

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PÁL ERDÖS

GÉRALD TENENBAUM

Sur la structure de la suite des diviseurs d'un entier

Annales de l'institut Fourier, tome 31, n° 1 (1981), p. 17-37

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_17_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

SUR LA STRUCTURE DE LA SUITE DES DIVISEURS D'UN ENTIER

par P. ERDÖS et G. TENENBAUM^(*)

1. Introduction.

Le point de départ de ce travail est une conjecture d'Erdős datant de plus de quarante ans :

C1 : *Presque tout entier n possède au moins deux diviseurs d, d' tels que d < d' ≤ 2d.*

En 1948, Erdős a montré que la suite des entiers satisfaisant à cette condition possède effectivement une densité asymptotique mais sa méthode ne permet pas d'établir que cette densité a pour valeur 1 [2]. Une justification heuristique de C1 peut être formulée ainsi : comme le nombre des valeurs distinctes des quantités $\log d'/d$, d et d' parcourant les diviseurs de n , est égal à

$$\text{card}\{d|n, d'|n : (d, d') = 1\} = \prod_{p^{\nu}||n} (2\nu + 1)$$

et peut donc, grâce à un argument classique, être évalué par $(\log n)^{\log 3+o(1)}$ pour presque tout n , on peut s'attendre à ce qu'un intervalle I inclus dans $[-\log n, \log n]$ et de longueur λ contienne usuellement $\lambda(\log n)^{\log 3-1+o(1)}$ points $\log d/d'$ distincts ; la conjecture C1 exprime que dans le cas $I = [-\log 2, \log 2]$ le nombre de ces points est au moins égal à 2.

Cet argument a conduit Erdős à formuler la conjecture plus forte suivante, qu'il a annoncé pouvoir établir en 1964 [3] :

(*) Laboratoire Associé au C.N.R.S. n° 226.

C2 : Pour tout réel positif ϵ et presque tout entier n , on a :

$$1 + (\log n)^{1-\log 3-\epsilon} < \min \left\{ \frac{d'}{d} : d|n, d'|n, d < d' \right\} \\ < 1 + (\log n)^{1-\log 3+\epsilon}.$$

Malheureusement, alors que l'inégalité de gauche a été récemment prouvée, sous une forme légèrement plus précise, par Erdös et Hall [6], celle de droite doit pour le moment rester conjecturale.

Fondée sur le même argument heuristique, une autre conjecture est énoncée par Hall et Tenenbaum dans [9] :

C3 : Pour tout réel α de $[0, 1]$ et presque tout entier n , on a :

$$U(n, \alpha) := \text{card} \left\{ d|n, d'|n : (d, d') = 1, \left| \log \frac{d'}{d} \right| \leq (\log n)^\alpha \right\} \\ = (\log n)^{\log 3 - 1 + \alpha + o(1)}.$$

Dans leur article les auteurs prouvent que l'inégalité

$$U(n, \alpha) \leq (\log n)^{\log 3 - 1 + \alpha + o(1)}$$

a effectivement lieu pour presque tout n , mais ils n'obtiennent pas la borne inférieure souhaitée.

Désignons par $\tau(n)$ le nombre des diviseurs d'un entier n ; dans le but de prouver C1, Erdös a introduit la fonction arithmétique $n \rightarrow \tau^+(n)$ égale au nombre des entiers k pour lesquels l'intervalle $[2^k, 2^{k+1}[$ contient au moins un diviseur de n . On a toujours $\tau^+(n) \leq \tau(n)$ et il suffirait, pour prouver C1, d'établir, pour presque tout n , l'inégalité stricte.

Cela a conduit Erdös (voir par exemple [4]) à émettre la conjecture suivante :

C4 : Quitte à négliger une suite d'entiers de densité nulle, le rapport $\tau^+(n)/\tau(n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

L'un des objets de cet article est de réfuter C4, prouvant même que toute suite \mathcal{A} telle que $\lim_{n \in \mathcal{A}} \frac{\tau^+(n)}{\tau(n)} = 0$ est de densité nulle

Plus précisément, nous obtenons le résultat quantitatif suivant :

THEOREME 1. — Pour tout réel positif ϵ il existe une constante positive $c(\epsilon)$ telle que, pour tout réel α , $0 \leq \alpha \leq 1$, la densité supérieure de la suite des entiers n satisfaisant à $\tau^+(n) \leq \alpha \tau(n)$ ne dépasse pas $c(\epsilon) \alpha^{1-\epsilon}$.

Remarque. — Ce résultat laisse augurer que la fonction arithmétique τ^+/τ possède une fonction de répartition continue et croissante sur $[0, 1]$.

Le reste de cette introduction est consacré plus spécifiquement aux propriétés de l'ensemble ordonné des diviseurs d'un entier ; nous notons $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_\tau = n$ la suite croissante des diviseurs d'un entier générique n .

Les conjectures C1 et C2 peuvent être traduites par des évaluations de la quantité $\min \left\{ \frac{d_{i+1}}{d_i} : 1 \leq i \leq \tau - 1 \right\}$. Dans [10], Tenenbaum a établi que la fonction

$$\psi(n) := (\log n)^{-1} \max \left\{ \log \frac{d_{i+1}}{d_i} : 1 \leq i \leq \tau - 1 \right\}$$

possède une fonction de répartition continue sur $[0, 1]$ et «voisine» de l'identité. A une légère modification près, la démonstration du lemme 7 de [10] implique le résultat suivant :

Soit n un entier dont la décomposition en produit de facteurs premiers est $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\nu_i}$, avec $p_1 < p_2 < \dots < p_k$; alors on a $\max_{i=1}^{\tau-1} \frac{d_{i+1}}{d_i} = \max_{j=1}^k p_j / \prod_{i=1}^{k-1} p_i^{\nu_i}$.

Erdős et Hall se sont intéressés à la fonction

$$f(n) := \text{card} \{i (1 \leq i \leq \tau - 1) : (d_i, d_{i+1}) = 1\},$$

fournissant en particulier une minoration non triviale de son ordre maximal [5]. Cependant, aucun résultat satisfaisant n'a pu être obtenu pour l'ordre moyen de $f(n)$.

