ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HÉDI DABOUSSI

Caractérisation des fonctions multiplicatives presque-B^{λ} périodiques à spectre non vide

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 3 (1980), p. 141-166

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_3_141_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 3 (1980), 141-166

CARACTÉRISATION DES FONCTIONS MULTIPLICATIVES p.p. B^λ A SPECTRE NON VIDE

par Hédi DABOUSSI

A la mémoire de P. TURAN

1. Introduction.

1.1. Une fonction $f : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite *multiplicative* si $f(1) = 1$ et $f(m \,.\, n) = f(m)\, f(n)$ toutes les fois que $(m\,,\, n) = 1$.

1.2. Soit $\lambda \geqslant 1$. Une fonction arithmétique f est dite *presque périodique* B^λ (p.p. B^λ) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $P_\epsilon(n) = \Sigma\, a_j e^{2\pi i \alpha_j n}$ avec $\alpha_j \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}}\ \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |f(n) - P_\epsilon(n)|^\lambda \leqslant \epsilon\,.$$

Si, de plus, les polynômes P_ϵ peuvent être pris périodiques, alors f est dite *limite périodique* B^λ (l.p. B^λ).

1.3. Soit f une fonction arithmétique. On définit $\sigma(f) =$ *spectre de Fourier Bohr* de f ainsi :

$$\sigma(f) = \{\alpha \in \mathbf{R}/\mathbf{Z} \ \text{ tel que } \ \overline{\lim_{x \to +\infty}}\ \frac{1}{x}\ \Big|\sum_{n \leqslant x} f(n)\, e^{-2\pi i n \alpha}\Big| > 0\}\,.$$

1.4. L'objet de cet article est d'établir le résultat suivant :

THEOREME PRINCIPAL. — *Pour qu'une fonction multiplicative f soit* p.p. B^λ $(\lambda \geqslant 1)$ *avec un spectre de Fourier-Bohr non vide, il faut et il suffit qu'il existe un caractère de Dirichlet χ tel que la série* $\displaystyle\sum_p \frac{\chi(p)\, f(p) - 1}{p}$ *converge et*

$$\sum_p \sum_{r \geqslant 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} < +\infty, \quad \sum_{\substack{p \\ |f(p)| \leqslant 2}} \frac{|\chi(p) f(p) - 1|^2}{p} < \infty,$$

$$\sum_{\substack{p \\ |f(p)| > 2}} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < +\infty.$$

En fait, si ces conditions sont vérifiées f *est* l.p. B^λ.

1.5. Des conditions suffisantes pour qu'une fonction multiplicative soit p.p. B^λ ont été obtenues par de nombreux auteurs : Erdös, Hartman, Kac, Novosselov, Schwarz, Spilker, Van Kampen et Wintner [8, 9, 10, 12, 13, 14, 15].

Delange et l'auteur [2] ont montré que, si f est multiplicative, et $|f(n)| \leqslant 1$ pour tout n, alors f est p.p. B avec un spectre non vide si, et seulement si, la série $\Sigma \dfrac{\chi(p) f(p) - 1}{p}$ converge pour un caractère de Dirichlet χ ; f est p.p. B avec un spectre vide si, et seulement si, $\Sigma \dfrac{1 - |f(p)|}{p} = +\infty$.

Delange a prouvé, indépendamment de l'auteur, que les conditions du théorème étaient suffisantes. Il a, de plus, étudié les séries de Fourier Bohr de telles fonctions [3].

Le théorème principal a été énoncé dans [3, remarque finale] et au meeting d'Oberwolfach de novembre 75.

1.6. Le plan de cet article est le suivant :

Dans le paragraphe 3, on énonce quelques propriétés des fonctions p.p. B^λ.

Dans les paragraphes 4, 5 on caractérise les fonctions multiplicatives $\geqslant 0$ p.p. B^2 avec $\sigma(f) \neq \phi$.

Dans le paragraphe 6 on caractérise les fonctions multiplicatives $\geqslant 0$ p.p. B^λ $(\lambda \geqslant 1)$ avec $\sigma(f) \neq \phi$.

Enfin dans le paragraphe 7 on établit le théorème principal.

2.

2.1. Notations. –

La lettre p désigne un nombre premier.

$d \mid n$ signifie «d divise n».

$d \nmid n$ signifie «d ne divise pas n».

Pour $j \geqslant 1$, $p^j \| n$ signifie «$p^j \mid n$ et $p^{j+1} \nmid n$».

$f * g$ est la fonction arithmétique définie par

$$(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)\, g(n/d).$$

$M(f)$ est la limite, si elle existe, de $\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n)$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

$\overline{M}(f)$ est la limite supérieure de $\frac{1}{x} \left| \sum_{n \leqslant x} f(n) \right|$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

2.2. Definition. — *Soit $\delta(t-a)$ la mesure de Dirac au point a.*

Etant donné une fonction arithmétique f, on pose, pour chaque $N \in \mathbf{N}^*$, $\mu_N(f, t) = \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \delta(t - f(n))$.

On dit que f *a une distribution limite* si $\mu_N(f, t)$ converge étroitement vers une mesure $\mu(f, t)$. Cette distribution limite est *concentrée à l'origine si* $\mu(f, t) = \delta(t)$.

3. Quelques propriétés des fonctions p.p. B^λ $(\lambda \geqslant 1)$.

Soit f p.p. B^λ (resp. l.p. B^λ).

1. $M(f, \alpha)$ existe pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.
2. Pour tous les entiers ℓ et k, $\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv \ell (k)}} f(n)$ tend vers une limite.
3. $|f|$ est p.p. B^λ (resp. l.p. B^λ).
4. Si $\lambda \geqslant 2$, $M(|f|^2) = \sum_{\alpha \in \sigma(f)} |M(f, \alpha)|^2$.
5. Si $\lambda \geqslant 2$, $\sigma(f) = \phi \iff M(|f|^2) = 0$.
6. Si $M(|f|) = 0$, alors $\sigma(f) = \phi$.
7. $|f|$ a une distribution limite.
8. Si g est p.p. B (resp. l.p. B) et bornée, alors fg est p.p. B^λ (resp. l.p. B^λ).

9. Si g est p.p. B^α (resp. l.p. B^α) et si $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha} \leqslant 1$ alors fg est p.p. B (resp. l.p. B).

Nous utiliserons également l'équivalence suivante :

10. Supposons $f \geqslant 0$ alors

$$f \text{ p.p. } B^\lambda \text{ (resp. l.p. } B^\lambda) \Longleftrightarrow f^{\lambda/2} \text{ p.p. } B^2 \text{ (resp. l.p. } B^2).$$

Certaines de ces propriétés sont bien connues (voir Bésicovitch [1]) ; nous les établirons en appendice 3.7 et 3.10.

4. Théorème 1.

Une fonction multiplicative positive est p.p. B^2 *avec un spectre de Fourier Bohr non vide si, et seulement si, les séries suivantes convergent :*

$$\sum_p \Big(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{f(p^r)^2}{p^r}\Big), \quad \sum_p \frac{(f(p)-1)^2}{p} \quad \text{et} \quad \sum \frac{f(p)-1}{p}.$$

Dans ce cas f est l.p. B^2 .

Remarque. – P.D.T.A. Elliott [5] a récemment caractérisé les fonctions multiplicatives bornées en moyenne quadratique qui possèdent une valeur moyenne non nulle. La condition nécessaire de notre théorème peut se déduire de sa caractérisation. Notre démonstration étant plus simple nous avons préféré en donner tous les détails.

