Annales de l'institut Fourier

Jean Merrien

Applications des faisceaux analytiques semi-cohérents aux fonctions différentiables

Annales de l'institut Fourier, tome 31, nº 1 (1981), p. 63-82

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_63_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 1 (1981), 63-82

APPLICATIONS DES FAISCEAUX ANALYTIQUES SEMI-COHÉRENTS AUX FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

par Jean MERRIEN

Dans cet article nous appliquons les résultats obtenus dans «Faisceaux analytiques semi-cohérents» ([5]) à l'étude des fonctions différentiables.

Les trois premiers paragraphes conduisent à un théorème de division par un polynôme distingué P, sur une partie Λ compatible avec P, d'une fonction de classe C^∞ sur $\overline{\Lambda}$ et plate sur $\partial\Lambda$, avec des conditions de platitude sur le bord pour le quotient et le reste (théorème 3.12).

Le paragraphe 4 donne un théorème de division par des fonctions Nash-analytiques, analogue au théorème de division de B. Malgrange, mais avec des conditions de platitude sur le bord (théorème 4.10). Ceci est le résultat principal de l'article.

Le paragraphe 5 introduit le formalisme des faisceaux différentiables de Fréchet, utile pour exprimer les propriétés de fermeture dans les modules différentiables.

Dans le paragraphe 6 on étudie les faisceaux différentiables engendrés par les faisceaux analytiques semi-cohérents. On donne en particulier (théorème 6.2) une description du sous-module de $\mathcal{E}(\Omega)^p$ engendré par un sous-faisceau analytique $\mathcal{R}$ de $\mathcal{O}^p$, quand $\mathcal{O}^p/\mathcal{R}$ est semi-cohérent. Cela s'applique, par exemple, à la description des fonctions de classe C^∞ nulles sur un ensemble semi-analytique.

Dans le paragraphe 7 on étudie des propriétés des fonctions différentiables composées par un morphisme analytique propre et fini. On obtient des résultats analogues, sous des hypothèses différentes, à ceux de G. Glaeser [1].

1. Préliminaires.

Pour les résultats sur les fonctions différentiables et les théorèmes de Whitney nous renvoyons à [6].

Pour x dans $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{E}_x$ est l'anneau des germes en x de fonctions réelles de classe C^∞. Pour Ω ouvert de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{E}(\Omega)$ est l'anneau des fonctions de classe C^∞ sur Ω.

Si X est une partie de $\mathbf{R}^n$, J(X) est l'ensemble des jets d'ordre infini sur X, ou encore l'ensemble des champs sur X de séries formelles à coefficients réels et à n variables. Un élément de J(X) est plat en $x \in X$ si le jet est nul en x.

Si X est localement fermé, $\mathcal{W}(X)$ désigne le sous ensemble de J(X) formé des fonctions de Whitney sur X, i.e. des jets prolongeables en une fonction de classe C^∞ sur un voisinage ouvert de X. Si X est ouvert, $\mathcal{W}(X) = \mathcal{E}(X)$.

Si X est compact, et si $f = (f_k)_{k \in \mathbf{N}^n}$ appartient à $\mathcal{W}(X)$ on note, pour $m \in \mathbf{N}$:

$$|f|_m^X = \sup_{\substack{|k| \leqslant m \\ x \in X}} |f^k(x)|$$

$$\|f\|_m^X = |f|_m^X + \sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y \\ |k| \leqslant m}} \frac{\left| f^k(y) - \sum\limits_{|k+\ell| \leqslant m} \dfrac{(y-x)^\ell}{\ell !} f^{k+\ell}(x) \right|}{\|x-y\|^{m-|k|}} .$$

Alors $\mathcal{W}(X)$ est un espace de Fréchet pour la famille de normes $\|\ \|_m^X$. Les normes $|\ |_m^X$ et $\|\ \|_m^X$ ne sont pas, en général, équivalentes. Cependant, si X est convexe, il existe C, dépendant uniquement de m et n, avec $\|\ \|_m^X \leqslant C\ |\ |_m^X$.

Si X est localement fermé, on note $\mathcal{J}(\partial X, \overline{X})$ l'idéal de $\mathcal{W}(\overline{X})$ formé des jets nuls sur ∂X.

Avec ces notations on a :

THEOREME 1.1. – *Soit* X *une partie s.a.l.f. de* $\mathbf{R}^n$, $f \in \mathcal{N}(X)$ *et* $\varphi \in \mathcal{J}(\partial X, \overline{X})$. *Alors le jet égal à* φf *sur* X *et à 0 sur* ∂X *appartient à* $\mathcal{W}(\overline{X})$.

Démonstration. – La question étant locale, on se place au voisinage d'un point de ∂x. D'après I.5.1 de [5], on peut supposer que f est prolongé en un élément de $\mathcal{N}(\Omega)$, Ω ouvert semi-analytique contenant X. On peut, puisque $\complement\,\Omega \cap \overline{X} \subset \partial X$ et que $\overline{X}$ et $\complement\,\Omega$ sont régulièrement situés, prolonger φ en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, plate sur $\complement\,\Omega$.

Alors, d'après I.2.1 de [5], la fonction $f\varphi$, de classe C^∞ sur Ω, se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$ nulle sur $\complement\,\Omega$. D'où 1.1.

Pour démontrer 3.1 nous aurons à utiliser un cas très particulier du théorème de préparation différentiable ([3] ou [4]). Nous redémontrons rapidement ce résultat au paragraphe 2, en suivant les idées de [1]. Le théorème 3.1 permet d'ailleurs très facilement de démontrer le théorème de préparation, du moins sous la forme initiale de Malgrange.

2. Division générique.

Soit $Q(v, t) = t^q + \sum_{i=1}^{q} v_i t^{q-i}$ le polynôme générique sur $\mathbf{R}^q \times \mathbf{R}$. Soit $\mathbf{R}^m$ un espace auxiliaire et Π la projection de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^q$.

On pose $V = \{(y, v, t) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}\ ;\ \frac{\partial^i Q}{\partial t^i}(y, v, t) = 0$ pour $i \in [0, q-1]\}$, i.e. l'ensemble des points où Q a une racine d'ordre q, et $V' = \Pi(V)$, homéomorphe à V par $\Pi\left(t = -\frac{v_1}{q} \text{ sur } V\right)$.

LEMME 2.1. – *Pour tout* $\varphi \in \mathfrak{W}(V)$, *il existe* $\psi \in \mathfrak{W}(V)$ *et* $\chi_i \in \mathfrak{W}(V')$, $i \in [1, q]$, *avec* $\varphi = Q\psi + \sum_{i=1}^{q} \chi_i t^{q-i}$.

Démonstration. – Soit $\sigma' : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^q \longrightarrow \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^q$ défini par : $\sigma'(y, w_1, \ldots, w_q) = (y, -\sigma_1(w), \sigma_2(w), \ldots, (-1)^q \sigma_q(w))$, où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires.

Puis :

$$\sigma = \sigma' \times I_{\mathbf{R}} : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}.$$

$$W = \sigma^{-1}(V) = \{(y, w, t) ; t = w_i \text{ pour } i \in [1, q]\}, \quad W' = \Pi(W)$$

$$Q^* = Q \circ \sigma = \prod_{i=1}^{q} (t - w_i)$$

$\sigma | W$ est un homéomorphisme de W sur V.