Parallèlement à l'étude de $f(n)$, on peut considérer la fonction

$$g(n) := \text{card} \{i (1 \leq i \leq \tau - 1) : d_i | d_{i+1}\}.$$

Nous montrons le résultat suivant :

THEOREME 2. — Pour tout réel α de $[0, 1]$, désignons par $\Delta(\alpha)$ la densité supérieure de la suite des entiers n satisfaisant à $g(n) \leq \alpha \tau(n)$. Alors on a $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta(\alpha) = 0$.

Ce résultat avait été conjecturé par Montgomery lors du Symposium de Théorie Analytique des Nombres de Durham (1979). Son argument heuristique était le suivant : soit n un entier et p son plus petit facteur premier ; quitte à négliger une suite de n de densité nulle on peut supposer $\log p \leq (\log n)^{o(1)}$; de plus, la moitié au moins des diviseurs de n divisent n/p , et, si $d_i \mid \frac{n}{p}$ mais $d_i \nmid d_{i+1}$ on a $d_{i+1} < p d_i$, or la mesure de $\bigcup_{d_i \mid (n/p)}]\log d_i, \log p d_i[$ ne dépasse pas $\tau(n) \log p$, elle est donc usuellement $\leq (\log n)^{\log 2 + o(1)}$ et l'on peut s'attendre à ce que la proportion des $\log d_{i+1}$ contenus dans cette réunion tende vers 0 comme $(\log n)^{\log 2 - 1 + o(1)}$; le résultat espéré nécessite seulement qu'elle soit majorée par une constante $< \frac{1}{2}$.

Ainsi une même idée sous-tend les théorèmes 1 et 2 : les diviseurs d'un entier usuel ne sont pas trop souvent trop proches. Le théorème 2 appelle encore quelques remarques :

(i) Si le rapport de deux diviseurs consécutifs d'un entier n est entier, il est égal au plus petit facteur premier de n .

En effet, si p est ce facteur premier, avec $p^\nu \parallel n$, et si $d_i \mid d_{i+1}$ ou bien $p^\nu \nmid d_i$ et l'on a $d_{i+1} = p d_i$, ou bien $p^\nu \mid d_i$ et l'on a $d_{i+1} = q d_i$, où q est un facteur premier de n supérieur à p , or ce second cas est absurde : il implique que le diviseur $q \frac{d_i}{p}$ de n appartient à l'intervalle $]d_i, d_{i+1}[$.

(ii) Le théorème 2 est le meilleur possible, en ce sens que pour tout $\alpha > 0$ on a $\Delta(\alpha) > 0$. En effet, notons $2 = p_1 < p_2 < \dots$ la suite croissante des nombres premiers et désignons, pour chaque indice k , par $r = r(k)$ le plus grand entier satisfaisant à $p_{k+r} < 2p_k$. Alors $r(k) \rightarrow \infty$ et pour k assez grand on a $(r+2)2^{-r-1} \leq \alpha$. Considérons la suite \mathcal{Q} des entiers sans facteur carré qui sont multiples de $p_k \dots p_{k+r}$; \mathcal{Q} est de densité positive ; de plus, si $n \in \mathcal{Q}$ et si d_i est un diviseur de n divisible par p_{k+j} mais non par p_{k+s} avec $0 \leq j < s \leq r$ alors $d_{i+1} \leq \frac{p_{k+s}}{p_{k+j}} d_i < 2d_i$ donc $d_i \nmid d_{i+1}$;

on en déduit, pour n dans \mathcal{A}

$$\begin{aligned} g(n) &\leq \sum_{j=0}^{r+1} \text{card} \left\{ d \mid n : \left(d, \prod_{i=0}^{j-1} p_{k+i} \right) = 1 \text{ et } \prod_{i=j}^r p_{k+i} \mid d \right\} \\ &\leq (r+2) 2^{-r-1} \tau(n) \leq \alpha \tau(n). \end{aligned}$$

(iii) Notre démonstration du théorème 2 pourrait donner une majoration explicite de $\Delta(\alpha)$ en fonction de α . Cette majoration est certainement très éloignée de l'ordre de grandeur véritable de $\Delta(\alpha)$, aussi nous n'avons pas cherché à la calculer.

(iv) Il est probable que la fonction arithmétique g/τ possède une fonction de répartition continue et croissante sur $[0, 1]$ mais nous ne pouvons pas le prouver.

Un autre aspect de la structure d'ordre des diviseurs d'un entier est considéré dans le résultat suivant :

THEOREME 3. — Pour tout entier n et tout réel $\xi > 1$, posons $h(\xi, n) = \prod' \frac{d_{i+1}}{d_i}$ où l'apostrophe signifie que le produit est étendu aux valeurs de $i \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ pour lesquelles on a $\frac{d_{i+1}}{d_i} \leq n^{1/\xi}$. Si $\xi = \xi(n)$ est une fonction croissante tendant vers l'infini avec n de façon que $\xi(n)/\log n$ tends vers 0 en décroissant, on a, pour presque tout n , $\frac{\log h(\xi, n)}{\log n} = \xi^{\log 2 - 1 + o(1)}$.

Comme nous le verrons dans la démonstration, ce résultat signifie que les rapports $\frac{d_{i+1}}{d_i}$ intervenant dans le produit $h(\xi, n)$ sont essentiellement ceux pour lesquels d_i et d_{i+1} ont les mêmes facteurs premiers supérieurs à $n^{1/\xi}$.

2. Notations.

Les lettres $a, b, d, i, j, k, m, n, \nu, r, s, t$ désignent des entiers non négatifs, alors que les lettres p et q sont utilisées exclusivement pour des nombres premiers.

$a|b$ signifie a divise b ; $a|b^\infty$ signifie que chaque facteur premier de a divise b ; $p^\nu \parallel a$ signifie que l'exposant de p dans la décomposition de a est exactement ν .

Les lettres c, c_1, c_2 désignent des constantes absolues positives. Dans l'utilisation des symboles \ll de Vinogradov, toute dépendance éventuelle en fonction des paramètres σ, θ, \dots sera indiquée sous la forme $\ll_{\sigma, \theta} \dots$.

Nous notons $\tau(n)$ le nombre des diviseurs d'un entier n et $\Omega(n)$ (resp. $\omega(n)$) le nombre de ses facteurs premiers, comptés avec (resp. sans) leur ordre de multiplicité.