LEMME 1. – *Soit f une fonction multiplicative et supposons qu'il existe c_1 tel que $\sum_{n \leqslant x} |f(n)|^2 \leqslant c_1 x$. Alors $\sum_p \sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^r} < \infty$.*

Preuve. – L'hypothèse entraîne que, pour tout $s > 1$,

$$\sum \frac{|f(n)|^2}{n^s} \leqslant c_1 \frac{s}{s-1} \quad \text{et donc} \quad \sum \frac{|f(n)|^2}{n^s} < \infty.$$

Soit $h(n)$ la fonction multiplicative définie par $h(p) = 0$ et $h(p^r) = 1$, $\forall p$ et $\forall r \geqslant 2$. On voit que, pour tout $\alpha > 1/2$,

$$\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(h(p^r))^2}{p^{r\alpha}} = \sum_p \frac{1}{p^{2\alpha} - p^\alpha} < +\infty \quad \text{et donc} \quad \sum \frac{(h(n))^2}{n^\alpha} < +\infty.$$

L'inégalité de Cauchy entraîne que

$$\Big(\sum_{n\leqslant x} \frac{|f(n)\,h(n)|}{n}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{n\leqslant x} \frac{|f(n)|^2}{n^s}\Big)\Big(\sum_{n\leqslant x} \frac{|h(n)|^2}{n^{2-s}}\Big).$$

Prenant $s \in \,]1, 3/2[$ on en déduit que $\sum \dfrac{|f(n)\,h(n)|}{n} < \infty$, et en particulier

$$\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)\,h(p^r)|}{p^r} < \infty, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_p \sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^r} < \infty.$$

LEMME 2. – *Soit* f *une fonction multiplicative* $\geqslant 0$ p.p.B^2 ; *alors il existe une constante* c_2 *telle que, pour chaque* p,

$$|M_p(f) - M(f)| \geqslant c_2\, M(f) \quad \text{où} \quad M_p(f) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n}} f(n)$$

($M_p(f)$ *existe d'après 3.2).*

Preuve. – On a

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n}} f(n) = \sum_{\substack{p^j\leqslant x\\ j\leqslant 1}} \frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^j\| n}} f(n) = \sum_{\substack{p^j\leqslant x\\ j\geqslant 1}} \frac{f(p^j)}{p^j}\Big(\frac{p^j}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x/p^j\\ p\nmid n}} f(n)\Big)$$

puisque f est multiplicative, et par suite

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n}} f(n) = \sum_{\substack{p^j\leqslant x\\ j\geqslant 1}} \frac{f(p^j)}{p^j}\Big(\frac{p^j}{x}\sum_{n\leqslant x/p^j} f(n) - \frac{p^j}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x/p^j\\ p\mid n}} f(n)\Big).$$

Ou encore, puisque, si $p^j > x$, $\sum\limits_{n\leqslant x/p^j} f(n) = 0$,

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\nmid n}} f(n) = \sum_{j=1} \frac{f(p^j)}{p^j}\Big(\frac{p^j}{x}\sum_{n\leqslant x/p^j} f(n) - \frac{p^j}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x/p^j\\ p\mid n}} f(n)\Big).$$

Ceci peut s'écrire

$$4.1.\quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\Big(\frac{p^j}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x/p^j\\ p\mid n}} f(n)\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\Big(\frac{p^j}{x}\sum_{n\leqslant x/p^j} f(n)\Big).$$

f étant p.p.B^2, il existe c_3 telle que

4.2. $$\sum_{n\leqslant x} [f(n)]^2 \leqslant c_3 x \quad \text{pour tout} \quad x \geqslant 1\,, \ \text{et donc}$$

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n) \leqslant \sqrt{c_3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n}} f(n) \leqslant \sqrt{c_3}\,.$$

Il résulte de 4.2 et du lemme 1 que $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j} < \infty$.

Nous pouvons alors appliquer le théorème de convergence dominée à 4.1. et obtenir $\displaystyle \mathrm{M}_p(f)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f(p^j)}{p^j} = \mathrm{M}(f)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f(p^j)}{p^j}$, ou encore

4.3. $$(\mathrm{M}(f) - \mathrm{M}_p(f))\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f(p^j)}{p^j}\right) = \mathrm{M}(f)\,.$$

Il suffit alors de remarquer que, d'après 4.2, $[f(n)]^2 \leqslant c_3 n$ et donc

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{f(p^j)}{p^j} \leqslant 1 + c_3\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p^{j/2}}{p^j} = 1 + \frac{c_3}{\sqrt{p}-1} \leqslant 1 + \frac{c_3}{\sqrt{2}-1}\,,$$

pour déduire de 4.3 le lemme avec $c_2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{c_3 + \sqrt{2}-1}$.

Lemme 3. — *Il existe une constante c_4 telle que, quelle que soit la fonction arithmétique g, on ait pour tout $x \geqslant 2$ et tout $y \leqslant x$:*

4.4. $$\sum_{\substack{p^j\leqslant y\\ j\geqslant 1}} \frac{1}{p^j}\left|\frac{p^j}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^j\parallel n}} g(n) - \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n) + \frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n}} g(n)\right|^2 \leqslant c_4\,\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|g(n)|^2.$$

P.D.T.A. Elliott a montré [4] que l'inégalité classique de Turan Kubilius [11] est équivalente à l'inégalité suivante :

Il existe une constante c_5 telle que pour toute fonction arithmétique g on a :

4.5. $$\sum_{p^j\leqslant x}\frac{1}{p^j}\left|\frac{p^j}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^j\parallel n}} g(n) - \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n)\right|^2 \leqslant \frac{c_5}{x}\sum_{n\leqslant x}|g(n)|^2\,.$$

Or

$$\sum_{\substack{p^j\leqslant x\\ j\geqslant 1}} \frac{1}{p^j}\left|\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n}} g(n)\right|^2 \leqslant \frac{1}{x}\Big(\sum_{n\leqslant x}|g(n)|^2\Big)\sum_p\Big(\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{p^j}\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n}}1\Big)\Big)$$

$$\leqslant \frac{1}{x}\Big(\sum_{n\leqslant x}|g(n)|^2\Big)\sum_p\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{p^{j+1}}\Big) = \frac{1}{x}\Big(\sum_{n\leqslant x}|g(n)|^2\Big)\sum_p\frac{1}{p^2-p}\,.$$

Utilisant l'inégalité $|a+b|^2\leqslant 2|a|^2+2|b|^2$, on voit que 4.5 entraîne 4.4 avec $c_4 = 2\left(c_5+\sum\frac{1}{p^2-p}\right)$.

LEMME 4. — *Pour qu'une fonction multiplicative soit* p.p. B^2 *avec* $\sigma(f)\neq\phi$, *il faut que* $\displaystyle\sum_p\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(|f(p^j)|-1)^2}{p^j}<\infty$.

Preuve. — On a,

$$\frac{p^j}{x}\sum_{\substack{m\leqslant x\\ p^j\parallel m}}|f(m)| = |f(p^j)|\,\frac{p^j}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x/p^j\\ p\nmid n}}|f(n)|$$

$$= |f(p^j)|\Big(\frac{p^j}{x}\sum_{n\leqslant x/p^j}|f(n)| - \frac{p^j}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x/p^j\\ p\mid n}}|f(n)|\Big),$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p^j}{x}\sum_{\substack{m\leqslant x\\ p^j\parallel m}}|f(m)| = |f(p^j)|\,(\mathrm{M}(|f|)-\mathrm{M}_p(|f|))\,.$$

Ainsi, en prenant $g=|f|$ dans le lemme 3, et la limite quand $x\longrightarrow+\infty$ avec y fixé dans 4.4, on aboutit à :

4.6. $$\sum_{\substack{p^j\leqslant y\\ j\geqslant 1}}\frac{1}{p^j}\,[(|f(p^j)|-1)\,(\mathrm{M}(|f|)-\mathrm{M}_p(|f|))]^2 \leqslant c_4\,\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|f(n)|^2\leqslant c_4\,c_3$$

d'après 4.2. Du lemme 2 on déduit alors

$$c_2^2\,(\mathrm{M}|f|)^2\sum_{\substack{p^j\leqslant y\\ j\geqslant 1}}\frac{(|f(p^j)|-1)^2}{p^j}\leqslant c_4\,c_3\,.$$

Il en résulte, prenant la limite quand $y\longrightarrow+\infty$, que

$$\mathrm{M}(|f|)^2\sum_p\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(|f(p^j)|-1)^2}{p^j}<+\infty\,.$$

Ainsi, puisque par hypothèse $\sigma(f) \neq \phi$, ce qui implique d'après 3.6 que $M(|f|) > 0$, on obtient le lemme.

LEMME 5. — *Soit f une fonction arithmétique $\geqslant 0$ p.p.B^2 et ayant un spectre $\sigma(f)$ non vide. Alors f a une distribution limite non concentrée à l'origine.*

Preuve. — On sait que f a une distribution limite d'après 3.7. Il reste à établir que si cette distribution était concentrée à l'origine, on aurait $M(f) = 0$ ce qui, d'après 3.6, entrainerait que $\sigma(f) = \phi$.