Supposons φ prolongé en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}$ et soit $\varphi^* = \varphi \circ \sigma$.

Par division successive par les $(t - w_i)$, il existe ψ^* dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R})$ et χ_i^* dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^q)$, symétriques en les w_i, avec : $\varphi^* = Q^* \psi^* + \sum_{i=1}^{q} \chi_i^* t^{q-i}$.

Puisque ψ^* et χ_i^* sont symétriques, il existe ψ dans J(V) et χ_i dans J(V') avec :

$$\psi^* = \psi \circ \sigma \quad \text{sur } W$$

$$\chi_i^* = \chi_i \circ \sigma' \quad \text{sur } W'.$$

D'où $\varphi \circ \sigma = (Q\psi + \sum_{i=1}^{q} \chi_i t^{q-i}) \circ \sigma$ sur W et donc

$$\varphi = Q\psi + \sum_{i=1}^{q} \chi_i t^{q-i}$$

sur V, car la composition par σ est injective.

Il reste à montrer que $\psi \in \mathcal{W}\!\mathcal{P}(V)$ et $\chi_i \in \mathcal{W}\!\mathcal{P}(V')$. Cela se fait en suivant les idées de [1], dans un cas très simple.

On remarque d'abord que, pour tout indice de dérivation α, on a $(D^\alpha \psi) \circ \sigma \in \mathcal{W}\!\mathcal{P}(W)$ et $(D^\alpha \chi_i) \circ \sigma \in \mathcal{W}\!\mathcal{P}(W')$, ce qui implique en particulier la continuité des composantes de ψ et χ_i.

Puis on remarque que, pour tout (a, b) de W^2, on a $d(\sigma(a), \sigma(b)) \geqslant d(a, b)$. Or

$$(\psi(\sigma(b)) - \sum_{|\ell| < m} \frac{(\sigma(b) - \sigma(a))^\ell}{\ell!} \psi^\ell(\sigma(a)))$$

ne diffère de

$$((\psi \circ \sigma)(b) - \sum_{|\ell| < m} \frac{(b - a)^\ell}{\ell!} (\psi \circ \sigma)^\ell (a))$$

que par des termes de degrés supérieurs à m en $(b - a)$ et à coefficients bornés sur tout compact de W.

Cette quantité est donc un $o(\|a-b\|^m)$, et donc aussi un $o(\|\sigma(a)-\sigma(b)\|^m)$, sur tout compact de V.

Cela montre que ψ appartient à $\mathcal{W}(\mathrm{V})$. De même χ_i appartient à $\mathcal{W}(\mathrm{V}')$.

COROLLAIRE 2.2. – *Soit* K *un compact de* V, $\mathrm{K}'=\Pi(\mathrm{K})$. *Alors l'application de* $\mathcal{W}(\mathrm{K})\times\mathcal{W}(\mathrm{K}')^q$ *dans* $\mathcal{W}(\mathrm{K})$, *qui à* (ψ,χ_i) *fait correspondre* $\mathrm{Q}\psi+\sum_{i=1}^{q}\chi_i t^{q-i}$, *est un isomorphisme d'espaces de Fréchet.*

Démonstration. – L'application est évidemment continue. Elle est surjective d'après 2.1. Elle est injective d'après l'unicité de la division formelle, puisque, en tout point de V, Q est distingué.

3. Division d'un élément de $\mathcal{J}(\partial\Lambda,\overline{\Lambda})$.

Nous reprenons les notations des paragraphe II.1 et II.2 de [5] : $\mathrm{P}(x',x_n)$ est un polynôme unitaire, Λ une partie s.a.l.f. de $\mathbf{R}^n$ compatible avec P, de degré q, et Λ' sa projection.

Avec ces notations on a le théorème suivant, analogue C^∞ de II.2.4 de [5].

THEOREME 3.1. – *Soit* $\varphi\in\mathcal{J}(\partial\Lambda,\overline{\Lambda})$.

Alors il existe ψ *dans* $\mathcal{J}(\partial\Lambda,\overline{\Lambda})$ *et* χ_i *dans* $\mathcal{J}(\partial\Lambda',\overline{\Lambda}')$, $i\in[1,q]$, *avec :* $\varphi=\mathrm{P}\psi+\sum_{i=1}^{q}\chi_i x_n^{q-i}$.

Ces éléments sont uniques.

Démonstration. – L'unicité est claire puisque P est régulier d'ordre q sur Λ.

D'après II.1.1. de [5], on a $\mathrm{P}=\mathrm{RS}$, où R et S sont des éléments de $\mathcal{N}(\Lambda')[\mathrm{X}_n]$, R distingué de degré q sur Λ, S ne s'annulant pas sur Λ.

On écrit : $\mathrm{R}=x_n^q+\sum_{i=1}^{q}a_i x_n^{q-i}$, $a_i\in\mathcal{N}(\Lambda')$.

Le théorème de préparation formel implique l'existence d'éléments ψ dans $J(\Lambda)$ et χ_i dans $J(\Lambda')$ avec : $\varphi = R\psi + \sum_{i=1}^{q} \chi_i x_n^{q-i}$ dans $J(\Lambda)$.

On va montrer que l'élément ψ (resp. χ_i) prolongé par 0 sur $\partial\Lambda$ (resp. $\partial\Lambda'$) appartient à $\mathscr{W}(\overline{\Lambda})$ (resp. $\mathscr{W}(\overline{\Lambda'})$). Le théorème en résultera puisque, S étant inversible dans $\mathscr{N}(\Lambda)$, $\frac{\psi}{S}$ appartient à $\mathscr{W}(\partial\Lambda, \overline{\Lambda})$ d'après 1.1.

On va montrer successivement :

1) Il existe des constantes $c, \alpha, c', \alpha', c'', \alpha'', \gamma_m, \rho_m$ $(m \in \mathbf{N})$, positives, telles que :

(1) Si $x \in \Lambda$ et $\|y - x\| \leqslant 2C\, d(x, \partial\Lambda)^\alpha$, alors
$$d(y, \partial\Lambda) \leqslant 2d(x, \partial\Lambda).$$

(2) Si $x \in \Lambda$ et $x' = \Pi(x)$ on a
$$\Pi(B_x \cap \Lambda) \supset B'_{x'} \cap \Lambda' \supset \Pi(B''_x \cap \Lambda)$$
où B_x (resp. $B'_{x'}, B''_x$) est la boule fermée de centre x et de rayon $C d(x, \partial\Lambda)^\alpha$ (resp. de centre x' et de rayon $C' d(x', \partial\Lambda')^{\alpha'}$, resp. de centre x et de rayon $C'' d(x, \partial\Lambda)^{\alpha''}$).