Le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier d'un entier $n > 1$ est noté $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$). Par convention $P^+(1) = 1$, $P^-(1) = +\infty$. Pour chaque valeur du paramètre réel $\sigma \geq 2$, on note $n \mapsto \chi(n, \sigma)$ la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers $n \geq 1$ satisfaisant à $P^-(n) \geq \sigma$ et l'on pose :

$$\tau(n, \sigma) := \sum_{d|n} \chi(d, \sigma),$$

$$\Omega(n, \sigma) := \sum_{p^\nu \parallel n, p < \sigma} \nu$$

$$\omega(n, \sigma) := \sum_{p^\nu \parallel n, p < \sigma} 1.$$

Pour tout réel $\theta > 1$, nous définissons une fonction arithmétique $\tau^+(n, \theta)$ par la formule

$$\tau^+(n, \theta) := \text{card } \{k \in \mathbf{N} : \exists d|n : \theta^k \leq d < \theta^{k+1}\};$$

dans le cas $\theta = 2$, nous notons simplement $\tau^+(n, 2) = \tau^+(n)$.

Le symbole $\sum_{d, d'}^{\theta}$ indique une sommation restreinte aux couples d'entiers (d, d') satisfaisant à $d \neq d'$ et $\frac{1}{\theta} < \frac{d'}{d} < \theta$.

Enfin, par convention, une somme (resp. un produit) portant sur l'ensemble vide est nulle (resp. égal à 1).

3. Résultats préliminaires.

Nous ferons grand usage du résultat suivant, dû à Halberstam et Richert [7] et généralisant un résultat de Hall.

LEMME 1. — Soit h un fonction multiplicative réelle satisfaisant, pour tout p , à $0 \leq h(p^j) \leq \lambda_1 \lambda_2^j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) où

$\lambda_1 \geq 0$ et $0 \leq \lambda_2 < 2$; on a pour $x \geq 2$

$$\sum_{n \leq x} h(n) \ll \frac{x}{\log x} \prod_{p < x} \sum_{j=0}^{\infty} h(p^j) p^{-j}.$$

Au cours de la démonstration des théorèmes 1 et 2, nous utiliserons la généralisation suivante du lemme 1 :

LEMME 2. — Soient u et v deux fonctions arithmétiques multiplicatives réelles satisfaisant, pour tout p , à

$$0 \leq u(p^{i+j}) v(p^j) \leq \lambda_i \lambda^j \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots)$$

où $\lambda_i \geq 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) et $0 \leq \lambda < 2$.

Si l'on pose, pour tout p ,

$$w(p^i) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} u(p^{i+j}) v(p^j) (1 + j \log p) p^{-j}}{\sum_{j=0}^{\infty} u(p^j) v(p^j) p^{-j}} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

alors on a uniformément en $k \geq 1$ et $x \geq 2$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} u(kn) v(n) \\ \ll \prod_{\substack{p^i \parallel k \\ p < x}} w(p^i) \prod_{\substack{p^i \parallel k \\ p \geq x}} u(p^i) \frac{x}{\log x} \prod_{p < x} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j) v(p^j) p^{-j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Remarque. — Sous certaines hypothèses supplémentaires (par exemple $u(n) > 0$ pour tout n) on peut supprimer le facteur $(1 + j \log p)$ dans la définition de $w(p^i)$, ce qui rend le résultat optimal — cf. par exemple [1] Théorème T. Dans le cas général, cependant, ce facteur supplémentaire est indispensable, comme le montre l'exemple suivant : k est un nombre premier de l'intervalle $\left[\frac{x}{2}, x \right]$, $u(1) = u(k^2) = 1$, $u(n) = 0$ pour $n \neq 1$ ou k^2 , $v(n) = 1$ pour tout n ; l'inégalité (1) s'écrit alors : $1 \ll \frac{1 + \log k}{k} \frac{x}{\log x}$.

Démonstration du lemme 2. — Le cas des facteurs premiers $\geq x$ de k est trivial ; nous supposons donc $P^+(k) < x$.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} u(kn) v(n) \log x \\ = \sum_{d \mid k^\infty} u(kd) v(d) \sum_{\substack{m \leq x/d \\ (m, k)=1}} u(m) v(m) \left\{ \log \frac{x}{d} + \log d \right\}. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, le lemme 1 appliqué à

$$n \mapsto h(n) = \begin{cases} u(n) v(n) & \text{si } (n, k) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

permet d'écrire

$$\sum_{\substack{m < x/d \\ (m, k)=1}} u(m) v(m) \log x/d \ll \frac{x}{d} \prod_{\substack{p < x \\ p \nmid k}} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j) v(p^j) p^{-j} ;$$

ensuite on a la majoration triviale

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m < x/d \\ (m, k)=1}} u(m) v(m) \log d &\leq \frac{x}{d} \log d \sum_{\substack{m < x \\ (m, k)=1}} \frac{u(m) v(m)}{m} \\ &\leq \frac{x}{d} \log d \prod_{\substack{p < x \\ p \nmid k}} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j) v(p^j) p^{-j} \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} u(kn) v(n) &\ll \frac{x}{\log x} \sum_{d \mid kx} \frac{u(kd) v(d)}{d} (1 + \log d) \prod_{\substack{p < x \\ p \nmid k}} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j) v(p^j) p^{-j} ; \end{aligned}$$

le résultat s'en déduit en remarquant que, pour tout d ,

$$1 + \log d \leq \prod_{p \mid d} (1 + j \log p).$$

LEMME 3. — Pour tout couple (β, σ) des réels satisfaisant à $1 < \beta < 2$ et $\sigma \geq 2$, notons $\delta(\beta, \sigma)$ la densité supérieure de la suite des entiers n satisfaisant à $\tau(n, \sigma) \leq \tau(n) (\log \sigma)^{-\beta \log 2}$. On a $\delta(\beta, \sigma) \ll_{\beta} (\log \sigma)^{\beta-1-\beta \log \beta}$.

Démonstration. — On a, pour tout n , $\tau(n, \sigma) \geq 2^{-\Omega(n, \sigma)} \tau(n)$, d'où $\delta(\beta, \sigma) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \operatorname{card} \{n < x : \Omega(n, \sigma) \geq \beta \log \log \sigma\}$. D'après le lemme 1, on a pour $1 < y < 2$

$$\sum_{n < x} y^{\Omega(n, \sigma)} \ll_y x (\log \sigma)^{y-1} ;$$

cela implique

$$\delta(\beta, \sigma) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n < x} y^{\Omega(n, \sigma) - \beta \log \log \sigma} \ll_y (\log \sigma)^{y-1-\beta \log y},$$

d'où l'on tire le résultat annoncé en choisissant $y = \beta$.