Soit $F_N(u) = \frac{1}{N}$ card $\{n \leqslant N$ tel que $f(n) \leqslant u\}$. Si la distribution était concentrée à l'origine, alors, en tout point $u > 0$, $F_N(u)$ tendrait vers 1 quand N tend vers l'infini. Il en résulterait que, pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{N\to\infty} \int_0^a t\, dF_N(t) = 0$, puisque

$$\int_0^a t\, dF_N(t) = aF_N(a) - \int_0^a F_N(t)\, dt .$$

Ceci est équivalent à $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{\substack{n\leqslant N\\ f(n)\leqslant a}} f(n) = 0$. Or

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} f(n) = \frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ f(n)\leqslant a}} f(n) + \frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ f(n)>a}} f(n).$$

On aurait ainsi $M(f) = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{\substack{n\leqslant N\\ f(n)>a}} f(n)$.

Remarquant alors que,

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ f(n)>a}} f(n) \leqslant \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ f(n)>a}} f(n)^2 \leqslant \frac{1}{a}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} f(n)^2 ,$$

et que $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum\limits_{n\leqslant N} f(n)^2 = c < +\infty$, on obtiendrait $M(f) \leqslant \frac{c}{a}$ pour tout $a > 0$, et donc $M(f) = 0$.

Erdös [6] a établi le résultat suivant :

LEMME 6. — *Une fonction f multiplicative $\geqslant 0$ a une distribution limite non concentrée à l'origine si, et seulement si, les séries suivantes convergent*

$$\sum \frac{v_f(p)}{p}, \quad \sum \frac{v_f(p)^2}{p},$$

où
$$v_f(p) = \begin{cases} f(p) - 1 & \text{si } |f(p) - 1| \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } |f(p) - 1| > 1 . \end{cases}$$

Preuve du théorème 1 (condition nécessaire). – Soit $f \geqslant 0$ multiplicative, p.p. B^2 avec un spectre non vide.

Il découle du lemme 4 que la série $\sum_p \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f(p^j) - 1)^2}{p^j} \right) < \infty$.

On voit que cela implique la convergence des deux séries $\sum_p \frac{(f(p) - 1)^2}{p}$ et $\sum_p \sum_{j=2}^{\infty} \frac{f(p^j)^2}{p^2}$.

Les lemmes 5 et 6 entraînent la convergence de la série $\sum_{\substack{p \\ |f(p)-1| \leqslant 1}} \frac{f(p) - 1}{p}$, puisque $\sum_{\substack{p \\ |f(p)-1| > 1}} \frac{1}{p} \leqslant \sum \frac{v_f(p)^2}{p} < \infty$.

La convergence de $\sum_p \frac{(f(p) - 1)^2}{p}$ entraîne alors que

$$\sum_{\substack{p \\ |f(p)-1| > 1}} \frac{|f(p) - 1|}{p} < \infty .$$

Il en résulte la convergence de la série $\sum \frac{f(p) - 1}{p}$.

5. Preuve du théorème 1. (Condition suffisante).

LEMME 7 (Wintner [15]). – *Soit* ℓ *une fonction multiplicative telle que :* $\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{|\ell(p^r) - 1|}{p^r} \right) < \infty$. *Alors* ℓ *est limite périodique* B *et* $M(\ell) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\ell(p^j)}{p^j} \right)$.

Considérons une fonction f vérifiant les conditions du théorème. Pour $y \geqslant 2$, soit f_y la fonction multiplicative définie ainsi :

$$f_y(p^r) = \begin{cases} f(p^r) & \text{si } p \leqslant y \\ 1 & \text{si } p > y \end{cases} .$$

11

Montrons que f_y est l.p. B^2. On a :

$$\sum_p \Big(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f_y^2(p^r)-1|}{p^r}\Big) = \sum_{p\leqslant y} \frac{|f^2(p)-1|}{p^r} + \sum_{p\leqslant y}\Big(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f^2(p^r)-1|}{p^r}\Big)$$

$$\leqslant \sum_{p\leqslant y} \frac{|f^2(p)-1|}{p} + \sum_{p\leqslant y}\Big(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{f^2(p^r)}{p^r}\Big) + \sum_{p\leqslant y}\Big(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{p^r}\Big) < +\infty .$$

Ainsi f_y^2 vérifie les hypothèses du lemme 7 et donc f_y^2 est l.p. B $M(f_y^2) = \prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^2(p^j)}{p^j}\Big)$. Il résulte de 3.10 que f_y est l.p. B^2.

Nous allons montrer, par la suite, que $\overline{M}[(f-f_y)^2]$ tend vers zéro, quand $y \longrightarrow +\infty$. Ceci entraînera que f est l.p. B^2.

LEMME 8. [Erdös Renyi [7]]. – *Soit* S *une fonction multiplicative positive telle que les séries*

$$\sum_p \frac{S(p)-1}{p} \quad \text{et} \quad \sum_p \left[\frac{S^2(p)}{p^2} + \sum_{r=2}^{\infty}\frac{S(p^r)}{p^r}\right]$$

convergent et que $\displaystyle\varliminf_{N\to+\infty} \sum_{N<p\leqslant N(1+\epsilon)} \frac{S(p)\log p}{p} > 0$ *pour tout* $\epsilon > 0$.

Alors M(S) *existe et* $M(S) = \prod_p \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{S(p^r)}{p^r}\Big)$.

LEMME 9. – *Soit* f *vérifiant les conditions du théorème 1. Alors* $M((f-f_y)^2)$ *existe et tend vers zéro quand* y *tend vers l'infini, ce qui entraîne que* f *est* l.p. B^2.

Soient, pour $y \geqslant 2, G, G_y, H$ et K_y les fonctions multiplicatives définies ainsi :

$$G(p) = \begin{cases} 3/4 & \text{si } f(p) < 3/4, \\ f(p) & \text{si } f(p) \in [3/4,\ 5/4], \\ 5/4 & \text{si } f(p) > 5/4, \end{cases}$$

$$G(p^r) = G(p)^r \quad \text{pour tout } r \geqslant 2,$$

$$G_y(p^r) = \begin{cases} G(p^r) & \text{si } p \leqslant y, \\ 1 & \text{si } p > y, \end{cases} \qquad \text{pour tout } r \geqslant 1,$$

$$\mathrm{H}(p^r) = f^2(p^r) - f^2(p^{r-1})\,\mathrm{G}^2(p) \quad \text{pour tout} \quad r \geqslant 1\,,$$

$$\mathrm{K}_y(p^r) = f(p^r)\,f_y(p^r) - f(p^{r-1})\,f_y(p^{r-1})\,\mathrm{G}(p)\,\mathrm{G}_y(p) \quad \text{pour tout} \quad r \geqslant 1\,.$$

On voit facilement que

$$f^2 = \mathrm{H} * \mathrm{G}^2 \qquad ff_y = \mathrm{K}_y * \mathrm{GG}_y\,.$$

Nous allons montrer que :

(i) G^2 et GG_y vérifient les hypothèses du lemme 8, et donc $\mathrm{M}(\mathrm{G}^2)$ existe, $\mathrm{M}(\mathrm{G}^2) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathrm{G}^2(p^r)}{p^r}\right)$, $\mathrm{M}(\mathrm{G}\,\mathrm{G}_y)$ existe et $\mathrm{M}(\mathrm{G}\,\mathrm{G}_y) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathrm{G}(p^r)\,\mathrm{G}_y(p^r)}{p^r}\right)$;

(ii) $\sum \frac{|\mathrm{H}(n)|}{n} < \infty$, $\sum \frac{|\mathrm{K}_y(n)|}{n} < +\infty$.

Il en résultera l'existence de $\mathrm{M}(f^2)$ et $\mathrm{M}(ff_y)$, et donc de $\mathrm{M}((f - f_y)^2)$ (puisque, f_y^2 étant l.p.B, $\mathrm{M}(f_y^2)$ existe), et la valeur de $\mathrm{M}((f - f_y)^2)$.