(3) $$\|a\|_m^{B'_{x'} \cap \Lambda'} \leqslant \gamma_m\, d(x', \partial\Lambda')^{-\rho_m} \quad \text{où } a = (a_1, \ldots, a_q).$$

2) $\psi|_{B_x \cap \Lambda} \in \mathscr{W}(B_x \cap \Lambda)$, $\chi_i|_{B'_{x'} \cap \Lambda'} \in \mathscr{W}(B'_{x'} \cap \Lambda')$, $\forall x \in \Lambda$ et, pour tout $(m, r) \in \mathbf{N}^2$, il existe une constante positive $C_{m,r}$ avec :
$$\left.\begin{aligned} \|\psi\|_m^{B''_x \cap \Lambda} &\leqslant C_{m,r}\, d(x, \partial\Lambda)^r \\ \|\chi_i\|_m^{B'_{x'} \cap \Lambda'} &\leqslant C_{m,r}\, d(x, \partial\Lambda')^r \end{aligned}\right\} \forall x \in \Lambda \tag{4}$$

Démonstration du 1. — Le (1) est immédiat.

Puisque $a_i \in \mathscr{N}(\Lambda')$, il existe un ouvert semi-analytique $\Omega' \supset \Lambda'$, tel que a_i se prolonge en un élément de $\mathscr{N}(\Omega')$.

On peut prendre C' et α' tels que $B'_x \subset \Omega'$ pour tout x' de Λ', et que $d(y', \partial\Omega') \geqslant \gamma\, d(x', \partial\Omega')^\rho$, pour tout y' de $B'_{x'}$, avec des constantes γ et ρ, positives, indépendantes de x'.

On déduit alors de I.2.1 de [5] l'existence de constantes positives γ'_m et ρ_m avec : $|a|_m^{B'_{x'}} \leqslant \gamma'_m\, d(x', \partial\Lambda')^{-\rho_m}$, $m \in \mathbf{N}$. Alors il existe γ_m positif avec : $\|a\|_m^{B'_{x'}} \leqslant \gamma_m\, d(x', \partial\Lambda')^{-\rho_m}$ d'où l'inégalité (3).

Si $x \in \Lambda$, on a $x_n = -\dfrac{a_1(x')}{q}$. Donc si x et y appartiennent à Λ et si $y' = \Pi(y) \in B'_{x'}$, $x' = \Pi(x)$, on a :

$$|y_n - x_n| \leqslant \frac{1}{q}\,\|x' - y'\|\,|a_1|_1^{B'_{x'}} \leqslant \frac{\gamma_1}{q}\,\|x' - y'\|\,d(x', \partial\Lambda')^{-\rho_1}.$$

On peut alors trouver C' et α' de manière à avoir la première inclusion de (2) (on utilise les inégalités II.2.2.2 de [5]). La seconde inclusion de (2) résulte des mêmes inégalités.

Démonstration du 2. – On va utiliser 2.2 en prenant $m = n-1$, $y = x'$, $t = x_n$.

On suppose que $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$.

Pour chaque x de Λ, on prend une fonction u_x dans $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ égale à 1 sur B_x et nulle en dehors de $B(x, 2C d(x, \partial\Lambda)^\alpha)$, et telle que $|u_x|_m^{\mathbf{R}^n} \leqslant C_m\, d(x, \partial\Lambda)^{-\alpha m}$, avec des constantes C_m.

La platitude de φ sur $\partial\Lambda$, et l'inégalité (1), montre alors que, pour tout (m, r) de $\mathbf{N}^2$ il existe des constantes $C'_{m,r}$ avec :

$$\|u_x\varphi\|_m^{\mathbf{R}^n} \leqslant C'_{m,r}\, d(x, \partial\Lambda)^r, \quad \forall x \in \Lambda. \tag{5}$$

Considérons les applications A (resp. A′) définies au voisinage de Λ (resp. Λ') par :

$$A(x', x_n) = (x', a_1(x'), \dots, a_q(x'), x_n) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}$$
$$(\text{resp. } A'(x') = (x', a_1(x'), \dots, a_q(x')) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^q).$$

Puisque les a_i sont bornés, il existe un compact K de V tel que $A(\Lambda) \subset K$ et $A'(\Lambda') \subset K'$ (les notations sont celles de 2.2).

On considère $u_x\varphi$ comme fonction de (x', v, x_n) indépendante de v.

D'après 2.2 il existe $\overline{\psi}_x$ dans $\mathscr{W}(K)$ et $\overline{\chi}_{ix}$ dans $\mathscr{W}(K')$, $i \in [1, q]$, avec :

$$u_x\varphi = Q\overline{\psi}_x + \sum_{i=1}^{q} \overline{\chi}_{ix}\, x_n^{q-i} \quad \text{dans } \mathscr{W}(K). \tag{6}$$

De plus la continuité de 2.2 montre qu'il existe, pour tout entier s, des constantes C'_s et m_s avec :

$$\begin{cases} \|\overline{\psi}_x\|_s^K \leqslant C'_s\, \|u_x\varphi\|_{m_s}^{\mathbf{R}^n} \\ \|\overline{\chi}_{ix}\|_s^{K'} \leqslant C'_s\, \|u_x\varphi\|_{m_s}^{\mathbf{R}^n} \end{cases}$$

De (5) on déduit alors, pour tout $(s, r) \in \mathbf{N}^2$:

$$\left.\begin{aligned} \|\overline{\psi}_x\|_s^{\mathrm{K}} &\leqslant \mathrm{C}'_s\, \mathrm{C}'_{m_s,r}\, d(x, \partial\Lambda)^r \\ \|\overline{\chi}_{ix}\|_s^{\mathrm{K}'} &\leqslant \mathrm{C}'_s\, \mathrm{C}'_{m_s,r}\, d(x, \partial\Lambda)^r . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

On pose $\psi_x = \overline{\psi}_x \circ \mathrm{A}$ sur Λ, $\chi_{ix} = \overline{\chi}_{ix} \circ \mathrm{A}'$ sur Λ'. On a $\psi_x \in \mathcal{W}(\Lambda)$ et $\chi_{ix} \in \mathcal{W}(\Lambda')$.

En composant (6) par A, et puisque $\mathrm{Q} \circ \mathrm{A} = \mathrm{R}$, on a : $u_x\varphi = \mathrm{R}\psi_x + \sum_{i=1}^{q} \chi_{ix}\, x_n^{q-i}$ sur Λ.

Puisque u_x vaut 1 sur B_x on a :

$$\psi_x|_{\mathrm{B}_x\cap\Lambda} = \psi|_{\mathrm{B}_x\cap\Lambda} \quad \text{et} \quad \chi_{ix}|_{\mathrm{B}'_{x'}\cap\Lambda'} = \chi_i|_{\mathrm{B}'_{x'}\cap\Lambda'} .$$

On va majorer $\|\psi_x\|_m^{\mathrm{B}''_x\cap\Lambda}$ et $\|\chi_{ix}\|_m^{\mathrm{B}'_{x'}\cap\Lambda'}$.

