses vecteurs propres à gauche. On se donne également un convexe

compact d'intérieur non vide  $C$  dont  $S$  est une partie génératrice et  $X$  un champ localement lipschitzien défini sur  $\mathbf{R}^n$ .

THEOREME 2. — Il existe  $T > 0$  et une famille  $(K_t)_{0 \leq t < T}$  invariante, bornée, telle que  $S$  engendre chaque  $K_t$ , telle que  $K_0$  soit égal à  $C$ , et minimale pour l'inclusion. De plus, l'application :

$$t \longrightarrow K_t$$

est localement lipschitzienne sur  $[0, T[$  si on munit l'ensemble des compacts de  $\mathbf{R}^n$  de la distance de Hausdorff.

Si  $X$  est globalement lipschitzien, on a  $T = +\infty$ .

Démonstration. — Dans une première étape, on suppose le champ  $X$  lipschitzien. On note  $\lambda$  sa constante de Lipschitz.

Notations. — On notera  $\mathcal{K}_s$  l'ensemble des convexes compacts de  $\mathbf{R}^n$  dont  $S$  est une partie génératrice.

Si  $F$  est un compact de  $\mathbf{R}^n$ , on notera  $\text{conv}_s(F)$  le plus petit élément de  $\mathcal{K}_s$  contenant  $F$ .

Pour tout  $t \geq 0$ , définissons l'application  $\sigma_t$  par :

$$\sigma_t : \begin{cases} \mathcal{K}_s \longrightarrow \mathcal{K}_s \\ K \longrightarrow \sigma_t(K) = \text{conv}_s(K) . \end{cases}$$

LEMME 2. —  $K$  étant fixé dans  $\mathcal{K}_s$ , l'application :

$$t \longrightarrow \sigma_t(K)$$

est continue à droite en zéro. On a de plus les majorations :

$$\begin{cases} d(K, \sigma_t(K)) \leq \mu t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)| \\ \max_{z \in \sigma_t(K)} |X(z)| \leq \max_{z \in K} |X(z)| (1 + \lambda \mu t e^{\lambda t}) \end{cases}$$

(où  $\mu$  est la constante dépendant de  $S$  défini dans le lemme 1, p. 77).

La démonstration de ce lemme est donnée en appendice p. 100.

Soit  $t$  un réel positif et  $\pi_t$  une subdivision de  $[0, t]$ .

$$\pi_t : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = t .$$

Posons pour  $K$  dans  $\mathcal{K}_s$  :

$$s(t, \pi_t, K) = \sigma_{t_{n+1}-t_n} \circ \sigma_{t_n-t_{n-1}} \circ \dots \circ \sigma_{t_1-t_0}(K).$$

Soit  $\mathcal{S}_t$  l'ensemble des subdivisions de  $[0, t]$ . Posons

$$S(t, K) = \overline{\bigcup_{\pi_t \in \mathcal{S}_t} s(t, \pi_t, K)}.$$

LEMME 3. — *Quelque soit  $K$  dans  $\mathcal{K}_s$  et  $t$  positif ou nul,  $S(t, K)$  est un élément de  $\mathcal{K}_s$ . De plus, on a la majoration suivante :*

$$d(K, S(t, K)) \leq \mu t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|.$$

La preuve de ce lemme est en appendice p. 100.

Il est clair que quels que soient  $t$  et  $\tau$  positifs ou nuls, on a

$$S(t + \tau, K) = S(t, S(\tau, K)).$$

Ceci prouve que l'application

$$t \longrightarrow S(t, K)$$

est localement lipschitzienne.

Soit en effet  $T > 0$  fixé et  $t, t'$  tels que  $0 \leq t \leq t' \leq T$ .

On a :

$$\begin{aligned} d(S(t, K), S(t', K)) &= d(S(t' - t, S(t, K)), S(t, K)) \\ &\leq (t' - t) \mu e^{\lambda(t' - t)} \max_{z \in S(t, K)} |X(z)| \\ &\leq (t' - t) \mu e^{\lambda T} \max_{z \in K} |X(z)| (1 + \lambda \mu T e^{\lambda T}). \end{aligned}$$

Posons maintenant :

$$K_t = S(t, C).$$

Il est clair que la famille  $(K_t)_{t \geq 0}$  est la famille minimale invariante de convexes engendrés par  $S$  telle que  $K_0 = C$ .

Le théorème est donc démontré dans le cas où  $X$  est globalement lipschitzien. Si  $X$  est localement lipschitzien, il existe une boule  $B(0, R)$  de  $\mathbb{R}^n$  qui contient  $C$  car  $C$  est compact par hypothèse. Modifions le champ  $X$  à l'extérieur de la boule  $B(0, nR)$  ( $n \geq 2$ ) de façon à le rendre lipschitzien et soit  $\lambda$  la constante de Lipschitz de ce nouveau champ. D'après ce qui précède, la famille  $S(t, C)$  est contenue dans  $B(0, nR)$  pour  $t$  assez petit donc vérifie le théorème.



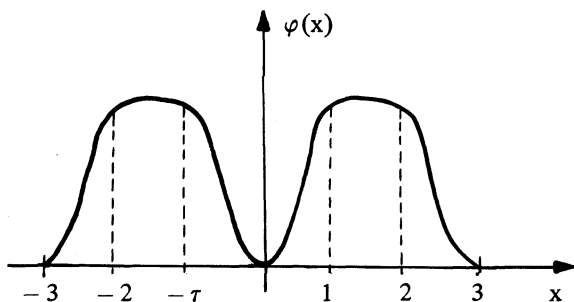
*Remarque.* — En prenant  $n$  arbitrairement grand, on prouve par ce procédé que l'intervalle maximal de définition de  $S(t, C)$  est un ouvert  $[0, T[$  et que si  $T$  est fini, on a  $\bigcup_{0 \leq t < T} K_t$  non bornée.