Preuve de (i) : On voit que $\frac{9}{16} \leqslant \mathrm{G}^2(p)$, et $\frac{9}{16} \leqslant \mathrm{G}(p)\,\mathrm{G}_y(p)$. Ainsi :

$$\varliminf_{\mathrm{N}\to\infty} \sum_{\mathrm{N}<p<\mathrm{N}(1+\epsilon)} \frac{\mathrm{G}(p)\,\mathrm{G}_y(p)\log p}{p} \geqslant \frac{9}{16}\log(1+\epsilon) > 0$$

et

$$\varliminf_{\mathrm{N}\to\infty} \sum_{\mathrm{N}<p<\mathrm{N}(1+\epsilon)} \frac{\mathrm{G}^2(p)\log p}{p} \geqslant \frac{9}{16}\log(1+\epsilon) > 0\,.$$

De même, puisque $\mathrm{G}^2(p^r) \leqslant \left(\frac{5}{4}\right)^{2r}$ et $\mathrm{G}(p^r)\,\mathrm{Gy}(p^r) \leqslant \left(\frac{5}{4}\right)^{2r}$, on voit que

$$\sum_p \left(\frac{\mathrm{G}^4(p)}{p^2} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\mathrm{G}^2(p^r)}{p^r}\right) < \infty\,,$$

et

$$\sum_p \left(\frac{\mathrm{G}^2(p)\,\mathrm{G}_y^2(p)}{p^2} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\mathrm{G}(p^r)\,\mathrm{G}_y(p^r)}{p^r}\right) < \infty.$$

Remarquant maintenant que

$$\sum \frac{f^2(p) - 1}{p} = \sum \frac{(f(p)-1)^2}{p} + 2\sum \frac{f(p)-1}{p},$$

on obtient la convergence de la série $\sum \frac{f^2(p)-1}{p}$. Mais

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{G^2(p)-1}{p}=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |f(p)-1|\leqslant 1/4}}\frac{f^2(p)-1}{p}-\frac{7}{16}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f(p)<3/4}}\frac{1}{p}+\frac{9}{16}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f(p)>5/4}}\frac{1}{p}$$

$$=\sum_{p\leqslant x}\frac{f^2(p)-1}{p}-\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |f(p)-1|>1/4}}\frac{f^2(p)-1}{p}-\frac{7}{16}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f(p)<3/4}}\frac{1}{p}+\frac{9}{16}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f(p)>5/4}}\frac{1}{p}.$$

On voit immédiatement que

$$\sum_{|f(p)-1|>1/4}\frac{1}{p}\leqslant 16\sum\frac{(f(p)-1)^2}{p}=<+\infty$$

et que

$$\sum_{|f(p)-1|>1/4}\frac{|f^2(p)-1|}{p}\leqslant\sum_{|f(p)-1|>1/4}\frac{f^2(p)+1}{p}$$

$$\leqslant\sum_{|f(p)-1|>1/4}\frac{2(f(p)-1)^2+2+1}{p}<\infty\,.$$

Ainsi la série $\sum\frac{G^2(p)-1}{p}$ converge.

Il en est de même de la série $\sum\frac{G(p)-1}{p}$, et donc de la série $\sum\frac{G(p)\,G_y(p)-1}{p}$.

Preuve de (ii) : Montrons que $\sum_p\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|H(p^r)|}{p^r}\right)<\infty$, ce qui entraînera, puisque H est multiplicative, que $\sum\frac{|H(n)|}{n}<\infty$.

Remarquons d'abord que :

$$\sum_p\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{|H(p^r)|}{p^r}\right)\leqslant\sum_p\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{f(p^r)^2}{p^r}\right)+\frac{25}{16}\sum_p\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{f(p^{r-1})^2}{p^r}\right)$$

$$\leqslant\sum_p\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{f(p^r)^2}{p}\right)+\frac{25}{16}\sum_p\frac{f^2(p)}{p^2}+\frac{25}{16}\sum_p\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{f(p^r)^2}{p^{r+1}}\right)$$

$$\leqslant\frac{41}{16}\sum_p\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{f(p^r)^2}{p^r}\right)+\frac{25}{16}\left(2\sum\frac{(f(p)-1)^2}{p}+2\sum\frac{1}{p^2}\right)<\infty\,.$$

En outre,

$$\sum_p \frac{|H(p)|}{p} = \sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{|f^2(p) - G^2(p)|}{p}$$
$$\leqslant \sum_{|f(p)-1|>1/4} \left(\frac{f^2(p)}{p} + \frac{G^2(p)}{p}\right) \leqslant 2 \sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{(f(p)-1)^2}{p}$$
$$+ 2 \sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{1}{p} + \frac{25}{16} \sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{1}{p}.$$

Ces dernières sommes étant finies comme on l'a vu plus haut, on en déduit que $\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|H(p^r)|}{p^r}\right) < \infty$.

De manière analogue, en remarquant que $f(p^r) \leqslant \frac{1 + f(p^r)^2}{2}$, on montre que $\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|K_y(p^r)|}{n}\right) < \infty$ et donc $\sum \frac{|K_y(n)|}{n}$.

Preuve du lemme 9. – Puisque $f^2 = H * G^2$ on a

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f^2(n) = \sum \frac{H(d)}{d} \cdot \frac{d}{x} \sum_{n \leqslant x/d} G^2(n).$$

G^2 ayant une valeur moyenne finie, il existe une constante C telle que, pour tout entier $d \geqslant 1$ et tout nombre réel x, $\left[\frac{d}{x} \sum_{n \leqslant x/d} G^2(n)\right] \leqslant C$. De plus $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{d}{x} \sum_{n \leqslant x/d} G^2(n)\right] = M(G^2)$.
Le théorème de convergence dominée, compte tenu de (ii), montre que $\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f^2(n)$ tend vers une limite égale à $M(G^2) \sum \frac{H(n)}{n}$, c'est-à-dire que

$$M(f^2) = \left(\prod_p \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{G^2(p^j)}{p^j}\right)\right) \prod_p \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{H(p^j)}{p^j}\right),$$
$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{G^2(p^j)}{p^j}\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{H(p^j)}{p^j}\right)\right).$$

Remplaçant G et H par leurs valeurs on a :

$$M(f^2) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^2(p^j)}{p^j}.$$

De manière analogue on obtient l'existence de $M(ff_y)$ et la relation

$$M(ff_y) = \Big(\prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^2(p^j)}{p^j}\Big)\Big)\Big(\prod_{p>y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f(p^j)}{p^j}\Big)\Big).$$

Finalement on voit que

$$\begin{aligned} M((f-f_y)^2) &= M(f^2) + M(f_y^2) - 2M(ff_y) \\ &= \prod_p\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^2(p^j)}{p^j}\Big) + \prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^2(p^j)}{p^j}\Big) \\ &\quad - 2\Big(\prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^2(p^j)}{p^j}\Big)\Big(\prod_{p>y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f(p^j)}{p^j}\Big) \\ &= A_y\, B_y \end{aligned}$$

où

$$A_y = \Big[\prod_{p>y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^2(p^j)}{p^j}\Big] + 1 - 2\Big[\prod_{p>y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f(p^j)}{p^j}\Big],$$

$$B_y = \prod_{p\leqslant y}\Big(\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^2(p^j)}{p^j}\Big).$$

Il est alors *immédiat que* A_y tend vers zéro quand $y \longrightarrow +\infty$ et que B_y tend vers $M(f^2)$, et donc que $\lim_{y\to\infty} M((f-f_y)^2) = 0$, ce qui entraîne que f est l.p. B^2. Il nous reste à montrer, pour prouver le théorème 1, que $\sigma(f) \neq \phi$, c'est immédiat puisque $M(f^2) = \prod\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f(p^j)^2}{p^j}$, produit convergent de termes strictement positifs, est non nul.

6. Théorème 2.

Pour qu'une fonction multiplicative positive soit p.p. B^λ $(\lambda \geqslant 1)$ *avec un spectre de Fourier Bohr non vide, il faut et il suffit que la série* $\sum \frac{f(p)-1}{p}$ *converge et*

$$\sum_p\Big(\sum_{r\geqslant 2}\frac{f(p^r)^\lambda}{p^r}\Big) < \infty,\quad \sum_{f(p)\leqslant 2}\frac{(f(p)-1)^2}{p} < \infty,\quad \sum_{f(p)>2}\frac{f(p)^\lambda}{p} < \infty.$$

Dans ce cas f *est* l.p. B^λ.