LEMME 4. — Il existe une fonction d'une variable $\epsilon \mapsto \xi_0(\epsilon)$ telle que, pour tous réels $\epsilon, \xi, \sigma, \theta$ satisfaisant à $0 < \epsilon \leq \frac{1}{5}$, $\xi \geq \xi_0(\epsilon)$, $\sigma \geq \theta \geq 2$, il existe une suite d'entiers \mathcal{A} possédant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout n de \mathcal{A} , $P^-(n) \geq \theta$.

(ii) La densité inférieure de \mathcal{A} est au moins égale à

$$(1 - (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2}) \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(iii) Pour tout n de \mathcal{A} , $\sum_{d|n} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \geq \frac{9}{10} \tau(n, \sigma)$

où χ^* est la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers d satisfaisant à

$$\sup \left\{ \frac{|\Omega(d, u) - \frac{1}{2} \log(\log u / \log \sigma)|}{\log(\log u / \log \sigma)} : \exp \{\log \xi \cdot \log \sigma\} \leq u < n \right\}^{(2)} \leq \epsilon.$$

Démonstration. — Supposons σ et θ donnés comme indiqué et définissons, pour tout y de $]0, 2[$ et tout $u > \sigma$ une fonction arithmétique par

$$f(y, u, n) = \chi(n, \theta) \tau(n, \sigma)^{-1} \sum_{d|n} y^{\Omega(d, u)} \chi(d, \sigma);$$

c'est une fonction multiplicative ; on a pour $\nu \geq 1$

$$f(y, u, p^\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < \theta \\ 1 & \text{si } \theta \leq p < \sigma \\ (\nu + 1)^{-1} \sum_{j=0}^{\nu} y^j & \text{si } \sigma \leq p < u \\ 1 & \text{si } u \leq p. \end{cases}$$

En particulier, on a pour tout $\nu \geq 1$

$$0 \leq f(y, u, p^\nu) \leq (\max \{1, y\})^\nu;$$

on peut donc appliquer le lemme 1 ; on obtient pour x infini

$$\sum_{n \leq x} f(y, u, n) \ll_y x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\frac{\log u}{\log \sigma}\right)^{(y-1)/2}, \quad (3)$$

la constante impliquée étant localement uniforme en y .

En remarquant que l'on a pour tout n

$$\begin{aligned} \chi(n, \theta) \tau(n, \sigma)^{-1} \sum \left\{ \chi(d, \sigma) : d|n, \Omega(d, u) > \frac{y}{2} \log \frac{\log u}{\log \sigma} \right\} \\ \leq f(y, u, n) \left(\frac{\log u}{\log \sigma} \right)^{-\frac{1}{2} y \log y}, \quad \text{si } 1 < y < 2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \chi(n, \theta) \tau(n, \sigma)^{-1} \sum \left\{ \chi(d, \sigma) : d|n, \Omega(d, u) < \frac{y}{2} \log \frac{\log u}{\log \sigma} \right\} \\ \leq f(y, u, n) \left(\frac{\log u}{\log \sigma} \right)^{-\frac{1}{2} y \log y}, \quad \text{si } 0 < y < 1, \end{aligned}$$

on obtient, grâce à (3), en choisissant successivement

$$\begin{aligned} y = y_1 = 1 + 1,96 \epsilon \quad \text{et} \quad y = y_2 = 1 - 1,96 \epsilon, \quad \text{pour } \epsilon \ll \frac{1}{5} \\ \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n, \theta)}{\tau(n, \sigma)} \sum \left\{ \chi(d, \sigma) : d|n, |\Omega(d, u) - \frac{1}{2} \log \frac{\log u}{\log \sigma}| \right. \\ \left. \geq 0,98 \epsilon \log \frac{\log u}{\log \sigma} \right\} \\ \ll x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\log u}{\log \sigma} \right)^{\frac{1}{2} (y_i - 1 - y_i \log y_i)} \\ \ll x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{\log u}{\log \sigma} \right)^{-0,901 \epsilon^2} \quad (4) \end{aligned}$$

Posons :

$$\Lambda(d, u) = \frac{\Omega(d, u) - \frac{1}{2} \log \frac{\log u}{\log \sigma}}{\log \frac{\log u}{\log \sigma}}$$

et

$$u_k = \exp \{ e^k \log \sigma \cdot \log \xi \} \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

d'après (4), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n, \theta)}{\tau(n, \sigma)} \sum \{ \chi(d, \sigma) : d|n, \sup_{u_k \leq x} |\Lambda(d, u_k)| \geq 0,98 \epsilon \} \\ \leq c x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (e^k \log \xi)^{-0,901 \epsilon^2} \\ \leq \frac{1}{10} x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p} \right) (\log \xi)^{-(9/10) \epsilon^2}, \end{aligned}$$

pour $\xi \geq \xi_1(\epsilon)$.

Comme pour $u \in [u_k, u_{k+1}]$ on a :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\log \log \xi}\right) \left(\Lambda(d, u_k) - \frac{1}{\log \log \xi}\right) &\leq \Lambda(d, u) \\ &\leq \left(\Lambda(d, u_{k+1}) + \frac{1}{\log \log \xi}\right) \left(1 + \frac{1}{\log \log \xi}\right) \end{aligned}$$

pour tout d et tout $\xi \geq \xi_2$, on voit finalement que, pour

$$\xi \geq \xi_0(\epsilon) := \max \{\xi_1(\epsilon), \xi_2, \exp \exp 1/0, 01 \epsilon\},$$

$$\begin{aligned} \sum \left\{ \chi(n, \theta) : n < x, \sum_{d|n} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \leq \frac{9}{10} \tau(n, \sigma) \right\} \\ \leq x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right) (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 4.

Remarques. — (i) L'énoncé du lemme 4 reste évidemment valable si l'on y remplace $\Omega(d, u)$ par $\omega(d, u)$ et, quitte à restreindre ϵ , la constante $\frac{9}{10}$ par toute autre constante numérique < 1 .

