ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DIDIER ROBERT

BERNARD HELFFER

Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques

Annales de l'institut Fourier, tome 31, nº 3 (1981), p. 169-223

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_3_169_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 3 (1981), 169-223

COMPORTEMENT SEMI-CLASSIQUE DU SPECTRE DES HAMILTONIENS QUANTIQUES ELLIPTIQUES

par B. HELFFER et D. ROBERT

INTRODUCTION

L'un des postulats fondamentaux de la mécanique quantique (principe de correspondance : A. Messiah [15]) dit que l'on doit retrouver les lois de la mécanique classique lorsque la constante de Planck $\hbar > 0$ tend vers zéro.

La dynamique d'une particule quantique, non relativiste, de masse m, obéit à l'équation de Schrödinger :

$$(\mathrm{S}_h)\quad \left\{\begin{array}{l} i\hbar \dfrac{\partial\psi}{\partial t}(t,x) = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,x) + \mathrm{V}(x)\,\psi(t,x) \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) \end{array}\right.$$

où ψ est la fonction d'onde de la particule.

Posons $h = \dfrac{\hbar}{\sqrt{m}}$ et $\mathrm{Q}(h) = -\dfrac{h^2}{2}\Delta + \mathrm{V}$; $\mathrm{Q}(h)$ est un hamiltonien quantique ; l'hamiltonien classique correspondant est la fonction $q(x,\xi) = \dfrac{1}{2}|\xi|^2 + \mathrm{V}(x)$, $(x,\xi) \in \mathrm{T}^*\mathbf{R}^n$. La dynamique classique est décrite par le système de Hamilton :

$$(\mathrm{H})\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,\xi) \\ \dfrac{d\xi}{dt} = -\dfrac{\partial q}{\partial x}(x,\xi) \\ x(0) = x_0\,,\ \xi(0) = \xi_0\,. \end{array}\right.$$

Il s'agit d'étudier la manière dont (S_h) se transforme en (H) lorsque h tend vers zéro. Ce problème a déjà fait l'objet de nombreux travaux (Duistermaat [6], Leray [13], Maslov [14]). Dans [4], J. Chazarain a donné des informations précises en étudiant le comportement de la distribution $S_h(t) = \text{Trace } [e^{-ih^{-1}tQ(h)}]$, lorsque $h \longrightarrow 0$. Ce comportement est relié aux périodes des trajectoires périodiques de (H).

L'objet du présent travail est de prolonger ce type de résultats à des hamiltoniens plus généraux autoadjoints positifs, d'ordre $2m$, m réel >0, dont le symbole $a(h, x, \xi)$ est elliptique en (x, ξ) et admet un développement asymptotique par rapport à h. L'analogue des résultats de [4] ne peut pas subsister pour l'opérateur $a(h, x, hD_x)$ lui-même car les périodes des trajectoires périodiques du champ hamiltonien H_{a_0} (a_0 étant le premier terme du développement de $a(h, x, \xi)$) dépendent trop étroitement de l'énergie (voir remarque 4). Par contre, nous montrerons que les résultats de [4] subsistent pour l'opérateur $Q(h) = [a(h, x, hD_x)]^{1/m}$. Nous commencerons donc par établir que $Q(h)$ est un opérateur pseudodifférentiel admettant un développement asymptotique en h, adaptant à cette situation les techniques utilisées dans [16]. L'étude des singularités de la distribution S_h se fera ensuite en utilisant les méthodes de [4]. Cette étude nous permet d'améliorer dans certains cas des résultats récents de L. Hörmander [12] sur le comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs pseudodifférentiels dans $\mathbf{R}^n$.

1. ENONCE DES RESULTATS

Pour $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$, on pose $\lambda(x, \xi) = (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{1/2}$ et, si $m \in \mathbf{R}$, on désigne par S^m l'espace des symboles $s \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ tels que : $|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta s(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta}\, \lambda(x, \xi)^{m-|\alpha|}$. On appelle symbole admissible d'ordre $m \in \mathbf{R}$ toute application $h \longmapsto s(h)$ de $]0, h_0[$, $h_0 > 0$, dans S^m, telle qu'il existe une suite de symboles $(s_j)_{j \geq 0}$, $s_j \in S^{m-j}$, vérifiant : pour tout entier $N > 0$, $h^{-N}(s(h, x, \xi) - \sum_{j=0}^{N-1} h^j s_j(x, \xi))$ décrit un borné de

S^{m-N} (pour la topologie usuelle) lorsque h décrit $]0, h_0[$. On écrit alors $s(h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j s_j$. Soit alors un symbole admissible $a(h)$ d'ordre $2m > 0$; $a(h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j a_j$. On suppose qu'il existe des constantes c et $C > 0$ telles que :

$$c\lambda(x, \xi)^{2m} \leq a_0(x, \xi) \leq C\lambda(x, \xi)^{2m} \tag{1}$$

pour tout $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$.

De plus, on suppose que pour tous multiindices α et β il existe $C_{\alpha\beta} > 0$ telle que :

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_0| \leq C_{\alpha\beta} \lambda^{(2m-|\alpha|-|\beta|)_+} \tag{2}$$

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1| \leq C_{\alpha\beta} \lambda^{(2m-1-|\beta|)_+} . \tag{3}$$

Enfin on suppose que $a(h, x, hD)$ est symétrique pour tout $h \in]0, h_0[$.

Sous les hypothèses précédentes, on a :

THEOREME 1. – *Il existe $h'_0 > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, h'_0[$, l'opérateur $a(h, x, hD)$ est autoadjoint positif et injectif comme opérateur non borné de $L^2(\mathbf{R}^n)$. De plus l'opérateur $[a(h, x, hD)]^{1/m}$ (défini par le calcul fonctionnel) est un opérateur pseudodifférentiel défini par un symbole admissible $q(h, x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} h^j q_j(x, \xi)$ d'ordre 2. On a en particulier les propriétés :*

i) $q_0(x, \xi) = (a_0(x, \xi))^{1/m}$

ii) $sp(q) \underset{\text{def}}{=} q_1 - \dfrac{1}{2i} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 q_0}{\partial x_j \, \partial \xi_j}$ *est réel* ($sp(q)$: *symbole sous-principal de* q)

iii) *pour tous multiindices α et β, il existe $C_{\alpha\beta} > 0$ telle que :*

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta q_0| \leq C_{\alpha\beta} \lambda^{(2-|\alpha|-|\beta|)_+}$$

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta q_1| \leq C_{\alpha\beta} \lambda^{(1-|\alpha|-|\beta|)_+} .$$

On constate facilement que $a(h, x, hD)$ est à résolvante compacte pour $0 < h < h'_0$. Soit alors $(\lambda_j(h))_{j \geq 0}$ la suite croissante des valeurs propres de $a(h, x, hD)$ (chaque valeur propre étant répétée suivant sa multiplicité). On pose alors $\mu_j(h) = (\lambda_j(h))^{1/m}$; $S_h(t) = \text{Trace}\ [e^{-ih^{-1}tQ(h)}]$, où $Q(h) = q(h, x, hD)$. On a bien sûr $S_h \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$. On désigne par H_{q_0} le champ hamiltonien : $H_{q_0}(x, \xi) = \dfrac{\partial q_0}{\partial \xi}(x, \xi)\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial q_0}{\partial x}(x, \xi)\dfrac{\partial}{\partial \xi}$.

On introduit alors la terminologie suivante : une trajectoire d'énergie $\lambda, \lambda \in \mathbf{R}$, est une trajectoire de H_{q_0} située sur l'hypersurface : $\{q_0(x, \xi) = \lambda\}$. I étant un intervalle réel, on désigne par $\mathcal{L}_I$ l'ensemble des périodes des trajectoires périodiques de H_{q_0} d'énergie $-\tau$ avec $\tau \in I$.

On se donne une fonction test $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et on pose :

$$I_\tau(h) = \langle S_h(t), \rho(t)\, e^{-ih^{-1}\tau t}\rangle .$$

On a les résultats suivants :

THEOREME 2. — *Supposons qu'il existe* $\epsilon_0 > 0$ *tel que :*

$$\text{supp}\, \rho \cap \overline{\mathcal{L}}_{]\tau-\epsilon_0, \tau+\epsilon_0[} = \phi .$$

Alors $I_\tau(h) = 0(h^\infty)$ *lorsque* $h \longrightarrow 0$.

0 étant toujours une période, on a une singularité décrite par le :

THEOREME 3. — *Supposons qu'il existe* $\epsilon_0 > 0$ *tel que :*

$$\text{supp}\, \rho \cap \overline{\mathcal{L}}_{]\tau_0-\epsilon_0, \tau_0+\epsilon_0[} = \{0\}$$

et que q_0 *n'ait pas de valeur critique dans* $[-\tau_0 - \epsilon_0, -\tau_0 + \epsilon_0]$. *On a alors :*

$$I_\tau(h) = (2\pi h)^{1-n}\rho(0)\int_{q_0(x,\xi)=-\tau} \frac{dS_\tau}{|\text{grad}_{(x,\xi)}\, q_0|} + 0(h^{2-n}),\ h \longrightarrow 0$$

pour tout $\tau \in]\tau_0 - \epsilon_0, \tau_0 + \epsilon_0[$. *De plus* $0(h^{2-n})$ *est uniforme par rapport à* τ (dS_τ *étant la densité riemanienne sur* $\{q_0(x, \xi) = -\tau\}$).

THEOREME 4. — *On pose* $N_h(\lambda) = \text{Card}\,\{j \in \mathbf{N}, \mu_j(h) \leqslant \lambda\}$. *Soit* $\lambda > 0$ *non valeur critique de* q_0. *On a alors :*

$$N_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n}\iint_{q_0(x,\xi)\leqslant\lambda} dx\,d\xi + 0(h^{1-n})\ ;\ h \longrightarrow 0 .$$

Désignons par ϕ^t le flot associé à H_{q_0}.

THEOREME 5. – *On suppose que l'application* $t \longrightarrow \phi^t$ *est périodique, de plus petite période positive* T_0. *Alors il existe* M réel $\geqslant 0$, $\alpha \in \mathbf{Z}$, *tels que :*

$$\text{Spectre } Q(h) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbf{N}} [\widetilde{\lambda}_k(h) - Mh^2, \widetilde{\lambda}_k(h) + Mh^2]$$

où

$$\widetilde{\lambda}_k(h) = \gamma + \left(\frac{2\pi}{T_0}\, k + \alpha\, \frac{\pi}{2T_0}\right) h$$

et

$$\gamma = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\xi(t)\,\dot{x}(t) - q_0(x(t), \xi(t))]\, dt$$

où $x = x(t)$, $\xi = \xi(t)$ *est une trajectoire périodique de période* T_0 *de* H_{q_0}.

Remarque 1. – Les théorèmes 2, 3 et 5 ont été établis par J. Chazarain [4] pour l'opérateur $Q(h) = -h^2\Delta + V$.

Remarque 2. – Le théorème 4 améliore un résultat récent de L. Hörmander [12] dans le cas des hamiltoniens elliptiques. En effet, la formule (4.3)″ de [12] donne

$$N_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n} \iint_{q_0(x,\xi)\leqslant\lambda} dx\,d\xi + 0(h^{2/3-n-\epsilon}),\ h \longrightarrow 0,$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Remarque 3. – Si λ_0 n'est pas valeur critique de q_0 alors $\{q_0(x, \xi) = \lambda_0\}$ est une hypersurface compacte et il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que q_0 n'ait pas de valeurs critiques dans $[\lambda_0 - \epsilon_0, \lambda_0 + \epsilon_0]$. D'autre part, un raisonnement élémentaire montre qu'alors 0 est isolé dans $\mathcal{L}_{[\lambda_0-\epsilon_0,\lambda_0+\epsilon_0]}$.

Remarque 4. – Considérons l'hamiltonien classique sur $T^*\mathbf{R}$ défini par $a(x, \xi) = x^{2m} + \xi^{2m}$, $m > 0$, si $x^{2m} + \xi^{2m} \geqslant 1$ et $0 \leqslant a(x, \xi) \leqslant 1$ si $x^{2m} + \xi^{2m} \leqslant 1$. Soit s réel > 0. On considère un niveau d'énergie E fixé, $E > 1$. Il est facile de voir que les trajectoires de H_{a^s}, d'énergie E, sont périodiques, de plus petite période positive :

$$T_E = (ms)^{-1}\, E^{\frac{1}{sm}-1} \int_{-1}^{1} (1 - u^{2m})^{\frac{1}{2m}-1}\, du.$$

Par conséquent la seule valeur de s qui rende le flot de H_{a^s} périodique est $s = \frac{1}{m}$. Compte tenu du théorème 1, cela explique, dans une certaine mesure, pourquoi les énoncés des théorèmes 2, 3 et 5 portent sur $(a(h, x, h\mathrm{D}))^{1/m}$. Rappelons qu'il y a un phénomène analogue pour les opérateurs elliptiques sur une variété compacte où l'on se ramène à l'ordre 1 (L. Hörmander [10], Duistermaat-Guillemin [7]).

Les techniques introduites pour établir les résultats précédents permettent d'obtenir dans certains cas la meilleure estimation de reste de $\mathrm{N}_h(\lambda)$ lorsque h est fixé et $\lambda \longrightarrow +\infty$.

Soit $a \in \mathrm{S}^{2m}$ (m entier > 0) admettant un développement asymptotique : $a \sim \sum_{j \leqslant 2m} a_j$ (i.e $a - \sum_{j<\mathrm{N}} a_j \in \mathrm{S}^{2m-\mathrm{N}}$ pour tout entier N). On suppose que $a(x, \mathrm{D})$ est symétrique sur $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. On fait sur la partie principale a_{2m} l'hypothèse suivante : a_{2m} est un polynôme homogène de degré $2m$ en (x, ξ) tel que $a_{2m}(x, \xi) > 0$ pour tout $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n} \backslash \{0\}$.

Il est bien connu qu'alors $a(x, \mathrm{D})$ est essentiellement auto-adjoint et que son spectre est une suite croissante $(\lambda_j)_{j \geqslant 0}$ de valeurs propres de multiplicité finie (on répète chaque valeur propre suivant sa multiplicité).

Posons $\mathrm{N}(\lambda) = \operatorname{card}\{j \in \mathbf{N}, \lambda_j \leqslant \lambda\}$.

THEOREME 6.

$$\mathrm{N}(\lambda) = \gamma_0 \lambda^{n/m} + 0(\lambda^{(n-1/2)/m})\ ;\ \lambda \longrightarrow +\infty \tag{4}$$

où

$$\gamma_0 = (2\pi)^{-n} \iint_{a_{2m}(x,\xi) \leqslant 1} dx\, d\xi .$$

Si $a - a_{2m} \in \mathrm{S}^{2m-2}$, on a alors :

$$\mathrm{N}(\lambda) = \gamma_0 \lambda^{n/m} + 0(\lambda^{(n-1)/m})\ ;\ \lambda \longrightarrow +\infty . \tag{5}$$

Remarque 5. – L. Hörmander [12] vient d'obtenir par une méthode directe un résultat plus précis que (4) lorsque $a \sim \sum_{j \leqslant 2m} a_j$ où a_j est homogène de degré j. Il obtient que :

$$\mathrm{N}(\lambda) = \gamma_0 \lambda^{n/m} - \lambda^{(n-1/2)/m} \int_{a_{2m}=1} a_{2m-1} \frac{dS}{|\operatorname{grad} a_{2m}|} + 0(\lambda^{(n-\delta)/m}) \tag{6}$$

pour $\lambda \longrightarrow +\infty$ et pour tout $\delta < \dfrac{2}{3}$.

L. Hörmander ([12] p. 311) pose la question de savoir si on a encore (6) avec $\delta = 1$. Notre résultat (5) dit que la réponse est oui dans le cas particulier où $a_{2m-1} = 0$. Notons que ce résultat est le meilleur possible en général.

Remarque 6. – Guillemin-Sternberg [9] annoncent (5) dans le cas où $a(x, \xi)$ est un polynôme en (x, ξ) sans faire l'hypothèse que $a_{2m-1} = 0$.

Ce résultat (plus généralement (6) avec $\delta = 1$) peut être obtenu en raffinant les techniques utilisées dans cet article. Le principe consiste à remplacer la phase $S(t, x, \eta)$ (cf. paragraphe 3) par une phase dépendant du paramètre h de la forme

$$S(t, x, \eta, h) = S_1(t, x, \eta) + h^{1/2} S_2(t, x, \eta).$$

Cette méthode ne semble pas s'étendre au cas pseudodifférentiel à cause de l'irrégularité du symbole à l'origine qui crée des difficultés pour l'étude de $N_h(\lambda)$ lorsque $h \longrightarrow 0$. Dans un prochain travail, nous établirons (6), avec $\delta = 1$, dans le cas pseudodifférentiel, en étudiant directement la singularité en 0 de la distribution Trace $[\exp(it\, a(x, D)^{1/m})]$.

La preuve du théorème 1 nous amène à faire une étude valable dans un cadre un peu plus général. Il s'agit de contrôler

$$(a(h, x, hD) - \lambda)^{-1}$$

en fonctions des paramètres $h > 0$ et $\lambda \in \mathbf{C}$.

Cette étude nous permet d'établir des développements asymptotiques pour $(a(h, x, hD))^s$, $s \in \mathbf{R}$, et pour $e^{-ta(h,x,hD)}$, $t > 0$.

2. DEVELOPPEMENTS SEMI-CLASSIQUES ASSOCIES A UNE CLASSE D'OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS

Pour faciliter l'exposition, nous divisons ce paragraphe en quatre parties :

2.1. Généralités sur les développements semi-classiques
2.2. Développement de $(a(h, x, hD) - \lambda)^{-1}$
2.3. Développement de $(a(h, x, hD))^s$, $s \in \mathbf{C}$
2.4. Quelques propriétés du spectre de $a(h, x, hD)$.

2.1. Généralités sur les développements semi-classiques.

On se donne une paire de fonctions poids au sens de Beals [2] $\phi, \varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}_+$ de sorte que la métrique associée sur $\mathbf{R}^{2n}$:

$$g_{(x,\xi)}(y, \eta) = \frac{|y|^2}{\varphi^2(x, \xi)} + \frac{|\eta|^2}{\phi^2(x, \xi)}$$

vérifie les hypothèses de L. Hörmander [11]. On impose de plus les propriétés suivantes : il existe des constantes $0 < \delta \leqslant 1$, $C_0, C_1 > 0$, telles que :

$$C_0(1 + |x|^2 + |\xi|^2)^\delta \leqslant \varphi(x, \xi)\, \phi(x, \xi) \leqslant C_1(1 + |x|^2 + |\xi|^2) \quad (1)$$

$$t\phi(x, \xi) \leqslant \phi(tx, t\xi)\ ;\ t\varphi(x, \xi) \leqslant \varphi(tx, t\xi)$$
$$\text{pour tout } (x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n} \text{ et tout } t \in [0, 1] \quad (1')$$

$$\phi(tx, t\xi)\, \varphi(tx, t\xi) \leqslant \phi(x, \xi)\, \varphi(x, \xi)$$
$$\text{pour tout } (x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n} \text{ et tout } t \in [0, 1]. \quad (1'')$$

Pour tout réel m, on définit la classe de symboles $S^m_{\phi,\varphi}$ par les conditions $a \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ et $\sup_{\mathbf{R}^{2n}} [(\phi\varphi)^{-m}\, \phi^{|\alpha|}\, \varphi^{|\beta|}\, |\partial^\alpha_\xi D^\beta_x a|] < +\infty$ pour tous α et $\beta \in \mathbf{N}^n$.