*Il est faux que si le champ  $X$  est complet,  $T$  est égal à  $+\infty$ . Contre exemple :*

Soit le champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  défini par :

$$X(x, y) = \begin{bmatrix} xy \\ y^2 \varphi(x) \end{bmatrix}$$

où  $\varphi$  est une application  $C^\infty$  à valeurs dans  $[0, 1]$ , à support dans  $[-3; +3]$  nulle en zéro et égal à 1 sur les intervalles  $[-2; -1]$  et  $[1, 2]$ .



$X$  est complet. En effet, il l'est à l'extérieur de la zone  $|x| \leq 3$  et toute solution de l'équation différentielle ordinaire est constante ou sort de la zone  $|x| \leq 3$  car on vérifie aisément que les régions du type :

$$\{x \geq 0; -a \leq y \leq \lambda x\} \quad a \geq 0 \quad \lambda \geq 0$$

et

$$\{x \leq 0; -a \leq y \leq -\lambda x\} \quad a \geq 0 \quad \lambda \geq 0$$

sont invariantes.

Soit  $C_0$  un convexe contenant le rectangle  $\{|x| \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$  et soit  $(K_t)_{0 \leq t < T}$  la famille minimale invariante et bornée telle que  $K_0$  coïncide avec  $C_0$ . On va voir que  $T$  est nécessairement inférieur à 1. Supposons le contraire.

Regardons l'image par  $X_t$  du point  $(1; y_0)$  ( $y_0 \geq 1$ ).

Tant que  $|x|$  est inférieur à 2, on a :

$$\begin{cases} x' = xy \\ y' = y^2 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{1 - ty_0} \\ y(t) = \frac{y_0}{1 - ty_0} \end{cases}.$$

A l'instant  $t = \frac{1}{2y_0}$ , on a donc :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = 2y_0. \end{cases}$$

$K_0$  contenant le rectangle ( $|x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ),  $K_{1/2}$  étant convexe et contenant  $X_{1/2}(K_0)$ ,  $K_{1/2}$  contient le rectangle ( $|x| \leq 1; 0 \leq y \leq 2$ ). En réitérant le procédé, on prouve que :

$K_{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$  contient le rectangle ( $|x| \leq 1; 0 \leq y \leq 2^n$ ).

Donc  $K_1$  n'est pas borné. Ce qui prouve que nécessairement,  $T$  est inférieur ou égal à 1.

## 2. Résultats intermédiaires sur les familles de polyèdres invariantes.

*Notations.* — Soit  $P_0$  un polyèdre convexe compact d'intérieur non vide de  $\mathbf{R}^n$ , fixé. Notons  $S$  la partie de  $S^{n-1}$  minimale qui engendre  $P_0$  :

$$S = \{V_1, \dots, V_p\} \quad V_i \in S^{n-1}.$$

On notera pour simplifier :

$$x_i^0 = \psi(V_i; P) \quad i = 1, \dots, p.$$

Quel que soit  $y$  dans  $\mathbf{R}^p$ , on notera  $P(y)$  l'ensemble défini par :

$$P(y) = \{z \in \mathbf{R}^n; \forall i = 1, \dots, p, z \cdot V_i \leq y_i\}.$$

On notera  $H_i(y)$  et  $F_i(y)$  l'hyperplan et la face d'appui de  $P(y)$  relative à  $V_i$  :

$$\begin{cases} H_i(y) = \{z \in \mathbf{R}^n, z \cdot V_i = y_i\} \\ F_i(y) = P(y) \cap H_i(y). \end{cases}$$

PROPOSITION 2. — a) Soit  $y$  un élément de  $\mathbf{R}^p$ . Supposons  $P(y)$  d'intérieur non vide. Alors,  $S$  est la partie génératrice minimale de  $P(y)$  si et seulement si quel que soit  $i = 1, \dots, p$ , la face  $F_i(y)$  est d'intérieur non vide dans  $H_i(y)$ .

b) L'ensemble  $O$  des  $y$  de  $\mathbf{R}^p$  tels que  $P(y)$  soit d'intérieur non vide et tels que  $S$  soit la partie génératrice de  $P(y)$  est un ouvert contenant  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_p^0)$ .

c) Dans le cas où  $P$  est un parallélogramme (i.e. si  $p = 2n$ ,  $V_1, \dots, V_n$  est une base de  $\mathbf{R}^n$ ,  $V_{n+i} = -V_i$ ),  $O$  est l'ouvert défini

$$O = \{y \in \mathbf{R}^p ; y_i + y_{n+i} > 0 ; i = 1, \dots, n\}.$$

d) Il existe une constante  $\mu$  telle que, quels que soient  $y$  et  $\bar{y}$  dans  $O$ , quel que soit  $i$ , la distance de  $F_i(y)$  à  $F_i(\bar{y})$  est majorée par  $\mu |y - \bar{y}|$ .

La démonstration de cette proposition est donnée dans [6]. Soit  $X$  un champ de vecteurs lipschitzien sur  $\mathbf{R}^n$ .

Définissons sur  $O$  le champ de vecteur  $\tilde{X}$  par ses composantes :

$$\tilde{X}_i(y_1, \dots, y_p) = \max_{\substack{z \in P(y) \\ z \cdot V_i = y_i}} X(z) \cdot V_i \quad i = 1, \dots, p.$$

PROPOSITION 3. — Il existe un instant  $t_0 > 0$  et une unique application

$$t \longrightarrow x(t)$$

définie sur  $[0, t_0[$  à valeurs dans  $O$  telle que :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = \tilde{X}(x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

De plus, la famille  $(P(x(t)))_{0 \leq t < t_0}$  est invariante et bornée.