(ii) Il est bien connu que, pour presque tout diviseur d d'un entier usuel n , et u assez grand, on a $\Omega(d, u) \sim \frac{1}{2} \Omega(n, u)$; cela découle, par exemple, facilement de l'inégalité suivante, valable pour tout n , et établie par Hall dans [8],

$$\sum_{d|n} |\omega(d) - \frac{1}{2} \omega(n)|^2 \leq \frac{1}{4} \tau(n) \{|\omega(n) - \Omega(n)|^2 + \omega(n)\}.$$

Notre lemme 4 exprime la même idée, de façon quantitative, et, en se restreignant aux diviseurs d tels que $P^-(d) \geq \sigma$ des entiers n tels que $P^-(n) \geq \theta$.

(iii) Si l'on désire obtenir un résultat valable pour presque tout n et une estimation plus précise de la différence entre $\Omega(d, u)$ et son ordre normal lorsque $u \rightarrow \infty$ avec n , on peut appliquer, à quelques légères modifications près, la méthode employée au lemme 4 pour prouver le résultat suivant :

Soit ϵ un réel positif et $\xi = \xi(n) \rightarrow \infty$, alors on a pour presque tout entier n

$$\text{card} \left\{ d : d|n, \sup_{\xi < u < n} \frac{|\Omega(d, u) - \frac{1}{2} \log \log u|}{(\log \log u \cdot \log \log \log u)^{1/2}} \geq 1 + \epsilon \right\} = o(\tau(n)).$$

4. Preuve des théorèmes 1 et 2.

PROPOSITION 1. — Soit $(\epsilon, \xi, \sigma, \theta)$ un système de nombres réels satisfaisant aux conditions du lemme 4 et \mathcal{A} une suite d'entiers possédant les propriétés (i), (ii) et (iii) du lemme 4.

Alors on a, pour tout n de \mathcal{A} ,

$$\frac{4}{5} \frac{\tau(n, \sigma)}{\tau^+(n, \theta)} \leq 1 + \frac{1}{\tau(n, \sigma)} \sum_{d, d' \mid n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d). \quad (5)$$

Démonstration. — Pour tout n de \mathcal{A} , désignons par $k_1 < \dots < k_r$ la suite des entiers k pour lesquels on a

$$\nu(k) := \sum \{\chi(d, \sigma) \chi^*(d) : d \mid n, \theta^k \leq d < \theta^{k+1}\} \geq 1.$$

Alors $r \leq \tau^+(n, \theta)$ et

$$\sum_{d, d' \mid n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \geq \sum_{i=1}^r \nu(k_i) (\nu(k_i) - 1) \geq \sum_{i=1}^r \nu(k_i)^2 - \tau(n, \sigma).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{d \mid n} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \right\}^2 &= \left\{ \sum_{i=1}^r \nu(k_i) \right\}^2 \leq r \sum_{i=1}^r \nu(k_i)^2 \\ &\leq \tau^+(n, \theta) \left\{ \sum_{d, d' \mid n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) + \tau(n, \sigma) \right\}. \end{aligned}$$

La conclusion souhaitée découle de cette inégalité puisque, grâce au lemme 4, on peut minorer le membre de gauche par $\frac{4}{5} \tau(n, \sigma)^2$.

PROPOSITION 2. — Soit $(\epsilon, \xi, \sigma, \theta)$ un système de nombres réels satisfaisant aux conditions du lemme 4, et supposons donné un réel y de $]0, 1[$. Si l'on pose pour tout n

$$f(n) := \frac{\chi(n, \theta)}{\tau(n)} \sum_{d, d' \mid n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d), \text{ et}$$

$$f_k(y, n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{\theta^k \leq d < \theta^{k+1}}^{\theta} \chi(d, \sigma) \sum_{t \mid \frac{n}{dd'}} y^{\Omega(dt, \theta^k)} \chi(t, \sigma), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

alors on a

$$f(n) \ll \left(\frac{2 \log \xi \cdot \log \theta}{\log \sigma} \right)^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} \sum_{k \geq \frac{1}{2} \frac{\log \sigma}{\log \theta}} k^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} f_k(y, n). \quad (6)$$

Démonstration. — On a :

$$f(n) = \frac{\chi(n, \theta)}{\tau(n)} \sum_{k \geq \left[\frac{\log \sigma}{\log \theta} \right]} \sum_{\substack{d, d' | n \\ (d, d') = 1, \theta^k < d < \theta^{k+1}}} \sum_{t \mid \frac{n}{dd'}} \chi(dt, \sigma) \chi^*(dt)$$

il suffit donc de montrer que

$$\chi^*(m) \ll \left(2k \frac{\log \xi \cdot \log \theta}{\log \sigma} \right)^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} y^{\Omega(m, \theta^k)} \quad (7)$$

pour tout $m \geq 1$ et tout $k \geq \left[\frac{\log \sigma}{\log \theta} \right] \geq \frac{1}{2} \frac{\log \sigma}{\log \theta}$.

D'une part, si $k \geq \frac{\log \sigma}{\log \theta} \cdot \log \xi$ et $\chi^*(m) = 1$ on a :

$$\Omega(m, \theta^k) \leq \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) \log \left(\frac{k \log \theta}{\log \sigma} \right)$$

donc

$$y^{\Omega(m, \theta^k)} k^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} \geq \left(\frac{\log \sigma}{\log \theta} \right)^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y}$$

et (7) est bien vérifiée.

D'autre part si $\frac{1}{2} \frac{\log \sigma}{\log \theta} \leq k < \frac{\log \sigma}{\log \theta} \cdot \log \xi$, on a :

$$\Omega(m, \theta^k) \leq \Omega(m, \exp \{ \log \xi \cdot \log \sigma \}) \leq \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) \log \log \xi$$

d'où l'on déduit encore que l'inégalité (7) est satisfaite.

