

GUSTAVE CHOQUET

**Ensembles K -analytiques et K -sousliniens.
Cas général et cas métrique**

Annales de l'institut Fourier, tome 9 (1959), p. 75-81

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1959__9__75_0

© Annales de l'institut Fourier, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ENSEMBLES \mathcal{K} -ANALYTIQUES ET \mathcal{K} -SOUSLINIENS CAS GÉNÉRAL ET CAS MÉTRIQUE

par **Gustave CHOQUET**, Paris.

Le cadre de la théorie classique des ensembles analytiques est celui fourni par les espaces métriques. Nous avons, dans un travail antérieur ⁽¹⁾, tenté d'élargir ce cadre en appelant ensemble \mathcal{K} -analytique tout espace topologique séparé qui est image continue d'un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace compact; nous avons également ébauché l'étude d'une autre classe d'ensembles, celle des ensembles \mathcal{K} -sousliniens.

Nous montrerons ici, d'abord que ces deux notions sont essentiellement équivalentes, puis que dans tout espace métrique, elles coïncident essentiellement avec la notion classique.

Ces deux faits contribuent à justifier l'extension proposée ⁽²⁾.

1. Rappel de notions sur l'opération (A).

L'opération (A) est une opération abstraite qui généralise les superpositions dénombrables de réunions et intersections dénombrables; elle sera notre outil de base.

Rappelons sa définition et ses propriétés ⁽³⁾.

⁽¹⁾ CHOQUET G. — Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, t. 5, 1953, ch. 1, pp. 138-145.

⁽²⁾ Une autre justification est le fait que la théorie des capacités a pour cadre naturel les ensembles \mathcal{K} -analytiques.

⁽³⁾ Pour l'étude de l'opération (A), voir W. SIERPINSKI, *Algèbre des ensembles*, *Monografie Matematyczne*, t. 23, 1951, p. 185.

Soit S l'ensemble des suites *finies* d'entiers ≥ 1 :

$$(s = (n_1, n_2, \dots, n_p)).$$

Soit Σ l'ensemble des suites *infinies* d'entiers ≥ 1 :

$$(\sigma = (n_1, n_2, \dots)).$$

On écrit $s \prec \sigma$ (resp. $s \prec s'$) lorsque s est une section commençante de σ (resp. de s').

On écrit $\sigma_1 \leq \sigma_2$ lorsque pour tout p , l'élément de rang p de σ_1 est majoré par l'élément correspondant de σ_2 . On définit de même $s_1 \leq s_2$, mais seulement pour deux suites s_1, s_2 dont les *longueurs* $|s_1|$ et $|s_2|$ sont égales.

Soit maintenant E un ensemble et \mathcal{H} une partie de $\mathfrak{P}(E)$, stable par intersection dénombrable.

On appelle *système déterminant sur \mathcal{H}* toute application Δ de S dans \mathcal{H} : $s \rightarrow H_s$, telle que $(s \prec s') \Rightarrow (H_s \supset H_{s'})$.

On prolonge Δ à Σ en posant, pour tout $\sigma \in \Sigma$:

$$H_\sigma = \bigcap_{s \prec \sigma} H_s$$

On appelle *noyau* du système déterminant Δ l'ensemble

$$H(\Delta) = \bigcup_{\sigma} H_\sigma$$

Tout ensemble de la forme $H(\Delta)$ est appelé *\mathcal{H} -souslinien*. On désigne par $A(\mathcal{H})$ l'ensemble de tous ces ensembles. On a évidemment $\mathcal{H} \subset A(\mathcal{H})$. On démontre (*) que $A(\mathcal{H})$ est stable par l'opération (A) , autrement dit $A(A(\mathcal{H})) = A(\mathcal{H})$, et que $A(\mathcal{H})$ est stable par intersection dénombrable et par réunion dénombrable.