Démonstration. — Pour prouver la première partie de la proposition, on va montrer que  $\tilde{X}$  est globalement lipschitzien sur l'ouvert  $O$ .

Soient  $y$  et  $\bar{y}$  deux points de  $O$ . On a :

$$\tilde{X}_i(y) - \tilde{X}_i(\bar{y}) = \max_{z \in F_i(y)} X(z) \cdot V_i - \max_{\bar{z} \in F_i(\bar{y})} X(\bar{z}) \cdot V_i.$$

Soit  $z_0$  dans  $F_i(y)$  tel que  $X(z_0) \cdot V_i = \max_{z \in F_i(y)} X(z) \cdot V_i$ .

Quel que soit  $\bar{z}$  dans  $F_i(\bar{y})$ , on a :

$$\tilde{X}_i(y) - \tilde{X}_i(\bar{z}) \leq [X(z_0) - X(\bar{z})] \cdot V_i \leq \lambda |z_0 - \bar{z}|$$

et donc

$$\tilde{X}_i(y) - \tilde{X}_i(\bar{y}) \leq \lambda d(F_i(y); F_i(\bar{y})).$$

En appliquant la proposition 2d), on obtient :

$$\tilde{X}_i(y) - \tilde{X}_i(\bar{y}) \leq \lambda \mu |y - \bar{y}|$$

et finalement, en interchangeant  $y$  et  $\bar{y}$

$$|\tilde{X}_i(y) - \tilde{X}_i(\bar{y})| \leq \lambda \mu |y - \bar{y}|.$$

Le champ  $\tilde{X}$  est donc globalement lipschitzien sur  $0$ , d'où l'existence de  $t_0$  et  $x(t)$  vérifiant la conclusion de la proposition.

Montrons maintenant que la famille  $(P(x(t)))_{0 \leq t < t_0}$  est invariante. Pour cela, on va encore approcher la famille  $P(x(t))$  :

Soit  $\tau_0$  fixé tel que,  $0 \leq \tau_0 < t_0$ .

Il existe  $\alpha > 0$  tel que, quel que soit  $t$  dans  $[0, \tau_0]$  la boule de centre  $x(t)$  et de rayon  $\alpha$  soit incluse dans  $0$ .

Il existe donc une solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{dx_\epsilon}{dt}(t) = \tilde{X}(x_\epsilon(t)) + \epsilon \\ x_\epsilon(0) = x_0 \end{cases}$$

qui est définie sur un intervalle maximal  $[0, t_\epsilon[$ , et en choisissant  $\epsilon$  assez petit, on a  $t_\epsilon$  strictement supérieur à  $\tau_0$ .

En effet, si  $t$  appartient à  $[0, t_\epsilon[ \cap [0, \tau_0]$ , on a :

$$\frac{1}{2} |x - x_\epsilon|^2(t) \leq \int_0^t |x - x_\epsilon|^2(\tau) d\tau + \epsilon \int_0^t \sum_{i=1}^p |x_i - x_{\epsilon i}|$$

d'où pour  $\epsilon$  assez petit :

$$|x - x_\epsilon|^2 \leq \mu \epsilon^2 \tau_0 e^{(2\lambda+1)\tau_0} < \alpha^2.$$

Montrons que la famille  $[P(x_\epsilon(t))]_{0 \leq t < \tau_0}$  est invariante. Soit  $z$  dans  $P(x_\epsilon(t))$  ( $0 \leq t < \tau_0$ ).

Posons

$$h_0 = \inf \{h > 0; X_h(z) \notin P(x_\epsilon(t+h))\},$$

et supposons  $t + h_0$  inférieur à  $\tau_0$ .

Il est clair que  $X_{h_0}(z)$  appartient à  $P(x_\epsilon(t+h_0))$  et qu'il existe  $i = 1 \dots p$  tel que :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(X_{h_0}(z) \cdot V_i) \geq \frac{dx_{\epsilon_i}}{dt}(t+h_0) = \tilde{X}_i(x_\epsilon(t+h_0)) + \epsilon \\ X_{h_0}(z) \cdot V_i = x_{\epsilon_i}(t+h_0) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} X_{h_0}(z) \text{ appartient à } F_i(x_\epsilon(t+h_0)) \text{ et} \\ X(X_{h_0}(z)) \cdot V_i \geq \tilde{X}_i(x_\epsilon(t+h_0)) + \epsilon. \end{cases}$$

Ceci est impossible par définition de  $\tilde{X}_i$ .

La famille  $(P(x_\epsilon(t)))_{0 \leq t < \tau_0}$  est donc invariante. Par passage à la limite sur  $\epsilon$ , ceci prouve que la famille  $(P(x(t)))_{0 \leq t < \tau_0}$  l'est également. Ceci étant vrai pour tout  $\tau_0$  dans  $[0, t_0[$ , la proposition est démontrée.

*Remarques.* — Il est clair que la proposition est encore valable si le champ  $X$  est supposé localement lipschitzien.

— Dans le cas où  $X$  est globalement lipschitzien, on a vu que  $\tilde{X}$  est globalement lipschitzien sur  $0$ , donc la solution  $x(t)$  est globalement bornée sur  $[0, t_0[$  et possède une limite en  $t_0$  qu'on notera  $x(t_0)$ . Par continuité la famille  $[P(x(t))]_{0 \leq t < \tau_0}$  est invariante, en particulier  $P(x(t_0))$  contient  $X_{t_0}(P_0)$  et est donc d'intérieur non vide et borné. Dans le cas où  $P_0$  est un parallélogramme, l'ensemble  $0$  n'étant autre que l'ensemble de  $y$  de  $\mathbb{R}^p$  tels que  $P(y)$  soit d'intérieur non vide,  $x(t_0)$  appartient donc à  $0$ . Ceci prouve que l'intervalle maximal de définition de  $x(t)$  est dans ce cas  $[0, +\infty[$  tout entier.