Si $a \in S^m_{\phi,\varphi}$, on lui associe l'opérateur :

$$a^w(x, D)\, u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\, a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy d\xi$$

où $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ (représentation de Weyl).

On désigne par $\mathcal{L}^m_{\phi,\varphi}$ l'espace des opérateurs $a^w(x, D)$ tels que $a \in S^m_{\phi,\varphi}$. On aura besoin aussi des espaces de Sobolev à poids associés. $H^m_{\phi,\varphi}$ désignera l'espace engendré par

$$\{Au;\ u \in L^2(\mathbf{R}^n),\ A \in \mathcal{L}^{-m}_{\phi,\varphi}\}.$$

Rappelons que si

$$\phi = \varphi = (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{1/2}, \quad \text{alors } H^m_{\phi,\varphi} = \mathrm{Dom}(-\Delta + |x|^2)^m$$

si $m \geqslant 0$ et $H^m_{\phi,\varphi} = (-\Delta + |x|^2)^{-m}(L^2(\mathbf{R}^n))$ si $m < 0$.

L'exemple suivant sera utile dans les applications :

$$\phi = (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{1/2}\ ;\ \varphi = 1\ ;$$

alors $\quad \mathrm{H}^m_{\phi,\varphi} = \mathrm{Dom}(-\Delta + |x|^2)^{m/2}$ si $m \geqslant 0$,

$\mathrm{H}^m_{\phi,\varphi} = (-\Delta + |x|^2)^{-m}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n))$ si $m < 0$.

Pour éviter les confusions, on posera :

$$\mathcal{H}^m = \mathrm{Dom}(-\Delta + |x|^2)^{m/2} \quad \text{si} \quad m \geqslant 0$$

$$\mathcal{H}^m = (-\Delta + |x|^2)^{m/2}\,\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n) \quad \text{si} \quad m < 0 .$$

De (1) il résulte la double inclusion :

$$\mathcal{H}^{2m} \hookrightarrow \mathrm{H}^m_{\phi,\varphi} \hookrightarrow \mathcal{H}^{2\delta m} \quad \text{pour} \quad m \geqslant 0$$

et $\hfill (2)$

$$\mathcal{H}^{2m\delta} \hookrightarrow \mathrm{H}^m_{\phi,\varphi} \hookrightarrow \mathcal{H}^{2m} \quad \text{si} \quad m < 0 .$$

Suivant A. Voros [19], on pose la définition suivante :

DEFINITION 2.1. – *On dit que* $a \in \mathrm{S}^m_{ad}$, $m \in \mathbf{R}$, *s'il existe* $h_0 > 0$ *tel que :* $a \in \mathrm{C}^\infty([0, h_0[\times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, $\left.\dfrac{\partial^j}{\partial h^j} a\right|_{h=0} \in \mathrm{S}^{m-j}$ *pour tout* $j \in \mathbf{N}$ *et pour tout* $\mathrm{N} \in \mathbf{N}$,

$$h^{-\mathrm{N}-1}\Big(a(h, x, \xi) - \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} \frac{h^j}{j!}\,\frac{\partial^j}{\partial h^j}\,a(0, x, \xi)\Big)$$

décrit un borné de $\mathrm{S}^{m-\mathrm{N}-1}_{\phi,\varphi}$ *lorsque* $0 \leqslant h < h_0$. *On posera alors* $a_j(x, \xi) = \dfrac{1}{j!}\,\dfrac{\partial^j a}{\partial h^j}(0, x, \xi)$ *et on écrira* $a \sim \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{N}} h^j a_j$.

Si $a \in \mathrm{S}^m_{ad}$, on peut lui associer naturellement l'opérateur $\mathrm{A}(h) = a^w(h, x, h\mathrm{D})$. Pour une raison de symétrie, il sera plus commode de travailler avec l'opérateur $\mathrm{A}_1(h) = a^w(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}\mathrm{D})$. Ces deux opérateurs sont liés par la relation

$$\mathrm{A}(h) = \mathrm{T}_h^{-1} \circ \mathrm{A}_1(h) \circ \mathrm{T}_h \quad \text{où} \quad \mathrm{T}_h f(x) = h^{n/4} f(\sqrt{h}x).$$

DEFINITION 2.2. – *On appelle opérateur admissible d'ordre* m *une application* $\mathrm{A}_1 :]0, h_0[\longrightarrow \mathcal{L}^m$ *telle qu'il existe une suite* $a_j \in \mathrm{S}^{m-j}$, $j \geqslant 0$, *telle que, pour tout entier* $\mathrm{N} \geqslant 0$ *et tout entier* k, $0 \leqslant k \leqslant \mathrm{N}+1$, $h^{-\mathrm{N}-1+k+m}\Big(\mathrm{A}_1(h) - \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{N}} h^j a_j^w(\sqrt{h}x, \sqrt{h}\mathrm{D})\Big)$ *décrive un borné de* $\mathcal{L}(\mathrm{H}^{1+m}_{\phi,\varphi}, \mathrm{H}^{1+k}_{\phi,\varphi})$, *pour tout réel 1, lorsque* h *décrit* $]0, h_0[$.

PROPOSITION 2.2. — *$a(h, x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} h^j a_j(x, \xi)$ au sens des symboles admissibles si et seulement si*

$$a^w(h\,; \sqrt{h}x, \sqrt{h}\mathrm{D}) \sim \sum_{j \geq 0} h^j a_j^w(\sqrt{h}x, \sqrt{h}\mathrm{D})$$

au sens des opérateurs admissibles.

Preuve. — D'après le théorème de continuité, il est clair qu'un symbole admissible donne lieu à un opérateur admissible.

En effet, posons $\delta_{\mathrm{N}}(h, x, \xi) = a(h, x, \xi) - \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} h^j a_j(x, \xi)$; a étant un symbole admissible, pour tout entier N et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$, il existe $\mathrm{C}(\mathrm{N}, \alpha, \beta)$ telle que :

$$h^{-\mathrm{N}-1} | \partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta \delta_{\mathrm{N}}(h, x, \xi) | \leq \mathrm{C}(\mathrm{N}, \alpha, \beta)\, (\phi\varphi)^{m-\mathrm{N}-1}(x, \xi)\, \phi^{-|\alpha|}(x, \xi)\, \varphi^{-|\beta|}(x, \xi)\,.$$

En utilisant (1′), il vient alors :

$$h^{-\mathrm{N}-1+k} | \partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta \delta_{\mathrm{N}}(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}\xi) | \leq \mathrm{C}(\mathrm{N}, \alpha, \beta)\, h^k (\phi\varphi)^{m-\mathrm{N}-1}(\sqrt{h}x, \sqrt{h}\xi)\, \phi^{-|\alpha|}(x, \xi)\, \varphi^{-|\beta|}(x, \xi)\,.$$

Or, d'après (1′) et (1″), on a :

$$h^k (\phi\varphi)^{m-\mathrm{N}-1}(\sqrt{h}x, \sqrt{h}\xi) \leq h^{-m} (\phi\varphi)^{m-k}(x, \xi)\, (\phi\varphi)^{k-\mathrm{N}-1}(\sqrt{h}x, \sqrt{h}\xi)\,.$$

On utilise alors (1) en remarquant que $k \leq \mathrm{N} + 1$; il vient :

$$h^{-\mathrm{N}-1+k} | \partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta \delta_{\mathrm{N}}(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}\xi) | \leq \mathrm{C}'(\mathrm{N}, \alpha, \beta)\, h^{-m} (\phi\varphi)^{m-k}(x, \xi)\, \phi^{-|\alpha|}(x, \xi)\, \varphi^{-|\beta|}(x, \xi)\,.$$

Le théorème de continuité des opérateurs pseudodifférentiels donne alors le résultat.

Pour la réciproque, on pose :

$$\mathrm{R}_{\mathrm{N}}(h) = h^{-\mathrm{N}-1}\Big(\mathrm{A}_1(h) - \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} h^j a_j^w(\sqrt{h}x, \sqrt{h}\mathrm{D})\Big) \qquad (3)$$

d'où, pour $\mathrm{M} \geq \mathrm{N} + 1$, on a :

$$\mathrm{R}_{\mathrm{N}}(h) = \sum_{j=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{M}} h^{j-\mathrm{N}-1} a_j^w(\sqrt{h}x, \sqrt{h}\mathrm{D}) + h^{\mathrm{M}-\mathrm{N}}\, \mathrm{R}_{\mathrm{M}}(h)\,. \qquad (4)$$

Il s'agit de montrer que pour N fixé, $R_N(h)$ admet un symbole possédant les propriétés de la définition 1.

On commence par prouver que $R_M(h)$ admet un noyau d'autant plus régulier que M est grand, ce qui permet de réexprimer le symbole par transformation de Fourier à partir du noyau.

Il s'agit alors de contrôler les semi-normes du symbole obtenu en fonction de h via des normes d'opérateurs pour $R_M(h)$. Ce type d'argument a déjà été utilisé dans D. Robert [16] (démonstration du théorème 5.4). Pour être complet, nous allons rappeler quelques résultats assez classiques.

LEMME 2.1. — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et une situation variationnelle* $V \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow V'$ *(les injections sont continues,* V *est dense dans* $L^2(\Omega)$). *On suppose que :*

a) *on a une injection compacte :* $V \hookrightarrow C(\Omega)$

b) *il existe une fonction* $\chi : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}_+$ *telle que :*

$$|u(x)| \leqslant \chi(x)\ \|u\|_V$$

pour tout $u \in V$ *et tout* $x \in \Omega$.

Alors tout opérateur $T \in \mathcal{L}(V', V)$ *admet un noyau* $KT(x, y)$ *continu sur* $\Omega \times \Omega$ *vérifiant* $|KT(x, y)| \leqslant \chi(x)\,\chi(y)\ \|T\|_{\mathcal{L}(V',V)}$ *pour tout* $x, y \in \Omega$.

Preuve. — Cf. par exemple D. Robert [16].

LEMME 2.2. — *Pour tout réel* $k > \dfrac{n}{4\delta}$, *l'injection :* $H^k_{\phi,\varphi} \hookrightarrow C(\mathbf{R})$ *est compacte et il existe une constante* $C_{k,n}$ *telle que :*

$$|u(x)| \leqslant C_{k,n}(1 + |x|^2)^{(n/2)-2\delta k}\ \|u\|_{H^k_{\phi,\varphi}}$$

pour tout $u \in H^k_{\phi,\varphi}$ *et tout* $x \in \mathbf{R}^n$.

Preuve. — Ce lemme est un cas particulier de la proposition (3.1) de D. Robert [16]. On peut en esquisser une preuve directe. Posons :

$$\sigma_t(x, \xi) = (t + |x|^2 + |\xi|^2)^{-k\delta}\ ;\ t \text{ réel } > 0 .$$

On peut choisir t assez grand de sorte que $\sigma_t(x\,,\mathrm{D})$ soit un isomorphisme de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ sur $\mathcal{H}^{2k\delta}$ où l'on a posé :

$$\sigma_t(x\,,\mathrm{D})\,v(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\,\sigma_t(x\,,\xi)\;\hat{v}(\xi)\;d\xi\,.$$

Soit $f\in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ définie par $u = \sigma_t(x\,,\mathrm{D})f$. On a :

$$u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}(t + |x|^2 + |\xi|^2)^{-k\delta}\,\hat{f}(\xi)\,d\xi\,,$$

d'où $|u(x)| \leqslant (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\int (t + |x|^2 + |\xi|^2)^{-2k\delta}\,d\xi\right)^{1/2}\|f\|_{\mathrm{L}^2}\,.$

Le changement de variables $\xi = (|x|^2 + t)^{1/2}\,.\;\eta$ donne le lemme 2.

LEMME 2.3. — *l étant un réel $\geqslant 0$, soit $k > \dfrac{n}{4\delta} + l$. Alors tout opérateur linéaire $\mathrm{T}\in \mathcal{L}(\mathrm{H}^{-k}_{\phi,\varphi}\,,\mathrm{H}^{k}_{\phi,\varphi})$ admet un noyau continu $\mathrm{KT}(x\,,y)$ tel que pour tous multiindices α et β vérifiant $|\alpha|\leqslant 2\delta l$, $|\beta|\leqslant 2\delta l$, $\mathrm{D}^\alpha_x\mathrm{D}^\beta_y\mathrm{KT}(x\,,y)$ existe et soit également continu sur $\mathbf{R}^{2n}$. De plus, il existe une constante universelle $\mathrm{C}'_{k,l}$ telle que :*

$$|\mathrm{D}^\alpha_x\mathrm{D}^\beta_y\mathrm{KT}(x\,,y)| \leqslant \mathrm{C}'_{k,l}(1 + |x|^2)^{\frac{n}{2}-2\delta(k-1)}(1 + |y|^2)^{\frac{n}{2}-2\delta(k-1)}\|\mathrm{T}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H}^{-k}_{\phi,\varphi}\,,\,\mathrm{H}^{k}_{\phi,\varphi})} \tag{6}$$

pour tout $\mathrm{T}\in\mathcal{L}(\mathrm{H}^{-k}_{\phi,\varphi}\,,\mathrm{H}^{k}_{\phi,\varphi})$, tout $(x\,,y)\in\mathbf{R}^{2n}$, $|\alpha|\leqslant 2\delta l$ et $|\beta|\leqslant 2\delta l$.

Preuve. — Pour $l = 0$, c'est une conséquence des lemmes 1 et 2. On se ramène à ce cas en considérant l'opérateur

$$\mathrm{D}^\alpha\,\mathrm{T}\mathrm{D}^\beta\in\mathcal{L}(\mathrm{H}^{-k+l}_{\phi,\varphi}\,,\mathrm{H}^{k-l}_{\phi,\varphi})\ \text{ si }\ |\alpha|\leqslant 2\delta l\ \text{ et }\ |\beta|\leqslant 2\delta l.$$

Fin de la preuve de la proposition 1. — On fait d'abord la remarque suivante : si P est un O.P.D. de symbole de Weyl $\mathrm{P}(x\,,\xi)$ et si P admet un noyau $\mathrm{KP}(x\,,y)$, on a la relation :

$$\mathrm{P}(x\,,\xi) = \int \mathrm{KP}\left(x + \frac{y}{2}\,,\,x - \frac{y}{2}\right)e^{-iy\xi}\,dy \quad\text{dans}\quad \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{2n}). \tag{7}$$

Il en résulte que pour M assez grand on a :

$$r_{\mathrm{M}}(h\,,\sqrt{h}x\,,\sqrt{h}\xi) = \int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{KR}_{\mathrm{M}}(h)\left(x + \frac{y}{2}\,,\,x - \frac{y}{2}\right)e^{-iy\xi}\,dy\,, \tag{8}$$

R_{M} étant défini en (4).

Le lemme 3 et (8) montrent que

$$(y, \eta) \longrightarrow \sigma(A_1(h))(y, \eta) - \sum_{j=0} h^j a_j(y, \eta)$$

est C^∞ sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

La proposition 1 résultera alors du :

LEMME 2.4. — *Pour tout entier* $N \geqslant 1$ *et tout entier* $k \geqslant 1$, *on peut trouver des entiers* M, j *tels que* $N + 1 < j < M$ *et une constante* $C_{N,k}$ *tels que :*

$$|\partial_\eta^\alpha D_y^\beta h^{M-N} r_M(h, y, \eta)| \leqslant C_{N,k}(1 + |y|^2 + |\eta|^2)^{-(N+1+k)} h^j \|R_M(h)\|_{\mathcal{L}(H_{\phi,\varphi}^{-j/2}, H_{\phi,\varphi}^{j/2})} \tag{9}$$

pour $|\alpha| \leqslant k$, $|\beta| \leqslant k$, $h \in [0, h_0[$ *et* $(y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}$.

Preuve. — Il résulte de (8) que :

$$r_M(h, y, \eta) = h^{n/2} \int K R_M(h) \left(h^{-1/2} y + \frac{h^{-1/2} z}{2}, h^{-1/2} y - \frac{h^{1/2} z}{2}\right) e^{-iz\eta} \, dz. \tag{10}$$

Posons

(μ) : $q = N + 1 + k$. On a :

$$(1 + |\eta|^2)^q \, |\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta h^{M-N}, r_M(h, y, \eta)| \leqq h^{M-N+n/2} \tag{11}$$

$$\int \left| (1 - \Delta_z)^q z^\alpha D_y^\beta \left[K R_M(h) \left(h^{-1/2} y + \frac{h^{1/2} z}{2}, h^{-1/2} y - \frac{h^{1/2} z}{2}\right)\right]\right| dz.$$

D'après (6), l étant donné et j étant choisi tel que :

(ν) $\dfrac{j}{2} > \dfrac{n}{4\delta} + l$, on a :

$$|D_u^\gamma D_{u'}^{\gamma'} K R_M(h)(u, u')| \leqslant C(1 + |u|^2)^{\frac{n}{2} - 2\delta(j-1)} (1 + |u'|^2)^{\frac{n}{2} - 2\delta(j-1)} \|R_M\|_{\mathcal{L}(H_{\phi,\varphi}^{-j/2}, H_{\phi,\varphi}^{j/2})} \tag{12}$$

pour $|\gamma| \leqslant 2\delta l$ et $|\gamma'| \leqslant 2\delta l$.

Pour pouvoir utiliser (12) dans les majorations de (11), on doit choisir l tel que :

(◦) $2q + k \leqslant 2\delta l$.

Enfin si M et j sont choisis tels que :

(π) $0 \leqslant m + j \leqslant M + 1.$

Il résulte de la définition de l'admissibilité que :

$$\| R_M(h) \|_{\mathcal{L}(H^{-j/2}_{\phi,\varphi}, H^{j/2}_{\phi,\varphi})} \leqslant C' h^{M+1-m_- -m-j}.$$

De (11) et (12), on déduit, en posant

$$(p) \qquad p = \frac{n}{2} - \delta j + 2\delta l$$

$$|(1 + |\eta|^2)^q \, \partial^\alpha_\eta D^\beta_y h^{M-N} r_M(h, y, n)| \leqslant C'' h^{2M-N+1+\frac{n}{2}-m_- -m-j-k} A(y, h) \qquad (12')$$

avec $A(y, h) =$

$$\int (1 + |h^{1/2}z|^2)^{k/2} \left(\left[1 + \left| h^{-1/2}y + \frac{h^{1/2}z}{2} \right|^2 \right) \left(1 + \left| h^{-1/2}y - \frac{h^{1/2}z}{2} \right|^2 \right) \right]^p dz.$$

On a facilement :

$$A(y, h) \leqslant \qquad (13)$$
$$h^{-\frac{n}{2}} \int \left[\left(1 + \left| h^{-1/2}y + \frac{u}{2} \right|^2 \right) \left(1 + \left| h^{-1/2}y - \frac{u}{2} \right|^2 \right) \right]^{p+k/2} du.$$

D'autre part, sous la condition (σ) : $-\left(q + \frac{k}{2}\right) > n$, il existe $\gamma > 0$ telle que :

$$\int \left(1 + \left| X - \frac{u}{2} \right|^2 \right)^{q+\frac{k}{2}} \left(1 + \left| X + \frac{u}{2} \right|^2 \right)^{q+\frac{k}{2}} du \leqslant \gamma (1 + |X|^2)^{q+\frac{k}{2}} \qquad (14)$$

(13) et (14) entraînent :

$$A(y, h) \leqslant \gamma h^{-\frac{n}{2}} (1 + |y|^2)^{q+\frac{k}{2}} \text{ pour tout } y \in \mathbf{R}^n \text{ et } h \in]0, 1]. \qquad (13')$$

(12′) devient alors :

$$(1 + |\eta|^2)^q \, |\partial^\alpha_\eta D^\beta_y h^{M-N} r_M(h, y, \eta)| \leqslant C''' h^{2M-N+1-m_- -m-j-k} (1 + |y|^2)^{q+\frac{k}{2}}. \qquad (12'')$$

Si on choisit j tel que (δ) : $-\left(p + \frac{k}{2}\right) > q$ et M tel que (u) : $2M - N + 1 - m_- - m - j - k \geqslant j$, on obtient le résultat annoncé dans le lemme 4. Plus précisément, N et k étant fixés, q est déterminé par (μ) puis l est choisi vérifiant $(\circ)$, j est alors choisi vérifiant (u) et de sorte que P défini en (ρ) vérifie (σ) et (δ). Enfin M est choisi vérifiant (π) et (u).