Pour cela, on remarque que, si F est un compact de $\mathbf{R}^n$, f un élément de $\mathcal{W}(\mathrm{F})^p$, et g un élément de $\mathcal{W}(f(\mathrm{F}))$, il existe des constantes C''_m, ne dépendant que de n, p et du diamètre de F, telles que : $\|g \circ f\|_m^{\mathrm{F}} \leqslant \mathrm{C}''_m\, \|g\|_m^{f(\mathrm{F})} \operatorname{Sup}_{k\leqslant m} (\|f\|_m^{\mathrm{F}})^k$. Il en résulte que

$$\left.\begin{aligned} \|\psi\|_m^{\mathrm{B}''_x\cap\Lambda} &\leqslant \mathrm{C}''_m\, \|\overline{\psi}_x\|_m^{\mathrm{K}} \operatorname{Sup}_{k\leqslant m} (\|\mathrm{A}\|_m^{\mathrm{B}''_x\cap\Lambda})^k \\ \|\chi_i\|_m^{\mathrm{B}'_{x'}\cap\Lambda'} &\leqslant \mathrm{C}''_m\, \|\overline{\chi}_{ix}\|_m^{\mathrm{K}'} \operatorname{Sup}_{k\leqslant m} (\|\mathrm{A}\|_m^{\mathrm{B}'_{x'}\cap\Lambda'})^k . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Alors les inégalités (4) du 2) résultent de (8), (7), (3) et des inégalités II.2.2.2 de [5].

Pour terminer la démonstration du 3.1, il suffit d'appliquer le le lemme suivant, de démonstration classique :

LEMME 3.2. – *Soit* F *une partie localement fermée de* $\mathbf{R}^n$, $\Psi \in \mathrm{J}(\overline{\mathrm{F}})$ *tels que :*

1) $\psi|_{\partial\mathrm{F}} = 0$, $\psi|_{\mathrm{F}} \in \mathcal{W}(\mathrm{F})$.

2) *il existe* C *et* α *positifs et des constantes* $\mathrm{C}_{m,r}$ *avec :* $\forall m, \forall r, \forall x \in \mathrm{F}$, $\|\psi\|_m^{\mathrm{B}_x\cap\mathrm{F}} \leqslant \mathrm{C}_{m,r}\, d(x, \partial\mathrm{F})^r$, où

$$\mathrm{B}_x = \{y \in \mathbf{R}^n ; \|y - x\| \leqslant \mathrm{C}d(x, \partial\mathrm{F})^\alpha\} .$$

Alors $\psi \in \mathcal{W}(\overline{\mathrm{F}})$.

4. Division par des fonctions Nash-analytiques.

THEOREME 4.1. – *Soit* X *une partie s.a.l.f. de* $\mathbf{R}^n$, *et* f_j, $j \in [1, s]$, *des éléments de* $\mathcal{N}(X)^r$. *Pour tout élément* φ *de* $\mathcal{J}(\partial X, \overline{X})^r$, *appartenant ponctuellement sur* X *au sous module de* $J(X)^r$ *engendré par les* f_j, *il existe* $\alpha_j \in \mathcal{J}(\partial X, \overline{X})$, $j \in [1, s]$, *avec* $\varphi = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j f_j$ *sur* X.

Remarques 4.2.

1) La condition d'appartenance ponctuelle signifie qu'il existe α_j dans $J(X)$ avec $\varphi = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j f_j$.

2) Le théorème de division de Malgrange [2], implique, si X est ouvert, qu'il existe α_j dans $\mathcal{E}(X)$ avec $\varphi = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j f_j$.

3) La condition supplémentaire de platitude sur le bord sera essentielle par la suite (Théorème 6.2).

4) Il résulte de 1.1 que chaque terme $\alpha_j f_j$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$ plate sur ∂X.

Démonstration de 4.1. – On raisonne par récurrence sur n. Le résultat est évident pour $n = 0$. On le suppose vrai dans $\mathbf{R}^{n-1}$.

Il suffit de montrer 4.1 localement, c'est-à-dire de montrer que pour tout x_0 de $\overline{X}$ il existe un ouvert $\Omega_0 \ni x_0$ et des $\alpha_j \in \mathcal{J}(\partial X \cap \Omega_0, \overline{X} \cap \Omega_0)$ avec $\varphi = \sum_{j=1} \alpha_j f_j$ sur $X \cap \Omega_0$. En effet, le résultat global s'obtient alors par une partition de l'unité.

On va donc raisonner au voisinage de 0. La démonstration est analogue à celles de II.4.1 et II.5.1 de [5].

a) On peut supposer X connexe au voisinage de 0.

En effet supposons $X = X_1 \cup X_2$, X_1 et X_2 s.a.l.f. avec $\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 \subset \partial X_1 \cap \partial X_2$, $\partial X_1 \subset \partial X$, $\partial X_2 \subset \partial X$. Alors, si le théorème est vrai pour X_1 et X_2, il l'est pour $X_1 \cup X_2$:

Si $\varphi = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j f_j$ sur X_1 et $\varphi = \sum_{j=1}^{s} \beta_j f_j$ sur X_2 avec α_j dans $\mathcal{J}(\partial X_1, \overline{X}_1)$ et β_j dans $\mathcal{J}(\partial X_2, \overline{X}_2)$, il existe γ_j dans

$\mathcal{W}(\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2)$ coïncidant avec α_j sur $\overline{X}_1$ et β_j sur $\overline{X}_2$ (régulière situation de $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$). On a alors $\varphi = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j f_j$ sur X, avec $\gamma_j \in \mathcal{J}(\partial X, \overline{X})$.

On montre ensuite, comme dans les points b), c) et d) de II.4.1 de [5], qu'il suffit de montrer 4.1, au voisinage de 0, sous l'hypothèse suivante : $r \leqslant s$ et $[f_1, \ldots, f_r] = \mathrm{PI}_r$, où P est un polynôme distingué en x_n.

On va montrer, avec cette hypothèse :

LEMME 4.3. – *Soit* $\Lambda \subset X$ *une partie s.a.l.f. compatible avec* P. *Alors pour tout élément* φ_Λ *de* $\mathcal{J}(\partial\Lambda, \overline{\Lambda})^r$, *appartenant ponctuellement au sous module engendré par les* f_j, *il existe* α_j *dans* $\mathcal{J}(\partial\Lambda, \overline{\Lambda})$ *avec* $\varphi_\Lambda = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j f_j$ *sur* Λ.

Montrons comment 4.3 implique 4.1.

D'après II.2.3 de [5], il existe une partition de $X \cap V(P)$, dans un voisinage de 0, en parties s.a.l.f. Λ_k, $k \in [1, N]$, compatibles avec P, telle que : $\partial\Lambda_k \subset (\bigcup_{\ell<k} \Lambda_\ell) \cup \partial X$ pour $k \in [1, N]$.

On va montrer, par récurrence sur k, que, si φ vérifie les hypothèses de 4.1, φ est égal modulo $\mathcal{J}(\partial X, \overline{X})$ $(f_1, \ldots, f_s)$ à un élément φ_k de $\mathcal{W}(\overline{X})$ plat sur $(\bigcup_{\ell<k} \Lambda_\ell) \cup \partial X$.

C'est vrai pour $k = 1$, puisque φ est plat sur ∂X ($\varphi = \varphi_1$). Admettons le résultat à l'ordre k, et montrons le à l'ordre $k+1$. On applique 4.3 à φ_k sur Λ_k : il existe α_{jk} dans $\mathcal{J}(\partial\Lambda_k, \overline{\Lambda}_k)$ avec $\varphi_k = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{jk} f_j$ sur Λ_k.