LEMME 10. – *Soit* $f \geqslant 0$ *alors*

$$f \text{ p.p.} B^\lambda \quad avec \quad \sigma(f) \neq \emptyset \iff f^{\lambda/2} \text{ p.p.} B^2 \quad avec \quad \sigma(f^{\lambda/2}) \neq \emptyset .$$

Remarquons d'abord que, d'après 3.10, f p.p.$B^\lambda \iff f^{\lambda/2}$ p.p.B^2. Supposons que $\sigma(f^{\lambda/2}) \neq \emptyset$. Alors d'après 3.5 $M[(f^{\lambda/2})^2] = 0$ c'est-à-dire $M(f^\lambda) = 0$; or $M(f) \leqslant [M(f^\lambda)]^{1/\lambda}$, et donc $M(f) = 0$; ce qui implique que $\sigma(f) = \emptyset$.

Supposons que $\sigma(f) = \emptyset$. Alors $M(f) = 0$. Montrons que $M(f^{\lambda/2}) = 0$, ce qui entraîne que $\sigma(f^{\lambda/2}) = \emptyset$.

Si $\lambda \leqslant 2$ on a $M(f^{\lambda/2}) \leqslant [M(f)]^{\lambda/2} = 0$, et donc $M(f^{\lambda/2}) = 0$.

Supposons donc $\lambda > 2$ et soit $n \geqslant 1$ tel que $2^n < \lambda \leqslant 2^{n+1}$.

Observons d'abord que pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, f^{2^j} est p.p. B^2. En effet, si $j \leqslant n-1$, $2^{j+1} \leqslant 2^n < \lambda$ et donc l'hypothèse f p.p.B^λ entraîne que f est p.p. $B^{2^{j+1}}$; 3.10 montre alors, que f^{2^j} est p.p.B^2.

Supposons que, pour un $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $M(f^{2^j}) = 0$. On aura alors $\sigma(f^{2^j}) = \emptyset$ et grâce à 3.5 $M(f^{2^{j+1}}) = 0$.

Ainsi, en partant de $M(f) = 0$, on aboutit à $M(f^{2^n}) = 0$. Or $M(f^{\lambda/2}) \leqslant M(f^{2^n})^{\lambda/2^{n+1}}$ et donc $M(f^{\lambda/2}) = 0$.

Preuve du théorème 2. – D'après le lemme 10 et le théorème 1, pour que f soit p.p.B^λ avec $\sigma(f) \neq \emptyset$ il faut et il suffit que les séries $\sum_p \left(\sum_{r \geqslant 2} \frac{f(p^r)^\lambda}{p^r} \right)$, $\sum_p \frac{(f(p)^{\lambda/2} - 1)^2}{p}$ et $\sum_p \frac{f(p)^{\lambda/2} - 1}{p}$ soient convergentes.

Il nous suffit donc de démontrer que la convergence des séries $\sum \frac{(f(p)^{\lambda/2} - 1)^2}{p}$ et $\sum \frac{f(p)^{\lambda/2} - 1}{p}$ est équivalente à l'ensemble des conditions suivantes : la série $\sum \frac{f(p) - 1}{p}$ est convergente, $\sum_{f(p) \leqslant 2} \frac{(f(p) - 1)^2}{p} < \infty$ et $\sum_{f(p) > 2} \frac{f(p)^\lambda}{p} < + \infty$.

Nous utiliserons les inégalités suivantes : si $\lambda \geqslant 1$

6.1. $c'_1(x-1)^2 \leqslant (x^{\lambda/2} - 1)^2 \leqslant c'_2(x-1)^2$ si $x \in [0, 2]$.

6.2. $c'_3 x^\lambda \leqslant (x^{\lambda/2} - 1)^2 \leqslant c'_4 x^\lambda$ si $x \geqslant 2$.

6.3. $|(x^{\lambda/2} - 1) - \frac{\lambda}{2}(x-1)| \leqslant c'_5(x-1)^2$ si $x \in [0, 2]$.

6.4. $$(x^{\lambda/2} - 1) \leqslant c_6' x^{\lambda} \quad \text{si} \quad x \geqslant 2\,.$$

6.5. $$(x - 1) \leqslant c_7' x^{\lambda} \quad \text{si} \quad x \geqslant 2\,.$$

Les inégalités 6.2, 6.4 et 6.5 sont immédiates.

Les fonctions $\dfrac{x^{\lambda/2} - 1}{x - 1}$ et $\dfrac{x^{\lambda/2} - 1 - (\lambda/2)(x-1)}{(x-1)^2}$ prolongées en $x = 1$ par $\dfrac{\lambda}{2}$, et $\dfrac{\lambda(\lambda-2)}{8}$ respectivement, sont continues sur $[0,2]$, ce qui donne 6.1 et 6.3. On déduit de 6.1 et 6.2 que la convergence de la série $\sum \dfrac{(f(p)^{\lambda/2} - 1)^2}{p}$ est équivalente à

6.6. $$\sum_{f(p)\leqslant 2} \frac{(f(p)-1)^2}{p} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{f(p)>2} \frac{f(p)^{\lambda}}{p} < \infty\,.$$

Grâce aux inégalités 6.4 et 6.5, la condition $\sum\limits_{f(p)>2} \dfrac{f(p)^{\lambda}}{p} < \infty$ entraîne $\sum\limits_{f(p)>2} \dfrac{f(p)^{\lambda/2} - 1}{p} < \infty$ et $\sum\limits_{f(p)>2} \dfrac{f(p) - 1}{p} < \infty$.

Alors 6.3 montre que, si l'on a 6.6, les séries $\sum \dfrac{f(p) - 1}{p}$ et $\sum \dfrac{f(p)^{\lambda/2} - 1}{p}$ sont de même nature.

7. Démonstration du théorème principal.

LEMME 11 (Daboussi-Delange) [2]. — *Soit g une fonction multiplicative tel que $|g(n)| \leqslant 1$ pour tout n,*

1) *Si pour tout caractère de Dirichlet χ et tout u réel on a $\sum \dfrac{1 - \mathrm{Re}(g(p)\,\chi(p)\,p^{iu})}{p} = +\infty$, alors, pour toute fonction arithmétique* S p.p.B, *on a* $\mathrm{M}(g\,.\,\mathrm{S}) = 0$.

2) *S'il existe un caractère de Dirichlet χ et un nombre a réel tels que $\sum \dfrac{1 - \mathrm{Re}(g(p)\,\chi(p)\,p^{ia})}{p} < +\infty$, alors, pour toute fonction arithmétique* S p.p.B, *on a*

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} g(n)\,\mathrm{S}(n) = \mathrm{C}\,x^{ia} \exp i\mathrm{A}(x) + o(1)\,,$$

où C est un nombre complexe, $A(x) = \sum_{p \leqslant x} \dfrac{\operatorname{Im}(\chi(p)\, g(p)\, p^{ia})}{p}$,
et $\lim_{x \to +\infty} \{ \sup_{x < y \leqslant x^2} |A(y) - A(x)| \} = 0$.

Etant donné une fonction multiplicative f, soit

$$\rho(n) = |f(n)|$$

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{f(n)}{|f(n)|} & \text{si} \quad f(n) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(n) = 0 . \end{cases}$$

ρ et g sont multiplicatives et $|g(n)|$ est égale à 0 ou 1 pour tout n.

Montrons que les 2 propositions (A) et (B) suivantes sont équivalentes :

(A) 7.1. les séries $\sum \dfrac{1 - \chi(p)\, g(p)}{p}$ et $\sum \dfrac{1 - \rho(p)}{p}$ convergent.

7.2. $$\sum_{\rho(p) \leqslant 2} \frac{(\rho(p) - 1)^2}{p} < \infty .$$

7.3. $$\sum_{\rho(p) > 2} \frac{\rho(p)^\lambda}{p} < \infty .$$

(B) 7.4. La série $\sum \dfrac{1 - \chi(p)\, f(p)}{p}$ converge.

7.5. $$\sum_{|f(p)| \leqslant 2} \frac{|\chi(p)\, f(p) - 1|^2}{p} < \infty .$$

7.6. $$\sum_{|f(p)| > 2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < \infty .$$

Supposons la proposition (A).