La composition des symboles sera notée par $\#$.

PROPOSITION 2.2. – *Soient* $a \in S_{ad}^m$, $b \in S_{ad}^p$ *où* $m, p \in \mathbf{R}$. *Pour tout* $h \in]0, h_0]$ *posons :*

$$c^w(h, \sqrt{h}.\ x, \sqrt{h}D_x) = a^w(h, \sqrt{h}, x, \sqrt{h}D_x).\ b^w(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}D_x).$$

Alors $c(h) : (x, \xi) \longrightarrow (h, x, \xi)$ *est un symbole admissible, que l'on notera :* $a \# b \in S_{ad}^{m+p}$.

alors :
$$a(h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j a_j \quad \text{et} \quad b(h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j b_j$$

$c(h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j c_j$ *où les* c_j *sont donnés par la formule usuelle :*

$$c_j = \sum_{|\beta+\alpha|+k+1=j} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{\beta!} \left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\beta|} (\partial_\beta^\alpha D_x^\beta a_k).\ (\partial_\xi^\beta D_x^\alpha b_l). \tag{15}$$

Preuve. – Elle résulte aisément du théorème de composition (L. Hörmander [11]).

On aura besoin d'une précision supplémentaire.

Posons : $r_{a,N}(h) = h^{-N-1}\ a(h) - \sum_{j=0}^{N} h^j a_j$ et si $p \in S^m$ posons :

$$s_{m,k}(p) = \sup_{\substack{(x,\xi) \in \mathbf{R}^{2n} \\ |\alpha| \leq k, |\beta| \leq k}} [(\phi\varphi)^{-m}\ \phi^{|\alpha|}\ \varphi^{|\beta|}\ |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta p|].$$

Avec les notations de la proposition 2.2, on a la :

PROPOSITION 2.3. – *Pour tout entier* k, *il existe* $C > 0$ *et un entier* $j \geq 0$ *tels que :*

$$s_{m+p-N-1,k}(r_{C,N}(h)) \leq C_k \Big\{ \sum_{0 \leq 1, k \leq N} s_{m,j}(a_l)\, s_{p,j}(b_k) \tag{16}$$
$$+ s_{m-N-1,j}(r_{a,N}(h))\, s_{p,j}(b(h)) + s_{m,j}(a(h))\, s_{p-N-1,j}(r_{b,N}(h)) \Big\}$$

pour tout $a \in S_{ad}^m$ *et tout* $b \in S_{ad}^p$.

Preuve. – La proposition résulte facilement de la continuité de la composition des symboles (cf. L. Hörmander [11]).

Dans la suite, on sera amené à comparer le symbole usuel et le symbole de Weyl d'un même opérateur. Soit $A : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ de symbole de Weyl $a^0 \in S^m$ $(m \in \mathbf{R})$. On a alors le :

LEMME 2.5. – A *admet un symbole usuel noté* a^+, $a^+ \in S^m$, *c'est-à-dire que l'on a l'égalité :*

$$Au(x) = \iint a^0\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big)\, u(y)\, e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\, dy\, d\!\!\!{}^-\xi$$
$$= \int a^+(x, \xi)\, \hat{u}(\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\!\!\!{}^-\xi$$

pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. *On a de plus les propriétés suivantes :*

i) $a^0 \longrightarrow a^+$ *est continue de* S^m *dans* S^m ;

ii) *pour tout entier* $N \geqslant 0$,

$$\Big(a^+ - \sum_{|\alpha|<N} (1/2)^{|\alpha|}\, \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a\Big) \in S^{m-N-1}$$

et l'application $a \longrightarrow \Big(a^+ - \sum_{|\alpha|<N} (1/2)^{|\alpha|}\, \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a\Big)$ *est continue de* S^m *dans* S^{m-N-1} ;

iii) $a^0 \longrightarrow a^+$ *est un isomorphisme de* S^m *sur* S^m, *l'isomorphisme inverse* $a \longrightarrow a^-$ *vérifiant :*

$$\Big(a^- - \sum_{|\alpha|<N} (-1/2)^{|\alpha|}\, \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a\Big) \in S^{m-N-1}$$

et vérifiant les mêmes propriétés que l'isomorphisme direct.

Preuve. – D'après R. Beals [2], on sait que $a \longrightarrow {}^t a$ est une application continue de S^m dans S^m où ${}^t a$ désigne le symbole de l'opérateur transposé associé à l'opérateur

$$a_c(x, D)\, u(x) = \int e^{i\langle x,\xi\rangle} a(x, \xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi .$$

Il résulte également de Beals [2] que pour tout entier $N \geqslant 0$ on a :

$$a \longrightarrow \Big({}^t a - \sum_{|\alpha|\leqslant N} \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a\Big) \text{ est continue de } S^m \text{ dans } S^{m-N-1}.$$

Si maintenant on désigne par τ_- la transformation

$$(x, \xi) \longrightarrow \left(x, -\frac{\xi}{2}\right),$$

on a clairement que $a^- = [{}^t(a \circ \tau_-)] \circ \tau_-^{-1}$ et $a^+ = [{}^t(a \circ \tau_+)] \circ \tau_+^{-1}$ où $\tau_+ : (x, \xi) \longrightarrow \left(x, \frac{\xi}{2}\right)$. Le lemme en résulte facilement. On pourrait également faire une démonstration directe en développant $a^0\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)$ au point (x, ξ) par la formule de Taylor avec reste intégral. L'estimation du reste se faisant par des intégrations par parties en profitant de la propriété (1) sur (ϕ, φ).

De ce qui précéde, on va déduire qu'il y a équivalence entre les notions de symbole admissible au sens de Weyl et au sens classique.

PROPOSITION 2.4. — *Soit* $a : [0, h_0[\longrightarrow S^m$, $h_0 > 0$, *un symbole admissible, de développement asymptotique* $a(h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j a_j$. *Alors* a^- *et* a^+ *définis respectivement par* $a^-(h) = (a(h))^-$ *et* $a^+(h) = (a(h))^+$ *sont des symboles admissibles d'ordre* m. *On a de plus* $a^- \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j (a^-)_j$ *et* $a^+ \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j (a^+)_j$ *où*

$$(a^-)_j = \sum_{|\alpha| + k = j} (-1/2)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a_k$$

et
$$(a^+)_j = \sum_{|\alpha| + k = j} (1/2)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a_k .$$

Preuve. — On applique le lemme 2.5 au symbole

$$p_h(x, \xi) = a(h, x, h\xi),$$

puis on écrit que

$$a(h, x, h\xi) = \sum_{j=1}^{N} h^j a_j(x, h\xi) + h^{N+1} r_N(h, x, h\xi),$$

$(r_N(h, x, \xi))_{0<h<h_0}$ étant un borné de S^{m-N-1}.

Par substitution dans $p_h^- = \sum_{|\alpha| \leqslant N} (-1/2)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha p_h + \rho_N(h)$, compte tenu des résultats de continuité du lemme 2.5, on en déduit la proposition 2.4.

2.2. Développement de $(\mathrm{A}(h)-\lambda)^{-1}$, $h \longrightarrow 0$.

Soit $a \in \mathrm{S}^m_{ad}$, $m \geqslant 0$. On lui associe l'opérateur :

$$\mathrm{A}_1(h)\, u(x) = \iint a\left(h\,, \sqrt{h}\left(\frac{x+y}{2}\right), \sqrt{h}\xi\right) e^{i\langle x-y,\xi\rangle} u(y)\, dy\, đ\xi$$

$$(đ\xi = (2\pi)^{-n}\, d\xi).$$

On suppose que $a(h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j a_j$, $0 < h < h_0$. Soit Λ un ouvert de $\mathbf{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel. On fait alors les hypothèses suivantes :

$(\mathrm{He})_1$ Il existe $\mathrm{C}_0 > 0$ et $m' \geqslant 0$ tels que

$$|a_0(x\,,\xi) - \lambda| \geqslant \mathrm{C}_0(|a_0(x\,,\xi)| + |\lambda|)$$

et $|a_0| \geqslant \mathrm{C}_0(\phi\varphi)^{m'}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x\,,\xi \in \mathbf{R}^n$.

$(\mathrm{He})_2$ Pour tout entier $j \geqslant 0$ et tous multiindices α et β, il existe $\mathrm{C}_{j,\alpha,\beta} > 0$ telle que :

$$|\partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta a_j| \leqslant \mathrm{C}_{j,\alpha,\beta}\, |a_0|\, (\phi\varphi)^{-j}\, \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|} \quad \text{pour tout } x\,,\xi \in \mathbf{R}^n.$$

PROPOSITION 2.5. — a) *Il existe* $h'_0 \in\,]0\,, h_0[$ *tel que, pour* $0 < h < h'_0$, $\mathrm{A}_1(h)$ *admet une réalisation et une seule comme opérateur non borné de* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$. *En particulier, si* $a(h\,,x\,,\xi)$ *est réel pour tout* $h \in [0\,, h_0[$, $x\,,\xi \in \mathbf{R}^n$, *alors* $\mathrm{A}_1(h)$ *est essentiellement autoadjoint pour tout* $h \in [0\,, h'_0[$.

b) $(\mathrm{A}_1(h)-\lambda)^{-1}$ *existe pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *et tout* $h \in\,]0\,, h'_0[$. *De plus,* $(\mathrm{A}_1(h)-\lambda)^{-1}$ *possède un symbole de Weyl admissible* $b_\lambda(h)$, $b_\lambda(h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j b_{j,\lambda}$ *où les* $b_{j,\lambda}$ *sont déterminés par :*

c) $$\begin{cases} b_{0,\lambda} = (a_0 - \lambda)^{-1} \\ b_{j+1,\lambda} = -\, b_{0,\lambda} \displaystyle\sum_{\substack{1+|\alpha+\beta|+k=j+1 \\ 0\leqslant l \leqslant j}} \frac{1}{\alpha!}\,\frac{1}{\beta!}\,(1/2)^{|\alpha|}(-1/2)^{|\beta|} \\ \qquad\qquad (\partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta a_k)\,(\partial_\xi^\beta \mathrm{D}_x^\alpha b_{l,\lambda}) \end{cases}$$

d) On a

$$(\mathrm{A}_1(h)-\lambda)^{-1} = \sum_{0\leqslant j\leqslant \mathrm{N}} h^j b^w_{j,\lambda}(\sqrt{h}x\,, \sqrt{h}\mathrm{D}) + h^{\mathrm{N}+1}\, \Delta^{(1)}_{\mathrm{N},\lambda}(h\,, \sqrt{h}x\,, \sqrt{h}\mathrm{D})$$

où, pour tout $k \in \mathbf{R}$, *tout* $N \geqslant 0$, $0 \leqslant j \leqslant N$, *il existe* $C_{j,k,N}$ *telle que* $\| h^j \Delta^{(1)}_{N,\lambda}(h) \|_{\mathcal{L}(H^k_{\phi,\varphi}, H^{k+j}_{\phi,\varphi})} \leqslant C_{j,k,N}(1 + |\lambda|)^{-1}$ *pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *et tout* $h \in]0, h'_0[$.

Preuve. – Posons $A_1(h) = a^w(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}D)$. On établit les différents résultats en inversant le symbole de $A_1(h) - \lambda$. Pour cela, on procède comme dans D. Robert [16] avec en plus un contrôle du paramètre h.

Considérons la suite de symbole définie par c). Il résulte de [16] (lemme 4.1) que l'on a :

$$|\partial^\alpha_\xi D^\beta_x b_{j,\lambda}| \leqslant C_{j,\alpha,\beta}\, |b_{0,\lambda}| \sum_{k=1}^{2j+|\alpha|+|\beta|} |a_0, b_{0,\lambda}|^k (\phi\varphi)^{-j}\, \phi^{-|\alpha|}\, \varphi^{-|\beta|}. \tag{17}$$

On pose $B_{N,\lambda}(h, x, \xi) = \sum_{j=0}^{N} h^j b_{j,\lambda}(x, \xi)$. On déduit de (17) et $(He)_1$ que $B_{N,\lambda} \in S^{-m'}_{ad}$.

La définition des $b_{j,\lambda}$ et la composition des symboles entraînent :

$$[(a - \lambda) \,\#\, B_{N,\lambda}](h) = 1 + h^{N+1} \,.\, r_{N,\lambda}(h). \tag{18}$$

Nous allons établir que :

$$s_{m-N-1,k}(r_{N,\lambda}(h)) \leqslant C_k \left\{ \sum_{0 \leqslant l,k \leqslant N} s_{m,j}(a_l)\, s_{0,j}(b_{l,\lambda}) \right.$$
$$\left. + \, s_{-N-1,j}(B_{N,\lambda}(h))\, s_{m-N-1}(r_{a,N}(h)) \right\}. \tag{19}$$

On utilise le même type d'argument que dans (16) p. 773-774. Il résulte des propositions 2.2 et 2.3 que :

$$(a \,\#\, B_{N,\lambda})(h) = \sum_{j=0}^{N} h^j c_{j,\lambda} + h^{N+1} \sigma_{N,\lambda}(h) \tag*{$(18)_1$}$$

et que $\sigma_{N,\lambda}(h)$ vérifie une estimation du type (19).

On a également (proposition 2.2) :

$$c_{j,\lambda} = \sum_{|\alpha+\beta|+k+l=j} \frac{1}{\alpha!}\,\frac{1}{\beta!} \left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\beta|} (\partial^\alpha_\xi D^\beta_x a_k)\,(\partial^\beta_\xi D^\alpha_x b_{l,\lambda}). \tag*{$(18)_2$}$$

Or on a :

$$[(a - \lambda) \,\#\, B_{N,\lambda}](h) = \sum_{j=0}^{N} h^j c_{j,\lambda} + h^{N+1} \sigma_{N,\lambda}(h) - \lambda B_{N,\lambda}(h) \tag*{$(18)_3$}$$

et la relation de récurrence entre les $b_{j,\lambda}$ donne :

$$(a_0 - \lambda)\, b_{j+1,\lambda} + \sum_{\substack{2+|\alpha+\beta|+k=j+1 \\ l\leqslant j}} \frac{1}{\alpha!}\, \frac{1}{\beta!} \left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\beta|} (\partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta a_k)\, (\partial_\xi^\beta \mathrm{D}_x^\alpha b_{l,\lambda}) = 0 . \qquad (18)_4$$

Il résulte alors de $(18)_2$ et $(18)_4$ que : $c_{j,\lambda} - \lambda b_{j,\lambda} = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant \mathrm{N}$ d'où : $[(a - \lambda)\ \#\ \mathrm{B}_{\mathrm{N},\lambda}](h) = 1 + h^{\mathrm{N}+1} \sigma_{\mathrm{N},\lambda}$, ce qui implique (19).

En utilisant (17) et (19) il vient :

$$|\partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta b_{j,\lambda}| \leqslant \mathrm{C}_{j,\alpha,\beta}(1 + |\lambda|)^{-1} \qquad (20)$$

$$s_{m-\mathrm{N}-1,k}(r_{\mathrm{N},h}(\lambda)) \leqslant \mathrm{C}_k(1 + |\lambda|)^{-1} \qquad (21)$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $h \in\,]0, h_0'[$.

De la même manière, on construit une paramétrix à gauche, qui à l'ordre N, s'écrit $\mathrm{B}'_{\mathrm{N},\lambda}(h, x, \xi) = \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} h^j b'_{j,\lambda}(h, x, \xi)$ où les $b'_{j,\lambda}$ sont définis comme dans c) en échangeant D_x et ∂_ξ. On obtient, comme précédemment :

$$\mathrm{B}'_{\mathrm{N},\lambda}(h)\ \#\ (a(h) - \lambda) = 1 + h^{\mathrm{N}+1} r'_{\mathrm{N},\lambda}(h) ; \qquad (18')$$

puis :

$$|\partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta b'_{j,\lambda}| \leqslant \mathrm{C}'_{j,\alpha,\beta}(1 + |\lambda|)^{-1} \qquad (20')$$

$$s_{m-\mathrm{N}-1,k}(r'_{\mathrm{N},\lambda}(h)) \leqslant \mathrm{C}_k(1 + |\lambda|)^{-1} \qquad (21')$$

pour tout $h \in\,]0, h_0'[$ et tout $\lambda \in \Lambda$.

Désignons par $\mathrm{D}_h^{(1)}$ le complété de $\mathrm{S}(\mathbf{R}^n)$ pour la norme du graphe de $\mathrm{A}_1(h)$. $\mathrm{A}_1(h)$ devient un opérateur fermé de domaine $\mathrm{D}_h^{(1)}$. Il résulte de (18) que l'on a :

$$\mathrm{B}^w_{\mathrm{N},\lambda}(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}\mathrm{D})\, (\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)) \subseteq \mathrm{D}_h^{(1)}. \qquad (22)$$

Utilisons à nouveau (18) puis (21). On obtient que si h_0' est suffisamment petit, $\mathrm{A}_1(h) - \lambda$ est surjectif, de $\mathrm{D}_h^{(1)}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $h \in [0, h_0'[$.

De même (18′) montre que si h_0' est assez petit, $\mathrm{A}_1(h) - \lambda$ est injectif sous les mêmes conditions.

Soit alors $\overline{A_1(h)}$ une autre réalisation de $A_1(h)$. On a évidemment $D_h \subseteq \mathrm{Dom}\,\overline{A}_1(h)$. Fixons $\lambda = 0$. Soit $u \in \mathrm{Dom}\,\overline{A}_1(h)$. Posons $f = \overline{A}_1(h)u$. D'après ce qui précède, il existe $v \in D_h$ tel que $f = A_1(h)v$. (18′) entraîne alors

$$u - v = -h^{N+1} r^{/w}_{N,0}(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}D)(u - v).$$

Or, pour N assez grand, on sait que

$$\| r^{/w}_{N,0}(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}D)\|_{(L^2(R^n), L^2(R^n))} = 0(1)$$

lorsque $h \longrightarrow 0$ d'où $u = v$ et $u \in D^{(1)}(h)$.

De (18) et (18′), on tire :

$$\begin{aligned}(A_1(h) - \lambda)^{-1} &= B^w_{M,\lambda}(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}D) \\ &\quad - h^{M+1} B^{/w}_{M,\lambda}(h, \sqrt{h}.x, \sqrt{h}.D)\, r^w_{M,\lambda}(h, \sqrt{h}.x, \sqrt{h}.D) \\ &\quad - h^{2(M+1)}.\, r^{/w}_{M,\lambda}(h, \sqrt{h}.x, \sqrt{h}.D)(A_1(h) - \lambda)^{-1} r^w_{M,\lambda}(h, \sqrt{h}.x, \sqrt{h}.D)\end{aligned} \tag{23}$$

Soit $M > N$. On pose alors :

$$\Delta^1_{N,\lambda}(h) = h^{-N-1}[(A_1(h) - \lambda)^{-1} - B^w_{N,\lambda}(h, \sqrt{h}.x, \sqrt{h}D)]$$

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}_{N,\lambda}(h) &= h^{-N-1}(B^w_{M,\lambda}(h, \sqrt{h}.x, \sqrt{h}D) - B^w_{N,\lambda}(h, \sqrt{h}.x, \sqrt{h}.D) \\ &\quad - h^{M-N}.\, B^{/w}_{M,\lambda}(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}D)\, r^w_{M,\lambda}(h, \sqrt{h}.x, \sqrt{h}.D) \\ &\quad - h^{2M-N+1}.\, r^{/w}_{M,\lambda}(h, \sqrt{h}.x, \sqrt{h}D).(A_1(h) - \lambda)^{-1}.\, r^w_{M,\lambda}(h, \sqrt{h}.x, \sqrt{h}.D).\end{aligned} \tag{24}$$

De (18′) on déduit qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\|(A_1(h) - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leqslant C(1 + |\lambda|)^{-1} \tag{25}$$

pour $\lambda \in \Lambda$ et tout $h \in [0, h'_0[$.