### 3. Dérivabilité à droite de la famille minimale.

On est maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant :

**THEOREME 3.** — *La famille minimale  $(K_t)_{0 \leq t < T}$  construite dans le premier paragraphe a des fonctions d'appui localement lips-*

*chitziennes, dérivables à droite en tout point et leurs dérivées à droite sont solution du système :*

$$\left| \frac{d^+ \psi}{dt^+} (V; K_t) = \max_{\substack{z \in K_t \\ z \cdot V = \psi(V; K_t)}} X(z) \cdot V \quad V \in S. \right.$$

*Démonstration.* — Remarquons que l'hypothèse d'invariance de la famille  $(K_t)_{t \geq 0}$  entraîne, pour tout  $V$  dans  $S$ , l'inégalité :

$$\lim_{h > 0} \frac{\psi(V; K_{t+h}) - \psi(V; K_t)}{h} \geq \max_{\substack{z \in K_t \\ z \cdot V = \psi(V; K_t)}} X(z) \cdot V.$$

En effet, soit  $z$  un point de  $K_t$  tel que  $z \cdot V = \psi(V; K_t)$ .

$X_h(z)$  appartenant à  $K_{t+h}$ , on a :

$$X_h(z) \cdot V \leq \psi(V; K_{t+h})$$

d'où

$$\frac{X_h(z) \cdot V - z \cdot V}{h} \leq \frac{\psi(V; K_{t+h}) - \psi(V; K_t)}{h}.$$

On en déduit l'inégalité souhaitée par passage à la limite.

Montrons l'inégalité

$$\overline{\lim}_{h > 0} \frac{\psi(V; K_{t+h}) - \psi(V; K_t)}{h} \leq \max_{\substack{z \in K_t \\ z \cdot V = \psi(V; K_t)}} X(z) \cdot V.$$

Pour cela, on va utiliser le lemme suivant (démontré dans [6]).

LEMME 4. — *Quels que soient  $t \geq 0$ ,  $\epsilon > 0$  et  $V$  dans  $S$ , il existe un polygône compact  $P^\epsilon$  tel que  $S$  soit une partie génératrice de  $P^\epsilon$  et que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} K_t \subset P^\epsilon \\ \psi(V; P^\epsilon) = \psi(V; K_t) \\ \{z \in P^\epsilon; z \cdot V = \psi(V; K_t)\} \subset \{z \in K_t; z \cdot V = \psi(V; K_t)\} + B(0, \epsilon) \\ \{z \in P^\epsilon; z \cdot V = \psi(V; K_t)\} \text{ d'intérieur relativement non vide.} \end{array} \right.$$

Soit  $\{V_1 \dots V_p\}$  la partie génératrice minimale de  $P^\epsilon (V_i \in S^{n-1})$ . La dernière propriété de  $(P^\epsilon)$  décrite dans le lemme entraîne que  $V$  appartient à  $\{V_1 \dots V_p\}$ . Posons  $V = V_1$ .

Soit  $(P^\epsilon(x(h)))_{0 \leq h < h_0}$  la famille construite comme à la proposition 3 :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(h) = \tilde{X}(x(h)) \\ x(0) = [\psi(V_1; P^\epsilon); \dots, \psi(V_p; P^\epsilon)] . \end{cases}$$

Cette famille est invariante sur  $[0, h_0[$  ; la famille  $(K_{t+h})_{h \geq 0}$  étant par hypothèse la plus petite famille invariante telle que  $S$  engendre chaque  $K_{t+h}$  et qui contienne  $K_t$  pour  $h = 0$ , on a, quel que soit  $h$  dans  $[0, h_0[$  :

$$K_{t+h} \subset P^\epsilon(x(h))$$

donc en particulier :

$$\psi(V; K_{t+h}) \leq \psi(V; P^\epsilon(x(h))) = x_1(h) .$$

Comme  $\psi(V; K_t)$  est égal à  $x_1(0)$ , on a aussi :

$$\frac{\psi(V; K_{t+h}) - \psi(V; K_t)}{h} \leq \frac{x_1(h) - x_1(0)}{h}$$

d'où par passage à la limite :

$$\overline{\lim}_{h > 0} \frac{\psi(V; K_{t+h}) - \psi(V; K_t)}{h} \leq \tilde{X}_1(x(0)) .$$

Mais par définition, on a :

$$\tilde{X}_1(x(0)) = \max_{\substack{z \in P^\epsilon \\ z \cdot V = \psi(V; P^\epsilon)}} X(z) \cdot V$$

et donc, en notant  $\lambda$  la constante de Lipschitz de  $X$  sur  $K_t + B(0, 1)$ ,

$$\tilde{X}_1(x(0)) \leq \max_{\substack{z \in K_t \\ z \cdot V = \psi(V; K_t)}} X(z) \cdot V + \lambda \epsilon .$$

Ceci étant vrai quel que soit  $\epsilon > 0$ , on a finalement :

$$\overline{\lim}_{h > 0} \frac{\psi(V; K_{t+h}) - \psi(V; K_t)}{h} \leq \max_{\substack{z \in K \\ z \cdot V = \psi(V; K_t)}} X(z) \cdot V$$

d'où, en regroupant ce résultat avec la première remarque de la démonstration,

$$\lim_{h>0} \frac{\psi(V; K_{t+h}) - \psi(V; K_t)}{h} = \max_{\substack{z \in K_t \\ z \cdot V = \psi(V; K_t)}} X(z) \cdot V$$

le théorème est donc prouvé.