Puisque $|1 - \chi(p)\, g(p)|^2 \leqslant 2(1 - \operatorname{Re}[\chi(p)\, g(p)])$, on voit que 7.1 implique

7.7. $$\sum \frac{|1 - \chi(p)\, g(p)|^2}{p} < \infty .$$

Les inégalités 7.2, 7.3, 7.7, entraînent que

7.8. $$\sum \frac{|1 - \chi(p)\, g(p)|\; |1 - \rho(p)|}{p} < \infty .$$

En effet,

$$\sum \frac{|1-\chi(p)\,g(p)|\,|1-\rho(p)|}{p} \leqslant \sum_{\rho(p)\leqslant 2} \frac{|1-\chi(p)\,g(p)|\,|1-\rho(p)|}{p} + 2\sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^{\lambda}}{p}$$

$$\leqslant \left[\left(\sum_{\rho(p)\leqslant 2} \frac{(1-\rho(p))^2}{p}\right)\left(\sum \frac{|1-\chi(p)\,g(p)|^2}{p}\right)\right]^{1/2} + 2\sum_{\rho(p)>2}\frac{\rho(p)^{\lambda}}{p} < \infty\,.$$

Il résulte de 7.1, 7.8 et de l'identité suivante :

$$1-\chi(p)\,f(p) = 1-\chi(p)\,g(p)\,\rho(p) = (1-\rho(p))\,(\chi(p)\,g(p)-1) + (1-\chi(p)\,g(p)) + (1-\rho(p))$$

que la série $\sum \dfrac{1-\chi(p)\,f(p)}{p}$ converge.

Puisque $\chi(p)\,f(p)-1 = (\rho(p)-1)\,\chi(p)\,g(p) + (\chi(p)\,g(p)-1)$, on a : $|\chi(p)\,f(p)-1|^2 \leqslant 2\,|1-\rho(p)|^2 + 2\,|1-\chi(p)\,g(p)|^2$ et donc, grâce à 7.2 et 7.7, on voit que $\displaystyle\sum_{\rho(p)\leqslant 2} \frac{|1-\chi(p)\,f(p)|^2}{p} < \infty$. Ce qui achève de prouver (B).

Supposons la proposition (B).

Remarquons que si, $\rho(p) \leqslant 2$, on a $|1-\rho(p)| \leqslant |1-f(p)\,\chi(p)|$. En effet si

$$|\chi(p)| = 1\,,\ |1-\rho(p)| = |1-|f(p)\,\chi(p)|| \leqslant |1-f(p)\,\chi(p)|\,;$$

si $\chi(p) = 0$ et $\rho(p) \leqslant 2$, $|1-\rho(p)| \leqslant 1 = |1-f(p)\,\chi(p)|$. Ainsi on a 7.2.

L'identité $\chi(p)\,g(p)-1 = (1-\rho(p))\,\chi(p)\,g(p) - (1-\chi(p)\,\rho(p)\,g(p))$ et les inégalités 7.5 et 7.2 entraînent $\displaystyle\sum_{\rho(p)\leqslant 2} \frac{|1-\chi(p)\,g(p)|^2}{p} < \infty$.

Par ailleurs, puisque $\displaystyle\sum_{\rho(p)>2} \frac{1}{p} < \sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^{\lambda}}{p}$, on a

$$\sum_{\rho(p)>2} \frac{|1-\chi(p)\,g(p)|^2}{p} < \infty$$

et donc

7.9. $$\sum \frac{|1-\chi(p)\,g(p)|^2}{p} < \infty\,.$$

Ceci entraîne que

7.10. $$\sum \frac{(1 - \mathrm{Re}(\chi(p)\, g(p)))}{p} < \infty$$

puisque, si

$|\chi(p) g(p)| = 1$, on a $2(1 - \mathrm{Re}(\chi(p) g(p))) = |1 - \chi(p)\, g(p)|^2$,

et, si

$\chi(p)\, g(p) = 0$, on a $(1 - \mathrm{Re}(\chi(p)\, g(p))) = 1 = |1 - \chi(p)\, g(p)|^2$.

On déduit de 7.6 et 7.10 que

7.11. $$\sum \frac{\rho(p)\,[1 - \mathrm{Re}(\chi(p)\, g(p))]}{p} < \infty,$$

puisque $$\sum \frac{\rho(p)\,(1 - \mathrm{Re}(\chi(p)\, g(p)))}{p} \leqslant 2 \sum_{\rho(p)\leqslant 2} \frac{1 - \mathrm{Re}(\chi(p)\, g(p))}{p} + 2 \sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^\lambda}{p}.$$

L'identité

$$1 - \rho(p) = -\rho(p)\,[1 - \mathrm{Re}(\chi(p) g(p))] + 1 - \mathrm{Re}(\chi(p) f(p))$$

et l'inégalité 7.11 montrent que

7.12. $$\sum \frac{1 - \rho(p)}{p} \text{ converge}$$

puisque $\sum \frac{1 - \mathrm{Re}(\chi(p) f(p))}{p}$ converge d'après 7.4.

Finalement, en remarquant que, grâce à 7.2, 7.9, 7.6 on a

7.13. $$\sum \frac{|1 - \rho(p)|\,|\chi(p)\, g(p) - 1|}{p} < \infty,$$

puisque $$\sum \frac{|1 - \rho(p)|\,|\chi(p)\, g(p) - 1|}{p}$$
$$\leqslant \Big(\Big(\sum_{\rho(p)\leqslant 2} \frac{(1 - \rho(p))^2}{p}\Big)\Big(\sum \frac{|1 - \chi(p) g(p)|^2}{p}\Big)\Big)^{1/2} + 2 \sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^\lambda}{p}.$$

On voit que la série $\sum \frac{1 - \chi(p)\, g(p)}{p}$ converge en considérant l'identité

$$1 - \chi(p) g(p) = (1 - \rho(p))\,(1 - \chi(p) g(p)) - (1 - \rho(p)) + (1 - \chi(p)\, f(p))$$

et 7.13, 7.4, 7.12. Ceci achève de prouver (A).

Si f est p.p. B^λ on sait d'après 3.3 et 3.6 que ρ est p.p. B^λ et que le spectre de ρ est non vide, si le spectre de f est non vide.

Il résulte du théorème 2, que la série $\sum \dfrac{\rho(p)-1}{p}$ converge et que

$$\sum_p \sum_{r\geqslant 2} \frac{\rho(p^r)^\lambda}{p^r} < \infty\,, \quad \sum_{\rho(p)\leqslant 2} \frac{(\rho(p)-1)^2}{p} < \infty\,, \quad \sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^\lambda}{p} < \infty\,.$$

Montrons que la série $\sum \dfrac{1-\chi(p)\, g(p)}{p}$ converge pour un certain caractère χ, ce qui entraînera d'après un théorème de Delange et l'auteur [2], que g est l.p. B.

Il en résultera que f est l.p. B^λ ; nous montrerons que $\sigma(f) \neq \phi$.

Si pour tout caractère χ et pour tout u réel,

$$\sum \frac{1 - \operatorname{Re}(\chi(p)\, g(p)\, p^{iu})}{p} = +\infty\,,$$

alors en appliquant le lemme 11 avec $S(n) = \rho(n)\, e^{-2\pi i n\alpha}$, on aurait $\overline{\lim} \left| \dfrac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n) e^{-2\pi i n\alpha} \right| = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, ce qui contredit l'hypothèse $\sigma(f)$ non vide.

Il existe donc un caractère χ et un nombre réel a tel que $\sum \dfrac{1 - \operatorname{Re}(\chi(p)\, g(p)\, p^{ia})}{p} < \infty$. Montrons que $a = 0$ et que $\sum \dfrac{\operatorname{Im}(\chi(p)\, g(p))}{p}$ est une série convergente.

Soit $\alpha \in \sigma(f)$ et $S(n) = \rho(n)\, e^{-2\pi i n\alpha}$. D'après le lemme 11, on a : $\dfrac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n)\, e^{-2\pi i n\alpha} = C_\alpha x^{ia} \exp(i\mathrm{A}(x)) + O(1)$. f étant p.p. B, l'expression $\dfrac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n)\, e^{-2\pi i n\alpha}$ tend vers une limite quand $x \longrightarrow +\infty$. Cette limite est non nulle puisque $\alpha \in \sigma(f)$.