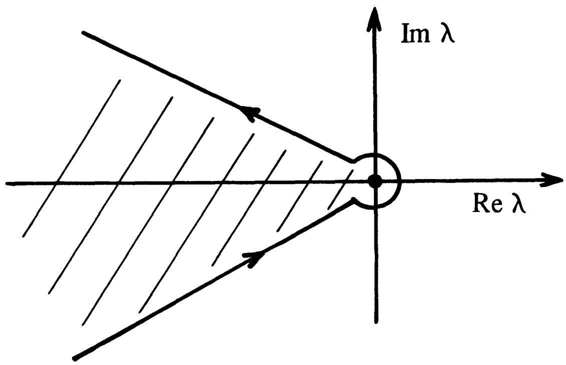
On prouve ainsi les points b), c) et d) en choisissant M assez grand devant N dans (24) puis en utilisant (20), (20′), (21), (21′) et (25).

Remarques. — a) Si $a(h)$ ne contient que des termes de rang pair, alors $\sigma[(A_1(h) - \lambda)^{-1}]$ possède la même propriété (raisonner par récurrence sur les $b_{j,\lambda}$).

b) Dans [8], Grammaticos et Voros ont écrit un développement asymptotique de $(A(h) - \lambda)^{-1}$ que l'on retrouve ici en écrivant que $(A(h) - \lambda)^{-1} = T_h^{-1}(A_1(h) - \lambda)^{-1} T_h$ et l'on obtient de plus une estimation du reste (qui, lorsqu'on l'exprime, est moins bonne a priori que celle donnée dans la proposition 4). On constate ici qu'il est beaucoup plus commode de travailler avec $A_1(h)$ dont le symbole a des propriétés symétriques en x et ξ (cf. Subin [17]).

2.3. Développement de $(A_1(h))^s$, $s \in \mathbf{C}$.

On suppose que l'ouvert Λ du 2.1 contient une zone du type :



délimitée par la courbe Γ orientée comme il est indiqué. $\lambda \longrightarrow \lambda^s$ est définie, holomorphe dans $\mathbf{C} \setminus]-\infty, 0[$ en prenant la détermination principale de la fonction argument : $-\pi < \arg \lambda < \pi$.

Soit alors $a(h) \in S^m_{ad}$ vérifiant $(\mathrm{He})_1$ et $(\mathrm{He})_2$. Soit $s < 0$. Grâce à (25), on peut définir $A_1(h)^s$ par la formule de Cauchy :

$$A_1(h)^s = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s (A_1(h) - \lambda)^{-1}\, d\lambda .$$

Si maintenant $k \leqslant s < k+1$, k entier, on pose

$$A_1(h)^s = A_1(h)^{s-k-1}\, A_1(h)^{k+1} .$$

On renvoie à [16] pour les propriétés formelles des puissances complexes d'opérateurs non bornés.

Proposition 2.6. — *Pour tout* $s \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, s < 0$, $A_1(h)^s \in \mathcal{L}^{-\mathrm{Re}\, s m'}_{ad}$. *Si* $a^{(s)}(h)$ *désigne le symbole de Weyl de* $A_1(h)^s$, *alors*

$$a_{(s)}(h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j a_{j,s}$$

où : $a_{j,s}(x, \xi) = \dfrac{i}{2\pi} \displaystyle\int_\Gamma \lambda^s\, b_{j,\lambda}(x, \xi)\, d\lambda$, *les* $b_{j,\lambda}$ *étant définis dans la proposition 2.5.*

Preuve. – La proposition 4-d) montre immédiatement que $A_1(h)^s \in \mathcal{E}_{ad}^{sm'}$ pour $\mathrm{Re}\, s < 0$ et que

$$A_1(h)^s \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j \left[\frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s b_{j,\lambda}^w(\sqrt{h}x\,,\, \sqrt{h}\mathrm{D})\, d\lambda \right].$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 1 pour avoir : $a(h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j a_{j,s}$.

PROPOSITION 2.7. – *Pour tout* $s \in \mathbf{C}$, $s \geqslant 0$, *on a* $A_1(h)^s \in \mathcal{E}_{ad}^{\mathrm{Re}\, sm}$. *Si* $a_{(s)}(h)$ *désigne le symbole de Weyl de* $A_1(h)^s$, *on a alors* $a_{(s)}(h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j a_{j,s}$. *On peut calculer* $a_{j,s}$ *par la formule :*

$$a_{j,s} = \frac{i}{2\pi} \sum_{|\alpha+\beta|+k+l=j} \frac{1}{\alpha!} \cdot \frac{1}{\beta!} \left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\beta|} \int_\Gamma \lambda^{s-q}\, (\partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta a_{k,q})\, (\partial_\xi^\beta \mathrm{D}_x^\alpha b_{l,\lambda})\, d\lambda$$

où q *est un entier* $> s$ *et* $a_{0,s} = (a_0)^s$.

Preuve. – On écrit que $A_1(h)^s = A_1(h)^q\, A_1(h)^{s-q}$ et on applique les propositions 2, 3 et 6 (i.e. on calcule le symbole de $A_1(h)^s$ en utilisant la formule de composition des symboles admissibles donnée par (15)).

COROLLAIRE 2.1. – *Si* $a(h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^{2j} a_{2j}$, *alors, pour tout* $s \in \mathbf{C}$, *on a* $a_{(s)}(h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^{2j} a_{2j,s}$, *où* $a_{2j,s} \in \mathrm{S}^{\mathrm{Re}\, sm - 2j}$ *si* $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$. *En particulier, si* $a(h\,,x\,,\xi) = a_0(x\,,\xi)$ *et* $c\,.\,\phi^{2m} \leqslant |a_0(x\,,\xi)| \leqslant \mathrm{C}\,.\,\phi^{2m}$, *on a :* $a_{(1/m)}(h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^{2j} a_{2j,1/m}$, *avec la propriété :* $a_{2j,1/m} \in \mathrm{S}^{2-2j}$, *en prenant comme fonctions poids*

$$\varphi = 1 \quad et \quad \phi(x\,,\xi) = (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

Preuve. – Le seul point pas tout à fait évident est que $a_{2j+1,s} = 0$ pour tout $s \in \mathbf{C}$. On sait que cette propriété est vraie pour $\mathrm{Re}\, s < 0$ à cause de la remarque b) et de la formule donnant $a_{j,s}$ dans ce cas. Il est facile de voir alors que $s \longrightarrow a_{j,s}(x\,,\xi)$ est holomorphe. Le principe du prolongement analytique permet de conclure.

COROLLAIRE 2.2. — $A(h)$ *admet un unique prolongement fermé comme opérateur non borné de* $L^2(\mathbf{R}^n)$. *On a de plus*

$$A(h)^s = a^w_{(s)}(h, x, hD) \quad \textit{pour tout} \quad s \in \mathbf{C}.$$

Preuve. — T_h étant un opérateur unitaire de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$, on obtient alors que $A(h)$ admet un unique prolongement fermé. On a :

$$A(h)^s = T_h^{-1} A_1(h)^s T_h, \quad s \in \mathbf{C}$$

d'où $A(h)^s = a^w_{(s)}(h, x, hD)$ puisque $A_1(h)^s = a^w_{(s)}(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}D)$.

COROLLAIRE 2.3. — *Pour tout* $s \in \mathbf{C}$, $A(h)^s$ *possède un symbole* $a^+_{(s)}$ *dans la représentation classique, i.e. dans laquelle :*

$$A^s(h)\, u(x) = \int e^{i\langle x, \xi\rangle} a^+_{(s)}(h, x, h\xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\!\!\!/\xi, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

On désigne $a^+_{(s)}$ *par* a^+. *Si* $a^+(h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j C_j$ *et* $a^+_{(s)}(h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j C_{j,s}$ *les* $C_{j,s}$ *se calculent en fonction des* C_j *par les formules suivantes :*

$$\left\{\begin{aligned} & b^+_{0,\lambda}(x, \xi) = (a_0(x, \xi) - \lambda)^{-1} \\ & b^+_{j+1,\lambda}(x, \xi) = -\, b^+_{0,\lambda} \sum_{\substack{l+|\alpha+\beta|+k=j+1 \\ 0\leq l\leq j}} \frac{1}{\alpha!} \cdot \frac{1}{\beta!}\, \partial^\alpha_\xi C_k\, D^\beta_x b^+_{l,\lambda} \end{aligned}\right. \tag{26}$$

$$C_{0,s} = a_0^s \quad \textit{pour tout} \quad s \in \mathbf{R} \tag{27}$$

$$C_{j,s} = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s b^+_{j,\lambda}\, d\lambda \quad \textit{si} \quad s < 0,\ j \geq 1 \tag{28}$$

$$C_{j,s} = \frac{i}{2\pi} \sum_{|\alpha+\beta|+k+l=j} \frac{1}{\alpha!}\,\frac{1}{\beta!} \int_\Gamma \lambda^{s-q}\, \partial^\alpha_\xi C_{k,q} D^\beta_x b^+_{l,\lambda} \cdot d\lambda \tag{29}$$

où q *est un entier* $> s$.

Preuve. — On utilise le corollaire 2.1 et le lemme 2.5 en remarquant que : $\sum_{j\geq 0} h^j b^+_{j,\lambda} = \left(\sum_{j\geq 0} h^j b_{j,\lambda}\right)^+$. On obtient alors immédiatement (28). (29) en résulte en remarquant que $(a \,\#\, b)^+ = a^+ \overset{+}{\#}\, b^+$ où « $\#$ » (resp. $\#^+$) désigne la composition des symboles définie dans la proposition 2.2 au sens de Weyl (resp. au sens usuel).

COROLLAIRE 2.4. — *Avec les notations du corollaire 2.3, on pose :*

$$\mathrm{SP}(a^+_{(s)}) = a^+_{1,s} - \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 a^+_{0,s}}{\partial x_j\, \partial \xi_j}$$

(analogue du symbole sous-principal pour les OPD*-classiques). On a la relation suivante :* $\mathrm{SP}(a^+_{(s)}) = s\, a_0^{s-1}\, \mathrm{SP}(a^+)$ *pour tout* $s \in \mathbf{R}$.

Preuve. — Avec les notations de la proposition 2.5, on a :

$$b_{1,\lambda} = - b_{0,\lambda}\left[a_1 \,.\, b_{0,\lambda} + \frac{1}{2}\, \partial_{\xi_j} a_0\ \mathrm{D}_{x_j}(a_0 - \lambda)^{-1} \right.$$
$$\left. - \mathrm{D}_{x_j} a_0\, \partial_{\xi_j}(a_0 - \lambda)^{-1} \right] = - a_1 (a_0 - \lambda)^{-2}\,.$$

Pour $\mathrm{Re}\, s \in [0, 1[$, on a donc :

$$a_{1,s} = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^{s-1} (a_0 \,.\, b_{1,\lambda} + a_1 \,.\, b_{0,\lambda})\, d\lambda = s\, a_0^{s-1} \,.\, a_1\,.$$

Or $\mathrm{SP}(a^+_{(s)}) = a_{1,s}$, d'où le corollaire par prolongement analytique.

COROLLAIRE 2.5. — *On suppose ici que* $\varphi = 1$ *et que*

$$\phi(x, \xi) = \lambda(x, \xi) = (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{1/2}\,.$$

Aux hypothèses précédentes on ajoute :

a) *Il existe* $c, \mathrm{C} > 0$ *telles que*

$$c\lambda(x, \xi)^{2m} \leqslant a_0(x, \xi) \leqslant \mathrm{C}\lambda(x, \xi)^{2m}$$

pour tout $x, \xi \in \mathbf{R}^n$.

b) *Pour tous multiindices* α *et* β *il existe* $\mathrm{C}_{\alpha,\beta} > 0$ *telle que :*

$$\left.\begin{array}{l} |\partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta a_0| \leqslant \mathrm{C}_{\alpha\beta}\, \lambda^{(2m - |\alpha| - |\beta|)_+} \\ |\partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_x^\beta a_1| \leqslant \mathrm{C}_{\alpha\beta}\, \lambda^{(2m - 1 - |\alpha| - |\beta|)_+} \end{array}\right\} \quad \textit{uniformément sur } \mathbf{R}^{2n}\,.$$

c) $a(h, x, \xi)$ *est réel pour tout* $h \in [0, h_0[$ *et tout* $x, \xi \in \mathbf{R}^n$.

Posons $q(h, x, \xi) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j q_j(x, \xi)$ *où* $q(h, x, \xi)$ *désigne le symbole usuel de* $(a(h, x, h\mathrm{D}))^{1/m}$. *On a alors :*

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta q_0| \leqslant C'_{\alpha\beta}\, \lambda^{(2-|\alpha|-|\beta|)_+} \tag{30}$$

$$q_0(x\,,\xi) \geqslant C'\ \lambda^2(x\,,\xi) \tag{30'}$$

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta q_1| \leqslant C'_{\alpha\beta}\,.\, \lambda^{(1-|\alpha|-|\beta|)_+} \tag{31}$$

$$\mathrm{SP}(q) = q_1 - \frac{1}{2i}\sum_{j=1} \frac{\partial^2 q_0}{\partial x_j\, \partial \xi_j} \qquad \textit{est réel (nul si } a_1 \equiv 0). \tag{32}$$

Preuve. – Par récurrence sur $|\alpha| + |\beta|$, on montre facilement :

$$\partial_\xi^\alpha D_x^\beta (a_0^s) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\\ \beta=(\beta_1,\dots,\beta_k)\\ 1\leqslant k\leqslant |\alpha|+|\beta|}} C_{\beta_1,\dots,\beta_k}^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(s)\, (\partial_\xi^{\alpha_1} D_x^{\beta_1} a_0)\dots(\partial_\xi^{\alpha_k} D_x^{\beta_k} a_0)\, a_0^{s-k} \tag{33}$$

où $C_{\beta_1,\dots,\beta_k}^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}(s)$ sont des coefficients universels.

Or on a : $q_0 = a_0^{1/m}$ d'où (33) implique (30). Or :

$$\mathrm{SP}(q) = a_{1,1/m} = \frac{1}{m}\, a_0^{(1/m)-1}\, a_1$$

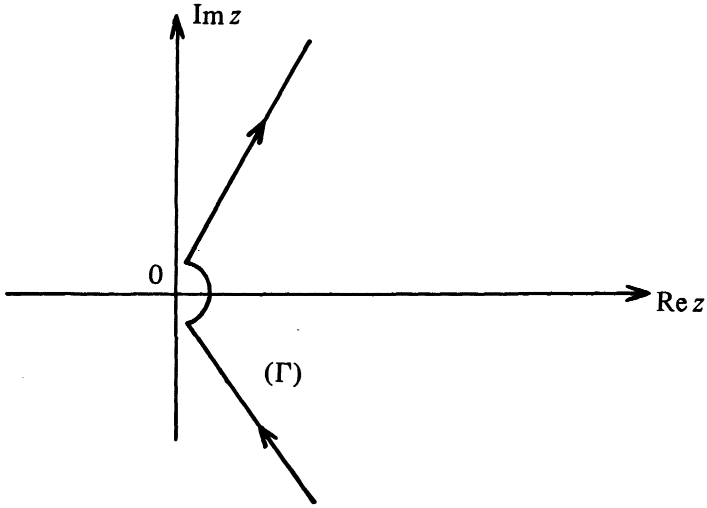
(cf. démonstration du corollaire 2.4). A l'aide de la formule de Leibniz, on obtient : $|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \mathrm{SP}(q)| \leqslant C_{\alpha\beta}\, \lambda^{(1-|\alpha|-|\beta|)_+}$ d'où (31) en résulte en utilisant (30) et la définition de $\mathrm{SP}(q)$. De

$$a_1(x\,,\xi) = \frac{\partial}{\partial h}\, a(h\,,x\,,\xi)\Big|_{h=0}\,,$$

on déduit que a_1 est réel. a_0 est bien sûr réel donc $\mathrm{SP}(q)$ également par le corollaire 2.4.

2.4. Quelques propriétés du spectre de $A(h)$.

Ces propriétés vont résulter facilement de l'étude faite dans la proposition 2.5. On suppose ici que Λ est un secteur de sommet 0, symétrique par rapport à l'axe réel d'ouverture $>\pi$ et contenant $]-\infty, 0[$. On choisit un contour Γ dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ comme ci-dessous :



LEMME 2.6. – *Pour tout* $N \in \mathbf{N}$ *et tous* $k, j \in \mathbf{R}$, $j \leqslant N$, *il existe* $C_{j,k,N} > 0$ *telle que :*

$$\| h^j \Delta^{(1)}_{N,\lambda}(h) \|_{\mathcal{L}(H^{k+m}_{\phi,\varphi}, H^{k+j}_{\phi,\varphi})} \leqslant C_{j,k,N}(1 + |\lambda|)^{-2} \tag{34}$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$ *et tout* $h \in]0, h'_0[$.

Preuve. – On utilise l'expression (24) de $\Delta^1_{N,\lambda}(h)$ puis on tient compte des estimations (21), (21'), (25).

PROPOSITION 2.7. – *Sous les hypothèses* $(\mathrm{He})_1$ *et* $(\mathrm{He})_2$ *du* § 2, *on a le développement asymptotique :*

$$\mathrm{Trace}\,[e^{-tA(h)}] \sim h^{-n} \sum_{j \geqslant 0} h^j . \varphi_j(t) \tag{35}$$

lorsque $h \longrightarrow 0$, $t > 0$ *où* $\varphi_j(t) = \iint \left(\frac{i}{2\pi} \int_\Gamma e^{-t\lambda} . b_{j,\lambda} \, d\lambda \right) dx \, d\!\!/\xi$.

En particulier :

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = \iint e^{-ta_0(x,\xi)} \, dx \, d\!\!/\xi \\ \varphi_1(t) = -t \iint a_1(x,\xi) \, e^{-ta_0(x,\xi)} \, dx \, d\!\!/\xi . \end{cases}$$

(35) a lieu au sens suivant : il existe un entier N_0 *tel que, pour* $N \geqslant N_0$, *il existe* $C_N > 0$ *de sorte que :*

$$|\operatorname{Trace} e^{-tA(h)} - h^{-n} \sum_{j=0}^{N} h^j \varphi_j(t)| \leqslant C_N h^{N+1-n}$$

pour tout $h \in]0, h_0'[$ *et tout* $t > 0$.