En particulier, si $B(\mathcal{H})$ désigne la plus petite partie de $(\mathfrak{P}E)$ contenant \mathcal{H} et stable par réunion et intersection dénombrables (ses éléments sont dits *\mathcal{H} -boréliens*), on a $B(\mathcal{H}) \subset A(\mathcal{H})$.

Schéma de projection. — Soit (H_s) un système déterminant sur $\mathfrak{P}(E)$ et soit $H(\Delta)$ son noyau.

Dans Σ on appellera *ilot d'indice s* (où $s \in S$) l'ensemble Σ_s des σ de Σ telles que $s \prec \sigma$.

On appelle *ensemble élémentaire d'indice s* la partie

$$G_s = \Sigma_s \times H_s \quad \text{de} \quad \Sigma \times E.$$

Pour tout entier p , on pose $\Gamma_p = \bigcup_{|s|=p} G_s$.

On pose enfin $\Gamma = \bigcap_p \Gamma_p$ et on dit que Γ est la partie de $\Sigma \times E$ associée canoniquement au système donné.

Il est immédiat que :

$$H(\Delta) = \text{projection de } \Gamma \text{ sur } E.$$

2. Espaces \mathcal{K} -analytiques.

DÉFINITION 1. — Soit A un espace topologique. On dit que A est \mathcal{K} -analytique si A est séparé ⁽⁴⁾ et si A est l'image continue d'un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace compact; c'est-à-dire s'il existe un espace compact F , un ensemble $B \subset F$ qui soit un $K_{\sigma\delta}$ de F , et une application continue f de B sur A .

Conséquences immédiates. — 1) Toute image continue séparée d'un espace \mathcal{K} -analytique est \mathcal{K} -analytique.

2) Toute image continue séparée d'un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace topologique séparé, est \mathcal{K} -analytique (utiliser le fait que ce $K_{\sigma\delta}$ est contenu dans un K_σ).

3) Tout fermé d'un espace \mathcal{K} -analytique est \mathcal{K} -analytique.

4) Tout produit topologique dénombrable d'espaces \mathcal{K} -analytiques est \mathcal{K} -analytique.

PROPOSITION 1. — Dans un espace séparé E , toute réunion ou intersection dénombrable d'ensembles \mathcal{K} -analytiques est \mathcal{K} -analytique.

Plus généralement le noyau de tout système déterminant dont les éléments sont \mathcal{K} -analytiques est \mathcal{K} -analytique.

Démonstration. — Pour la première partie de la proposition, voir Choquet, *loc. cit.*

Pour la seconde partie, nous allons utiliser le schéma de projection introduit ci-dessus.

Soit (H_s) un système déterminant dont tout élément soit une partie \mathcal{K} -analytique de E .

L'espace $\Sigma = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est

⁽⁴⁾ Cette restriction semble inutile au début de la théorie, mais elle est indispensable à l'obtention des théorèmes essentiels.

homéomorphe à l'ensemble des irrationnels de $[0, 1]$; il en est de même de chaque étoile Σ_s ; chaque Σ_s est un $K_{\sigma\delta}$ de $[0, 1]$ donc est \mathfrak{K} -analytique; donc $G_s = \Sigma_s \times H_s$ l'est aussi, donc aussi Γ_p , puis Γ .

Le noyau $H(\Delta)$ est la projection de Γ sur E ; il est donc aussi \mathfrak{K} -analytique.

3. Ensembles \mathfrak{K} -sousliniens.

DÉFINITION 2. — Soit E un espace topologique séparé et soit $A \subset E$. On dit que A est \mathfrak{K} -souslinien dans E si A est le noyau d'un système déterminant sur l'ensemble $\mathfrak{K}(E)$ des compacts de E .

Notons que le fait pour A d'être \mathfrak{K} -souslinien n'est pas un invariant topologique; il dépend de l'espace E dans lequel est plongé A .

Conséquences immédiates. — 1) L'ensemble des ensembles \mathfrak{K} -sousliniens dans E est stable par l'opération (A). 2) L'intersection d'un ensemble \mathfrak{K} -souslinien dans E et d'un fermé de E est \mathfrak{K} -souslinien dans E .

Invariance par application continue de E dans F .

PROPOSITION 2. — Soient E et F séparés. Soit f une application continue de E dans F .

L'image par f de tout ensemble \mathfrak{K} -souslinien dans E est \mathfrak{K} -souslinien dans F .

C'est une conséquence immédiate du lemme plus précis suivant.

LEMME 1. — On définit E, F et f comme dans la proposition 2. Soit (H_s) un système déterminant sur $\mathfrak{K}(E)$. Alors (H'_s) , défini par $H'_s = f(H_s)$, est un système déterminant sur $\mathfrak{K}(F)$ et on a la relation :

$$\text{Noyau de } (f(H_s)) = f(\text{Noyau de } (H_s)).$$

Démonstration. — Comme F est séparé, tout $f(H_s)$ est compact; la décroissance de H_s est évidente.

Or pour toute suite décroissante (K_n) de compacts de E , il est connu que

$$\bigcap f(K_n) = f\left(\bigcap K_n\right).$$

Il en résulte que pour tout $\sigma \in \Sigma$, on a $H'_\sigma = f(H_\sigma)$.

$$\text{D'où} \quad \bigcup_{\sigma} H'_\sigma = \bigcup_{\sigma} f(H_\sigma) = f\left(\bigcup_{\sigma} H_\sigma\right).$$

C'est bien la relation cherchée.

4. Comparaison des ensembles \mathfrak{K} -analytiques et \mathfrak{K} -sousliniens.

LEMME 2. — *Soit E un espace séparé; soit A une partie \mathfrak{K} -analytique de E contenue dans un K_σ . Alors A est la projection sur E d'un $K_{\sigma\delta}$ de l'espace produit de E et d'un espace compact auxiliaire.*

Voir la démonstration dans Choquet, *loc. cit.*

LEMME 3. — *Tout $K_{\sigma\delta}$ d'un espace séparé E est \mathfrak{K} -souslinien dans E.*

C'est un cas particulier du fait que tout ensemble \mathfrak{K} -borélien est \mathfrak{K} -souslinien.

THÉORÈME 1. — *Soit X une partie d'un espace séparé E; pour que X soit \mathfrak{K} -souslinien dans E, il faut et il suffit que X soit \mathfrak{K} -analytique et contenu dans un K_σ de E.*

Démonstration. — 1) Soit (H_s) un système déterminant sur $\mathfrak{K}(E)$, de noyau X. On a évidemment $X \subset \bigcup H_n$, donc X est dans un K_σ .

D'autre part, tout H_s est \mathfrak{K} -analytique; il en est donc de même de X d'après la proposition 1.

2) Si X est \mathfrak{K} -analytique et contenu dans un K_σ , il résulte de la proposition 2 et des lemmes 2 et 3, que X est \mathfrak{K} -souslinien dans E.

COROLLAIRE 1. — *Pour qu'un espace \mathfrak{K} -analytique soit plongeable dans une espace dans lequel il soit \mathfrak{K} -souslinien, il faut et il suffit qu'il soit plongeable dans un espace séparé qui soit un K_σ .*

Il serait intéressant de montrer par un exemple que tout espace \mathfrak{K} -analytique n'est pas plongeable dans un K_σ et de trouver des critères simples pour qu'il en soit ainsi.

Notons qu'il est faux que tout espace \mathcal{K} -analytique soit plongeable dans un compact, puisqu'il existe des espaces dénombrables non compactifiables.

5. Cas des espaces métriques.

DÉFINITION 3. — *On appelle espace analytique classique tout espace métrisable à base dénombrable qui soit l'image continue de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (homéomorphe à l'ensemble des irrationnels de $[0, 1]$).*

THÉORÈME 2. — *Pour qu'un espace métrisable soit analytique classique, il faut et il suffit qu'il soit \mathcal{K} -analytique.*

COROLLAIRE 2. — *Soit X une partie d'un espace métrisable E . Pour que X soit \mathcal{K} -souslinien dans E , il faut et il suffit qu'il soit analytique classique et contenu dans un \mathcal{K}_ε de E .*

COROLLAIRE 3. — *Tout espace \mathcal{K} -analytique métrisable est plongeable dans un espace compact métrisable (dans lequel il est \mathcal{K} -souslinien).*

Ces corollaires sont des conséquences simples des théorèmes 1 et 2.

Démonstration du théorème 2 :

1) L'ensemble des irrationnels de $[0, 1]$ est un \mathcal{K}_{∞} de $[0, 1]$; donc tout espace analytique du sens classique est \mathcal{K} -analytique.

2) Soit E un espace \mathcal{K} -analytique métrisable.

a) Montrons d'abord que E est à base dénombrable.

Soit \tilde{E} un espace compact contenant E (il existe de tels \tilde{E} , en général non métrisables). D'après le théorème 1, E est \mathcal{K} -souslinien dans \tilde{E} , c'est-à-dire est le noyau d'un système déterminant (H_ε) de compacts de \tilde{E} .

Soit ε un nombre > 0 ; nous dirons qu'un H_ε est ε -fini s'il existe un recouvrement de $E \cap H_\varepsilon$ par une famille finie de boules ouvertes de E de rayon ε pour une métrique choisie sur E . Posons :

$H'_\varepsilon = \emptyset$ si H_ε est ε -fini; $H'_\varepsilon = H_\varepsilon$ dans le cas contraire.

Les H'_ε constituent un système déterminant de compacts;

si son noyau n'est pas vide, il existe un H'_σ non vide; cet H'_σ est de la forme :

$$\begin{aligned} H'_\sigma &= H'_{n_1} \cap H'_{n_1, n_2} \dots \cap H'_{n_1, n_2, \dots, n_p} \cap \dots \\ &= H_{n_1} \cap H_{n_1, n_2} \dots \cap H_{n_1, n_2, \dots, n_p} \cap \dots \end{aligned}$$

D'autre part H'_σ est un compact de E , donc métrisable; il existe donc un recouvrement de H'_σ par une famille finie de boules ouvertes ω_i de E , de rayon ε . L'ensemble $\bigcup \omega_i$ est la trace sur E d'un ouvert Ω de \tilde{E} ; il existe un entier p tel que :

$$H_{n_1, \dots, n_p} \subset \Omega \quad \text{donc aussi} \quad E \cap H_{n_1, \dots, n_p} \subset \bigcup \omega_i,$$

autrement dit H_{n_1, \dots, n_p} est ε -fini, d'où $H'_{n_1, \dots, n_p} = \emptyset$, contrairement à l'hypothèse.

Cette contradiction montre que le noyau de (H'_s) est vide; il existe donc un entier p tel que, pour toute s de longueur $\geq p$, H'_s soit vide, c'est-à-dire que H_s soit ε -fini.

Il n'y a qu'un infinité dénombrable de telles suites s , donc E peut être recouvert par une famille dénombrable de boules de rayon ε .

b) Comme E est à base dénombrable, il possède une compactification \tilde{E} métrique. Donc E est le noyau d'un système déterminant (H_s) de compacts d'un espace métrique compact.

La théorie classique montre alors que E est image continue de $\Sigma = N^N$. Voici une esquisse de démonstration de ce fait bien connu :

On montre d'abord que l'on peut remplacer (H_s) par un autre système dans lequel aucun H_s n'est vide, puis celui-ci par un autre dans lequel tout H_s est non vide et a un diamètre (dans \tilde{E}) qui tend vers 0 avec $|s|$.

La partie Γ de $\Sigma \times \tilde{E}$ associée canoniquement à un tel système (H_s) est évidemment le graphe d'une application continue φ de Σ dans \tilde{E} et l'on a :

$$E = \text{proj.} (\Gamma) = \varphi(\Sigma).$$