Il en résulte que $C_\alpha \neq 0$ et que la quantité $x^{ia} \exp i\mathrm{A}(x)$ tend vers une limite, quand $x \longrightarrow +\infty$.

On voit que pour tout $\gamma > 0$, l'expression

$$\gamma^{ia} \exp i(\mathrm{A}(\gamma x) - \mathrm{A}(x))$$

tend vers 1 quand $x \longrightarrow +\infty$, puisque

$$\gamma^{ia} \exp i(\mathrm{A}(\gamma x) - \mathrm{A}(x)) = \frac{(\gamma x)^{ia} \exp i(\mathrm{A}(\gamma x))}{x^{ia} \exp i\mathrm{A}(x)} .$$

Comme, par ailleurs, $\mathrm{A}(\gamma x) - \mathrm{A}(x)$ tend vers zéro quand $x \longrightarrow +\infty$, d'après le lemme 11, on obtient que $\gamma^{ia} = 1$ pour tout $\gamma > 0$, ce qui nécessite que $a = 0$. Reste à montrer que $\mathrm{A}(x)$ tend vers une limite quand $x \longrightarrow \infty$.

Nous savons que $\exp i(\mathrm{A}(x))$ tend vers une limite quand $x \longrightarrow +\infty$, et, d'après le lemme 11, que $\mathrm{A}(x+1) - \mathrm{A}(x)$ tend vers zéro.

Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $\exp i[\mathrm{A}(x) - \theta]$ tend vers 1 ; soit $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que $\exp i\theta_n = \exp i(\mathrm{A}(n) - \theta))$.

Il est clair que θ_n tend vers zéro quand $n \longrightarrow \infty$, et que $\mathrm{A}(n+1) - \mathrm{A}(n) \equiv \theta_{n+1} - \theta_n$ modulo 2π. Il en résulte, puisque $\mathrm{A}(n+1) - \mathrm{A}(n)$ tend vers zéro, qu'il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0$ entraîne $\mathrm{A}(n+1) - \mathrm{A}(n) = \theta_{n+1} - \theta_n$. Soit alors $\epsilon_n = \mathrm{A}(n) - \theta_n$. On a $\epsilon_n = \epsilon_{n+1}$ si $n \geqslant n_0$ et donc, puisque θ_n tend vers zéro, $\mathrm{A}(n)$ tend vers une limite.

Si les sommes ou séries du théorème principal sont finies ou convergentes, alors, $\rho = |f|$ est l.p. B^λ et $\sigma(\rho) \neq \phi$. De plus, g est l.p. B, g bornée. Il résulte de 3.8 que $f = \rho g$ est l.p. B^λ. Il reste à montrer que $\sigma(f) \neq \phi$.

Supposons donc $\sigma(f) = \phi$.

Soit $\epsilon > 0$ et Q un polynôme trigonométrique périodique tel que $\mathrm{M}(|f - \mathrm{Q}|) \leqslant \epsilon$. Comme g est l.p.B et $|g(n)| \leqslant 1$ pour tout n, on voit qu'il existe une fonction périodique K telle que $(\max |\mathrm{Q}(n)|)\, \mathrm{M}\,|g - \mathrm{K}| \leqslant \epsilon$ et $|\mathrm{K}(n)| \leqslant 1$. En effet il existe un polynôme trigonométrique périodique P tel que

$$(\max |\mathrm{Q}(n)|)\, \mathrm{M}\,|g - \mathrm{P}| \leqslant \epsilon ;$$

on définit $\mathrm{K}(n)$ ainsi

$$\mathrm{K}(n) = \begin{cases} \mathrm{P}(n) & \text{si} \quad |\mathrm{P}(n)| \leqslant 1 \\ \dfrac{\mathrm{P}(n)}{|\mathrm{P}(n)|} & \text{si} \quad |\mathrm{P}(n)| > 1 . \end{cases}$$

On a alors $|g(n) - \mathrm{K}(n)| \leqslant |g(n) - \mathrm{P}(n)|$.

Ceci dit, on a

$$\begin{aligned}M(|f|) &= M(f\overline{g}) = M(f\overline{K}) + M(f\overline{g} - f\overline{K})\\ &\leqslant |M(f\overline{K})| + M\,|(f-Q)\,(\overline{g}-\overline{K})| + M\,|Q(\overline{g}-\overline{K})|\\ &\leqslant |M(f\overline{K})| + 2M\,|f-Q| + (\max|Q(n)|)\,M\,|\overline{g}-\overline{K}|\\ &\leqslant 3\epsilon + |M(f\overline{K})|\,.\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)\,\overline{K}(n) = \sum_{\ell=1}^{N} \overline{K(\ell)}\,\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv\ell(N)}} f(n)$, en notant N la période de K. Comme $\sigma(f) = \phi$, on a $\overline{\lim}\left|\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv\ell(N)}} f(n)\right| = 0$.

Ainsi $M(f\overline{K}) = 0$ et donc $M\,|f| \leqslant 3\epsilon$ ϵ étant arbitraire, ceci est en contradiction avec le fait que $\sigma(\rho) \neq \phi$.

Appendice.

A.1. Preuve de 3.7. Il suffit de prouver que «si f p.p.B, $f \geqslant 0$ alors f a une distribution limite».

D'après un résultat bien connu, f a une distribution limite si, et seulement si pour tout t réel $\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} e^{2\pi i t f(n)}$ tend, quand $N \longrightarrow +\infty$, vers une fonction $\sigma(t)$ continue à l'origine.

Remarquons qu'un polynôme trigonométrique réel P a une distribution limite. En effet, pour tout j entier

$$\int t^j\,d\mu_N(P, t) = \frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} P(n)^j$$

tend vers une limite quand $N \longrightarrow +\infty$. Ceci entraîne, que pour toute fonction h continue à support compact $\int h(t)\,d\mu_N(P, t)$ a une limite quand $N \longrightarrow \infty$, et donc $\mu_N(P, t)$ converge vers une mesure μ. Il suffit alors de remarquer que pour tout $N \geqslant 1$

$$\mu_N(P, t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geqslant \sup_n P(n)\\ 0 & \text{si} \quad t \leqslant \min_n P(n)\end{cases}$$

pour obtenir que $\mu(\mathbf{R}) = 1$ et donc que la convergence est étroite.

D'après le résultat rappelé ci-dessus cela en particulier entraîne que pour tout polynôme trigonométrique réel P, $\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} e^{2\pi i t P(n)}$ tend vers une fonction $M(e^{2\pi i t P})$ continue à l'origine.

Ceci dit, soit f p.p.B, $f \geqslant 0$, et P_k des polynômes trigonométriques réels tels que $M(|f - P_k|) \leqslant \frac{1}{k}$.

Puisque, si $k > r$,

$$M(|e^{2\pi i t P_k} - e^{2\pi i t P_r}|) \leqslant (2\pi\,|t|)\, M(|P_k - P_r|) \leqslant \frac{4\pi\,|t|}{k},$$

la suite $M(e^{2\pi i t P_k})$ est, pour tout t, une suite de Cauchy. Elle converge donc vers une fonction $\sigma(t)$. Il suffit alors de remarquer que, si $|t| \leqslant 1$, la suite $M(e^{2\pi i t P_k})$ est une suite uniforme de Cauchy, pour déduire que σ est une limite uniforme pour $|t| \leqslant 1$ de fonctions continues à l'origine, et donc que σ est continue à l'origine. Des inégalités :

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} e^{2\pi i t f(n)} - \sigma(t) \right| \leqslant \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} (e^{2\pi i t f(n)} - e^{2\pi i t P_k(n)}) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} e^{2\pi i t P_k(n)} - M(e^{2\pi i t P_k}) \right| + (M(e^{2\pi i t P_k}) - \sigma(t)|,$$

et

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} (e^{2\pi i t f(n)} - e^{2\pi i t P_k(n)}) \right| \leqslant 2\pi\,|t| \times \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |f(n) - P_k(n)|$$

on déduit, en prenant la limite quand $N \longrightarrow +\infty$ puis quand $k \longrightarrow +\infty$, que $\overline{\lim_{N \to +\infty}} \left| \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} e^{2\pi i t f(n)} - \sigma(t) \right| = 0$. Ceci prouve le résultat indiqué.