#### 4. Remarques sur la réciproque du théorème 3.

Il est intéressant de savoir si l'on peut caractériser les familles de convexes invariantes par des inégalités sur leurs fonctions d'appui du type de celle obtenue dans le théorème. On va voir que c'est le cas lorsqu'on prend pour convexes des parallélogrammes, mais pas dans le cas général. Il faudrait donc introduire une notion de dérivée d'applications à valeurs convexes plus fine que celle associée aux fonctions d'appui pour exprimer l'invariance des familles convexes. Cependant, l'intérêt pratique serait limité vu que sur des exemples, il est déjà souvent plus facile de trouver une famille de convexes invariante que de calculer les fonctions d'appui associées.

*Cas des parallélogrammes.*

Soit  $C_0$  un parallélogramme et  $S$  sa partie génératrice minimale. Soit  $(P_t)_{0 \leq t < T}$  une famille bornée de parallélogrammes engendrés par  $S$ , telle que  $P_0$  contienne  $C_0$ . On a le résultat suivant :

PROPOSITION 4. — i) La famille  $(P_t)_{0 \leq t < T}$  est invariante si et seulement si, quel que soit  $V$  dans  $S$  on a :

$$\lim_{\substack{h>0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{\psi(V; P_{t+h}) - \psi(V; P_t)}{h} \geq \max_{\substack{z \in P_t \\ z \cdot V = \psi(V; P_t)}} X(z) \cdot V.$$

ii) La famille minimale invariante  $(\bar{P}_t)_{0 \leq t < \bar{T}}$  telle que  $\bar{P}_0 = C_0$  est l'unique famille de parallélogrammes dont les fonctions d'appui vérifient :

$$\begin{cases} \frac{d^+ \psi}{dt^+}(V; \bar{P}_t) = \max_{\substack{z \in \bar{P}_t \\ z \cdot V = \psi(V; \bar{P}_t)}} X(z) \cdot V \\ \psi(V; \bar{P}_0) = \psi(V; C_0). \end{cases}$$

De plus les fonctions d'appui sont dérivables sur  $[0, \bar{T}]$ .



*Preuve.* — On a prouvé la partie directe du (i) dans la démonstration du théorème. Pour montrer la réciproque, on fixe  $t_0$  dans  $[0, T[$  et on pose pour tout  $t$  dans  $[0, t_0]$  :

$$P_t^\epsilon = P_t(S, \epsilon e^{(1+\lambda\mu)t})$$

où  $\lambda$  est la constante de Lipschitz de  $X$  sur  $\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} P_t + B(0, 1)$ .

On montre aisément que si  $\epsilon$  est assez petit,  $P_t^\epsilon$  est inclus dans  $P_t + B(0, 1)$  et qu'alors, quel que soit  $V$  dans  $S$  et  $t$  dans  $[0, t_0]$ , on a l'inégalité

$$\lim_{\substack{h > 0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{\psi(V; P_{t+h}^\epsilon) - \psi(V; P_t^\epsilon)}{h} \geq \epsilon + \max_{\substack{z \in P_t^\epsilon \\ z \cdot V = \psi(V; P_t^\epsilon)}} X(z) \cdot V.$$

Par un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la proposition 3 (p. 88), on prouve que la famille  $(P_t^\epsilon)_{0 \leq t < t_0}$  est invariante et qu'il en est donc de même de la famille  $(P_t)_{0 \leq t < T}$ .

La partie (ii) de la proposition est une conséquence immédiate du théorème 2 pour le sens direct, du (i) et de la proposition 3 pour la réciproque.

*Cas où  $S$  contient un sous-espace de dimension supérieure à 1.*

Soit  $(K_t)_{0 \leq t < T}$  une famille bornée de convexes engendrés par  $S$ . Il est encore vrai que si la famille est invariante, ses fonctions d'appui vérifient :

$$\lim_{h > 0} \frac{\psi(V; K_{t+h}) - \psi(V; K_t)}{h} \geq \max_{\substack{z \in K_t \\ z \cdot V = \psi(V; K_t)}} X(z) \cdot V \quad V \in S; t \in [0, T[.$$

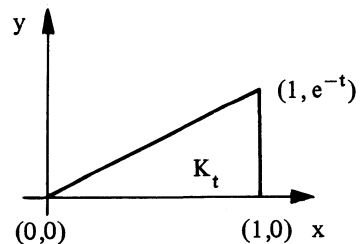
*Par contre, la réciproque est fausse.*

CONTRE-EXEMPLE. —

Soit dans  $\mathbf{R}^2$  le champ  $X$  défini par :

$$X(x; y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -xy \end{bmatrix}.$$

Soit  $(K_t)_{t \geq 0}$  la famille de convexes telle que  $K_t$  soit le triangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, e^{-t})$ .



Quelle que soit la direction  $V$ , la fonction d'appui  $\psi(V; K_t)$  est dérivable à droite, dérivable sauf éventuellement en un point et vérifie :

$$\frac{d^+ \psi}{dt^+}(V; K_t) = \max_{\substack{z \in K_t \\ z \cdot V = \psi(V; K_t)}} X(z) \cdot V$$

et cependant, la famille  $(K_t)$  n'est pas invariante.

Calculons  $\psi(V; K_t)$ .