PROPOSITION 3. — *Avec les hypothèses et notations de la proposition 2, on a uniformément pour $x > \theta^{2k-1}$ et $k \geq 1$*

$$\sum_{n < x} f_k(y, n) \ll_{\theta} x (\log \sigma)^{-y} k^{(y-3)/2} \left\{ k^{(y-1)/2} + (\log 2x \theta^{1-2k})^{(y-1)/2} + \frac{(\log \sigma)^{y/2}}{(\log 2x \theta^{1-2k})^{1/2}} \right\}.$$

Démonstration. — Posons : $S_k(x, y) = \sum_{n < x} f_k(y, n)$. Après interversion de sommes on peut écrire

$$S_k(x, y) = \sum_{\substack{d, d' \\ \theta^k < d < \theta^{k+1}}}^{\theta} \sum_{t < x/dd'} \chi(dt, \sigma) y^{\Omega(dt, \theta^k)} \sum_{m < x/tdd'} \tau(m tdd')^{-1}. \quad (8)$$

Nous dirons qu'une fonction multiplicative w est «de type τ^{-1} » s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que $w(p^\nu) = \frac{1}{\nu + 1} + O(p^{-\delta})$ pour tout $\nu \geq 1$.

Le lemme 2 permet de majorer la somme intérieure de (8) : on a

$$\begin{aligned} \sum_{m < x/tdd'} \tau(m tdd')^{-1} &\ll x \frac{w_1(tdd')}{tdd'} \left(\log \frac{x}{tdd'} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\ll w_1(tdd') \sum_{m < x/tdd'} (\log m)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (*)$$

où w_1 est de type τ^{-1} .

En reportant dans (8), on déduit

$$S_k(x, y) \ll \sum_{\substack{d, d' \\ \theta^k < d < \theta^{k+1}}}^{\theta} \chi(d, \sigma) y^{\Omega(d, \theta^k)} \sum_{\substack{m < x/dd' \\ t < x/mdd'}} (\log m)^{-\frac{1}{2}} \\ \sum_{t < x/mdd'} y^{\Omega(t, \theta^k)} \chi(t, \sigma) w_1(tdd').$$

Le lemme 2 permet à nouveau d'estimer la somme intérieure, on a :

$$\sum_{t < z} y^{\Omega(t, \theta^k)} \chi(t, \sigma) w_1(tdd') \ll_{\theta} \begin{cases} zw_2(dd') (\log \sigma)^{-y/2} k^{\frac{y-1}{2}} (\log z)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } z \geq \theta^k \\ zw_2(dd') (\log \sigma)^{-y/2} (\log z)^{\frac{y}{2}-1} & \text{si } \sigma \leq z < \theta^k \\ w_1(dd') & \text{si } z < \sigma \end{cases}$$

où w_2 est de type τ^{-1} .

Il existe donc une fonction w_3 de type τ^{-1} telle que

$$S_k(x, y) \ll_{\theta} (\log \sigma)^{-y/2} \sum_{\substack{d, d' \\ \theta^k < d < \theta^{k+1}}}^{\theta} \chi(d, \sigma) y^{\Omega(d, \theta^k)} w_3(dd') \{ A_k(x) \\ + B_k(x) + C_k(x) \} \quad (9)$$

où l'on a posé

(*) Ici et dans les calculs qui vont suivre, $(\log 1)^{-1}$ est systématiquement interprété comme valant 1 dans une sommation.

$$\begin{aligned} A_k(x) &= \frac{x}{\theta^{2k}} \sum_{m < x\theta^{1-3k}} (\log m)^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{y-1}{2}} m^{-1} \left(\log \frac{x\theta^{1-2k}}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\ll \frac{x}{\theta^{2k}} k^{\frac{y-1}{2}} \\ B_k(x) &= \frac{x}{\theta^{2k}} \sum_{x\theta^{1-3k} < m < x\theta^{1-2k}} (\log m)^{-\frac{1}{2}} m^{-1} \left(\log \frac{x\theta^{1-2k}}{m} \right)^{\frac{y}{2}-1} \\ &\ll_\theta \frac{x}{\theta^{2k}} (\log 2x\theta^{1-2k})^{\frac{y-1}{2}} \end{aligned}$$

et

$$C_k(x) = \frac{x}{\theta^{2k}} (\log \sigma)^{y/2} (\log 2x\theta^{1-2k})^{-\frac{1}{2}}.$$

Enfin, d'après le lemme 2,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d, d' \\ \theta^k < d < \theta^{k+1}}}^{\theta} \chi(d, \sigma) y^{\Omega(d, \theta^k)} w_3(dd') \\ \ll_\theta \theta^k \sum_{\theta^{k-1} < d' < \theta^{k+2}} w_4(d') (\log \sigma)^{-y/2} k^{\frac{y}{2}-1} \end{aligned}$$

(où w_4 est de type τ^{-1})

$$\ll_\theta \theta^{2k} (\log \sigma)^{-y/2} k^{\frac{y-3}{2}}.$$

En reportant dans (9) et en tenant compte des évaluations de $A_k(x)$, $B_k(x)$, $C_k(x)$, on obtient le résultat annoncé.

PROPOSITION 4. — Soit f la fonction arithmétique définie à la proposition 2. On a pour $0 < y < 1$ et $0 < \epsilon < -\frac{1-y+\frac{1}{2}\log y}{\log y}$

$$\sum_{n < x} f(n) \ll_{\theta, y, \epsilon} (\log \xi)^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y} (\log \sigma)^{-1} x + o(x). \quad (10)$$

Démonstration. — On a, d'après (6),

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} f(n) &\ll_{\theta, y} \left(\frac{\log \xi}{\log \sigma} \right)^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y} \sum_{\frac{1}{2}\frac{\log \sigma}{\log \theta} < k < \frac{1}{2}(1+\frac{\log x}{\log \theta})} k^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y} \\ &\quad \sum_{n < x} f_k(y, n); \end{aligned}$$

utilisant la majoration de la proposition 3, il vient

$$\sum_{n \leq x} f(n) \ll_{\theta, y} (\log \xi)^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} (\log \sigma)^{-y + (\frac{1}{2} + \epsilon) \log y}$$

$$\left\{ x \sum_{\frac{1}{2} \frac{\log \sigma}{\log \theta} < k < \frac{1}{2} (1 + \frac{\log x}{\log \theta})} k^{y - 2 - (\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} + o(x) \right\},$$

la quantité $o(x)$ provenant de la sommation des termes en $(\log 2x\theta^{1-2k})$, traitée par intégration par parties.

Pour $\epsilon < -\frac{1-y+\frac{1}{2}\log y}{\log y}$ la série en k est convergente, d'où (10).

Démonstration du théorème 1. — Choisissons $\sigma = \theta = 2$, y dans $]0, 1[$ et ϵ dans $\left\{ 0, -\frac{1-y+\frac{1}{2}\log y}{\log y} \right\}$; d'après la proposition 1, on a $\frac{\tau(n)}{\tau^+(n)} \leq \frac{5}{4} (1 + f(n))$ sauf pour une suite de valeurs de n de densité supérieure $\leq (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2}$. Comme (10) implique l'existence d'une constante $c_1(y, \epsilon)$ telle que

$$\sum_{n \leq x} f(n) \leq c_1(y, \epsilon) (\log \xi)^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} x + o(x);$$

on en déduit que la densité de la suite des entiers n pour lesquels $\frac{\tau(n)}{\tau^+(n)} \geq \frac{1}{\alpha}$ ne dépasse pas

$$c_2(y, \epsilon) \alpha (\log \xi)^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} + (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2}.$$

Si $y > \frac{1}{2}$, on peut prendre $\epsilon = \frac{1}{5}$; en choisissant alors, pour y suffisamment voisin de 1, la valeur optimale de ξ , soit $\xi = \exp \exp \left\{ \frac{-\log \alpha}{0,036 - 0,7 \log y} \right\}$, on obtient, comme majoration, une puissance arbitrairement proche de l'unité de α .

Démonstration du théorème 2. — Choisissons $\xi = \exp \{(\log \sigma)^{\frac{1}{2}}\}$, $y = \frac{1}{2}$, et $\epsilon = \frac{1}{10}$. D'après la proposition 4, on a

$$\sum_{n \leq x} f(n) \ll_{\theta} (\log \sigma)^{0,3 \cdot \log 2 - 1} x + o(x). \quad (11)$$

Maintenant, rappelons que

$$f(n) = \frac{\chi(n, \theta)}{\tau(n)} \sum_{d, d' \mid n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d)$$

et que, d'après le lemme 3, pour $1 < \beta < 2$,

$$\frac{\tau(n, \sigma)}{\tau(n)} \geq (\log \sigma)^{-\beta \log 2}$$

sauf pour une suite d'entiers n de densité supérieure majorée par une puissance négative de $\log \sigma$. Comme $0,3 \cdot \log 2 - 1 < -\log 2$, on déduit de (11) l'existence de deux réels positifs δ_1, δ_2 , et de deux fonctions $\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)$, tels que l'on ait

$$\chi(n, \theta) \sum_{d, d' \mid n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \leq \lambda_1(\theta) (\log \sigma)^{-\delta_1} \tau(n, \sigma)$$

sauf pour une suite d'entiers n de densité supérieure majorée par $\lambda_2(\theta) (\log \sigma)^{-\delta_2}$.

En utilisant maintenant le lemme 4 et une nouvelle fois le lemme 3, on obtient ainsi l'existence d'une fonction $\theta \rightarrow \sigma_0(\theta)$ et de deux constantes positives δ_3 et δ_4 telles qu'à tout couple de réels (σ, θ) satisfaisant à $\sigma \geq \sigma_0(\theta)$ on puisse associer une suite $\mathcal{B}(\theta, \sigma)$, de densité inférieure au moins égale à $(1 - (\log \sigma)^{-\delta_3}) \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ et telle que tout entier n de $\mathcal{B}(\theta, \sigma)$ vérifie

$$P^-(n) \geq \theta \quad (12)$$

$$\sum_{d \mid n} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \geq \frac{9}{10} \tau(n, \sigma) \quad (13)$$

$$\sum_{d, d' \mid n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \leq (\log \sigma)^{-\delta_4} \tau(n, \sigma) \quad (14)$$

$$\tau(n, \sigma) \geq \frac{\tau(n)}{\log \sigma}. \quad (15)$$

De plus, si $n \in \mathcal{B}(\theta, \sigma)$, la conjugaison des inégalités (13) et (14) implique

$$\begin{aligned} \sum \left\{ \chi(d, \sigma) : d \mid n, \exists d' \mid n, d' \neq d, \frac{d}{\theta} < d' < \theta d \right\} \\ \leq \left(\frac{1}{10} + (\log \sigma)^{-\delta_4} \right) \tau(n, \sigma) \leq \frac{\tau(n, \sigma)}{5}, \end{aligned} \quad (16)$$

quitte à modifier $\sigma_0(\theta)$.

Notons $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_\tau = n$ la suite croissante des diviseurs de n . Les inégalités (15) et (16) impliquent

$$\text{card} \left\{ i \ (2 \leq i \leq \tau - 1) : \theta d_{i-1} \leq d_i \leq \frac{d_{i+1}}{\theta} \right\} \geq \frac{4}{5} \frac{\tau(n)}{\log \sigma}. \quad (17)$$

Nous pouvons maintenantachever la démonstration du théorème 2 en prouvant que, pour tout réel positif η , il existe un réel positif ξ tel que la suite des entiers n satisfaisant à

$$g(n) := \text{card} \{ i \ (1 \leq i \leq \tau - 1) : d_i | d_{i+1} \} \geq \xi \tau(n), \quad (18)$$

soit de densité inférieure au moins égale à $1 - \eta$.

Soit, donc, $\eta > 0$, et, k un entier tel que

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j} \prod_{r=1}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \geq 1 - \frac{\eta}{2},$$

où $2 = p_1 < p_2 < \dots$ désigne la suite croissante des nombres premiers. Choisissons un réel $\sigma \geq \max_{j=1}^k \sigma_0(p_j)$ et tel que $(\log \sigma)^{-\delta_3} \leq \frac{\eta}{2}$.

On pose $\xi = \frac{2}{5 \log \sigma}$ et $\mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^k \{p_j m : m \in \mathcal{B}(p_j, \sigma)\}$.

Si $n = p_j m$ appartient à \mathcal{C} , chaque diviseur d_i de m vérifiant $p_j d_{i-1} \leq d_i \leq \frac{d_{i+1}}{p_j}$ est tel que le diviseur de n qui suit immédiatement d_i soit $p_j d_i$; d'après (17) il y a au moins $2\xi \tau(m) \geq \xi \tau(n)$ tels diviseurs d_i ; donc n satisfait (18). Enfin, la densité inférieure de \mathcal{C} est au moins égale à

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j} \prod_{r=1}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \{1 - (\log \sigma)^{-\delta_3}\} \geq \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^2 \geq 1 - \eta,$$

ce qui achève la démonstration.

5. Preuve du théorème 3.

Décomposons chaque entier n sous la forme $n = mt$ avec

$$m = \prod_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p < n^{1/\xi}}} p^\nu.$$

Les hypothèses de croissance faites sur ξ permettent de montrer facilement que l'on a pour presque tout n

$$\log m = (1 + o(1)) \frac{\log n}{\xi} \quad (19)$$

et

$$\Omega(t) = (1 + o(1)) \log \xi. \quad (20)$$

Les preuves de (19) et (20) sont classiques et, partant, laissées au lecteur.

Désignons par

$$1 = m_1 < m_2 < \dots < m_s = m \text{ (resp. } 1 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = t)$$

la suite croissante des diviseurs de m (resp. t) et notons pour chaque j , $1 \leq j \leq k$, $h_j := \prod_{(d_{i+1}, t)=t_j}^i \frac{d_{i+1}}{d_i}$, le produit des rapports $\frac{d_{i+1}}{d_i}$ de diviseurs consécutifs de n , étendu aux valeurs de i pour lesquelles $\frac{d_{i+1}}{d_i} \leq n^{1/\xi}$ et $(d_{i+1}, t) = t_j$. Si l'on note encore

$$t_j^* = \begin{cases} t_j & \text{si } \forall d|n \ (d < t_j \implies d < t_j n^{-1/\xi}) \\ \max \{d|n : t_j n^{-1/\xi} \leq d < t_j\} & \text{sinon} \end{cases}$$

on a

$$h_j \leq \frac{t_j}{t_j^*} \frac{t_j m_2}{t_j m_1} \frac{t_j m_3}{t_j m_2} \dots \frac{t_j m_s}{t_j m_{s-1}} = \frac{t_j}{t_j^*} m \leq n^{1/\xi} m$$

d'où

$$h(\xi, n) = \prod_{j=1}^k h_j \leq (n^{1/\xi} m)^k = \exp \left\{ (2 + o(1)) \frac{k \log n}{\xi} \right\},$$

d'après (19). Comme (20) implique $k \leq \xi^{\log 2 + o(1)}$, on obtient, pour presque tout n , $\frac{\log h(\xi, n)}{\log n} \leq \xi^{\log 2 - 1 + o(1)}$.

Pour établir la minoration, fixons un ϵ dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et considérons $T(n) := \text{card} \left\{ d|n, d'|t : 1 \leq \frac{d'}{d} \leq n^{\xi^{-1+\epsilon}} \right\}$; un argument identique à celui qui a été utilisé dans [9] pour majorer $T(n, \alpha)$ permet d'établir que pour presque tout n on a :

$$T(n) \leq \tau(t) \xi^{\epsilon+o(1)} \leq \xi^{\log 2 + \epsilon + o(1)};$$

cela implique l'existence d'au moins r diviseurs $\tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \dots < \tilde{t}_r$, de t tels que $\frac{\tilde{t}_{j+1}}{\tilde{t}_j} \geq n^{\xi^{-1+\epsilon+o(1)}} (1 \leq j \leq r-1)$ et $r \geq \xi^{\log 2 - \epsilon + o(1)}$.

Maintenant, pour chaque j ($1 \leq j \leq r$), \tilde{t}_j est un certain diviseur d_i de n ; comme on a $d_{i+t_1} = m_2 d_i \leq n^{1/\epsilon} d_i$ pour un indice $i_1 \geq 1$, on voit que le facteur $m_2 = \frac{d_{i+i_1}}{d_i} = \prod_{\nu=0}^{i_1-1} \frac{d_{i+\nu+1}}{d_{i+\nu}}$ est compté dans $h(\xi, t)$; il en va de même pour $\frac{m_3}{m_2} = \frac{m_3 d_i}{m_2 d_i} = \frac{d_{i+i_2}}{d_{i+i_1}}$ et ainsi de suite; finalement cela montre que l'on peut écrire

$$m = \frac{m_2}{m_1} \dots \frac{m_s}{m_{s-1}} = \prod_{\nu=i}^{i+i_s-1} \frac{d_{\nu+1}}{d_\nu}$$

où chaque $\frac{d_{\nu+1}}{d_\nu}$ est $\leq n^{1/\epsilon}$ et où chaque d_ν appartient à l'intervalle $[\tilde{t}_j, \tilde{t}_j m]$; on en déduit

$$h(\xi, n) \geq m^r \geq \exp \left\{ (1 + o(1)) \frac{\log n}{\xi} \cdot \xi^{\log 2 - \epsilon + o(1)} \right\};$$

comme on peut choisir ϵ arbitrairement petit, cela achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-M. DESHOUILLERS, F. DRESS, G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 1, *Acta Arithm.*, (4) 34 (1979), 273-285.
- [2] P. ERDÖS, On the density of some sequences of integers, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 (1948), 685-692.
- [3] P. ERDÖS, On some applications of probability to analysis and number theory, *J. London Math. Soc.*, 39 (1964), 692-696.
- [4] P. ERDÖS, Some unconventional problems in number theory, *Astérisque*, 61 (1979), 73-82.
- [5] P. ERDÖS and R.R. HALL, On some unconventional problems on the divisors of integers, *J. Austral. Math. Soc.*, Séries A, 25 (1978), 479-485.
- [6] P. ERDÖS and R.R. HALL, The propinquity of divisors, *Bull. London Math. Soc.*, 11 (1979), 304-307.

- [7] H. HALBERSTAM and H.-E. RICHERT, On a result of R.R. Hall, *J. Number Theory*, (1) 11 (1979), 76-89.
- [8] R.R. HALL, A new definition of the density of an integer sequence, *J. Austral. Math. Soc.*, Series A, 26 (1978), 487-500.
- [9] R.R. HALL et G. TENENBAUM, Sur la proximité des diviseurs, *Proc. of the Symposium on progress in Analytic Number Theory* (Durham 1979), à paraître.
- [10] G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 5, *J. London Math. Soc.*, (2) 20 (1979), 165-176.

Manuscrit reçu le 19 mai 1980.

P. ERDOS,
 Institut de Mathématiques
 Académie des Sciences de Hongrie
 Budapest (Hongrie)
 et
 Département de Mathématiques
 UER des Sciences de Limoges
 F 87100 Limoges.

G. TENENBAUM,
 U.E.R. de Mathématiques
 Université de Bordeaux I
 F 33405 Talence Cedex.