A.2. Preuve de 3.10. – Nous établirons le résultat plus général suivant :

Soit $g \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 1$ et $\beta \geqslant 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) g^α p.p.B^β (resp. l.p. B^β).

(ii) g p.p.$B^{\alpha\beta}$ (resp. l.p. $B^{\alpha\beta}$).

Il est clair qu'on obtient 3.10 en prenant :

si $\lambda \geqslant 2$, $g = f$, $\alpha = \dfrac{\lambda}{2}$ et $\beta = 2$ et si

$1 \leqslant \lambda < 2$, $g = f^{\lambda/2}$, $\alpha = \dfrac{2}{\lambda}$ et $\beta = \lambda$.

Etablissons d'abord :

(a) la condition (i) entraîne (ii).

Soit $\epsilon > 0$ et P un polynôme trigonométrique réel tel que $\mathrm{M}(|g^\alpha - \mathrm{P}|^\beta) \leqslant \epsilon/2^{\alpha\beta}$.

Il existe A tel que $|\mathrm{P}(n)| \leqslant \mathrm{A}$ pour tout entier n.

Soit Q un polynôme ordinaire, (de sorte que $\mathrm{Q} \circ \mathrm{P}$ est un polynôme trigonométrique) tel que $|\mathrm{Q}(u) - (\sup(0, u))^{1/\alpha}| \leqslant \left(\dfrac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta}}$ pour tout $u \in [-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$. Montrons que : $\mathrm{M}(|g - \mathrm{Q} \circ \mathrm{P}|^{\alpha\beta}) \leqslant \epsilon$, ce qui établira (ii).

On utilisera les inégalités suivantes :

1. $|x - y|^\alpha \leqslant |x^\alpha - y^\alpha|$ pour tout $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

   (Il suffit de considérer, si $x > y$, la fonction $t \longrightarrow (y + t)^\alpha - t^\alpha$, qui est une fonction croissante sur $[0, x - y]$).

2. $(x + y)^{\alpha\beta} \leqslant 2^{\alpha\beta - 1}(x^{\alpha\beta} + y^{\alpha\beta})$ si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ (cela se déduit de la convexité de la fonction $t \longrightarrow t^{\alpha\beta}$).

3. $|\sup(0, y) - \sup(0, x)| \leqslant |y - x|$ pour x et y réels (se vérifie facilement).

On a :

$$|g(n) - \mathrm{Q}(\mathrm{P}(n))|^{\alpha\beta} \leqslant \{|g(n) - (\sup(0, \mathrm{P}(n)))^{1/\alpha}| + |(\sup(0, \mathrm{P}(n)))^{1/\alpha} - \mathrm{Q}(\mathrm{P}(n))|\}^{\alpha\beta}.$$

Appliquant successivement les inégalités 2, 1 et 3, on obtient

$$|g(n) - \mathrm{Q}(\mathrm{P}(n))|^{\alpha\beta} \leqslant 2^{\alpha\beta - 1}\{|g^\alpha(n) - \mathrm{P}(n)|^\beta + |(\sup(0, \mathrm{P}(n)))^{1/\alpha} - \mathrm{Q}(\mathrm{P}(n))|^{\alpha\beta}\},$$

et donc $\overline{\mathrm{M}}(|g(n) - \mathrm{Q}(\mathrm{P}(n))|^{\alpha\beta}) \leqslant \epsilon$ par choix de P et Q.

Montrons maintenant :

(b) Si $h \geqslant 0$, h p.p.B^n (resp. l.p.B^n), où n est un *entier* > 0, alors h^n est p.p.B resp. (l.p. B).

La propriété est triviale si $n = 1$. Supposons-la vraie pour $n = k$.

Soit h p.p.B^{k+1}. Alors h est p.p.B^k, et donc h^k est p.p.B. Soit $\epsilon > 0$ et R et S deux polynômes trigonométriques tels que $(M(h^{k+1}))^{k/k+1}(M(|h - R|^{k+1})^{1/k+1} \leqslant \epsilon/2$ et

$$(\sup |R(n)|)\, M(|h^k - S|) \leqslant \epsilon/2 .$$

Puisque

$$\begin{aligned}\overline{M}(|h^{k+1} - R.S|) &\leqslant M(h^k |h - R|) + M(|R|\ |h^k - S|)\\ &\leqslant [M(h^{k+1})]^{k/k+1}.\ [M\ |h - R|^{k+1}]^{1/k+1} + \sup|R(n)|\ M(|h^k - S|),\end{aligned}$$

on a $\overline{M}\ |h^{k+1} - R.S| \leqslant \epsilon$, ce qui prouve le résultat.

Si h était l.p.B^{k+1}, on pourrait choisir R et S périodiques, et donc h^{k+1} serait l.p.B.

Montrons finalement :

(c) La condition (ii) entraîne (i).

Soit $\gamma = (E(\alpha\beta) + 1)/\alpha\beta$ où $E(\alpha\beta)$ = partie entière de $\alpha\beta$. Ainsi $\gamma \geqslant 1$ et $\alpha\beta\gamma$ est un entier.

Soit $h = g^{1/\gamma}$. Ainsi h^γ est p.p.$B^{\alpha\beta}$ (resp. l.p.$B^{\alpha\beta}$). De la proposition (a) résulte que h est p.p.$B^{\alpha\beta\gamma}$ (resp. l.p.$B^{\alpha\beta\gamma}$) ; puisque $\alpha\beta\gamma$ est entier, il résulte de (b) que $h^{\alpha\beta\gamma}$ est p.p.B (resp. l.p.B), c'est-à-dire que $g^{\alpha\beta}$ est p.p.B (resp. l.p.B^β).

Il suffit d'appliquer de nouveau (a) pour obtenir que g^α est p.p.B^β (resp. l.p.B^β).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.S. Besicovitch, Almost periodic functions, Dover Publications.

[2] H. Daboussi et H. Delange, Quelques propriétés de fonctions multiplicatives, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 278 Série A (1974), 657-660.

[3] H. Delange, Quelques résultats sur les fonctions multiplicatives, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 281 Série A (1975), 997-1000.

[4] P.D.T.A. ELLIOTT, On connections between the Turan-Kubilius inequality..., *Proc. Symposia Math.,* Vol. XXIV, 77-82.

[5] P.D.T.A. ELLIOTT, A mean value theorem for multiplicative functions, *Proc. London Math. Soc.,* (3), 31 (1975), 418-438.

[6] P. ERDÖS, Some remarks about additive and multiplicative functions, *Bull. Am. Math. Soc.,* 52 (1946), 527-537.
et Some remarks and corrections..., *Bull. Am. Math. Soc.,* 53 (1947), 761-763.

[7] P. ERDÖS and A. RENYI, On the mean value of non negative multiplicative..., *Michigan Math. J.,* 12 (1965), 321-328.

[8] P. ERDOS and A. WINTNER, Additive functions and almost periodicity B^2, *Amer. J. Math.,* 62 (1940), 635-645.

[9] P. HARTMAN and A. WINTNER, On the almost periodicity of additive number..., *Amer. J. Math.,* 62 (1940), 753-758.

[10] M. KAC, E.R. Van KAMPEN and A. WINTNER, Ramanujan sums and almost periodic functions, *Amer. J. Math.,* 62 (1940), 107-144.

[11] I. KUBILIUS, Probabilistic methods in the theory of numbers, *Transl. Math. Monographs,* vol. 11, Amer. Math. Soc. Providence.

[12] E.V. NOVOSELOV, A new method in probabilistic number theory, *Amer. Math. Soc. Transl.,* 52 (1966), 217-275.

[13] W. SCHWARZ and J. SPILKER, Mean values and Ramanujan expansions of almost E.A.C., Colloquia Math. S. Janos Bolyai 13, Topics in Number theory, Debrecen, 1974.

[14] E.R. Van KAMPEN and A. WINTNER, On the almost periodic behavior of multiplicative..., *Amer. J. Math.,* 62 (1940), 613-626.

[15] A. WINTNER, Number theoretical almost periodicities, *Amer. J. Math.,* 67 (1945), 173-193.

Manuscrit reçu le 6 février 1980.

Hédi DABOUSSI,
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.