Puisque les deux fermés $\overline{\Lambda}_k$ et $(\bigcup_{\ell<k} \Lambda_\ell) \cup \partial X$ sont régulièrement situés et que leur intersection est contenue dans $\partial\Lambda_k$, il existe β_{jk} dans $\mathcal{W}(\overline{X})$, plat sur $(\bigcup_{\ell<k} \Lambda_\ell) \cup \partial X$ et égal à α_{jk} sur $\overline{\Lambda}_k$.

Posons $\varphi_{k+1} = \varphi_k - \sum_{j=1}^{s} \beta_{jk} f_j$ dans $\mathcal{W}(\overline{X})$. Cet élément est plat sur $(\bigcup_{\ell\leqslant k} \Lambda_\ell) \cup \partial X$ par construction, et égal à φ modulo $\mathcal{J}(\partial X, \overline{X})$ $(f_1, \ldots, f_s)$. Donc il vérifie la récurrence à l'ordre $k+1$.

A l'ordre $N+1$ on obtient un élément φ_{N+1} plat sur $\overline{X} \cap V(P)$. Puisque $[f_1, \ldots, f_r] = PI_r$, l'inégalité de Łojasiewicz montre que φ_{N+1} appartient à $\mathcal{J}(\partial X, \overline{X})\,(f_1, \ldots, f_r)$. Donc φ appartient à $\mathcal{J}(\partial X, \overline{X})\,(f_1, \ldots, f_s)$, d'où 4.1.

Démonstration de 4.3. – C'est exactement celle qui a été faite en II.5.1 de [5] aux changements suivants près : remplacer $\hat{\mathcal{O}}(\Lambda)$ et $\hat{\mathcal{O}}(\Lambda')$ par $J(\Lambda)$ et $J(\Lambda')$; utiliser 3.1 au lieu de II.2.4 de [5] pour diviser φ par P ; utiliser l'hypothèse de récurrence de 4.1 au lieu de celle de II.5.1 de [5] ; écrire des identités modulo $P\ \mathcal{J}(\partial\Lambda, \overline{\Lambda})^r$ au lieu de $P\ \mathcal{N}(\Lambda)^r$.

Remarque 4.4. – On peut reprendre les démonstrations précédentes dans le cas de fonctions de classe C^p, p fini, en utilisant la remarque I.2.4 de [5].

On obtient alors la variante suivante du théorème 4.1 :

Soit X une partie s.a.l.f. relativement compacte de $\mathbf{R}^n$, et f_j, $j \in [1, s]$, des éléments de $\mathcal{N}(X)^r$. Il existe des constantes α et β telles que, pour tout entier p et tout élément φ de $(\mathcal{W}^p(\overline{X}))^r$ (fonctions de Whitney de classe C^p sur $\overline{X}$), plat sur ∂X et appartenant ponctuellement sur X au sous module engendré par les f_j, il existe $\alpha_j \in \mathcal{W}^{[p/\alpha]-\beta}(\overline{X})$, plat sur ∂X, avec $\varphi = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j f_j$.

5. Faisceaux différentiables de Fréchet.

5.1. Notations. – Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, on note $\mathcal{E}_\Omega$, ou simplement $\mathcal{E}$, le faisceau des germes de fonctions différentiables réelles sur Ω, de fibre $\mathcal{E}_x$ en x.

Pour x dans $\mathbf{R}^n$, on note m_x^∞ l'idéal de $\mathcal{E}_x$ formé des germes plats en x, $\mathcal{F}_x$ le quotient $\mathcal{E}_x / m_x^\infty$, anneau de séries formelles, et $T_x : \mathcal{E}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x$ la surjection canonique.

On appelle faisceau différentiable un faisceau de $\mathcal{E}$-modules.

Si $\mathcal{G}$ est un faisceau différentiable, on note $\mathcal{G}_X$ (resp. $\mathcal{G}(X)$) la restriction de $\mathcal{G}$ à X (resp. le module des sections sur X).

5.2. Topologies canoniques. – Soit $\mathcal{G}$ un faisceau différentiable sur Ω.

5.2.1. Supposons d'abord $\mathcal{G}$ engendré sur Ω par p éléments de $\mathcal{G}(\Omega)$. On a alors une suite exacte : $0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}^p \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$. D'où la suite exacte : $0 \longrightarrow \mathcal{S}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \longrightarrow \mathcal{G}(\Omega) \longrightarrow 0$.

On munit $\mathcal{G}(\Omega)$ de la topologie quotient de $\mathcal{E}(\Omega)^p/\mathcal{S}(\Omega)$, où la topologie sur $\mathcal{E}(\Omega)$ est la topologie usuelle. Pour cette topologie, $\mathcal{G}(\Omega)$ est séparé si et seulement si $\mathcal{S}(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{E}(\Omega)^p$, et dans ce cas $\mathcal{G}(\Omega)$ est un espace de Fréchet.

La topologie quotient sur $\mathcal{G}(\Omega)$ est indépendante du système de générateurs [6].

5.2.2. On supposera désormais $\mathcal{G}$ de type fini sur Ω. Alors ce qui a été fait en 5.2.1 s'applique sur tout ouvert relativement compact de Ω, et, puisque $\mathcal{G}(\Omega)$ est la limite projective des $\mathcal{G}(U)$, U relativement compact dans Ω, on munit $\mathcal{G}(\Omega)$ de la topologie limite projective des topologies des $\mathcal{G}(U)$. Cette topologie sera dite topologie canonique sur $\mathcal{G}(\Omega)$.

Si $\mathcal{G}$ est engendré sur Ω par un nombre fini d'éléments, la topologie canonique de $\mathcal{G}(\Omega)$ coïncide avec celle définie en 5.2.1.

La topologie canonique de $\mathcal{G}(\Omega)$ peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes. Si elle est séparée, $\mathcal{G}(\Omega)$ est un espace de Fréchet.

5.3. Soit $\mathcal{G}'$ un sous faisceau de $\mathcal{G}$. On vérifie qu'on peut définir un sous faisceau $\overline{\mathcal{G}}'$ de $\mathcal{G}$ en posant, pour tout ouvert U de Ω, $\overline{\mathcal{G}}'(U) = \overline{\mathcal{G}'(U)}$ adhérence de $\mathcal{G}'(U)$ dans $\mathcal{G}(U)$. Le faisceau $\overline{\mathcal{G}}'$ est l'adhérence de $\mathcal{G}'$ dans $\mathcal{G}$.

DEFINITION 5.4. – *Un faisceau différentiable $\mathcal{G}$ sur Ω, de type fini, est un faisceau de Fréchet si $\mathcal{G}(\Omega)$ est séparé (donc est un espace de Fréchet).*

D'après 5.3, $\mathcal{G}$ est de Fréchet si et seulement si $\mathcal{G}(U)$ est un espace de Fréchet pour tout U assez petit.

DEFINITION 5.5. – *Soit $\mathcal{G}$ un faisceau différentiable, de type fini, sur Ω. On appelle faisceau séparé du faisceau $\mathcal{G}$, le faisceau de Fréchet $\widetilde{\mathcal{G}}$, quotient de $\mathcal{G}$ par l'adhérence du sous-faisceau nul.*

5.6. Propriétés. –

5.6.1. Le module des relations entre une famille finie de sections d'un faisceau de Fréchet est fermé.

5.6.2. Si $\mathcal{G}$ est de la forme $\mathcal{E}^p/\mathcal{S}$, alors $\widetilde{\mathcal{G}}$ est égal à $\mathcal{E}^p/\overline{\mathcal{S}}$.