Preuve. – On a Trace $[e^{-tA(h)}]$ = Trace $[e^{-tA_1(h)}]$ et

$$e^{-tA_1(h)} = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma e^{-t\lambda} (A_1(h) - \lambda)^{-1} d\lambda. \tag{36}$$

On utilise alors le point d) de la proposition 2.5. Il vient :

$$\begin{aligned} e^{-tA_1(h)} = \sum_{j=0}^{N} h^j \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma e^{-t\lambda} b_{j,\lambda}^w(\sqrt{h}x, \sqrt{h}D)\, d\lambda \\ + h^{N+1} \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma e^{-t\lambda} . \Delta_{N,\lambda}^{(1)w}(h, \sqrt{h}.x, \sqrt{h}.D)\, d\lambda. \end{aligned} \tag{37}$$

(35) résulte alors de (34) et (37) en utilisant le :

LEMME 2.7. – *Il existe un réel* $k_0 > 0$ *et* $C > 0$ *tels que :*

$$\|A\|_{Tr} \leqslant C \, \|A\|_{\mathcal{L}(H^{-k_0}, H^{k_0})} \tag{38}$$

pour tout $A \in \mathcal{L}(H^{-k_0}, H^{k_0})$.

Preuve. – D'après R. Beals [2], on sait qu'il existe un OPD V d'ordre $-k_0$ qui soit un isomorphisme de H^{-k_0} sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. Alors l'adjoint V^* de V, au sens de $L^2(\mathbf{R}^n)$, est un isomorphisme de $L^2(\mathbf{R}^n)$ sur H^{k_0}. Posons alors $B = V^{*-1}.A.V^{-1}$. On a $A = V^*.B.V$ d'où $\|A\|_{Tr} \leqslant \|V^*B\|_{H.S} . \|V\|_{H.S}$. Or $B \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n), L^2(\mathbf{R}^n))$ et V, V^* sont de classe Hilbert-Schmidt si k_0 est assez grand (cf. D. Robert [16] prop. 3.2). On obtient alors :

$$\|A\|_{Tr} \leqslant \|V\|_{H.S}^2 . \|A\|_{\mathcal{L}(H^{-k_0}, H^{k_0})} \quad \text{d'où (38).}$$

Sous l'hypothèse supplémentaire que a_0 prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$, on va préciser le comportement en t de (35) :

LEMME 2.8. – *Pour tout entier* $j \geqslant 1$ *et tout réel* $\delta' \in \left]0, \frac{1}{m}\right[$, *on a* $\varphi_j(t) = 0(t^{j\delta'} \varphi_0(t))$ *lorsque* $t \longrightarrow 0$, $t > 0$.

Preuve. – Par récurrence sur j, on prouve facilement que : $b_{j,\lambda} = \sum_{k=1}^{j} \gamma_{j,k}(a_0 - \lambda)^{-k-1}$ où les symboles $\gamma_{j,k}$ vérifient :

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \gamma_{j,k}| \leqslant C\,|a_0|^k (\phi\,.\,\varphi)^{-j}\,.\,\phi^{-|\alpha|}\,.\,\varphi^{-|\beta|}$$

d'où il résulte :

$$|\varphi_j(t)| \leqslant C \sum_{k=1}^{j} \iint (t\,.\,a_0)^k\, a_0^{-j/m}\,.\,e^{-ta_0}\,dx\,d\xi$$
$$\leqslant C t^{j/m} \sum_{k=1}^{j} \iint (t\,.\,a_0)^{k-j/m}\,.\,e^{-ta_0}\,dx\,d\xi\,.$$

D'où, pour tout réel $\theta \in]0,1]$, il existe $C_\theta > 0$ telle que :

$$|\varphi_j(t)| \leqslant C_\theta\, t^{j/m} \iint e^{-\theta t a_0}\,dx\,d\xi\,. \tag{39}$$

Posons $F_t(\theta) = \iint e^{-\theta t a_0(x,\xi)}\,dx\,d\xi$. On a l'inégalité de convexité :

$$F_t(\theta) \leqslant \left(F_t\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{2(1-\theta)}\,.\,(F_t(1))^{2\left(\theta-\frac{1}{2}\right)} \tag{40}$$

pour tout $\theta \in [1/2, 1]$.

D'autre part, (1) et $(\mathrm{He})_1$ entraînent qu'il existe $C > 0$ telle que $|F_t(1/2)| \leqslant C\, t^{-(n/m'\delta)}$.

D'où, en choisissant θ assez proche de 1 dans (39) et en utilisant (40), on obtient le lemme 2.8.

De la proposition 2.7 on déduit alors les :

COROLLAIRE 2.6. – *Pour tout* $\delta' \in \left]0, \frac{1}{m}\right[$, *il existe* $C_{\delta'} > 0$ *telle que :*

$$|\mathrm{Trace}\,[e^{-tA(h)}] - h^{-n}\varphi_0(t)| \leqslant C\, h^{-n+1}\, t^{\delta'}\varphi_0(t) \tag{41}$$

pour tout $h \in]0, h'_0[$ *et tout* $t \in]0, t_0[$ ($t_0 > 0$ *fixé*).

COROLLAIRE 2.7. – *On suppose que* $A(h)$ *est autoadjoint pour* $h \in]0, h_0[$ *et que* a_0 *vérifie : il existe* C_1, C_2, R *des réels* > 0 *tels que* $C_1(|x|^2 + |\xi|^2)^m \leqslant a_0(x,\xi) \leqslant C_2(|x|^2 + |\xi|^2)^m$ *pour* $|x|^2 + |\xi|^2 \geqslant R$. *Si* $(\lambda_j(h))_{j\geqslant 1}$ *désigne la suite croissante des valeurs propres de* $A(h)$ *alors il existe* $C > 0$ *telle que :*

$$N_h(\lambda) = \text{card}\,\{j\,,\ \lambda_j(h) \leqslant \lambda\} \leqslant C\,h^{-n}(1+\lambda)^{n/m} \tag{42}$$

pour tout $h \in\,]0\,, h_0'[$ *et tout* $\lambda \in\,]0\,, +\infty[$.

Preuve. — On a $N_h(\lambda) = \int_0^\lambda dN_h(\tau) \leqslant e \int_0^\lambda e^{-\frac{\tau}{\lambda}} dN_h(\tau)$. Or $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{\lambda}}\, dN_h(\tau) = \text{Trace}\,[e^{-\frac{1}{\lambda}A(h)}]$, d'où, en utilisant (41), il vient : $N_h(\lambda) \leqslant C'\,h^{-n}\,\varphi_0(\lambda^{-1}) \leqslant C''\,h^{-n}(1+\lambda)^{n/m}$.

Remarques. —

1) La formule (35) donne un sens précis au développement formel que l'on trouve dans Grammaticos-Voros [8].

2) Le corollaire 2 n'est pas nouveau. Nous le donnons ici car c'est une conséquence facile de ce qui précède et de plus il nous servira dans la suite.

3. APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE DE L'EQUATION DE SCHRÖDINGER

Ce paragraphe est consacré à l'étude du problème :

$$(S_h)\quad \begin{cases} ih\,\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\,(t\,,x) = q(h\,,x\,,hD_x)\,\psi(t\,,x) \\ \psi(0\,,x) = \psi_0(x) \end{cases}$$

où $q(h\,,x\,,\xi)$ est un symbole admissible d'ordre 2 i.e. $q(h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j q_j$ vérifiant les propriétés (30), (31) et (32) du corollaire 5 (2). On suppose de plus qu'il existe $c\,, C > 0$ tels que :

$$c\lambda^2(x\,,\xi) \leqslant q_0(x\,,\xi) \leqslant C\lambda^2(x\,,\xi) \tag{1}$$

pour tout $(x\,,\xi) \in \mathbf{R}^{2n}$ et que $Q(h) = q(h\,,x\,,hD_x)$ est autoadjoint pour tout $h \in\,]0\,, h_0[\,,\ h_0 > 0$.

Le problème (S_h) est résolu abstraitement par

$$\psi(t\,,x) = [U_h(t)\,\psi_0]\,(x)$$

où $U_h(t) = \exp(-\,ih^{-1}\,tQ(h))$ est un groupe unitaire de $L^2(\mathbf{R}^n)$.

D'après la théorie de Maslov [14], on sait que $U_h(t)$ est un opérateur intégral de Fourier et que la méthode B.K.W. donne un développement asymptotique lorsque h tend vers 0. Comme l'a remarqué J. Chazarain [4], la théorie de Maslov ne semble pas pouvoir donner facilement des estimations pour les restes des développements asymptotiques obtenus.

Pour décrire les opérateurs que nous allons considérer, il est commode d'introduire la classe de symboles :

DEFINITION 3.1. – *Soient* T *et* h_0 *des réels* >0 *fixés. Pour* $m, p \in \mathbf{R}$, *on désigne par* $A^{m,p}$ *l'espace des fonctions*

$$b(t, x, \eta, h) \in C^\infty(]-T, T[\times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times]0, h_0[)$$

telles que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$, $k \in \mathbf{N}$, *il existe* $C_{\alpha,\beta,k}$ *de sorte que :* $|\partial_t^k \partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta b(t, x, \eta, h)| \leqslant C_{\alpha\beta k} h^p \lambda^{m+k}(x, \eta)$ *pour tout* $(t, x, \eta, h) \in]-T, T[\times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times]0, h_0[$.

Suivant la méthode B.K.W., on cherche une approximation $U_h^{(N)}$ de U_h pour $|t| \leqslant T$, T assez petit, sous la forme :

$$U_h^{(N)}(t).\, f(x) = h^{-n}. \iint e^{ih^{-1}(S(t,x,\eta)-y.\eta)}\, . \left[\sum_{j=0}^{N} h^j a_j(t, x, \eta)\right] f(y)\, dy\, d\eta . \qquad (2)$$

Ce qui conduit à chercher une phase S et des amplitudes a_j, $0 \leqslant j \leqslant N$, de sorte que :

$$e^{-ih^{-1}S(t,x,\eta)}(ih\partial_t - Q(h))\, e^{ih^{-1}S(t,x,\eta)}. \left[\sum_{j=0}^{N} h^j a_j(t, x, \eta)\right] \in A^{0,N+2} \qquad (3)$$

$$S(0, x, \eta) = x\, .\, \eta \qquad (4)$$

$$a_0(0, x, \eta) = 1\, ,\ a_j(0, x, \eta) = 0 \text{ pour } j \geqslant 1\, . \qquad (5)$$

De (3) et de la théorie des opérateurs intégraux de Fourier globaux de Asada-Fujiwara [1], on pourra déduire une estimation sur $U_h(t) - U_h^{(N)}(t)$.

Classiquement, on réalise la condition (3) en annulant les puissances de h d'ordre $\leqslant N+1$, ce qui conduit naturellement à une équation caractéristique et des équations de transport. Cette étude est une adaptation de celle faite par J. Chazarain [4] pour l'opérateur de Schrödinger usuel. Aussi nous renvoyons à [4] pour les démonstrations que nous omettrons ici.

3.1. Calcul de $e^{-ih^{-1}S(t,x,\eta)}q(h\,,x\,,hD_x)\,[e^{ih^{-1}S(t,x,\eta)}a(t\,,x\,,\eta\,,h)]$.

Soit $s : \mathbf{R}^{2n} \times\,]0\,,h_0[\longrightarrow \mathbf{C}$ un symbole vérifiant :

Pour tous multiindices α et β, il existe $C_{\alpha\beta} > 0$ telle que :

$$|D_x^\beta \partial_\xi^\alpha s(x\,,\xi\,,h)| \leqslant C_{\alpha\beta} h^{K} . \lambda^{m-|\alpha|}(x\,,\xi) \tag{6}$$

pour tout $(x\,,\xi\,,h) \in \mathbf{R}^{2n} \times\,]0\,,h_0]$.

On désigne par $S^{m,K}$ la classe des symboles vérifiant (6). Notons l'inclusion $S^{m,K} \subset A^{m,K}$. Soient alors $s \in S^{m,K}$ et $a \in A^{p,L}$. On suppose que la phase $S :]-T\,,T[\times \mathbf{R}^{2n} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction C^∞ vérifiant :

Il existe $c\,,C > 0$ telles que $C\lambda^2(x\,,\eta) \leqslant |\partial_t S| \leqslant C\lambda^2(x\,,\eta)$ pour tout $(t\,,x\,,\eta) \in\,]-T\,,T[\times \mathbf{R}^{2n}$ (7)

Si $|\alpha| + |\beta| + k \geqslant 2$ on a : $|\partial_t^k \partial_\eta^\alpha D_x^\beta S| \leqslant C_{\alpha\beta k} \cdot \lambda^k(x\,,\eta)$. (8)

Si $|\alpha| + |\beta| = 1$ on a : $|\partial_\eta^\alpha D_x^\beta S| \leqslant C_{\alpha\beta}\,\lambda(x\,,\eta)$ pour tout $(t\,,x\,,\eta) \in [-T\,,T] \times \mathbf{R}^{2n}$. (9)

Posons alors

$$b(t\,,x\,,\eta\,,h) = e^{-ih^{-1}S(t,x,\eta)} s(x\,,hD_x\,,h)\,[e^{ih^{-1}S(t,\cdot,\eta)} a(t\,,\cdot\,,\eta\,,h)] .$$

Au sens des intégrales oscillantes, on a :

$$b(t\,,x\,,\eta\,,h) \tag{10}$$
$$= \iint e^{i\langle x,y,\xi\rangle} s(x\,,h\xi\,,h)\, a(t\,,y\,,\eta\,,h)\, e^{ih^{-1}(S(t,y,\eta)-S(t,x,\eta))}\, dy\, đ\xi .$$

On fait le changement de variables $\tilde{\xi} = h\xi$ et on pose :

$$\psi(t\,,x\,,y\,,\eta) = S(t\,,y\,,\eta) - S(t\,,x\,,\eta) + \langle x - y\,, \frac{\partial S}{\partial x}(t\,,x\,,\eta)\rangle .$$

(10) devient :

$$b(t\,,x\,,\eta\,,h) = h^{-n} \iint e^{ih^{-1}\langle x-y,\xi\rangle} . s\left(x\,,\xi + \frac{\partial S}{\partial x}\,,h\right) e^{ih^{-1}\psi(t,x,y,\eta)} . a(t\,,y\,,\eta\,,h)\, dy\, đ\xi . \tag{11}$$

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, il vient :

$$b(t\,,x\,,\eta\,,h) = \sum_{|\alpha|<N} b_\alpha(t\,,x\,,\eta\,,h) + b^{(N)}(t\,,x\,,\eta\,,h) \tag{12}$$

ou

$$b_\alpha(t, x, \eta, h) = h^{-n} \iint e^{ih^{-1}\langle x-y,\xi\rangle}(\partial_\xi^\alpha s)\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x, \eta, h)\right) \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}$$
$$. e^{ih^{-1}\psi} a(t, y, \eta, h)\, dy \, d\!\!\!/\xi \quad (13)$$

et

$$b^{(N)}(t, x, \eta, h) = h^{-n} \int_y \int_\xi \int_0^1 e^{ih^{-1}\langle x-y,\xi\rangle}(1-\sigma)^N \quad (14)$$
$$. \left[\sum_{|\alpha|=N} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha s)\left(x, \frac{\partial S}{\partial x} + \sigma\xi\right)\right] e^{ih^{-1}\psi} a(t, y, \eta, h)\, dy \, d\!\!\!/\xi \, d\sigma.$$

Une intégration par parties dans (13) donne :

$$b_\alpha(t, x, \eta, h) = h^{|\alpha|}(\alpha!)^{-1} (\partial_\xi^\alpha s)(x, \partial_x S, h)\, C_\alpha(t, x, \eta, h) \quad (15)$$

avec

$$C_\alpha(t, x, \eta, h) = D_y^\alpha [e^{ih^{-1}\psi(t,x,y,\eta)} . a(t, y, \eta, h)]|_{y=x} . \quad (16)$$

On a alors le :

LEMME 3.1. — *Sous les hypothèses précédentes :*

$$b_\alpha \in A^{(m-|\alpha|)_+ + P,\, K+L+\frac{|\alpha|}{2}} \quad \textit{si } |\alpha| \textit{ est paire}$$
$$b_\alpha \in A^{(m-|\alpha|)_+ + P,\, K+L+\frac{|\alpha|+1}{2}} \quad \textit{si } |\alpha| \textit{ est impaire.}$$

Preuve. — On a clairement, compte tenu de (8) et (9),

$$\partial_\eta^\alpha s(x, \partial_x S, h) \in A^{(m-|\alpha|)_+, K}.$$

La définition de ψ implique :

$$\begin{cases} \psi(t, x, x, \eta) = 0 \\ \partial_y \psi(t, x, y, \eta)|_{y=x} = 0 \\ \partial_y \psi(t, x, y, \eta)|_{y=x} = \partial_x^\alpha S(t, x, \eta) \quad \text{pour} \quad |\alpha| \geqslant 2 \end{cases} \quad (17)$$

ce qui entraîne :

$$D_y^\beta(e^{ih^{-1}\psi})|_{y=x} = \sum_{\substack{|j_1|+\ldots+|\gamma_j|=|\beta| \\ |j_i|\geqslant 2}} C_{\gamma_1,\ldots,\gamma_j} (\partial_x^{\gamma_1} S)\, h^{-1} \ldots (\partial_x^{\gamma_j} S)\, h^{-1}.$$

Compte tenu de la formule de Leibniz, on en déduit le lemme 3.1.

LEMME 3.2. — *Sous les hypothèses du lemme 3.1, on a :*

$$b^{(N)} \in A^{(m-N)_+ + p,\, K+L+\frac{N}{2}}.$$

Preuve. – On a $b^{(N)} = \sum_{N \leqslant |\alpha| < M} b_\alpha + b^{(M)}$. On va donc estimer $\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\eta^\gamma b^{(M)}$ pour M assez grand. On part de :

$$b^{(M)}(t, x, \eta, h) = \sum_{|\alpha|=M} (\alpha!)^{-1} h^{M-n} . \int_y \int_\xi \int_0^1 e^{ih^{-1}\langle x-y, \xi\rangle} \tag{19}$$
$$. (1-\sigma)^M D_y^\alpha (e^{ih^{-1}\psi} . a)\, (\partial_\xi^\alpha s)\left(x, \frac{\partial S}{\partial x} + \sigma\xi\right) dy\, d\!\!\!/\xi\, d\sigma$$

d'où $\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\eta^\gamma b^{(M)}$ est une somme de termes du type :

$$E = \int_y \int_\xi \int_0^1 D_x^{\beta'}(e^{ih^{-1}\langle x-y, \xi\rangle})\, D_y^\alpha D_x^{\beta''} D_\eta^{\gamma'} \partial_t^{k'}(e^{ih^{-1}\psi} . a) . (1-\sigma)^M$$
$$. \partial_t^{k''} D_x^{\beta''} . D_\eta^{\gamma''} \left[(\partial_\xi^\alpha s)\left(x, \frac{\partial S}{\partial x} + \sigma\xi\right)\right] dy\, d\!\!\!/\xi\, d\sigma \tag{20}$$

où

$$\left\{\begin{array}{r} |\beta'| + |\beta''| + |\beta''| = |\beta| \\ |\gamma'| + |\gamma''| = |\gamma| \\ k' + k'' = k. \end{array}\right.$$

Par intégration par parties, on a aussi :

$$E = \int_y \int_\xi \int_0^1 e^{ih^{-1}\langle x-y, \xi\rangle} . D_x^{\beta''} D_\eta^{\gamma'} \partial_t^{k'} D_y^{\alpha+\beta'} (e^{ih^{-1}\psi} . a)\, (1-\sigma)^M$$
$$. D_x^{\beta'''} D_\eta^{\gamma''} \partial_t^{k''} \left[(\partial_\xi^\alpha s)\left(x, \frac{\partial S}{\partial x} + \sigma\xi\right)\right] dy\, d\!\!\!/\xi\, d\sigma .$$

E s'écrit encore sous la forme :

$$E = \int\int\int_0^1 e^{ih^{-1}\langle x-y, \xi\rangle} (1-\sigma)^M\, D_x^{\alpha_1} D_y^{\beta_1} D_\eta^{\gamma_1} D_t^{k_1} (e^{ih^{-1}\psi} . a)$$
$$p(x, t, \xi, \sigma, \eta, h)\, dy\, d\!\!\!/\xi\, d\sigma \tag{21}$$

où

$$(*) \left\{\begin{array}{l} k_1 \leqslant k \\ |\alpha_1| \leqslant |\beta| \\ M \leqslant |\beta_1| \leqslant M + |\beta| \\ |\gamma_1| \leqslant |\gamma| \end{array}\right.$$

et p vérifie : pour tout $\delta > 0$ il existe $C_\delta > 0$ telle que :

$$|D_\xi^\delta p(x, t, \xi, \sigma, \eta)| \leqslant C_\delta h^K . \lambda(x, \eta)^{k-k_1} \tag{22}$$

uniformément par rapport à x, t, ξ, σ, η.

On commence par rendre absolument convergente, par rapport à ξ, l'intégrale définissant E, en remarquant que :

$$(1 - h^2 \Delta_y)^j e^{ih^{-1}\langle x-y,\xi\rangle} = (1 + |\xi|^2)^j e^{ih^{-1}\langle x-y,\xi\rangle}.$$

On est donc ramené à étudier :

$$\mathrm{F} = \int\int\int_0^1 e^{ih^{-1}\langle x-y,\xi\rangle}(1-\sigma)^{\mathrm{M}} \mathrm{D}_x^{\alpha_1}\mathrm{D}_y^{\beta_1}\mathrm{D}_\eta^{\gamma_1}\mathrm{D}_t^{k_1}(e^{ih^{-1}\psi}.a) \\ . p(x,t,\xi,\sigma,\eta,h)(1+|\xi|^2)^{-n} đ\xi\, dy\, d\sigma, \qquad (23)$$

sous les mêmes conditions que précédemment.

Soit $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, $\mathrm{supp}\,\chi \subset]-2,2[$, $\chi = 1$ sur $[-1,1]$. On pose :

$$\mathrm{F}_1 = \int\int\int_0^1 e^{ih^{-1}\langle x-y,\xi\rangle}(1-\sigma)^{\mathrm{M}}\chi\left((x-y)h^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \mathrm{D}_x^{\alpha_1}\mathrm{D}_y^{\beta_1}\mathrm{D}_\eta^{\gamma_1}\mathrm{D}_t^{k_1}(e^{ih^{-1}\psi}.a).p(1+|\xi|^2)^{-n}\, d\xi\, dy\, d\sigma.$$

$$\mathrm{F}_2 = \mathrm{F} - \mathrm{F}_1.$$

Pour alléger l'écriture, on fait la convention suivante : si

$$d(x,t,y,\eta,h,s) \quad \text{et} \quad e(x,t,y,\eta,h,s)$$

sont deux fonctions C^∞ sur

$$\mathbf{R}^n \times [-\mathrm{T},\mathrm{T}] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times]0,h_0[\times [0,1],$$

on écrira $|d| \lesssim |e|$ s'il existe une constante C indépendante de (x,t,y,η,h,s) telle que $|d| \leqslant \mathrm{C}\,|e|$. On établit des estimations sur la fonction

$$\psi(t,x,y,\eta) = \mathrm{S}(t,y,\eta) - \mathrm{S}(t,x,\eta) + \left\langle x-y, \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}(t,x,\eta)\right\rangle.$$

LEMME 3.3. – *Si* $|\widetilde{\alpha}| + |\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}| + \widetilde{k} = 1$, *on a :*

$$|\partial_x^{\widetilde{\alpha}}\partial_y^{\widetilde{\beta}}\partial_\eta^{\widetilde{\gamma}}\partial_t^{\widetilde{k}}\psi| \lesssim |x-y|(\lambda(x,\eta) + |x-y|)^{\widetilde{k}}. \qquad (24)$$

Si $|\widetilde{\alpha}| + |\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}| + \widetilde{k} \geqslant 1$, *on a :*

$$|\partial_x^{\widetilde{\alpha}}\partial_y^{\widetilde{\beta}}\partial_\eta^{\widetilde{\gamma}}\partial_t^{\widetilde{k}}\psi| \lesssim (1+|x-y|)(\lambda(x,\eta)+|x-y|)^{\widetilde{k}}. \qquad (25)$$

Preuve du lemme 3.3. – Compte tenu des estimations sur S, on a :

$$|\partial_\eta^{\widetilde{\gamma}}\partial_t^{\widetilde{k}}\psi| \lesssim |x-y|(\lambda(x,\eta)+|x-y|)^{\widetilde{k}}. \qquad (26)$$

Or $\partial_{x_i}\psi = \left\langle \dfrac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial x_i}, x - y \right\rangle$ d'où :

$$|\partial_{x_i}\partial_\eta^{\tilde\gamma}\partial_t^{\tilde k}\psi| \lesssim |x-y|\,\lambda(x,\eta)^{\tilde k}. \tag{27}$$

De $\partial_{y_i}\psi = \dfrac{\partial S}{\partial x_i}(t, y, \eta) - \dfrac{\partial S}{\partial x_i}(t, x, \eta)$ on déduit :

$$|\partial_{y_i}\partial_\eta^{\tilde\gamma}\partial_t^{\tilde k}\psi| \lesssim (|y-x| + \lambda(x,\eta))^{\tilde k}\,|y-x|. \tag{28}$$

De $\partial_{x_i}\partial_{y_j}\psi = -\dfrac{\partial^2 S}{\partial x_i\, \partial x_j}(t, x, \eta)$ on tire :

$$|\partial_{x_i}\partial_{y_j}\partial_\eta^{\tilde\gamma}\partial_t^{\tilde k}\psi| \lesssim \lambda(x,\eta)^{\tilde k} \tag{29}$$

et de $\partial_{y_i}\partial_{y_j}\psi = \dfrac{\partial^2 S}{\partial x_i\, \partial x_j}(t, y, \eta)$ il vient :

$$|\partial_{y_i}\partial_{y_j}\partial_x^{\tilde\beta}\partial_\eta^{\tilde\gamma}\partial_t^{\tilde k}\psi| \lesssim (\lambda(x,\eta) + |x-y|)^{\tilde k}. \tag{30}$$

D'où l'on déduit (24) et (25) (les autres cas se traitant de la même manière).

Fin de la preuve du lemme 3.2. — Commençons par estimer F_1. Comme $|x-y| \leqslant 2\sqrt{h}$ sur le support de χ, l'intégrale F_1 est absolument convergente. Il vient alors compte tenu de (22) :

$$|F_1| \lesssim h^{\frac{n}{2}+K} \sup_{|y-x|\leqslant 2\sqrt{h}} |D_x^{\alpha_1} D_y^{\beta_1} D_\eta^{\gamma_1} D_t^{k_1}(e^{ih^{-1}\psi}\,.\,a)|. \tag{31}$$

On a facilement :

$$|D_x^{\alpha'} D_y^{\beta''} D_\eta^{\gamma''} D_t^{k''}\,.\,a| \lesssim h^{L}\,\lambda^{p+k''}(x,\eta) \quad \text{si} \quad |x-y| \leqslant 2\sqrt{h} \tag{32}$$

et le lemme 3 entraîne :

$$|D_t^{k'} D_x^{\alpha'} D_y^{\beta'} D_\eta^{\gamma'}(e^{ih^{-1}\psi})| \lesssim h^{-(|\alpha'|+|\beta'|+|\gamma'|+k')/2}\,.\,\lambda^{k'}(x,\eta) \tag{33}$$

sous la condition $|x-y| \leqslant 2\sqrt{h}$.

La formule de Leibniz donne alors :

$$|F_1| \lesssim h^{K+L+\frac{n}{2}-(|\alpha_1|+|\beta_1|+|\gamma_1|+k_1)/2}\,.\,\lambda^{p+k}(x,\eta). \tag{34}$$

Passons à l'estimation de F_2. On commence par intégrer par parties en ξ, en utilisant la relation :

$$(-\Delta_\xi)^r\,(e^{ih^{-1}\langle x-y,\xi\rangle}) = h^{-r}\,|x-y|^{2r}.\,e^{ih^{-1}\langle x-y,\xi\rangle}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}F_2 = h^{2r}\int\!\!\int\!\!\int_0^1 [1-\chi((x-y).h^{-\frac{1}{2}})]\,D_x^{\alpha_1}D_y^{\beta_1}D_\eta^{\gamma_1}\partial_t^{k_1}(e^{ih^{-1}\psi}.a)\\ (1-\sigma)^{M}.\,|x-y|^{-2l}\,e^{ih^{-1}\langle x-y,\xi\rangle}\,p_r(x,t,\xi,\eta,\sigma,h)\\ (1+|\xi|^2)^{-n}\,dy\,d\xi\,d\sigma \qquad (35)\end{aligned}$$

où p_r vérifie (22). Pour $r \geqslant n$, on en déduit :

$$\begin{aligned}|F_2| \lesssim h^{2r+K} \sup_{\substack{y\\ |x-y|\geqslant h^{1/2}}} [|x-y|^{2n-2r}|\,D_x^{\alpha_1}D_y^{\beta_1}D_\eta^{\gamma_1}D_t^{k_1}(e^{ih^{-1}\psi}.a)|\\ \int\!\!\int_{|x-y|\geqslant h^{1/2}} |x-y|^{-2n}(1+|\xi|^2)^{-n}\,dy\,d\xi] \qquad (36)\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}|F_2| \lesssim h^{2r+K-n/2}\\ \sup_{\substack{y\\ |x-y|\geqslant h^{1/2}}} [|x-y|^{2n-2r}|\,D_x^{\alpha_1}D_y^{\beta_1}D_\eta^{\gamma_1}D_t^{k_1}(e^{ih^{-1}\psi}.a)|]. \qquad (37)\end{aligned}$$

Comme précédemment, on utilise la formule de Leibniz et le lemme 3.3. De (37) on déduit alors :

$$\begin{aligned}|F_2| \lesssim h^{L+K+2r-\frac{h}{2}-(|\alpha_1|+|\beta_1|+|\gamma_1|+k_1)}.\,\lambda^{k+m}(x,\eta)\\ \sup_{\substack{y\\ |y-x|\geqslant h^{1/2}}} |x-y|^{2n-2r}(1+|x-y|)^{|\alpha_1|+|\beta_1|+|\gamma_1|+2k+p}. \qquad (38)\end{aligned}$$

On choisit alors r de sorte que $2r-2m = |\sigma_1|+|\beta_1|+|\alpha_1|+2k+p$. Il vient alors :

$$|F_2| \lesssim h^{L+K+\frac{n}{2}-(|\alpha_1|+|\beta_1|+|\gamma_1|+k_1)/2}.\,\lambda(x,\eta)^{p+k}. \qquad (39)$$

Compte tenu de (34), on a :

$$|F| \lesssim h^{L+K+\frac{n}{2}-(|\alpha_1|+|\beta_1|+|\gamma_1|+k_1)/2}.\,\lambda(x,\eta)^{p+k_1}. \qquad (40)$$

Revenant à (19) et (20), on obtient alors :

$$|D_t^k D_x^\beta D_\eta^\gamma b^{(M)}(t,x,\eta)| \lesssim h^{(M-n)/2+K+L-(2|\beta|+|\gamma|+k)/2}.\,\lambda^{p+k}(x,\eta). \qquad (41)$$

On a tenu compte ici que dans (40) on a la condition

$$|\alpha_1| \leqslant M + |\beta| + 2n .$$

Le lemme 3.2 résulte alors du lemme 3.1 et de (41) en choisissant M assez grand i.e. tel que $\frac{M}{2} - \frac{n}{2} - \frac{2|\beta| + |\gamma| + k}{2} > \frac{N}{2}$.

On utilisera dans la suite les notations suivantes :

$$\partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant j\leqslant n} \quad ; \quad \partial^2_{x,x} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} .$$

Il résulte des lemmes 3.1 et 3.2 que l'on a :

PROPOSITION 3.1. — *On se donne une phase*

$$S : [-T, T] \times \mathbf{R}^{2n} \longrightarrow \mathbf{R}$$

vérifiant (7), (8) et (9) et un symbole $q \in S^2_{ad}$, $q(h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j q_j$. *Alors pour tout* $a \in A^{0,0}$ *et tout entier* $N \geqslant 1$, *on a :*

$$e^{-ih^{-1}S(t,x,\eta)}\, q(h, x, hD_x)\,(e^{ih^{-1}S}.\, a) = q_0(x, \partial_x S) .\, a + \sum_{j=1}^{N} h^j C_j(a) + h^{N+1} C^{(N)}(a, h)$$

où $C_1(a)(t, x, \eta) = i^{-1}\partial_\xi q_0(x, \partial_x S(t, x, \eta)) .\, \partial_x a(t, x, \eta)$
$$+ (2i)^{-1}\partial^2_{\xi,\xi} q_0(x, \partial_x S(t, x, \eta)) .\, \partial^2_{x,x} S(t, x, \eta) .\, a(t, x, \eta) + q_1(x, \partial_x S) .\, a .$$

De plus, $C_1(a) \in A^{(1,0)}$, $C_j(a)$ *et* $C^{(N)}(a, h) \in A^{(0,0)}$ *pour* $j \geqslant 1$ *et les applications* C_j, $C^{(N)}$, $j \geqslant 1$, *sont continues entre espaces correspondants.*

Pour la construction de l'opérateur $U_h^{(N)}(t)$ (cf. (2)), la proposition 3.1 conduit à l'équation caractéristique pour S :

$$\begin{cases} \partial_t S(t, x, \eta) + q_0(x, \partial_x S(t, x, \eta)) = 0 \\ S(0, x, \eta) = x .\, \eta \end{cases} \tag{42}$$

et aux équations de transport :

$$\begin{cases} i\partial_t a_0 - C_1(a_0) = 0 \\ a_0(0, x, \eta) = 1 \end{cases} \tag{43}$$

$$\left\{\begin{array}{l} i\partial_t a_j - C_1(a_j) = C_{j+1}(a_0) + \ldots + C_2(a_{j-1}) \quad \text{pour} \quad j \geqslant 2 \\ \quad a_j(0, x, \eta) = 0 . \end{array}\right. \tag{44}$$

3.2. Equation caractéristique.

D'après le théorème de Hamilton-Jacobi, on sait que (42) équivaut à l'étude du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t x(t, y, \eta) = \partial_\xi q_0(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \\ \partial_t \xi(t, y, \eta) = -\partial_x q_0(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \\ x(0, y, \eta) = y \\ \xi(0, y, \eta) = \eta . \end{array}\right. \tag{45}$$

On suppose à partir de maintenant que $q(h)$ vérifie (30), (30'), (31), (32) du § 2. Le système (45) vérifie alors clairement les conditions d'existence et d'unicité d'une solution globale

$$t \longrightarrow (x(t, y, \eta), \ \xi(t, y, \eta))$$

définie sur tout $\mathbf{R}$.

En effet $(x, \xi) \longrightarrow (\partial_\xi q_0(x, \xi), -\partial_x q_0(x, \xi))$ est lipchitzienne indépendante de t et la conservation de l'énergie :

$$q_0(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) = q_0(y, \eta) \tag{46}$$

entraîne que la solution $t \longrightarrow (x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta))$ reste bornée lorsque t décrit $\mathbf{R}$.

En procédant comme dans J. Chazarain [4] p. 12, on obtient le :

LEMME 3.4. – *Pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $T' > 0$ *tel que pour* $|t| \leqslant T'$ *on ait :*

$$\left\{\begin{array}{l} \|\partial_y x(t, y, \eta) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)} \leqslant \epsilon \\ \|\partial_\eta x(t, y, \eta)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)} \leqslant \epsilon \\ \|\partial_y \xi(t, y, \eta)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)} \leqslant \epsilon \\ \|\partial_\eta \xi(t, y, \eta) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)} \leqslant \epsilon . \end{array}\right. \tag{47}$$

En particulier il existe $T > 0$ *tel que* $y \longrightarrow x(t, y, \eta)$ *est un* C^∞*-difféomorphisme de* $\mathbf{R}^n$ *sur* $\mathbf{R}^n$ *pour tout* t *tel que* $|t| \leqslant T$ *et tout* $\eta \in \mathbf{R}^n$.

On désigne alors par $x \longrightarrow y(t, x, \eta)$ l'application inverse de $y \longrightarrow x(t, y, \eta)$ qui est une fonction C^∞ de (t, x, η).

LEMME 3.5. – *Il existe* $T > 0$ *tel que pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$, *pour tout* $p \in \mathbf{N}$ *tels que* $|\alpha| + |\beta| + p \geqslant 1$ *on ait :*

$$\begin{cases} \partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta x(t, y, \eta) = 0(\lambda^p(y, \eta)) \\ \partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \xi(t, y, \eta) = 0(\lambda^p(y, \eta)) \end{cases} \tag{48}$$

pour tout $(y, \eta) \in \mathbf{R}^n$, $|t| \leqslant T$ *(le* 0 *étant bien entendu uniforme par rapport à* t*).*

Preuve. – Cf. [4] p. 13.

Pour la suite, on introduit la notation suivante :

$$\zeta(t, x, \eta) = \xi(t, y(t, x, \eta), \eta) \quad (|t| \leqslant T).$$

Comme dans [4] p. 14 à 16, on obtient le :

LEMME 3.6.

$$\begin{cases} y(t, x, \eta) = 0(\lambda(x, \eta)) \\ \zeta(t, x, \eta) = 0(\lambda(x, \eta)) \quad \textit{pour} \quad |t| \leqslant T \quad \textit{et} \quad (x, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}. \end{cases} \tag{49}$$

De plus, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$, *pour tout* $p \in \mathbf{N}$ *tels que* $|\alpha| + |\beta| + p \geqslant 1$ *on a :*

$$\begin{cases} \partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta y(t, x, \eta) = 0(\lambda^p(x, \eta)) \\ \partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta \zeta(t, x, \eta) = 0(\lambda^p(x, \eta)) \end{cases} \tag{50}$$

pour $|t| \leqslant T$ *et* $(x, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}$.

On a enfin le résultat suivant :

LEMME 3.7. – *Il existe des constantes* $C_1, C_2 > 0$ *telles que :*

$$\begin{cases} C_1 \leqslant \dfrac{\lambda(x, \eta)}{\lambda(y(t, x, \eta), \eta)} \leqslant C_2 \quad \textit{pour} \quad |t| \leqslant T \ \textit{et} \ (x, \eta) \in \mathbf{R}^{2n} \\ C_1 \leqslant \dfrac{\lambda(x(t, y, \eta), \eta)}{\lambda(y, \eta)} \leqslant C_2 \quad \textit{pour} \quad |t| \leqslant T \ \textit{et} \ (y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}. \end{cases} \tag{51}$$

D'après la théorie de Hamilton-Jacobi, on sait alors que pour $|t| \leqslant T$, T assez petit, (42) admet une unique solution, vérifiant en particulier :

$$\partial_x S(t, x, \eta) = \zeta(t, x, \eta) \tag{52}$$

$$\partial_\eta S(t, x, \eta) = y(t, x, \eta). \tag{53}$$

De (49), (50), (52) et (53), on déduit la :

PROPOSITION 3.2. — *On suppose que* q_0 vérifie :

i) *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$,

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_0(x, \xi) = 0(\lambda^{(2-|\alpha|-|\beta|)_+}(x, \xi))$$

ii) *Il existe* $C' > 0$ *telle que* $q_0(x, \xi) \geqslant C'\lambda^2(x, \xi)$ *pour tout* $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$.

Alors, pour T *assez petit,* $T > 0$, *l'équation (42) admet une solution et une seule* $S \in C^\infty([-T, T] \times \mathbf{R}^{2n})$ *vérifiant de plus (7), (8) et (9).*

3.3. Equations de transport.

Les équations (44) et (45) sont du type :

$$\begin{cases} \partial_t b(t, x, \eta) + \partial_\xi q_0(x, \partial_x S)\, \partial_x b(t, x, \eta) \\ \qquad + (1/2)\, (\partial^2_{\xi,\xi} q_0)\, (\partial^2_{x,x} S)\, b(t, x, \eta) + i q_1(x, \partial_x S)\, b(t, x, \eta) \\ \qquad\qquad = f(t, x, \eta) \qquad (54) \\ b(0, x, \eta) = b_0 \end{cases}$$

où $f \in A^{(0,0)}$.

Classiquement, on résoud (54) en intégrant le long des courbes intégrales de (45).

Posons $\qquad z(t) = b(t, x(t, y, \eta), \eta)$

et $\qquad h(t) = f(t, x(t, y, \eta), \eta)$.

On a alors :

$$\begin{cases} z'(t) + (1/2)\, \partial^2_{\xi,\xi} q_0(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta))\, \partial^2_{x,x} S(t, x(t, y, \eta), \eta)\, z(t) \\ \qquad + i q_1(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta))\, z(t) = h(t) \\ z(0) = b_0. \end{cases} \tag{55}$$

Posons $\widetilde{J}(t, y, \eta) = \det [\partial_y(x(t, y, \eta))]$.

D'après un résultat classique, on a :

$$\frac{\partial_t \widetilde{J}}{\widetilde{J}} = \sum_j \frac{\partial^2 q_0}{\partial x_j \partial \xi_j} (x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) + \partial^2_{\xi,\xi} q_0 \cdot \partial^2_{x,x} S.$$

Rappelons que $\widetilde{J}(0, y, \eta) = 1$ et que T est assez petit de sorte que $1/2 \leqslant \widetilde{J}(t) \leqslant \frac{3}{2}$.

On introduit la fonction $v(t) = (\widetilde{J}(t, y, \eta))^{1/2} z(t)$ et on obtient l'équation différentielle :

$$\left\{ \begin{aligned} & v'(t) + i(q_1(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) - (2i)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \\ & \frac{\partial^2 q_0}{\partial x_j \partial \xi_j} (x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) v(t) = (\widetilde{J}(t, y, \eta))^{1/2} . h(t) \\ & v(0) = b_0 . \end{aligned} \right. \tag{56}$$

On résoud alors (56), ce qui donne la solution de (54). Pour écrire le résultat, posons :

$$J(t, x, \eta) = \widetilde{J}(t, y(t, x, \eta), \eta) = \det(\partial_x y(t, x, \eta))^{-1}$$

et

$$G(t, s, x, \eta) = \int_0^s \mathrm{SP}\, q(x(\sigma, y(t, x, \eta), \eta), \xi(0, y(t, x, \eta), \eta))\, d\sigma .$$

La solution de (54) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} b(t, x, \eta) = {} & J^{-1/2}(t, x, \eta)\, e^{-iG(t,t,x,\eta)} \\ & . \left[b_0 + \int_0^t e^{iG(t,s,x,\eta)} (\widetilde{J}(s, y(t, x, \eta), \eta))^{1/2} \right. \\ & \left. . f(s, x(s, y(t, x, \eta), \eta)\, ds \right]. \end{aligned} \tag{57}$$

PROPOSITION 3.3. — *On conserve les hypothèses de la proposition 3.2 et l'on suppose de plus que* $\mathrm{SP}(q) = q_1 - \frac{1}{2i} \sum \frac{\partial^2 q_0}{\partial x_j \partial \xi_j}$ *est réel. Alors si* $f \in A^{(0,0)}$, *la solution* b *de (55) vérifie* $b \in A^{(0,0)}$.

Preuve. — Elle résulte facilement des lemmes suivants :

LEMME 3.8. — *Soit* $g \in C^\infty([-T, T] \times \mathbf{R}^{2n})$ *et*

$$\widetilde{g}(t, y, \eta) = g(t, x(t, y, \eta), \eta).$$

On a alors $g \in A^{(0,0)}$ *si et seulement si* $\widetilde{g} \in A^{(0,0)}$.

Preuve. – Résulte des lemmes 3.5, 3.6 et 3.7.

LEMME 3.9 (J. Chazarain [4] p. 21). – *Posons*

$$L(t, x, \eta) = J^{-1}(t, x, \eta).$$

Alors pour tout $\sigma \in \mathbf{R}$ *on a* $L^{\sigma} \in A^{(0,0)}$.

LEMME 3.10. – *Posons*

$$R(t, y, \eta) = \exp\left[-i\int_0^t SP\,q(x(s, y, \eta), \xi(s, y, \eta))\,ds\right].$$

Alors $R \in A^{(0,0)}$.

Preuve. – Commençons par remarquer que R est bornée car SPq est réel. Ensuite on a

$$\partial_t R(t, y, \eta) = -iSPq(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta))\, R(t, y, \eta)$$

d'où $|\partial_t R| \leqslant C\,\lambda(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \leqslant C'\lambda(y, \eta)$ (en utilisant la conservation de l'énergie). De manière analogue, on majore les autres dérivées.

3.4. Estimation de l'erreur.

Sous les hypothèses du début du paragraphe 3, les constructions précédentes donnent une approximation de l'opérateur unitaire U_h lorsque $h \longrightarrow 0$ (en particulier l'hypothèse $Q(h) = q(h, x, hD_x)$ autoadjoint assure que $SP(q)$ est réel).

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, posons :

$$(U_h^{(N)}(t)f)(x) = h^{-n}\iint e^{ih^{-1}(S(t,x,\eta)-y\eta)}\left(\sum_{j=0}^{N} h^j a_j(t, x, \eta)\right) f(y)\,dy\,đ\eta. \quad (58)$$

On donne un sens à cette intégrale oscillante en intégrant par parties à l'aide de l'opérateur $L_y = ih\,|\eta|^{-2}\eta\,.\,\partial_y$ après avoir tronqué en η autour de 0. Cela montre également que $U_h^{(N)}(t)f(x)$ est une fonction C^∞ de t, $|t| \leqslant T$, et de $x \in \mathbf{R}^n$.

Or, on a :

$$(ih\partial_t - Q(h))\,U_h^{(N)}(t)f = R_h^{(N)}(t)f \quad (59)$$

$$U_h^{(N)}(0)f = f$$

où $R_h^{(N)}(t)$ est un opérateur du même type que $U_h^{(N)}(t)$:

$$(R_h^{(N)}(t)f)(x) = \iint e^{ih^{-1}(S(t,x,\eta)-y\eta)} r_N(t, x, \eta, h) f(y)\, dy\, d\!\!{}^-\eta . \tag{60}$$

Or il résulte de la proposition 3.3 et de la proposition 3.1 que $a_j \in A^{(0,0)}$ et $r_N \in A^{(0,N+2-n)}$.

D'autre part, compte tenu de la construction de S, on vérifie facilement que l'on peut appliquer le théorème de continuité L^2 de Asada-Fujiwara [1] aux opérateurs du type (58) et (60). On obtient alors :

PROPOSITION 3.4. — *On a les estimations suivantes* :

$$\sup_{|t|\leq T} \| U_h^{(N)}(t) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} = 0(1) \tag{61}$$

$$\sup_{|t|\leq T} \| R_h^{(N)}(t) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} = 0(h^{N+2}) \tag{62}$$

$$\sup_{|t|\leq T} \| U_h(t) - U_h^{(N)}(t) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} = 0(h^{N+2}) \tag{63}$$

pour $h \longrightarrow 0$, $h > 0$.

4. ETUDE ASYMPTOTIQUE DE LA DISTRIBUTION S_h, $h \longrightarrow 0$

$S_h(t) = \text{Trace}\,[e^{-ih^{-1}tQ(h)}]$ où $Q(h) = q(h, x, hD_x)$ est l'opérateur obtenu dans le théorème 1. Soit

$$I_\tau(h) = \langle S_h(t), \rho(t)\, e^{-ih^{-1}\tau t} \rangle, \quad \rho \in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

Si $\operatorname{supp} \rho \subset]-T, T[$, T choisi comme dans § 3, on considère :

$$J_\tau^{(N)}(h) = \operatorname{Tr}\left(\int U_h^{(N)}(t) \,.\, \rho(t)\, e^{-i\tau h^{-1}.t}\, dt\right). \tag{1}$$

On commence par montrer que (1) est une bonne approximation de S_h.

PROPOSITION 4.1. — *Pour tout entier* $N > 1$ *il existe* $C(N) > 0$ *telle que :*

$$|\operatorname{Tr}\left(\int (U_h(t) - U_h^{(N)}(t)\right) . \theta(t)\, dt| \leq C(N)\, h^{N-n+1} . \sup_{\substack{0\leq j\leq 2n \\ |t|\leq T}} |\theta^{(j)}(t)| \tag{2}$$

pour tout $\theta \in C_0^\infty(]-T, T[)$, *pour tout* $h \in]0, h_0[$.

Preuve. – Posons

$$\Delta_h^{(N)}(t) = U_h(t) - U_h^{(N)}(t) \quad \text{et} \quad \Delta_{h,\theta}^{(N)} = \int \Delta_h^{(N)}(t)\,\theta(t)\,dt\,.$$

On a : $(ih\partial_t - Q(h))\,\Delta_h^N(t) = R_h^{(N)}(t)$. Or, pour $h < h'_0$, $Q(h)$ est inversible (théorème 1) d'où

$$\Delta_h^{(N)}(t) = Q(h)^{-1} ih\partial_t \Delta_h^{(N)}(t) - Q(h)^{-1} R_h^N(t)\,.$$

En itérant, on obtient :

$$\Delta_h^{(N)}(t) = Q(h)^{-k}(ih\partial_t)^k \Delta_h^{(N)}(t) - \sum_{j=0}^{k-1} Q(h)^{-j-1}(ih\partial_t)^j .\, R_h^{(N)}(t)\,. \quad (3)$$

Or, il résulte de (42) (§ 2) qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\mathrm{Tr}(Q(h)^{-n-1}) = \|Q(h)^{-n-1}\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant Ch^{-n-1} \quad \text{pour} \quad 0 < h < h'_0\,. \quad (4)$$

On choisit alors $k = n + 1$ dans (3) et l'on obtient :

$$\|Q(h)^{-n-1} \int (ih\partial_t)^{n+1}\, \Delta_h^{(N)}(t)\, \theta(t)\, dt\,\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant C' h^{N-n+1} . \sup_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n+1 \\ |t| \leqslant T}} |\theta^{(j)}(t)| \quad (5)$$

compte tenu de (63) (§ 3).

L'estimation des autres termes de (3) se fait par intégration par parties à l'aide de l'opérateur $M = h(i\partial_t S(t, x, \eta))^{-1}\partial_t$. On constate facilement que M envoie $A^{m,p}$ dans $A^{m-1,p+1}$. On a d'autre part :

$$h^j Q^{n-j}\Big(\int R_h^{(N)}(t)\, \theta^{(j)}(t)\, dt\Big) f(x) = \int\!\!\int\!\!\int e^{ih^{-1}(S(t,x,\eta)-y\eta)} b_j(t, x, \eta, h)\, \theta^{(j)}(t)\, dt f(y)\, dy\, đ\eta \quad (6)$$

où d'après les lemmes 3.1 et 3.2 on a $b_j \in A^{2(n-j), N+2-n+j}$.

En intégrant le second membre de (6) $2(n-j)$ fois par parties avec M, on obtient :

$$h^j Q^{n-j}\Big(\int R_h^{(N)}(t)\, \theta^{(j)}(t)\, dt\Big) f(x) = \sum_{k \leqslant 2n} \int e^{ih^{-1}(S(t,x,\eta)-y,\eta)} .\, C_k((t, x, \eta, h)\, \theta_{(t)}^{(k)} f(y)\, dt dy đ\eta$$

où $C_k \in A^{0,N+2}$.

Le théorème de continuité L^2 de Asada-Fujiwara [1] et (4) impliquent alors qu'il existe $C'' > 0$ telle que :

$$\| Q(h)^{-j-1} . \int (ih\partial_t)^j R_h^{(N)}(t)\, \theta(t)\, dt \|_{Tr} \leqslant C' h^{N-n+1} . \sup_{\substack{1 \leqslant j \leqslant 2n \\ |t| \leqslant T}} |\theta^{(j)}(t)| \tag{7}$$

(3), (5) et (7) donnent (2).

COROLLAIRE. – *Pour tout* $\tau \in \mathbf{R}$, *tout* $\rho \in C_0^\infty(]-T, T[)$ *et tout* $\epsilon_0 > 0$, *il existe* $C > 0$ *telle que* $|I_{\tau'}(h) - J_{\tau'}^{(N)}(h)| \leqslant C h^{N-3n+1}$ *pour tout* $\tau' \in [\tau - \epsilon_0, \tau + \epsilon_0]$ *et tout* $h \in]0, h_0]$.

Remarque. – Lorsque le support de ρ est quelconque, comme dans [4], on approche $U_h(t)$ dans l'intervalle $[kT, (k+2T]$ $(k \in \mathbf{Z})$ par $U_h^{(N)}(t - kT)\, (U_h^{(N)}(T))^k$. Par une partition de l'unité, on se ramène au cas où $\operatorname{supp} \rho \subset]kT, (k+2)T[$. Dans la suite, nous ne détaillerons pas ce point qui est strictement analogue à [4] (paragraphe X).

Nous allons maintenant indiquer les preuves des théorèmes 2 et 3.

4.1. Preuve du théorème 2.

Compte tenu de la remarque précédente, on se restreint au cas où $\operatorname{supp} \rho \subset]-T, T[$ et on est ainsi ramené à étudier $J_\tau^{(N)}(h)$. On a :

$$J_\tau^{(N)}(h) = \iiint e^{ih^{-1} . \psi(t,x,\eta,\tau)} \rho(t)\, a(t, x, \eta, h)\, dt\, d\!\!\!/\eta\, dx \tag{8}$$

où l'on a posé $\psi(t, x, \eta, \tau) = S(t, x, \eta) - x\eta - \tau t$.

Or on a

$$\partial_t \psi(t, x, \eta, \tau) = \partial_t S(t, x, \eta) - \tau = - q_0(x, \partial_x S(t, x, \eta)) - \tau .$$

Soit encore $\partial_t \psi(t, x, \eta, \tau) = - q_0(y(t, x, \eta), \eta) - \tau$. D'après le lemme 3.7 et les propriétés de q_0, on en déduit qu'il existe $C > 0$ telle que $\lambda(x, \eta) \geqslant C$ entraîne $|\partial_t S(t, x, \eta) - \tau'| \geqslant 1/2$ pour tout $\tau' \in [\tau - \epsilon_0, \tau + \epsilon_0]$. Après intégration par partie à l'aide de l'opérateur $M_\tau = h(i\partial_t S - \tau)^{-1} \partial_t$ et une troncature, on est ramené à étudier la contribution de l'intégrale définissant $J_\tau^{(N)}(h)$

dans (8) dans la région définie par $\lambda(x, \eta) \leqslant C \quad |t| \leqslant T$. Or, les points critiques de ψ sont définis par :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t S(t, x, \eta) = \tau \\ \partial_x S(t, x, \eta) = \eta \\ \partial_\eta S(t, x, \eta) = x . \end{array}\right. \tag{9}$$

Compte tenu de la construction de S, (9) signifie que t est une période d'une trajectoire périodique d'énergie $-\tau$, d'une courbe intégrale périodique de H_{q_0}. Le théorème de la phase non stationnaire implique alors le théorème 2.

4.2. Preuve du théorème 3.

Il suffit d'examiner $J_\tau^{(N)}(h)$. On cherche les points critiques de ψ qui se trouvent dans le support de ρ. Ils sont définis par :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t S(0, x, \eta) = \tau \\ \qquad t = 0 \end{array}\right. \quad \text{soit encore par} \quad \left\{\begin{array}{l} q_0(x, \eta) = -\tau \\ \qquad t = 0 . \end{array}\right.$$

Comme q_0 n'a pas de valeur critique dans $[\tau_0 - \epsilon_0 , \tau_0 + \epsilon_0]$, $\Sigma = \{(x, \eta, t) \in \mathbf{R}^{2n+1} , q_0(x, \eta) = -\tau, t = 0\}$ est une variété compacte de codimension 2.

On peut alors évaluer $J_\tau^{(N)}(h)$ en appliquant le théorème de la phase stationnaire généralisé comme dans [4]. On peut aussi procéder directement en paramétrant Σ après une partition de l'unité et en utilisant le théorème de la phase stationnaire usuel avec paramètres. Nous ne donnons pas plus de détails ici car nous expliciterons ce type d'argument plus loin.

5. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES

On conserve les hypothèses du § 4. Donnons-nous une fonction $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ à support assez petit autour de 0 telle que $\rho(0) = 1$, $\hat{\rho} \geqslant 0$, p est paire et $\hat{\rho} > 0$ sur $[-\delta_0 , \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ (on construit une telle fonction à partir de $\rho_1 \subset C_0^\infty(\mathbf{R})$ paire à support assez petit, $\rho_1 \geqslant 0$, $\rho_1(0) > 0$ et on détermine γ_1 pour que $\rho = \gamma_1(\rho_1 * \rho_1)$ convienne).

On pose alors $\theta_h(\lambda) = (2\pi h)^{-1}\,\hat{\rho}(-h^{-1}\lambda)$.

5.1. Etude de $N_h * \theta_h$.

On a facilement :

$$N_h * \theta_h(\lambda) = (2\pi h)^{-1} \int_{-\infty}^{\lambda} I_{-\tau}(h)\,d\tau. \tag{1}$$

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\chi = 1$ sur $]-\infty, -2]$, $\chi = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

LEMME 5.1. – *Pour tout entier* $N \geqslant 1$, *il existe* $C_N > 0$ telle que :

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\tau)\, I_{-\tau}(h)\,d\tau\Big| \leqslant C_N h^N \quad \textit{pour tout} \quad h \in\,]0, h_0]. \tag{2}$$

Preuve. – On a :

$$I_{-\tau}(h) = \sum_{j\geqslant 1} \hat{\rho}(h^{-1}(\mu_j(h) - \tau)). \tag{3}$$

Or $\hat{\rho} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Pour tout entier M il existe donc $C'_M > 0$ telle que :

$$|\hat{\rho}(h^{-1}(\mu_j(h) - \tau))| \leqslant C'_M h^M\, |\mu_j(h) - \tau|^{-M}. \tag{4}$$

Posons $-\tau = s + 1$, $s \geqslant 0$. On a l'inégalité élémentaire :

$$(\mu_j(h) + s + 1)^{-1} \leqslant (s + 1)^{-\theta}(\mu_j(h) + 1)^{\theta - 1} \tag{5}$$

pour tout $\theta \in [0, 1]$.

D'autre part, d'après (42) § 2, on sait qu'il existe $\gamma > 0$ telle que :

$$(\mu_j(h) + 1)^{-1} \leqslant \gamma h^{-1} j^{-1/n} \tag{6}$$

pour tout $j \geqslant 1$ et tout $h \in\,]0, h_0]$.

Prenons $\theta = 1/2$ dans (4) et appliquons (4) ; il vient :

$$|\hat{\rho}(h^{-1}(\mu_j(h) + s + 1)| \leqslant C''_M\, j^{-M/2n} h^{-M/2} (s + 1)^{-M/2}.$$

On obtient alors (2) avec par exemple $M = \mathrm{Max}(2N, 2n + 1)$.