Posons  $V = (v_1, v_2)$ . Trois cas sont à envisager

- Si  $v_2 \geq 0$  et  $V \cdot (1, e^{-t}) \geq 0$

$$\psi(V; K_t) = (1, e^{-t}) \cdot V = v_1 + e^{-t} v_2$$

- Si  $v_2 \leq 0$  et  $v_1 \geq 0$

$$\psi(V; K_t) = (1, 0) \cdot V = v_1$$

- Si  $v_1 \leq 0$  et  $V \cdot (1, e^{-t}) \leq 0$

$$\psi(V; K_t) = (0, 0) \cdot V = 0.$$

On en déduit la valeur de  $\frac{d^+ \psi}{dt}(V; K_t)$  :

- Si  $v_2 > 0$  et  $V \cdot (1, e^{-t}) > 0$

$$\frac{d^+ \psi}{dt}(V; K_t) = -e^{-t} v_2$$

- $\frac{d^+ \psi}{dt}(V; K_t) = 0$  sinon.

De plus,  $\psi(V; K_t)$  est dérivable sauf si  $V \cdot (1, e^{-t}) = 0$ .

On vérifie immédiatement qu'on a :

$$\frac{d^+ \psi}{dt^+}(V; K_t) = \max_{\substack{z \in K_t \\ z \cdot V = \psi(V; K_t)}} X(z) \cdot V, \quad V \in S, \quad t \in [0, +\infty[.$$

Mais on a :

$$X_t(K_0) = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x e^{-tx}\}$$

et il est clair que  $K_t$  ne contient pas  $X_t(K_0)$ .

*Remarque.* — On peut se demander si la non-invariance de cette famille  $(K_t)$  n'est pas due au fait que la frontière des convexes  $K_t$  n'est pas de classe  $C^1$ . Ce n'est pas le cas : donnons sans démonstration un autre contre-exemple : Soit  $X$  le champ de vecteurs défini sur  $\mathbf{R}^2$  par :

$$X(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x^2 y \end{bmatrix}.$$

Soit  $K_0$  un convexe à frontière  $C^\infty$  pouvant être défini par :

$$K_0 = \{(x, y); -\alpha \leq x \leq 1 + \beta, b(x) \leq y \leq a(x)\}$$

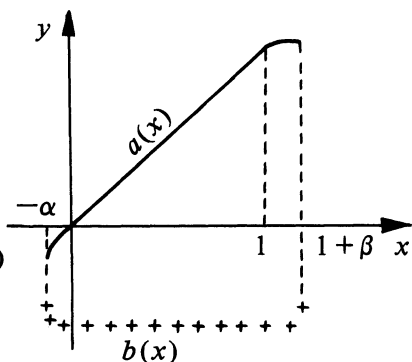
où

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x) = x \text{ si } x \in [0, 1] \\ a \text{ strictement convexe} \\ \text{sur } ]1; 1 + \beta[ \text{ et} \\ \quad ]-\alpha, 0[ \end{array} \right.$$

$b$  concave et strictement négative

$$\max_{x \in [-\alpha; 1 + \beta]} b(x) < \min_{x \in [-\alpha; 1 + \beta]} a(x)$$

$$0 < \alpha < 1; \beta > 0.$$



Soit  $K_t$  le convexe défini par :

$$K_t = \{(x, y); -\alpha \leq x \leq 1 + \beta; b(x) \leq y \leq e^{-t} a(x)\}.$$

On peut vérifier que quel que soit la direction  $V$ , on a :

$$\frac{d^+ \psi}{dt}(V; K_t) \geq \max_{\substack{z \in K_t \\ z \cdot V = \psi(V; K_t)}} X(z) \cdot V$$

et cependant, la famille  $(K_t)_{t \geq 0}$  n'est pas invariante car l'image par  $X_t$  du segment  $\{0 \leq x \leq 1; y = x\}$  n'est toujours pas inclus dans  $K_t$ .

Pour clore ce paragraphe, donnons un exemple qui prouve qu'en général, une famille minimale invariante n'a pas ses fonctions d'appui dérivables en tout point :

Soit dans  $\mathbf{R}^2$  le champ de vecteurs défini en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = 1 \\ \frac{d\rho}{dt} = \rho(1 - \rho). \end{cases}$$

Soit  $K_0$  le convexe défini en coordonnées polaires par :

$$K_0 = \left\{ (\rho, \theta); -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0; 0 \leq \rho \leq 1 \right\}.$$

Il est clair que la famille minimale invariante  $(\bar{K}_t)_{t \geq 0}$  telle que  $\bar{K}_0 = K_0$  est définie par :

$$\bar{K}_t = \left\{ (\rho, \theta), -\frac{\pi}{4} + t \leq \theta \leq t, 0 \leq \rho \leq 1 \right\}.$$

Soit  $V$  le vecteur  $(-1, 0)$ .

- Si  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , on a  $\psi(V; K_t) = 0$
- Si  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ , on a  $\psi(V; K_t) = -\cos t$ .

La dérivée à gauche en  $\frac{\pi}{2}$  est donc nulle tandis que la dérivée à droite est égale à 1.

## CONCLUSION

Les résultats du dernier chapitre nous permettent de comparer le théorème 1 avec les résultats de [3] et [5] qui concernent les familles de rectangles invariantes pour l'équation de diffusion-réaction (EDR). En utilisant la proposition 4 (p. 93), on obtient la même condition suffisante d'invariance que celle obtenue dans [5], la condition suffisante donnée dans [3], étant plus forte.

Il semble cependant intéressant d'exprimer la condition suffisante d'invariance pour l'(EDR) en termes de "familles de convexes invariantes", et surtout dans le cas où il existe des sous-espaces propres de  $A$  de dimension plus grande que 1. En effet on a vu que dans

ce cas, (chapitre III § 4) il n'existe pas d'expression "duale" de l'invariance en termes de fonctions d'appui, mais qu'il est pourtant possible de trouver directement des familles invariantes (voir l'exemple II § 1).

La question de la minimalité des hypothèses du théorème 1 se pose. En effet on a vu que si  $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une famille invariante vérifiant les hypothèses du théorème 1, toute solution de l'(EDR) prenant à l'instant zéro ses valeurs dans  $K_0$  est définie sur l'intervalle du temps  $[0, T[$ , au moins. Mais il est clair que le théorème ne prouve pas que si  $\bigcup_{0 \leq t \leq T} K_t$  n'est pas bornée, il existe une solution de l'EDR prenant ses valeurs dans  $K_0$  à l'instant zéro explosant en un temps fini supérieur ou égal à  $T$ . La meilleure "réciproque" du théorème que l'on pourrait espérer est que, si  $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une famille minimale vérifiant les hypothèses du théorème, quel que soit  $t$  dans  $[0, T[$  et  $z$  un point du bord de  $K_t$ , il existe une donnée initiale  $U_0$  dans  $K_0$  et  $x$  dans  $\bar{\Omega}$  tels que, si  $U$  est la solution de l'(EDR) associée à  $U_0$ , on ait  $U(x, t)$  égal à  $z$ . Cependant, même si ce résultat était vrai, il n'entraînerait pas l'existence d'une solution explosant en temps fini, dans le cas où  $\bigcup_{0 \leq t \leq T} K_t$  est non bornée, mais seulement que les solutions de l'(EDR) prenant leurs valeurs dans  $K_0$  à l'instant zéro n'ont pas de borne commune sur  $[0, T[$ .

## APPENDICE

### 1. Preuve de l'existence et de la régularité de la solution de l'(EDR).

— On se ramène tout d'abord au cas où  $A$  est diagonale :

Soit  $P$  une matrice telle que  $D = P^{-1}AP$  soit diagonale.

Posons  $Y = P^{-1} \circ X \circ P$  et  $P^{-1}U = V$ .

On cherche une solution du problème :

$$(EDR)' \quad \begin{cases} V' = D\Delta V + Y(V) \\ V(x, 0) = V_0(x) \end{cases}$$

où  $Y$  est lipschitzien,  $V_0$  est dans  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  ( $0 < \alpha < 1$ ) tel que  $\frac{\partial V_0}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0$ .

— Utilisons par exemple une méthode de point fixe.

Posons :  $V_0(x, t) = V_0(x)$

et soit  $V_{n+1}$  la solution de

$$\begin{cases} V'_{n+1} - D\Delta V_{n+1} = X(V_n) \\ V_{n+1}(x, 0) = V_0(x); \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \nu} = 0. \end{cases}$$

En utilisant le théorème 5-3 p. 320 de [4], on montre que si  $V_0$  appartient à  $C^{2+\alpha; 1+\alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])$ , il appartient en particulier à  $C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])$ ; il en est de même pour  $X(V_n)$ ,  $X$  étant lipschitzien et donc  $V_{n+1}$  appartient à  $C^{2+\alpha; 1+\alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])$ .

De plus, toujours d'après le même résultat, il existe une constante  $C_1$  telle que pour tout  $T$  inférieur ou égal à 1, et pour tout  $n$  positif,

$$|V_{n+1}|_{C^{2+\alpha; 1+\alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])} \leq C_1 [|X(V_n)|_{C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])} + |V_0|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})}].$$

Or

$$|X(V_n)|_{C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])} \leq |X(0)| + \lambda |V_n|_{C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])}$$

où  $\lambda$  est la constante de Lipschitz de  $Y$ , et

$$|V_n|_{C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])} \leq |V_0|_{C^1(\bar{\Omega})} + T^\beta |V_n|_{C^{2+\alpha; 1+\alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])}$$

$$\text{où } \beta = \min \left( 1 - \frac{\alpha}{2}; \frac{1 + \alpha}{2} \right).$$

Choisissons  $T$  tel que  $C_1 \lambda T^\beta < 1$ .

Les normes  $C^{2+\alpha; 1+\alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])$  des  $V_n$  sont alors bornées, donc une sous-suite des  $V_n$  converge dans  $C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T])$  vers une solution  $V$  de l'(EDR)'.

$T$  ne dépendant pas des données initiales, on peut réitérer cette construction et ainsi prouver l'existence globale en temps et la régularité voulue de la solution. On déduit également de ce résultat l'existence locale et la régularité de la solution de l'(EDR) dans le cas où  $X$  est localement lipschitzien.

## 2. Démonstration du lemme 2 (p. 84).

LEMME 2. — Soit  $K$  fixé dans  $\mathcal{K}_s$ . Alors, l'application :

$$t \longrightarrow \sigma_t(K)$$

est continue à droite en zéro et on a les majorations :

$$\begin{cases} d(K, \sigma_t(K)) \leq \mu t e^{\mu t} \max_{z \in K} |X(z)| \\ \max_{z \in \sigma_t(K)} |X(z)| \leq \max_{z \in K} |X(z)| (1 + \lambda \mu t e^{\lambda t}). \end{cases}$$

*Preuve.* — Soit  $z$  un élément de  $K$ ;  $X_t(z)$  appartenant à  $\sigma_t(K)$ , on a :

$$d(z, \sigma_t(K)) \leq |z - X_t(K)| \leq t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|$$

et donc :

$$\max_{z \in K} d(z, \sigma_t(K)) \leq t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|.$$

Mais on tire également de la première inégalité l'inclusion suivante :

$$X_t(K) \subset K + B(0, t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|).$$

Or il est clair qu'on a l'inclusion suivante (avec les notations du lemme 1) :

$$K + B(0, t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|) \subset K(S; t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|)$$

le convexe de droite étant lui-même inclus, d'après le lemme 1, dans :

$$K + B(0; \mu t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|);$$

on obtient donc finalement :

$$d(K, \sigma_t(K)) \leq \mu t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|.$$

La relation

$$\max_{z \in \sigma_t(K)} |X(z)| \leq \max_{z \in K} |X(z)| (1 + \lambda \mu t e^{\lambda t})$$

s'en déduit immédiatement.

## 3. Démonstration du lemme 3 (p. 85).

LEMME 3. — Quel que soit  $K$  dans  $\mathcal{K}_s$  et  $t$  positif ou nul,  $S(t, K)$  est un élément de  $\mathcal{K}_s$ . De plus, on a la majoration suivante :

$$d(K, S(t, K)) \leq \mu t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|.$$

*Preuve.* — Remarquons tout d'abord que si  $\pi_t$  et  $\bar{\pi}_t$  sont deux subdivisions de  $[0, t]$ , on a l'inclusion :

$$s(t, \pi_t, K) \cup s(t, \bar{\pi}_t, K) \subset s(t, \pi_t \cup \bar{\pi}_t, K).$$

L'ensemble  $S(t, K)$  est donc un convexe, fermé par construction, dont  $S$  est une partie génératrice.

Il ne reste qu'à prouver l'inégalité du lemme (qui entraîne en particulier la compacité de  $S(t, K)$ ) :

Soit  $\pi_t$  un élément de  $\mathfrak{S}_t$  :

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = t.$$

Posons, pour  $j = 1 \dots n + 1$  :

$$d_j = d(\sigma_{t_j - t_{j-1}} \circ \dots \circ \sigma_{t_1 - t_0}(K); \sigma_{t_{j-1} - t_{j-2}} \circ \dots \circ \sigma_{t_1 - t_0}(K)).$$

On a :

$$d(s(t, \pi_t, K); K) \leq \sum_{j=1}^{n+1} d_j.$$

Mais d'après le lemme 2,

$$d_j \leq \mu(t_j - t_{j-1}) e^{\lambda(t_j - t_{j-1})} \alpha_{j-1}$$

où

$$\alpha_{j-1} = \max_{z \in \sigma_{t_{j-1} - t_{j-2}} \circ \dots \circ \sigma_{t_1 - t_0}(K)} |X(z)|.$$

De plus, on sait que :

$$\alpha_j \leq \alpha_{j-1} (1 + \lambda \mu(t_j - t_{j-1}) e^{\lambda(t_j - t_{j-1})}).$$

Soit  $m$  le maximum de  $e^{\lambda(t_j - t_{j-1})}$ ,  $j$  variant de 1 à  $n$ . On a alors

$$\alpha_j \leq \alpha_{j-1} (1 + m \lambda \mu(t_j - t_{j-1}))$$

d'où

$$\alpha_j \leq \alpha_0 e^{\lambda \mu m t}.$$

On en déduit l'inégalité :

$$d(s(t, \pi_t, K); K) \leq m t \mu e^{\lambda \mu m t} \max_{z \in K} |X(z)|.$$

Par construction,  $\sigma_t(K)$  est inclus dans  $s(t, K)$  et donc, d'après le lemme 2,



$$\max_{z \in K} d(z, s(t, K)) \leq d(K, \sigma_t(K)) \leq \mu t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|.$$

D'autre part, la famille  $\{s(t, \pi_t, K); \pi_t \in \mathfrak{S}_t\}$  étant inductive par rapport à  $\mathfrak{S}_t$ , quel que soit  $z$  dans  $s(t, \pi_t, K)$ , on a :

$$d(z, K) \leq \inf_{\substack{\bar{\pi}_t \in \mathfrak{S}_t \\ \pi_t \subset \bar{\pi}_t}} d(s(t; \bar{\pi}_t; K); K)$$

et donc, quel que soit  $m > 1$  :

$$d(z, K) \leq \mu m t e^{\lambda \mu m t} \max_{z \in K} |X(z)|.$$

On en déduit :

$$d(s(t, \pi_t, K); K) \leq \mu t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|.$$

Le terme de droite ne dépendant pas de  $\pi_t$ , on a donc aussi

$$d(s(t, K); K) \leq \mu t e^{\lambda t} \max_{z \in K} |X(z)|.$$

*Remerciements.* — Ce travail est le résultat de nombreuses conversations que j'ai eues avec J.M. Lasry et C. Lobry. Je les remercie vivement de l'aide qu'ils m'ont apportée.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] K.N. CHUEH, C.C. CONLEY, J.A. SMOLLER, Positively invariant regions for systems of non linear diffusion equations, *Indiana Univ. Math. Journal*, Vol. 26, n° 2 (1977).
- [2] E. CONWAY, D. HOFF, J. SMOLLER, Large time behaviour of solutions of systems of non linear reaction-diffusion equations, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 35, n° 1 (Juillet 1978).
- [3] E. CONWAY, J. SMOLLER, A comparison technique for systems of reaction-diffusion equations, *Comm. in partial diff. equ.*, vol. 2, n° 7 (1977).
- [4] O.A. LADYZENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URALCEVA, Linear and quasi linear equations of parabolic type, *Ann. Math. Soc. Providence*, Rhode Island, Vol. 23 (1968).

- [5] V. LAKSHMIKANTHAM, Comparison results for reaction-diffusion equations in Banach space, *Technical report*, University of Texas Arlington, n° 94 (Sept. 1978).
- [6] C. REDER, Familles de convexes invariantes et équations de diffusion réaction, *Publi. AAI-Bordeaux I*, (Avril 1980).

Manuscrit reçu le 3 juillet 1980  
révisé le 8 avril 1981.

Christine REDER,  
Université de Bordeaux I  
UER de Mathématiques & d'Informatique  
Laboratoire Associé au CNRS n° 226  
351 Cours de la Libération  
33405 – Talence.