Dans ce cas, il résulte du théorème spectral de Whitney qu'un élément φ de $\mathcal{E}(\Omega)^p$ appartient à $\overline{\mathcal{S}}(\Omega)$ si et seulement si, pour tout x de Ω, $\mathrm{T}_x\varphi \in \mathrm{T}_x\mathcal{S}_x = \mathcal{S}_x + m_x^\infty \mathcal{E}_x^p / m_x^\infty \mathcal{E}_x^p$.

6. Faisceaux analytiques et faisceaux différentiables.

6.1. Soit $\mathcal{M}$ un faisceau analytique, de type fini, sur Ω. Alors $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$ est un faisceau différentiable de type fini.

Supposons qu'on a, sur Ω, une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Puisque $\mathcal{E}$ est plat sur $\mathcal{O}$ on a aussi la suite exacte :

6.1.1. $$0 \longrightarrow \mathcal{R}\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^p \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{R}\mathcal{E}$ est le sous-faisceau de $\mathcal{E}^p$ engendré par $\mathcal{R}$, de fibre $\mathcal{R}_x \mathcal{E}_x$.

On a aussi les suites exactes :

6.1.2. $$0 \longrightarrow \mathcal{R}\mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}}(\Omega) \longrightarrow 0.$$

Pour tout x de Ω on a aussi la suite exacte :

6.1.3. $$0 \longrightarrow \mathcal{R}_x \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x^p \longrightarrow \mathcal{M}_x \underset{\mathcal{O}_x}{\otimes} \mathcal{F}_x \longrightarrow 0$$

puisque $\mathcal{F}_x$ est plat sur $\mathcal{O}_x$.

Soit alors m_i, $i \in [1,p]$, les générateurs de $\mathcal{M}$, et $\widetilde{m}_i$ les images de $m_i \otimes_{\mathcal{O}(\Omega)} 1_{\mathcal{E}(\Omega)}$ dans $\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}}(\Omega)$.

D'après 5.6.2 on a :

6.1.4. Un élément $\varphi = (\varphi_i)$ de $\mathcal{E}(\Omega)^p$ appartient à $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}(\Omega)$, i.e. vérifie $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i \widetilde{m}_i = 0$, si et seulement si, pour tout x de Ω, on a $\mathrm{T}_x\varphi \in \mathcal{R}_x \mathcal{F}_x$, donc si et seulement si $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{T}_x \varphi_i \, m_{ix} \otimes_{\mathcal{O}_x} 1_{\mathcal{F}_x} = 0$.

6.1.5. Exemple. – Soit X une partie semi-analytique de Ω et $\mathcal{J}$ le faisceau analytique des germes nuls sur X. Un élément φ de $\mathcal{E}(\Omega)$ appartient à $\overline{\mathcal{J}\mathcal{E}}(\Omega)$ si et seulement si, pour tout x de Ω, $T_x \varphi \in \mathcal{J}_x \mathcal{F}_x$. On démontre comme dans [4] que ceci est réalisé si et seulement si φ est nulle sur X.

Dans le cas où X est un sous-ensemble analytique fermé de Ω, X est cohérent si et seulement si $\mathcal{J}\mathcal{E} = \overline{\mathcal{J}\mathcal{E}}$ ([4] et [6]).

THEOREME 6.2. – *Soit* $\mathcal{R}$ *un sous faisceau de type semi-fini de* $\mathcal{O}^p_\Omega$. *Soit :* $x_0 \in \Omega$; Λ_i, $i \in [1, q]$, *une partition finie d'un voisinage* U *de* x_0 *en parties s.a.l.f. avec* $\partial\Lambda_i \subset \bigcup_{j<i} \Lambda_j$; U_i, $i \in [1, q]$, *un ouvert semi-analytique contenant* Λ_i ; r_{ik} *une famille finie d'éléments de* $\mathcal{R}(U_i) \cap \mathcal{N}(U_i)^p$ *engendrant* $\mathcal{R}$ *sur* Λ_i.

Alors un élément φ *de* $\mathcal{E}(U)^p$ *appartient à* $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}(U)$ *si, et seulement si, il existe des* α_{ik} *dans* $\mathcal{E}(U)$, *plats sur* $\complement\, U_i$, *et tels que :* $\varphi = \sum_{i=1}^{q} \sum_k \alpha_{ik} r_{ik}$.

Remarques. –

1) Pour tout x_0 de Ω, il existe Λ_i, U_i, r_{ik} satisfaisant aux hypothèses de 6.2. (Théorème II.6.8 de [5]).

2) D'après 1.1, chaque $\alpha_{ik} r_{ik}$, *prolongé par 0 sur* $\complement\, U_i$, appartient à $\mathcal{E}(U)$.

3) D'après III.7.1, de [5] le résultat s'applique au cas de 6.1.5.

Démonstration de 6.2. – Tout élément de la forme $\sum_i \sum_k \alpha_{ik} r_{ik}$, avec α_{ik} plat sur $\complement\, U_i$, appartient à $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}(U)$, d'après le théorème spectral de Whitney.

Soit, réciproquement, un élément φ de $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}(U)$. On définit les éléments α_{ik} par récurrence sur i.

Supposons qu'on ait défini, pour $j < i$, les α_{jk}, plats sur $\complement\, U_j$, de telle sorte que $\varphi_i = \varphi - \sum_{j<i} \sum_k \alpha_{jk} r_{jk}$ soit plat sur $\bigcup_{j<i} \Lambda_j$ (c'est vrai pour $i = 1$, en posant $\Lambda_0 = \emptyset$).

L'élément φ_i de $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}(U)$ est plat sur $\partial\Lambda_i$ et appartient ponctuellement sur Λ_i au sous-module engendré par les $(r_{ik})_k$.

D'après 4.1 il existe des α_{ik} dans $\mathcal{J}(\partial\Lambda_i , \overline{\Lambda}_i)$ avec $\varphi_i = \sum\limits_k \alpha_{ik} r_{ik}$ sur Λ_i.

D'après la régulière situation de $\overline{\Lambda}_i$ et de $(\bigcup\limits_{j<i} \Lambda_j) \cup (\complement\, U_i)$, dont l'intersection est contenue dans $\partial\Lambda_i$, on peut prolonger les $(\alpha_{ik})_k$ en des éléments de $\mathcal{E}(U)$, toujours notés α_{ik}, plats sur $(\bigcup\limits_{j<i} \Lambda_j) \cup (\complement\, U_i)$.

Alors, $\varphi_{i+1} = \varphi_i - \sum\limits_k \alpha_{ik} r_{ik} = \varphi - \sum\limits_{j\leq i} \sum\limits_k \alpha_{jk} r_{jk}$, est plat sur $\bigcup\limits_{j\leq i} \Lambda_j$, ce qui montre la récurrence.

Pour $i = q+1$, on obtient 6.2.