Le lemme 5.1 et le corollaire de la proposition 4.1 impliquent qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$|N_h * \theta_h(\lambda) - (2\pi h)^{-1} \int_{-2}^{\lambda} (1 - \chi(\tau))\, J_{-\tau}^{(N)}(h)\, d\tau| \leqslant C\, h^{N-3n+1} \quad (7)$$

pour tout $h \in]0, h_0]$, $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon_0, \lambda_0 + \epsilon_0]$.

Soit $\chi_1^\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\chi_1^\epsilon(\tau) = 1$ pour $\tau \leqslant \lambda - \epsilon$, $\chi_1^\epsilon(\tau) = 0$ pour $\tau \geqslant \lambda - \epsilon/2$, $\epsilon > 0$ étant choisi tel que q_0 n'ait pas de valeurs critiques dans $[\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]$.

Cela entraîne en particulier que 0 est isolé dans $\mathscr{L}_{[\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon]}$ (conséquence du fait que les trajectoires sont compactes et du théorème de Rolle). On pose :

$$M_\tau^{(1)}(h) = (2\pi h)^{-1} \int (1 - \chi(\tau))\, \chi_1^\epsilon(\tau)\, J_{-\tau}^{(N)}(h)\, d\tau$$

$$M_\tau^{(2)}(h) = (2\pi h)^{-1} \int_0^{\lambda} (1 - \chi(\tau))\, (1 - \chi_1^\epsilon(\tau))\, J_{-\tau}^{(N)}(h)\, d\tau .$$

On peut appliquer le théorème 3 pour évaluer $M_\lambda^{(2)}(h)$. Cela donne

$$M_\lambda^{(2)}(h) = (2\pi h)^{-n} \int_{q_0(x,\xi) \leqslant \lambda} (1 - \chi)\, (q_0(x, \xi))\, (1 - \chi_1^\epsilon(q_0(x, \xi))\, dx d\xi . \quad (8)$$

Evaluons $M_\lambda^{(1)}(h)$. En revenant à la définition de $J_{-\tau}^{(N)}(h)$:

$$M_\lambda^{(1)}(h) = (2\pi h)^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\iiint e^{ih^{-1}\psi(t,x,\eta,-\tau)} (1 - \chi(\tau))\, \chi_1^\epsilon(\tau)\, \rho(t)\, a(t, x, \eta, h)\, dt dx đ\eta \right] d\tau$$

on commence par se ramener au cas où l'amplitude est à support compact en (t, x, η, τ). On remarque qu'il existe $R > 0$ tel que l'on ait :

$$| \partial_t S(t, x, \eta) + \tau | \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{pour } \lambda(x, \eta) \geqslant R \text{ et } \tau \in [2, \lambda - \epsilon/2].$$

Soit alors $\chi_2 \in C_0^\infty(]-2R, 2R[)$, $\chi_2 = 1$ sur $[0, R]$. Posons :

$$M_\lambda'^{1}(h) = (2\pi h)^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint e^{ih^{-1}\psi(t,x,\eta,-\tau)} (1 - \chi(\tau))\, \chi_1^\epsilon(\tau)\, \chi_2(\lambda(x, \eta))\, .\, \rho(t)\, a(t, x, \eta, h)\, dt dx đ\eta d\tau .$$

Des intégrations par parties à l'aide de l'opérateur

$$M_{-\tau} = h(i\partial_t S + \tau)^{-1} \partial_t$$

entraînent que, pour tout $N > 1$, il existe $C_N > 0$ tel que :

$$|M_\lambda^1(h) - M_\lambda'^1(h)| \leqslant C_N\, h^N . \quad (9)$$

On applique alors le théorème de la phase stationnaire avec paramètres à :

$$G_\lambda(h\,;x\,,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ih^{-1}\psi(t,x,\eta,-\tau)}(1-\chi(\tau))\,\chi_1^\epsilon(\tau)\,\chi_2(\lambda(x\,,\eta)) \\ .\,\rho(t)\,a(t\,,x\,,\eta\,,h)\,dtd\tau\,.$$

Les points critiques de la phase ψ sont donnés par $\{t=0\,,\ \tau=q_0(x\,,\eta)\}$. D'autre part, la matrice hessienne de ψ par rapport à $(t\,,\tau)$ est donnée par $\psi''_{(t,\tau)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial t^2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le théorème de la phase stationnaire donne alors :

$$M_\lambda'^1(h) = (2\pi h)^{-n} \iint (1-\chi(q_0(x\,,\xi)))\,\chi_1^\epsilon(q_0(x\,,\xi))\,dxd\xi + 0(h^{1-n}) \tag{10}$$

lorsque $h \longrightarrow 0\,,\ h>0$.

Regroupant (8), (9) et (10), on obtient :

PROPOSITION 5.1. – *Si* λ *n'est pas valeur critique de* q_0, *on a alors :*

$$N_h * \theta_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n}\int_{q_0(x,\xi)\leqslant\lambda} dxd\xi + 0(h^{-n+1}) \tag{11}$$

lorsque $h \longrightarrow 0$.

5.2. Preuve du théorème 4.

Elle s'appuie sur le :

LEMME 5.2. – *Supposons que* λ_0 *ne soit pas valeur critique de* q_0. *Alors il existe* $\epsilon_0>0$ *et* $C_0>0$ *telles que :*

$$|N_h(\lambda+\tau h) - N_h(\lambda)| \leqslant C_0(1+|\tau|)^n\,h^{-n+1} \tag{12}$$

pour tout $\lambda\in[\lambda_0-\epsilon_0\,,\lambda_0+\epsilon_0]$. *et tout* $h\in\,]0\,,h_0]$.

Preuve. – Supposons $\tau\geqslant 0$.

a) On établit d'abord (12) pour $h_0\tau\leqslant\delta_0$. D'après les propriétés de $\hat\rho$, on sait qu'il existe $C>0$ telle que :

$$N_h(\lambda+\tau h) - N_h(\lambda) = \int_\lambda^{\lambda+\tau h} dN_h(\mu) \leqslant C\int \hat\rho\left(\frac{\mu-\lambda}{h}\right) dN_h(\mu)\,.$$

Le théorème 3 donne alors qu'il existe $\tau_0 > 0$ tel que :

$$|N_h(\lambda + \tau h) - N_h(\lambda)| \leqslant C' h^{1-n} \tag{13}$$

pour $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon_0 , \lambda_0 + \epsilon_0]$, $h \in]0, h_0]$ et $\tau \in [0, \tau_0]$.

b) Examinons le cas $\tau h \geqslant \epsilon_0$. On majore alors trivialement, en utilisant l'inégalité (42) du paragraphe 3 :

$$|N_h(\lambda + \tau h) - N_h(\lambda)| \leqslant N_h(\lambda + \tau h) + N_h(\lambda) \leqslant C_1 h^{-n}(\lambda^n + (\tau h)^n)$$
$$\leqslant C_2 h^{1-n}(\tau + \tau^n) \quad \text{pour} \quad \lambda \in [\lambda_0 - \epsilon_0 , \lambda_0 + \epsilon_0] .$$

c) On suppose ici que $\tau = k\tau_0$, k entier et que $\tau h \leqslant \epsilon_0$ (on suppose ici que $\epsilon_0 \leqslant \delta_0$). On écrit alors :

$$N_h(\lambda + k\tau_0 h) - N_h(\lambda) = N_h(\lambda + k\tau_0 h) - N_h(\lambda + (k-1)\tau_0 h)$$
$$+ \ldots + N_h(\lambda + \tau_0 h) - N_h(\lambda) .$$

On peut alors appliquer a) en remplaçant λ par $\lambda + j\tau_0 h$, $0 \leqslant j \leqslant k$. Il vient :

$$|N_h(\lambda + k\tau_0 h) - N_h(\lambda)| \leqslant C k h^{1-n} . \tag{14}$$

d) Le cas général : soit $0 \leqslant k\tau_0 \leqslant \tau < (k+1)\tau_0$, k entier. D'après b), il suffit d'examiner le cas où $\tau h \leqslant \epsilon_0$. On a :

$$|N_h(\lambda + \tau h) - N_h(\lambda)| \leqslant |N_h(\lambda + \tau h) - N_h(\lambda + k\tau_0 h)|$$
$$+ |N_h(\lambda + k\tau_0 h) - N_h(\lambda)| .$$

On majore le premier terme en utilisant a) et le deuxième par c), d'où :

$$|N_h(\lambda + \tau h) - N_h(\lambda)| \leqslant C(k+1) h^{1-n} . \tag{15}$$

On en déduit (12) pour $\tau > 0$. Le cas $\tau \leqslant 0$ se traite de la même manière.

On en déduit alors la preuve du théorème 4 :

$$N_h * \theta_h(\lambda) - N_h(\lambda) = \int (N_h(\sigma) - N_h(\lambda))\, \theta_h(\lambda - \sigma)\, d\sigma .$$

On fait le changement de variable $\sigma = \lambda + \tau h$.

En revenant à la définition de θ_h et en appliquant (12), il vient :

$$|N_h * \theta_h(\lambda) - N_h(\lambda)| \leqslant C h^{1-n} \int \hat{\rho}(\tau)\, (1 + |\tau|)^n\, d\tau . \tag{15bis}$$

Or $\hat{\rho} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ d'où (11) et (15) donnent le théorème 4.

La preuve du théorème 5 étant complétement analogue à celle donnée par J. Chazarain [4] pour $Q(h) = -h^2\Delta + V$, nous ne la répéterons pas ici.

5.3. Preuve du théorème 6.

On désigne par $B(x, hD_x)$ la réalisation de Weyl associée au symbole $a_{2m}(x, h\xi)$. On a

$$B(x, hD_x)\, u(x) = \iint a_{2m}\left(\frac{x+y}{2}, h\xi\right) e^{i\langle x-y,\xi\rangle} u(y)\, dy\, d\!\!{}^{-}\xi$$

pour $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

$B(x, hD_x)$ vérifie les hypothèses du paragraphe 2 et définit en particulier un opérateur essentiellement autoadjoint, semi-borné dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. Soit $(\nu_j(h))_{j\geq 1}$ la suite croissante des valeurs propres de $B(x, hD)$ (répétées suivant leur multiplicité). On pose $\nu_j = \nu_j(1)$; a_{2m} étant par hypothèse homogène de degré $2m$ en (x, ξ), on a clairement :

$$\nu_j = h^{-m}\, \nu_j(h). \tag{16}$$

D'après les résultats de 2, il existe $\gamma_0 > 0$ tel que l'on puisse définir $(B(x, hD_x) + \gamma_0)^{1/m}$ pour tout $h \in]0, 1]$ comme opérateur pseudo-différentiel de symbole «principal»

$$(a_{2m}(x, \xi) + \gamma_0)^{1/m} = b_2(x, \xi).$$

Pour $\gamma > \gamma_0^{1/m}$, on a d'après le théorème 4 :

$$\text{card}\,\{j, (\nu_j(h) + \gamma_0)^{1/m} \leq \gamma\} = (2\pi h)^{-n} \int_{b_2(x,\xi)\leq 1} dx d\xi + 0(h^{1-n}). \tag{17}$$

De (16) et (17), en faisant le changement de variable $\lambda = h^{-m}(\gamma^m - \gamma_0)$, on obtient :

$$M(\lambda) = \text{card}\,\{j, \nu_j \leq \lambda^m\} = (2\pi)^{-n}\lambda^n \int_{a_{2m}(x,\xi)\leq 1} dx d\xi + 0(\lambda^{n-1}),\ \lambda \longrightarrow +\infty. \tag{18}$$

Posons d'autre part $\nu'_j(h) = (h^m \nu_j + \gamma_0)^{1/m}$ et

$$N_h(\mu) = \text{card}\,\{j, \nu'_j(h) \leq \mu\}.$$

La preuve du lemme 5.2 montre que si μ n'est pas valeur critique de b_2 (par exemple $\mu > \gamma_0^{1/m}$), alors pour tout $\epsilon_0 > 0$ il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$ tels que :

$$|N_h(\mu + \tau h) - N_h(\mu)| \leqslant C_0 h^{1-n}(1 + |\tau|) \tag{12'}$$

pour tout $h \in]0, h_0]$ et tout τ vérifiant $|\tau| \leqslant \epsilon_0 h^{-1}$.

De (12′) on va déduire le :

LEMME 5.3. – *Pour tout* $C'_0 > 0$, *il existe* $C'_1 > 0$ *tel que :*

$$|M(\lambda + \delta) - M(\lambda)| \leqslant C'_1(1 + |\delta|)^{n-1} \tag{19}$$

pour $\lambda \geqslant 1$ *et* $|\delta| \leqslant C'_0\lambda$.

Preuve. – On fixe $\mu > \gamma_0^{1/m}$ et on pose $\lambda = h^{-1}(\mu^m - \gamma_0)^{1/m}$. On suppose $\delta > 0$ (le cas $\delta < 0$ se traite de manière analogue).

On pose $\lambda + \delta = h^{-1}(\mu_h^m - \gamma_0)^{1/m}$. On a alors

$$\delta h = (\mu^m - \gamma_0)^{1/m} - (\mu_h^m - \gamma_0)^{1/m}.$$

Posons enfin $\mu^m = v^m + \gamma_0$, $\mu_h^m = v_h^m + \gamma_0$. On a alors $v - v_h = \delta h$ et il existe C_2 telle que $\delta h \leqslant C_2$ d'où $\sup\limits_{0<h\leqslant h_0} v_h < +\infty$. On en déduit alors qu'il existe $K > 0$ telle que :

$$|\mu - \mu_h| \leqslant M\,\delta h \quad \text{pour tout} \quad h \in]0, h_0]. \tag{20}$$

On peut donc appliquer (12′) en posant $\mu - \mu_h = \tau h$ et en utilisant (20), d'où (19).

Posons $Q = (B(x, D) + \gamma_0)^{1/m}$, $P = (x, D) + \gamma_0)^{1/m}$. Soit $(\nu'_j)_{j\geqslant 1}$ (respectivement $(\lambda'_j)_{j\geqslant 1}$) la suite des valeurs propres de Q (resp. P). Les résultats du paragraphe 2 montrent que $P - Q$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $\leqslant 1$ et d'ordre 0 si $a_{2m-1} = 0$. On a alors :

LEMME 5.4. –

i) *Si* $P - Q$ *est d'ordre 0, alors il existe* $C > 0$ *telle que* $|\lambda'_j - \nu'_j| \leqslant C$ *pour tout* $j \geqslant 1$.

ii) *Si* $P - Q$ *est d'ordre 1, alors il existe* $C > 0$ *telle que* $|\lambda'_j - \nu'_j| \leqslant C\nu_j'^{1/2}$ *pour tout* $j \geqslant 1$.

Preuve. –

i) est bien connu.

ii) Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Posons $v = Q^{1/4}u$.

On a : $((P - Q)u, u) = (Q^{-1/4}(P - Q)Q^{-1/4}v, v)$. Or $Q^{-1/4}(P - Q)Q^{-1/4}$ est d'ordre 0. Il existe donc $C' > 0$ telle que :

$$|((P-Q)u,u| \leqslant C' \|v\|^2_{L^2} = C'(Q^{1/2}u,u).$$

Le principe du minimax donne alors (ii).

Fin de la preuve du théorème 6. – Soit $\theta \in [0,1[$ et $C > 0$ tels que :

$$|\lambda'_j - \nu'_j| \leqslant C\,\nu_j'^{\theta}. \tag{21}$$

On a clairement :

$$\left.\begin{aligned} N(\lambda^m) &= \operatorname{card}\{j, \lambda'_j \leqslant \lambda\} + 0(1) \\ &\text{et} \\ M(\lambda) &= \operatorname{card}\{j, \nu'_j \leqslant \lambda\} + 0(1) \end{aligned}\right\} \text{pour } \lambda \longrightarrow +\infty. \tag{22}$$

De (21) on tire qu'il existe $C'' > 0$ telle que :

$$\operatorname{card}\{j, \lambda'_j \leqslant \lambda\} \leqslant \operatorname{card}\{j, \nu'_j \leqslant \lambda + C''\lambda^{\theta}\} \tag{23}$$

$$\operatorname{card}\{j, \nu'_j \leqslant \lambda - C''\lambda^{\theta}\} \leqslant \operatorname{card}\{\lambda'_j \leqslant \lambda\} \tag{24}$$

pour λ assez grand.

On utilise alors (22) et le lemme 5.3 ce qui donne :

$$N(\lambda^m) = M(\lambda) + 0(\lambda^{n-1+\theta}) \qquad \lambda \longrightarrow +\infty. \tag{25}$$

(18) et (25) donnent la conclusion du théorème 6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. ASADA and D. FUJIWARA, On some oscillatory integral transformation in $L^2(\mathbf{R}^n)$, *Japan J. Math.*, 4 (1978), 299-361.

[2] R. BEALS, A general calculus of pseudodifferential operators, *Duke Math. J.*, 42 (1975), 1-42.

[3] M.V. BERRY and K.E. MOUNT, Semi-classical approximations in wave mechanics, *Rep. Prog. Phys.*, 35 (1972), 315-397.

[4] J. CHAZARAIN, Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique, *Comm. in Partial diff. Equat.*, n° 6 (1980), 595-644.

[5] Y. COLIN de VERDIERE, Spectre joint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent. I – Le cas non intégrable, *Duke Math. J.*, 46 (1979), 169-182.

[6] J.J. DUISTERMAAT, Oscillatory integrals..., *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 (1974), 207-281.

[7] J.J. DUISTERMAAT and V. GUILLEMIN, Spectrum of elliptic operators and periodic geodesics, *Inv. Math.,* 29 (1975), 39-79.

[8] B. GRAMMATICOS and A. VOROS, Semi-classical approximations of nuclear hamiltonians, I – Spin-independant potentials, *Annals of physics,* 123 (1979), 359-380.

[9] V. GUILLEMIN and S. STERNBERG, Some problems in integral geometry and some related problems in microlocal analysis, *Amer. J. Math.,* 101 (1979), 915-955.

[10] L. HÖRMANDER, The spectral function of an elliptic operator, *Acta Math.,* 121 (1968), 193-218.

[11] L. HÖRMANDER, The Weyl calculus of pseudodifferential operators, *Comm. Pure Appl. Math.,* 32 (1979), 359-443.

[12] L. HORMANDER, On the asymptotic distribution of eigenvalues of pseudodifferential operators in $\mathbf{R}^n$, *Arkiv för Math.,* 17 n° 2 (1979), 296-313.

[13] J. LERAY, Analyse lagrangienne et mécanique quantique, Collège de France (1976-77).

[14] V.P. MASLOV, Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Dunod, Paris (1972), traduction.

[15] A. MESSIAH, Mécanique quantique t. 1, Dunod, Paris (1962).

[16] D. ROBERT, Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifferentiels, *Comm. in Partial diff. Equat.,* 3 (1978), 755-826.

[17] M.A. SUBIN, Pseudodifferential operators and spectral theory, *Nauka Moskva,* 1978.

[18] V.N. TULOVSKII and M.A. SUBIN, On the asymptotic distribution of eigen values of pseudodifferential operators in $\mathbf{R}^n$, *Math. USSR Sbornik,* 21 (1973), 565-583.

[19] A. VOROS, An algebra of pseudodifferential operators and the asymptotics of quantum mechanics, *J. of Funct. Analysis,* 29 n° 1 (1978), 104-132.

Manuscrit reçu le 6 novembre 1980.

B. HELFFER & D. ROBERT,
Université de Nantes
U.E.R. de Mathématiques
E.R.A. C.N.R.S. n° 946
2, chemin de la Houssinière
44072 Nantes Cedex.