THEOREME 6.3. – *Soit* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R}'$ *deux sous-faisceaux, de type semi-fini, de* $\mathcal{O}^p_\Omega$. *Alors on a* $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}} + \overline{\mathcal{R}'\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{R}\mathcal{E} + \mathcal{R}'\mathcal{E}}$.

Démonstration. – Il est clair que $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}} + \overline{\mathcal{R}'\mathcal{E}} \subset \overline{\mathcal{R}\mathcal{E} + \mathcal{R}'\mathcal{E}}$.

Réciproquement, soit φ une section de $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E} + \mathcal{R}'\mathcal{E}}$ sur un ouvert U. On raisonne au voisinage d'un x_0 de U. Il résulte de II.6.8 de [5] qu'il existe Λ_i, U_i, r_{ik} (resp. $r'_{i\ell}$), satisfaisant aux hypothèses de 6.2 pour $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$). Il suffit en effet d'appliquer II.6.8 de [5] à chacun des faisceaux, et de raffiner les deux partitions en une partition convenant simultanément à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Alors les Λ_i, U_i, et la famille union des r_{ik} et $r'_{i\ell}$, vérifient les hypothèses de 6.2 relativement au faisceau $\mathcal{R} + \mathcal{R}'$.

Il existe donc des α_{ik} et $\alpha'_{i\ell}$, plats sur $\complement\, U_i$, avec

$$\varphi = \sum_i \Big(\sum_k \alpha_{ik} r_{ik} + \sum_\ell \alpha'_{i\ell} r'_{i\ell}\Big) = \sum_i \sum_k \alpha_{ik} r_{ik} + \sum_i \sum_\ell \alpha'_{i\ell} r_{i\ell} .$$

Donc $\varphi \in (\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}} + \overline{\mathcal{R}'\mathcal{E}})(U)$, d'où 6.3.

Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux faisceaux analytiques de type fini sur Ω, et τ un morphisme de $\mathcal{M}'$ dans $\mathcal{M}$. Alors le morphisme $\tau \otimes 1 : \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$, définit par passage au quotient un morphisme $\widetilde{\tau} : \widetilde{\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}}$.

Avec ces notations on a :

THEOREME 6.4. – *Soit* $\tau : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ *de type fini et* $\mathcal{M}$ *semi-cohérent. Alors* $\widetilde{\operatorname{coker} \tau}$ *est isomorphe à* $\operatorname{coker} \widetilde{\tau}$. *Il en résulte que* $\operatorname{Im} \widetilde{\tau}$ *est un sous-faisceau fermé de* $\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}}$.

Démonstration. – Sur un ouvert U assez petit, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{O}^{p'} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{M}' \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{R} \arrow[r] & \mathcal{O}^{p} \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme les lignes sont exactes, $\mathcal{R}$ est de type semi-fini, et f est défini par p' éléments de $\mathcal{O}(U)^p$, $f_1, f_2, \ldots, f_{p'}$.

On en déduit le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{E}^{p'} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\tau}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{\mathcal{R}\mathcal{E}} \arrow[r] & \mathcal{E}^{p} \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On a : $\operatorname{Im} \tilde{\tau} = ((f_1, \ldots, f_{p'})\, \mathcal{E} + \overline{\mathcal{R}\mathcal{E}})/\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}$.

Puisque $(f_1, \ldots, f_{p'})\, \mathcal{E}(U)$ est fermé dans $\mathcal{E}(U)^p$, il résulte de 6.3 que $(f_1, \ldots, f_{p'})\, \mathcal{E}(U) + \overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}(U)$ est fermé. Donc $\operatorname{Im} \tilde{\tau}(U)$ est fermé dans $\widetilde{\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}}(U)$ et coker $\tilde{\tau}$ est un faisceau de Fréchet.

Le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes, montre alors l'existence d'un isomorphisme de $\widetilde{\text{coker}\, \tau}$ sur coker $\tilde{\tau}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} \tau \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \widetilde{\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}} \arrow[r, "\tilde{\tau}"] & \widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}} \arrow[r] & \operatorname{coker} \tilde{\tau} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

7. Fonctions composées différentiables.

THEOREME 7.1. – *Soit* Ω (*resp.* Ω') *un ouvert de* $\mathbf{R}^m$ (*resp.* $\mathbf{R}^n$), f *une application de classe* C^∞, *propre et finie, de* Ω *dans* Ω'. *Alors*

1) *Si* $\mathcal{G}$ *est un faisceau différentiable de type fini sur* Ω, $f_*(\mathcal{G})$ *est de type fini sur* Ω'.

2) *Si* $\mathcal{G}$ *est un faisceau de Fréchet sur* Ω, $f_*(\mathcal{G})$ *est de Fréchet sur* Ω', *et les topologies canoniques de* $\mathcal{E}(\Omega')$*-module et de* $\mathcal{E}(\Omega)$*-module sont égales sur* $f_*(\mathcal{G})(\Omega') = \mathcal{G}(\Omega)$.

Démonstration. – Le 1) résulte du théorème de préparation différentiable.

En particulier $f_*(\mathcal{E}_\Omega)$ est de type fini. Donc si U' est un ouvert relativement compact dans Ω, et $U = f^{-1}(U')$,

$$f_*(\mathcal{E}_\Omega)(U') = \mathcal{E}(U)$$

est un $\mathcal{E}(U')$-module de type fini. On en déduit qu'il existe une application $\mathcal{E}(U')$-linéaire, surjective, $\mathcal{E}(U')^p \longrightarrow \mathcal{E}(U)$. Cette application est continue.

Pour montrer le 2) il suffit de montrer que sur $f_*(\mathcal{G})(U') = \mathcal{G}(U)$, qui est de type fini sur $\mathcal{E}(U')$ et sur $\mathcal{E}(U)$, les topologies de $\mathcal{E}(U')$-module et de $\mathcal{E}(U)$-module sont égales.

Or on a une surjection, continue pour la topologie de $\mathcal{E}(U)$-module, de $\mathcal{E}(U)^q$ dans $\mathcal{G}(U)$. Par composition on a une surjection de $\mathcal{E}(U')^{pq}$ dans $\mathcal{G}(U)$, continue pour la topologie de $\mathcal{E}(U)$-module sur $\mathcal{G}(U)$. Puisque, pour cette topologie, $\mathcal{G}(U)$ est un espace de Fréchet, il en résulte que $\mathcal{G}(U)$ est isomorphe, algébriquement et topologiquement, à un quotient de $\mathcal{E}(U')^{pq}$ par un sous $\mathcal{E}(U')$-module fermé. On en déduit le 2).

On suppose désormais que f est un morphisme analytique propre et fini de Ω dans Ω'. Si $\mathcal{M}$ est un faisceau analytique de type fini sur Ω on a un morphisme naturel

$$\rho : f_*(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega'}} \mathcal{E}_{\Omega'} \longrightarrow f_*(\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega}).$$

D'autre part $f_*(\mathcal{M})$ est de type fini sur Ω'. D'après 7.1, $f_*(\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega})$ est un faisceau de Fréchet sur Ω'.

THEOREME 7.2. – *Le morphisme* $\widetilde{\rho}$ *de* $\widetilde{f_*(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega'}} \mathcal{E}_{\Omega'}}$ *dans* $f_*(\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega})$, *obtenu à partir de* ρ *par passage aux séparés, est un isomorphisme.*

Démonstration. – On montre d'abord que ρ est surjectif.

En effet, soit $y \in \Omega'$, et x_j, $j \in [1, q]$, les éléments de $f^{-1}(y)$ (avec éventuellement $q = 0$). Alors

$$(f_*(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega'}} \mathcal{E}_{\Omega'})_y = \bigoplus_j (\mathcal{M}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{E}_y) = \bigoplus_j (\mathcal{M}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_{x_j}} (\mathcal{O}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{E}_y)),$$

$f_*(\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega})_y$ est un quotient de $f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega)_y = \bigoplus_j (\mathcal{M}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_{x_j}} \mathcal{E}_{x_j})$, et ρ_y est obtenu en tensorisant par $\mathcal{M}_{x_j}$ le morphisme naturel de $\mathcal{O}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{E}_y$ dans $\mathcal{E}_{x_j}$. Celui-ci est surjectif d'après l'hypothèse de finitude et le théorème de préparation.

Puisque ρ est surjectif, il en est de même de $\widetilde{\rho}$.

Pour montrer 7.2 il suffit de raisonner localement sur Ω', donc on peut supposer que $f_*(\mathcal{M})$ est engendré sur Ω' par des éléments m_i, $i \in [1, p]$, de $\mathcal{M}(\Omega)$.

On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{O}^p_{\Omega'} \longrightarrow f_*(\mathcal{M}) \longrightarrow 0 .$$

D'où le diagramme, où la 1ère ligne est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{R}\mathcal{E}_{\Omega'}} & \longrightarrow & \mathcal{E}^p_{\Omega'} & \longrightarrow & \widetilde{f_*(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega'}} \mathcal{E}_{\Omega'}} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle\widetilde{\rho}} & & \\ & & & & & & f_*(\widetilde{\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}_\Omega}) . & & \end{array}$$

Soit $\widetilde{m}_i$ les images dans $\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega}(\Omega)$ des éléments $m_i \otimes_{\mathcal{O}(\Omega)} 1_{\mathcal{E}(\Omega)}$.

Pour montrer que $\widetilde{\rho}$ est injectif il suffit de montrer que toute relation $\alpha = (\alpha_i) \in \mathcal{E}(\Omega')^p$ entre les $\widetilde{m}_i$ appartient à $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}_{\Omega'}}(\Omega')$, c'est-à-dire que, pour tout y de Ω', $\mathrm{T}_y\alpha \in \mathcal{R}_y \mathcal{F}_y$.

Or $\sum_{i=1}^{p} (\alpha_i \circ f)\, \widetilde{m}_i = 0$ implique que, pour tout x de Ω, $\mathrm{T}_x(\alpha \circ f)$ est une relation entre les $m_{ix} \otimes_{\mathcal{O}_x} 1_{\mathcal{F}_x}$. Donc, pour tout y de Ω', $\mathrm{T}_y\alpha \circ \mathrm{T}_{x_j} f$ est une relation entre les $m_{ix_j} \otimes_{\mathcal{O}_{x_j}} 1_{\mathcal{F}_{x_j}}$, où $f^{-1}(y) = \{x_j \,,\, j \in [1, q]\}$.

Puisque $\mathcal{F}_{x_j}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{F}_y$, l'élément

$$m_{iy} \otimes_{\mathcal{O}_y} 1_{\mathcal{F}_y} = \bigoplus_{j=1}^{q} (m_{ix} \otimes_{\mathcal{O}_y} 1_{\mathcal{F}_y}) \text{ de } f_*(\mathcal{M})_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{F}_y = \bigoplus_{j=1}^{q} (\mathcal{M}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{F}_y)$$

s'identifie à l'élément

$$\bigoplus_{j=1}^{q} (m_{ix_j} \otimes_{\mathcal{O}_{x_j}} 1_{\mathcal{F}_{x_j}}) \text{ de } \bigoplus_{j=1}^{q} (\mathcal{M}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_{x_j}} \mathcal{F}_{x_j}) .$$

Donc $T_y\alpha$ est une relation entre les $m_{iy} \otimes_{\mathcal{O}_y} 1_{\mathcal{F}_y}$. Il en résulte que $T_y\alpha$ appartient à $\mathcal{R}_y \mathcal{F}_y$.

THEOREME 7.3. – *Soit $\mathcal{M}'$ un faisceau analytique de type fini sur Ω', $\mathcal{M}$ un faisceau analytique semi-cohérent sur Ω et τ un morphisme de $\mathcal{M}'$ dans $\mathcal{M}$ au-dessus de f (i.e. un morphisme de $\mathcal{M}'$ dans $f_*(\mathcal{M})$). Soit $\widetilde{\tau}$:*

$$\widetilde{\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega'}} \mathcal{E}_{\Omega'}} \longrightarrow \widetilde{f_*(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega'}} \mathcal{E}_{\Omega'}} = f_*(\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega})$$

le morphisme de faisceaux de Fréchet associé à τ.

Alors $(\operatorname{Im} \widetilde{\tau})(\Omega')$ *est fermé dans* $\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega}(\Omega)$.

Démonstration. – $f_*(\mathcal{M})$ est semi-cohérent d'après II.7.1 de [5]. D'après 6.4, $\operatorname{Im} \widetilde{\tau}(\Omega')$ est fermé dans $\widetilde{f_*(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega'}} \mathcal{E}_{\Omega'}}(\Omega')$. Le théorème résulte alors de 7.1 et 7.2.

En prenant $\mathcal{M} = \mathcal{O}_\Omega^p$ et $\mathcal{M}' = \mathcal{O}_{\Omega'}^q$, on obtient :

COROLLAIRE 7.4. – *Le sous $\mathcal{E}(\Omega')$-module de $\mathcal{E}(\Omega)^p$ engendré par q éléments de $\mathcal{O}(\Omega)^p$ est fermé.*

Le cas particulier suivant est analogue à un théorème de G. Glaeser [1].

COROLLAIRE 7.5. – *La sous-algèbre de $\mathcal{E}(\Omega)$, formée des fonctions composées $\alpha \circ f$, où $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega')$, est fermée.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. GLAESER, Fonctions composées différentiables, *Ann. of Math.*, 77, (1963) 193-209.

[2] B. MALGRANGE, Division des distributions, Séminaire L. Schwartz, 1959-1960, exposés 21-25.

[3] B. MALGRANGE, Le théorème de préparation en géométrie différentiable, Séminaire H. Cartan 1962-1963, exposés 11, 12, 13 et 22.

[4] B. Malgrange, Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques, *Bull. Soc. Math. France*, 91 (1963), 113-127.

[5] J. Merrien, Faisceaux analytiques semi-cohérents, *Ann. Inst. Fourier*, 30, 4 (1980), 165-219.

[6] J.Cl. Tougeron, Idéaux des fonctions différentiables, *Erg. der Math.*, 71.

Manuscrit reçu le 21 avril 1980.

Jean Merrien,
Institut de Recherche
Mathématique de Rennes
Laboratoire Associé n° 305
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex.