

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

KAZUAKI TAIRA

## Sur l'existence de processus de diffusion

*Annales de l'institut Fourier*, tome 29, n° 4 (1979), p. 99-126

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1979\\_\\_29\\_4\\_99\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_4_99_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR L'EXISTENCE DE PROCESSUS DE DIFFUSION

par Kazuaki TAIRA

---

### 0. Introduction.

Soit  $D$  un domaine borné d'un espace euclidien  $\mathbf{R}^N$ ,  $\bar{D}$  étant une variété compacte à bord  $\partial D$  de classe  $C^\infty$ , de dimension  $N$ .

On introduit les définitions suivantes (cf. [1], [8]) :

**DÉFINITION 0.1.** — Soit  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace  $C(\bar{D})$  des fonctions à valeurs réelles et continues sur  $\bar{D}$ . On dira que  $\{T_t\}$  est un semi-groupe de Feller sur  $\bar{D}$  si, pour tout  $t \geq 0$ ,  $f \in C(\bar{D})$  et  $0 \leq f(x) \leq 1$  sur  $\bar{D} \Rightarrow 0 \leq T_t f(x) \leq 1$  sur  $\bar{D}$ , i.e., si les  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  sont positifs et contractants sur  $C(\bar{D})$ .

**DÉFINITION 0.2.** — Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  sur  $\bar{D}$ . On dira que  $\{T_t\}$  est un  $\Delta$ -processus de diffusion sur  $\bar{D}$  si  $A$  satisfait aux conditions suivantes :

a)  $Au = \Delta u$  pour toute  $u \in \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D})$ , où

$$\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 + \cdots + \partial^2 / \partial x_N^2$$

et  $\mathcal{D}(A)$  est le domaine de définition de  $A$ .

b)  $A$  est l'extension fermée minimale dans  $C(\bar{D})$  de  $\Delta$  restreint à  $\mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D})$ .

Nous nous intéressons alors au :

**Problème I.** — Trouver tous les  $\Delta$ -processus de diffusion sur  $\bar{D}$ .

**Remarque 0.3.** — Dans le cas où  $N = 1$ , ce problème a été résolu par Feller, Dynkin, Itô-McKean et Ray. On suppose donc que  $N \geq 2$ .

Ventcel' [13] a démontré que, si  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $\Delta$ -processus de diffusion  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  sur  $\bar{D}$ , il existe un opérateur frontière  $\Gamma$  d'ordre 2 de type intégral-différentiel à coefficients mesurables bornés sur  $\partial D$  et une fonction mesurable  $\delta$  bornée et positive sur  $\partial D$  tels que, pour toute  $u \in \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D})$ ,

$$Lu(x') \equiv \Gamma u(x') - \delta(x') \Delta u(x') = 0, \quad x' \in \partial D$$

(cf. [1], th. XIII). La relation  $L$  sera appelée la *condition aux limites de Ventcel'*. Nous renvoyons à [1], chapitre II pour les détails sur la forme de  $\Gamma$ .

Nous sommes alors ramenés au

**Problème II.** — Savoir pour quelle condition aux limites de Ventcel'  $L$  il existe un  $\Delta$ -processus de diffusion.

Dans cet article, on considère le problème II lorsque  $\Gamma$  est un opérateur différentiel à coefficients  $C^\infty$  sur  $\partial D$  et  $\delta$  est  $C^\infty$  sur  $\partial D$ , et on donne des conditions suffisantes pour l'existence de  $\Delta$ -processus de diffusion  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  sur  $\bar{D}$ , en généralisant des résultats de Bony-Courrège-Priouret [1] au cas où les conditions aux limites de Ventcel'  $L$  sont *non-coercives*. Les résultats obtenus sont résumés au paragraphe suivant.

D'après une variante du théorème de Hille-Yosida tenant compte du principe du maximum (cf. [1], [8]), on ramène le problème de la construction de  $\Delta$ -processus de diffusion  $\{T_t\}$  sur  $\bar{D}$  à la résolution de problèmes aux limites suivants :

$$(*)_0 \quad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & \text{dans } D, \\ Lu = 0 & \text{sur } \partial D, \end{cases}$$

où  $\alpha > 0$  est une constante.

En utilisant les résultats obtenus dans [11] et [12], on étudie le problème  $(*)_0$  dans le cadre des espaces de *Sobolev* et on démontre que, pour tout  $\alpha > 0$ , le problème  $(*)_0$  admet une solution unique  $u \in H^{s-1}(D)$  ( $s \geq 3$ ) pour toute  $f \in H^{s-2}(D)$ ; ce qui, compte tenu du lemme de Sobolev, montre que, pour tout  $\alpha > 0$ , le problème  $(*)_0$  admet une solution unique  $u \in C^\infty(\bar{D})$  pour toute  $f \in C^\infty(\bar{D})$ .

En raisonnant comme dans la démonstration du théorème XIX de [1], on obtient les  $\Delta$ -processus de diffusion cherchés.

Je tiens à remercier B. Helffer dont les conseils m'ont permis de simplifier ou même totalement de modifier certaines démonstrations initiales.

Le plan de cet article est le suivant :

1. Énoncé des résultats.
2. Opérateurs de Green et harmonique.
3. Construction de processus de diffusion.
4. Démonstration du théorème 1 : cas du second ordre.
5. Démonstration des théorèmes 2, 3 et 4 : cas du premier ordre.

Quelques résultats de cet article sont annoncés dans [10].

### 1. Énoncé des résultats.

1.1. On va introduire et étudier une classe de conditions aux limites de Ventcel' de type différentiel à coefficients  $C^\infty$  sur le bord.

On ne considère que des cartes locales  $(U, \chi)$  de  $\bar{D}$  pour lesquelles  $\chi(U)$  est un ouvert de

$$\bar{\mathbf{R}}_+^N = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbf{R}^N; \quad z_N \geq 0\},$$

la coordonnée  $x_N$  ( $\chi = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ) définissant le bord  $\partial D$  :

$$\begin{cases} p \in U \cap D \Leftrightarrow p \in U \text{ et } x_N(p) > 0; \\ p \in U \cap \partial D \Leftrightarrow p \in U \text{ et } x_N(p) = 0. \end{cases}$$

Soit  $(x', \xi') = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1})$  des coordonnées locales du fibré cotangent  $T^* \partial D$  à  $\partial D$ . La condition aux limites de Ventcel'  $L$  que l'on étudiera dans la suite est la forme (cf. [1], (II.3.1), (II.2.16) et (II.2.1)) :

$$\begin{aligned} (1.1) \quad Lu(x') &= \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + Qu(x') - \delta(x') \Delta u(x') \\ &\equiv \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + \left[ \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x') \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x') u(x') \right] - \delta(x') \Delta u(x') (u \in C^2(\bar{D})), \end{aligned}$$

où

- $n$  est la normale unitaire intérieure à  $\partial D$ ,
- $\mu$  est une fonction positive de  $C^\infty(\partial D)$  :

$$(1.2) \quad \mu(x') \geq 0 \quad \text{sur} \quad \partial D,$$

— ou bien  $Q$  est un opérateur différentiel du *second* ordre à coefficients  $C^\infty$  réels sur  $\partial D$ ; la matrice  $(\alpha^{ij}(x'))_{1 \leq i, j \leq N-1}$  est symétrique et le symbole principal  $q_2(x', \xi')$  de  $-Q$

$$q_2(x', \xi') = \sum_{i, j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j$$

est positif sur le sous-espace des covecteurs non nuls du fibré cotangent  $T^* \partial D \setminus 0$ :

$$(1.3) \quad q_2(x', \xi') = \sum_{i, j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \text{sur } T^* \partial D \setminus 0,$$

— ou bien  $Q$  est un opérateur différentiel du *premier* ordre à coefficients  $C^\infty$  réels sur  $\partial D$ ,

— le terme  $\gamma$  d'ordre 0 de  $Q$  est une fonction négative de  $C^\infty(\partial D)$ :

$$(1.4) \quad \gamma(x') \leq 0 \quad \text{sur } \partial D,$$

—  $\delta$  est une fonction positive de  $C^\infty(\partial D)$ :

$$(1.5) \quad \delta(x') \geq 0 \quad \text{sur } \partial D.$$

On dira que la condition aux limites de Ventcel'  $L$  est du second ordre (resp. du premier ordre) si  $Q$  est du second ordre (resp. du premier ordre).

*Remarque 1.1.* — Dans (1.1),  $\mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x')$  est un terme de réflexion;

$$\sum_{i, j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x')$$

est un terme de diffusion sur le bord  $\partial D$ ;  $\gamma(x')u(x')$  est un terme d'absorption et  $\delta(x') \Delta u(x')$  est un terme de viscosité.

Nous introduisons une définition qui nous servira dans la suite :

**DÉFINITION 1.2.** (cf. [1], § II.2.8). — On dira que  $L$  est transversal sur  $\partial D$  si, en tout point  $x' \in \partial D$  où  $\delta(x')$  est nul,  $\mu(x')$  est strictement positif.

*Remarque 1.3.* — D'après (1.2) et (1.5),  $L$  est transversal sur  $\partial D$  si et seulement si

$$(1.6) \quad \mu(x') + \delta(x') > 0 \quad \text{sur } \partial D.$$

1.2. Le cas où  $L$  est du *second* ordre. — On va tout d'abord introduire

une quantité positive  $\tilde{\text{Tr}} H_{q_2}(x', \xi')$  déterminée par le hessien  $H_{q_2}(x', \xi')$  du symbole principal

$$q_2(x', \xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j$$

de  $-Q$  par rapport à  $(x', \xi')$  (cf. [4], [5]).

Soit  $(g_{ij}(x'))_{1 \leq i,j \leq N-1}$  la métrique riemannienne de  $\partial D$  induite par la métrique naturelle de  $\mathbf{R}^N$  et  $(g^{ij}(x'))$  la matrice inverse de  $(g_{ij}(x'))$ .

Posons :

$$\Sigma = \left\{ (x', \xi') \in T^* \partial D \setminus \{0\} ; |\xi'| = 1 \text{ et } q_2(x', \xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j = 0 \right\},$$

où

$$|\xi'| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N-1} g^{ij}(x') \xi_i \xi_j}.$$

Soit  $\rho \in \Sigma$ . Pour tout vecteur tangent  $u$  à  $T^* \partial D$  en  $\rho$ , on choisit un champ de vecteurs  $v$  sur  $T^* \partial D$  tel que  $v = u$  en  $\rho$ . On peut définir une forme quadratique  $a_\rho(u, u)$  par l'équation :

$$a_\rho(u, u) = (v^2 q_2)_\rho.$$

En effet, puisque  $q_2$  s'annule au second ordre sur  $\Sigma$  d'après (1.3),  $a_\rho(u, u)$  ne dépend pas du choix de  $v$ .

Soit  $\tilde{T}_\rho(T^* \partial D)$  le complexifié de l'espace cotangent  $T_\rho(T^* \partial D)$  à  $T^* \partial D$  en  $\rho$ . On considère la forme symplectique  $\sigma = \sum_{j=1}^{N-1} d\xi_j \wedge dx_j$  et la forme quadratique  $a_\rho(u, u)$  comme des formes bilinéaires sur  $\tilde{T}_\rho(T^* \partial D) \times \tilde{T}_\rho(T^* \partial D)$ . Puisque  $\sigma$  est non-dégénéré, on peut définir pour tout  $\rho \in \Sigma$  une transformation linéaire

$$A_\rho : \tilde{T}_\rho(T^* \partial D) \rightarrow \tilde{T}_\rho(T^* \partial D)$$

par l'équation :

$$\sigma(u, A_\rho v) = a_\rho(u, v), \quad u, v \in \tilde{T}_\rho(T^* \partial D).$$

Melin [5] a démontré que les valeurs propres de  $A_\rho$  sont sur l'axe imaginaire et symétriques par rapport à l'origine. Pour tout  $\rho = (x', \xi') \in \Sigma$ , on pose :

$$\tilde{\text{Tr}} H_{q_2}(x', \xi') = \text{la somme des valeurs propres positives de } \frac{1}{\sqrt{-1}} A_\rho.$$

On sait que le symbole *sous-principal*

$$q'_1(x', \xi') = \sqrt{-1} \left( \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{ij}^{ij}(x') \xi_i \xi_j - \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \xi_i \right)$$

de  $-Q$  est invariant sur

$$\Sigma = \left\{ (x', \xi') \in T^* \partial D \setminus 0 ; |\xi'| = 1 \text{ et } \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{ij}^{ij}(x') \xi_i \xi_j = 0 \right\}.$$

Ici

$$\alpha_{ij}^{ij}(x') = \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha^{ij}(x')).$$

En utilisant le théorème 5.9 de Hörmander [4] comme dans la démonstration du théorème 2 de [12] et en raisonnant comme dans la démonstration du théorème XIX de Bony-Courrège-Priouret [1], on démontrera le

THÉORÈME 1. — Soit

$$\begin{aligned} Lu(x') = \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{ij}^{ij}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x') \\ + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x') u(x') - \delta(x') \Delta u(x') (u \in C^2(\bar{D})) \end{aligned}$$

une condition aux limites de Ventcel' du second ordre satisfaisant à (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5).

On suppose que  $L$  est transversal sur  $\partial D$  et que :

(H) en tout point  $(x', \xi')$  de

$$\Sigma = \left\{ (x', \xi') \in T^* \partial D \setminus 0 ; |\xi'| = 1 \text{ et } q_2(x', \xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{ij}^{ij}(x') \xi_i \xi_j = 0 \right\},$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\text{Tr}} H_{q_2}(x', \xi') + \mu(x') + \left| \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{ij}^{ij}(x') \xi_i \xi_j - \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \xi_i \right| > 0.$$

Il existe alors un  $\Delta$ -processus de diffusion  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  sur  $\bar{D}$  tel que, pour le générateur infinitésimal  $A$  de  $\{T_t\}$ , on ait :

$$(+)\quad \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D}) = \{u \in C^2(\bar{D}) ; Lu = 0 \text{ sur } \partial D\}.$$

Remarque 1.4. — 1° Ce théorème comprend, comme cas particulier, celui de [1] dans lequel  $q_2(x', \xi') > 0$  sur  $T^* \partial D \setminus 0$  (cf. [1], théorème XIX). 2°

Notons que l'hypothèse (H) ci-dessus est plus faible que l'hypothèse (A.1) dans le théorème 1 de [10].

1.3. Le cas où  $L$  est du *premier* ordre. — En utilisant le théorème 1 de [12] et le théorème 5.1 de Sato-Ueno [8], on démontrera le

THÉORÈME 2. — Soit

$$Lu(x') = \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')u(x') - \delta(x') \Delta u(x') (u \in C^2(\bar{D}))$$

une condition aux limites de Ventcel' du premier ordre satisfaisant à (1.2), (1.4) et (1.5).

On suppose que  $L$  est transversal sur  $\partial D$ . Il existe alors un semi-groupe de Feller  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  sur  $\bar{D}$  tel que, pour le générateur infinitésimal  $A$  de  $\{T_t\}$ , on ait :

$$\begin{cases} \text{i) } \mathcal{D}(A) \cap C^{2,\kappa}(\bar{D}) = \{u \in C^{2,\kappa}(\bar{D}) ; Lu = 0 \text{ sur } \partial D\}, \\ \text{ii) } Au = \Delta u \text{ pour toute } u \in \mathcal{D}(A) \cap C^{2,\kappa}(\bar{D}). \end{cases}$$

Ici  $C^{2,\kappa}(\bar{D})$  ( $0 < \kappa \leq 1$ ) désigne le sous-espace vectoriel de  $C^2(\bar{D})$  formé des fonctions  $f$  telles que, pour  $0 \leq |p| \leq 2$ , les dérivées  $D^p f$  satisfassent à la condition uniforme de Hölder avec exposant  $\kappa$  dans  $\bar{D}$ .

Sous des hypothèses plus restrictives, on obtient les théorèmes suivants :

THÉORÈME 3. — Soit

$$Lu(x') = \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')u(x') - \delta(x') \Delta u(x') (u \in C^2(\bar{D}))$$

une condition aux limites de Ventcel' du premier ordre satisfaisant à (1.2), (1.4) et (1.5).

On suppose que  $L$  est transversal sur  $\partial D$  et que :

(H.2) il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que

$$\left| \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \xi_i \right| \leq C_0 \mu(x') |\xi'| \quad \text{sur } T^* \partial D.$$

Il existe alors un  $\Delta$ -processus de diffusion  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  tel que, pour le



générateur infinitésimal  $A$  de  $\{T_t\}$ , on ait :

$$(+)\quad \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D}) = \{u \in C^2(\bar{D}) ; Lu=0 \text{ sur } \partial D\}.$$

THÉORÈME 4. — Soit

$$Lu(x') = \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') \\ + \gamma(x')u(x') - \delta(x') \Delta u(x') \quad (u \in C^2(\bar{D}))$$

une condition aux limites de Ventcel' du premier ordre satisfaisant à (1.2), (1.4) et (1.5).

On suppose que  $L$  est transversal sur  $\partial D$  et que :

(C.2) le champ de vecteur  $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^{N-1})$  sur  $\partial D$  est non nul sur  $M = \{x' \in \partial D ; \mu(x')=0\}$  et aucune courbe intégrale maximale de  $\beta$  n'est entièrement contenue dans  $M$ .

Il existe alors un  $\Delta$ -processus de diffusion  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  tel que, pour le générateur infinitésimal  $A$  de  $\{T_t\}$ , on ait la propriété (+).

Remarque 1.5. — 1° Les théorèmes 3 et 4 comprennent, comme cas particulier, celui de [1] dans lequel  $\mu(x') > 0$  sur  $\partial D$  (cf. [1], théorème XIX). 2° Notons que l'hypothèse (C.2) ci-dessus est plus faible que les hypothèses (A.3), (B.3) et (C.3) dans le théorème 3 de [10].

## 2. Opérateurs de Green et harmonique.

2.1. On considère le problème de Dirichlet suivant : pour deux fonctions  $f$  et  $\varphi$  définies dans  $D$  et sur  $\partial D$  respectivement, trouver une fonction  $u$  dans  $D$  telle que

$$(D) \quad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & \text{dans } D, \\ u|_{\partial D} = \varphi & \text{sur } \partial D, \end{cases}$$

où  $\alpha$  est un nombre réel. On résout le problème (D) dans le cadre des espaces de Hölder.

Soit  $m$  un entier positif et  $0 < \kappa \leq 1$ . On désigne par  $C^{m,\kappa}(\bar{D})$  (resp.  $C^{m,\kappa}(\partial D)$ ) le sous-espace vectoriel de  $C^m(\bar{D})$  (resp.  $C^m(\partial D)$ ) formé des fonctions  $f$  telles que, pour  $0 \leq |p| \leq m$ , les dérivées  $D^p f$  satisfassent à la condition uniforme de Hölder avec exposant  $\kappa$  dans  $\bar{D}$  (resp.  $\partial D$ ).

Rappelons le résultat classique suivant (cf. [7]) :

**THÉOREME 2.1.** — Soit  $m$  un entier positif et  $0 < \kappa \leq 1$ . Pour tout  $\alpha \geq 0$ , l'application :  $u \rightarrow ((\alpha - \Delta)u, u|_{\partial D})$  est un isomorphisme de  $C^{m+2, \kappa}(\bar{D})$  sur  $C^{m, \kappa}(\bar{D}) \oplus C^{m+2, \kappa}(\partial D)$ .

En vertu du théorème 2.1, pour tout  $\alpha \geq 0$ , on peut définir des opérateurs linéaires continus  $G_\alpha^0 : C^{0, \kappa}(\bar{D}) \rightarrow C^{2, \kappa}(\bar{D})$  et  $H_\alpha : C^{2, \kappa}(\partial D) \rightarrow C^{2, \kappa}(\bar{D})$  par les relations suivantes :

a) Pour toute  $f \in C^{0, \kappa}(\bar{D})$ ,

$$(2.1) \quad \begin{cases} (\alpha - \Delta)G_\alpha^0 f = f & \text{dans } D, \\ G_\alpha^0 f|_{\partial D} = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

b) Pour toute  $\varphi \in C^{2, \kappa}(\partial D)$ ,

$$(2.2) \quad \begin{cases} (\alpha - \Delta)H_\alpha \varphi = 0 & \text{dans } D, \\ H_\alpha \varphi|_{\partial D} = \varphi & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

Notons que  $G_\alpha^0$  (resp.  $H_\alpha$ ) se prolonge en un opérateur linéaire borné et positif, encore noté  $G_\alpha^0$  (resp.  $H_\alpha$ ), de  $C(\bar{D})$  (resp.  $C(\partial D)$ ) dans  $C(\bar{D})$  qui sera appelé *opérateur de Green* (resp. *opérateur harmonique*) (cf. [8], théorèmes 2.4 et 2.5).

Du théorème 2.1, on déduit le

**COROLLAIRE 2.2.** — Soit  $\alpha \geq 0$ . On a alors :

i) Pour tout entier positif  $m$ ,  $G_\alpha^0$  est un isomorphisme de  $C^{m, \kappa}(\bar{D})$  sur  $\{v \in C^{m+2, \kappa}(\bar{D}) ; v|_{\partial D} = 0 \text{ sur } \partial D\}$ .

ii) Pour tout entier positif  $m$ ,  $H_\alpha$  est un isomorphisme de  $C^{m+2, \kappa}(\partial D)$  sur  $\{w \in C^{m+2, \kappa}(\bar{D}) ; (\alpha - \Delta)w = 0 \text{ dans } D\}$ .

2.2. Soit  $L$  une condition aux limites de Ventcel' du type considéré au paragraphe 1.1. :

$$\begin{aligned} Lu(x') &= \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + Qu(x') - \delta(x') \Delta u(x') \\ &\equiv \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + \left[ \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') \right. \\ &\quad \left. + \gamma(x')u(x') \right] - \delta(x') \Delta u(x') (u \in C^2(\bar{D})). \end{aligned}$$

$L$  applique continûment  $C^{2,\kappa}(\bar{D})$  dans  $C^{0,\kappa}(\partial D)$ . En outre,

LEMME 2.3 ([8], lemme 4.2). — Soit  $L$  une condition aux limites de Ventcel satisfaisant à (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5). Alors, pour tout  $\alpha \geq 0$ , l'opérateur  $LG_\alpha^0$  :

$$f \rightarrow LG_\alpha^0 f (f \in C^{0,\kappa}(\bar{D}))$$

se prolonge en un opérateur linéaire borné et positif de  $C(\bar{D})$  dans  $C(\partial D)$ .

On notera  $\overline{LG_\alpha^0}$  l'opérateur de  $C(\bar{D})$  dans  $C(\partial D)$  ainsi introduit.

D'autre part, d'après le corollaire du lemme 4.1 de Sato-Ueno [8], on a le

LEMME 2.4. — Soit  $L$  une condition aux limites de Ventcel satisfaisant à (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5). Alors, pour tout  $\alpha \geq 0$ , l'opérateur  $LH_\alpha$  :

$$\varphi \rightarrow LH_\alpha \varphi (\varphi \in C^{2,\kappa}(\partial D))$$

se prolonge en un opérateur linéaire fermé de  $C(\partial D)$  dans  $C(\partial D)$ .

On notera  $\overline{LH_\alpha}$  l'opérateur de  $C(\partial D)$  dans  $C(\partial D)$  ainsi introduit et  $\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$  son domaine de définition respectivement.

Notons que  $LH_\alpha$  est un opérateur pseudo-différentiel à support propre sur le bord  $\partial D$  et que  $LH_\alpha$  se prolonge en un opérateur linéaire borné de  $\mathcal{D}'(\partial D)$  dans  $\mathcal{D}'(\partial D)$  (cf. [3]) ; on le désignera par  $\widetilde{LH_\alpha}$ .

La relation entre les opérateurs  $\overline{LH_\alpha}$  et  $\widetilde{LH_\alpha}$  est donnée par le

LEMME 2.5. — Pour tout  $\alpha \geq 0$ , on a :

$$\overline{LH_\alpha} \subset \widetilde{LH_\alpha}.$$

Démonstration. — Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$ . Par définition, il existe alors une suite  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C^{2,\kappa}(\partial D)$  telle que  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  dans  $C(\partial D)$  et  $LH_\alpha \varphi_j \rightarrow \overline{LH_\alpha} \varphi$  dans  $C(\partial D)$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$ . Puisque l'application :  $\psi \rightarrow \psi$  de  $C(\partial D)$  dans  $\mathcal{D}'(\partial D)$  est continue, on en déduit :

$$\begin{aligned} \widetilde{LH_\alpha} \varphi &= \lim_{j \rightarrow +\infty} LH_\alpha \varphi_j \\ &= \overline{LH_\alpha} \varphi \end{aligned}$$

dans  $\mathcal{D}'(\partial D)$ . D'où  $\overline{LH_\alpha} \subset \widetilde{LH_\alpha}$ . c.q.f.d.

### 3. Construction du processus de diffusion.

La démonstration des théorèmes 1, 3 et 4 reposera sur le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.1.** — Soit  $L$  une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5). On introduit un opérateur linéaire non-borné  $\mathcal{A} : C(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{D})$  de la manière suivante :

a) le domaine de définition de  $\mathcal{A}$  est

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in C^2(\bar{D}) ; Lu = 0 \text{ sur } \partial D\}.$$

b)  $\mathcal{A}u = \Delta u$  pour toute  $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

On suppose :

(I) Il existe un  $\lambda \geq 0$  et une fonction positive  $\delta_0$  de  $C^\infty(\partial D)$  tels que, pour un  $\alpha \geq 0$ , le problème

$$\begin{cases} (\alpha - \Delta)u = 0 & \text{dans } D, \\ (\lambda - L_0)u = \varphi & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

admette une solution  $u \in C^2(\bar{D})$  pour toute  $\varphi$  dans un ensemble dense de  $C(\partial D)$ , où  $L_0 = L - \delta_0 \Delta$ .

(II) Pour tout  $\alpha > 0$ , on a :

$$(3.1) \quad \psi \in \overline{\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})} \quad \text{et} \quad \overline{LH_\alpha} \psi \in C^\infty(\partial D) \Rightarrow \psi \in C^\infty(\partial D).$$

Alors, si  $L$  est transversal sur  $\partial D$ , l'opérateur  $\mathcal{A}$  est préfermé dans  $C(\bar{D})$  et sa fermeture  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $\Delta$ -processus de diffusion  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  sur  $\bar{D}$  tel que

$$(+)\quad \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D}) = \{u \in C^2(\bar{D}) ; Lu = 0 \text{ sur } \partial D\}.$$

**Démonstration.** — D'après l'hypothèse (I), en utilisant le théorème 5.1 de Sato-Ueno [8], on voit que, pour tout  $\alpha \geq 0$ , l'opérateur  $\overline{L_0 H_\alpha}$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur  $\partial D$ ; donc aussi que, pour tout  $\alpha \geq 0$ , l'opérateur  $\overline{LH_\alpha}$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur  $\partial D$  en vertu du lemme 6.4 de [8]. D'après le lemme 5.1

de [8], on en déduit que, si  $L$  est transversal sur  $\partial D$ , pour tout  $\alpha > 0$ , l'équation

$$(*) \quad \overline{LH_\alpha} \psi = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial D$$

admet une solution unique  $\psi \in \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$  pour toute  $\varphi \in C(\partial D)$ . Pour tout  $\alpha > 0$ , on définit l'opérateur de Green  $G_\alpha : C(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{D})$  du problème

$$(*)_0 \quad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & \text{dans } D, \\ Lu = 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

par :

$$G_\alpha f = G_\alpha^0 f - H_\alpha \overline{LH_\alpha}^{-1} \overline{LG_\alpha^0} f)$$

pour toute  $f \in C(\bar{D})$  (cf. [8], (5.6)).

On obtient alors :

$$(3.2) \quad f \in C^\infty(\bar{D}) \Rightarrow G_\alpha f \in C^\infty(\bar{D}) \quad \text{et} \quad u = G_\alpha f$$

est une solution du problème  $(*)_0$ .

En effet, si  $f \in C^\infty(\bar{D})$ , on en déduit que  $\overline{LH_\alpha}^{-1} (\overline{LG_\alpha^0} f)$  est dans  $C^\infty(\partial D)$  d'après la propriété (3.1); par conséquent  $G_\alpha f \in C^\infty(\bar{D})$  d'après le corollaire 2.2 et  $u = G_\alpha f$  est une solution du problème  $(*)_0$  d'après (2.1) et (2.2).

On va appliquer le théorème de Hille-Yosida-Ray à l'opérateur  $\mathcal{A}$  comme dans la démonstration du théorème XIX de Bony-Courrège-Priouret [1] :

**THÉORÈME DE HILLE-YOSIDA-RAY.** — Soit  $\mathcal{A} : C(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{D})$  un opérateur linéaire et  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  son domaine de définition. On suppose :

(i) Pour tout  $\alpha > 0$ , l'opérateur  $\alpha - \mathcal{A}$  applique  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  sur un sous-espace dense de  $C(\bar{D})$ .

(ii) Pour toute  $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  telle que  $\sup_{x \in \bar{D}} u(x) > 0$ , il existe  $x \in \bar{D}$  tel que  $u(x) = \sup u$  et  $\mathcal{A}u(x) \leq 0$ .

(iii)  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  est dense dans  $C(\bar{D})$ .

Alors, l'opérateur  $\mathcal{A}$  est préfermé dans  $C(\bar{D})$  et sa fermeture  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  sur  $\bar{D}$ .

*Fin de la démonstration du théorème 3.1.* — Pour tout  $\alpha > 0$ , l'image de  $(\alpha - \mathcal{A})$  est dense dans  $C(\bar{D})$  puisqu'elle contient  $C^\infty(\bar{D})$  d'après la propriété (3.2) (propriété (i)). La propriété de maximum (ii) requise est une conséquence du théorème XI de [1] et de l'hypothèse de transversalité faite sur  $L$ . La propriété (iii) résulte, d'une part de ce que, pour tous  $\alpha > 0$  et  $f \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  contient les fonctions  $G_\alpha f (\in C^\infty(\bar{D}))$  d'après la propriété (3.2), et d'autre part de ce que, pour toute  $f \in C(\bar{D})$ ,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha G_\alpha f = f \quad \text{dans} \quad C(\bar{D})$$

d'après la proposition III.2.7 de [1] et l'hypothèse de transversalité faite sur  $L$ .

D'après le théorème de Hille-Yosida-Ray, on en déduit que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est préfermé dans  $C(\bar{D})$  et que sa fermeture  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  sur  $\bar{D}$ .

Pour démontrer que le semi-groupe  $\{T_t\}$  est un  $\Delta$ -processus de diffusion sur  $\bar{D}$ , il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} (+) \quad \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D}) &= \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ &= \{u \in C^2(\bar{D}) ; Lu = 0 \text{ sur } \partial D\}. \end{aligned}$$

Par construction du semi-groupe  $\{T_t\}$ , on a

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D}).$$

Inversement, soit  $u \in \mathcal{D}(A) \cap C^2(\bar{D})$ . Puisque  $u \in \mathcal{D}(A)$  et que  $A$  est la fermeture de  $\mathcal{A}$  dans  $C(\bar{D})$ , il existe une suite  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$  telle que  $u_k \rightarrow u$  dans  $C(\bar{D})$  et que  $\Delta u_k \rightarrow Au$  dans  $C(\bar{D})$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . On en déduit que  $\Delta u_k \rightarrow \Delta u$  dans  $\mathcal{D}'(D)$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$  et donc que  $Au = \Delta u$  dans  $\mathcal{D}'(D)$ , d'où  $Au = \Delta u$  dans  $C(\bar{D})$  car  $u \in C^2(\bar{D})$ . En remarquant que l'application  $v \rightarrow v$  (resp.  $\phi \rightarrow \phi$ ) de  $C(\bar{D})$  (resp.  $C(\partial D)$ ) dans  $L^2(D)$  (resp.  $L^2(\partial D)$ ) est continue, on obtient donc :

$$\begin{cases} u_k & \rightarrow u & \text{dans } L^2(D), \\ \Delta u_k & \rightarrow \Delta u & \text{dans } L^2(D), \\ \Delta u_{k|_{\partial D}} & \rightarrow \Delta u|_{\partial D} & \text{dans } L^2(\partial D), \end{cases}$$

lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Rappelons que l'application :  $u \rightarrow \left( u|_{\partial D}, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} \right)$  de

$$H_{\Delta}^{0,0} = \{u \in L^2(D) ; \Delta u \in L^2(D)\}$$

dans  $H^{-1/2}(\partial D) \oplus H^{-3/2}(\partial D)$  est continue d'après la proposition 2.1 (iii) de

[9]. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
 Lu &= \mu \frac{\partial u}{\partial n} + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma u - \delta \Delta u|_{\partial D} \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \mu \frac{\partial u_k}{\partial n} + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \gamma u_k - \delta \Delta u_k|_{\partial D} \right) \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} Lu_k \\
 &= 0 \quad (u_k \in \mathcal{D}(\mathcal{A}))
 \end{aligned}$$

dans  $H^{-5/2}(\partial D)$ . D'où  $Lu(x') = 0$  pour tout point  $x' \in \partial D$ , car  $u \in C^2(\bar{D})$ ; ce qui montre que  $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . La propriété (+) est ainsi démontrée. c.q.f.d.

*Remarque 3.2.* — Si, pour tout  $\alpha > 0$ , l'opérateur pseudo-différentiel  $LH_\alpha$  est globalement hypoelliptique dans  $\partial D$  :

$$\psi \in \mathcal{D}'(\partial D) \quad \text{et} \quad LH_\alpha \psi \in C^\infty(\partial D) \Rightarrow \psi \in C^\infty(\partial D),$$

on a la propriété (3.1) en vertu du lemme 2.5.

#### 4. Démonstration du théorème 1 : cas du second ordre.

4.1. Il suffit de montrer que les hypothèses (I) et (II) du théorème 3.1 sont vérifiées. Pour cela, en utilisant le théorème 5.9 de Hörmander [4] comme dans la démonstration du théorème 2 de [12], on démontrera le théorème suivant :

**THÉORÈME 4.1.** — Soit  $s \geq 3$  et  $L$  une condition aux limites de Ventcel<sup>1</sup> du second ordre satisfaisant à (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5) :

$$\begin{aligned}
 Lu(x') &= \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x') \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x') u(x') - \delta(x') \Delta u(x') \quad (u \in C^2(\bar{D})).
 \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad \mu(x') \geq 0 \quad \text{sur} \quad \partial D.$$

$$(1.3) \quad q_2(x', \xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \text{sur} \quad T^* \partial D \setminus 0.$$

$$(1.4) \quad \gamma(x') \leq 0 \quad \text{sur} \quad \partial D.$$

$$(1.5) \quad \delta(x') \geq 0 \quad \text{sur} \quad \partial D.$$

On suppose que  $L$  est transversal sur  $\partial D$  et que :

(H) en tout point  $(x', \xi')$  de

$$\Sigma = \left\{ (x', \xi') \in T^* \partial D \setminus 0 ; |\xi'| = 1 \text{ et } q_2(x', \xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j = 0 \right\},$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\text{Tr}} H_{q_2}(x', \xi') + \mu(x') + \left| \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{(0)}^{ij}(x') \xi_i - \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \xi_i \right| > 0.$$

Alors, pour tout  $\alpha > 0$ , le problème

$$(*) \quad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & \text{dans } D, \\ Lu = \varphi & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

admet une solution unique  $u \in H^{s-1}(D)$  pour toutes  $f \in H^{s-2}(D)$  et  $\varphi \in H^{s-5/2}(\partial D)$ .

De plus, pour tout  $\alpha \geq 0$ , l'opérateur pseudo-différentiel  $LH_\alpha$  est hypoelliptique dans  $\partial D$ .

Ici  $H^s(D)$  (resp.  $H^s(\partial D)$ ) désigne l'espace de Sobolev sur  $D$  (resp.  $\partial D$ ) d'ordre  $s$ .

Ce théorème sera établi au paragraphe 4.2 ci-dessous.

*Démonstration du théorème 1.* — On déduit du théorème 4.1 que l'hypothèse (I) du théorème 3.1 est satisfaite avec  $\lambda = 0$  et  $\delta_0 = 0$  d'après le lemme de Sobolev et que l'hypothèse (II) du même théorème est satisfaite d'après la remarque 3.2.

4.2. *Démonstration du théorème 4.1.* — 1) En utilisant l'opérateur de Green  $G_\alpha^0$  et l'opérateur harmonique  $H_\alpha$  comme dans [11], on ramène l'étude du problème  $(*)$  à celle de l'opérateur pseudo-différentiel  $LH_\alpha$  :

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow LH_\alpha \psi &= \mu \frac{\partial}{\partial n} (H_\alpha \psi)|_{\partial D} + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \gamma \psi - \alpha \delta \psi \end{aligned}$$

du second ordre à paramètre réel  $\alpha$ , sur le bord  $\partial D$  (cf. [11], prop. 2.3) :

PROPOSITION 4.2. — Soit  $\alpha \geq 0$ . Pour deux fonctions

$$f \in H^{s-2}(D) \text{ et } \varphi \in H^{s-5/2}(\partial D)$$



avec  $s \geq 3$ , il existe une solution  $u \in H^s(D)$  ( $t \leq s$ ) du problème

$$(*) \quad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & \text{dans } D, \\ Lu = \mu \frac{\partial u}{\partial n} + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma u - \delta \Delta u|_{\partial D} \\ = \varphi & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

si et seulement si il existe une solution  $\psi \in H^{t-1/2}(\partial D)$  de l'équation

$$(**) \quad \begin{aligned} LH_\alpha \psi &= \varphi - LG_\alpha^0 f \\ &= \varphi - \mu \frac{\partial}{\partial n} (G_\alpha^0 f)|_{\partial D} + \delta f|_{\partial D} \text{ sur } \partial D. \end{aligned}$$

2) En utilisant une variante d'une méthode de Agmon-Nirenberg comme dans [11] et [12] (cf. [2]), on va étudier le comportement de l'opérateur pseudo-différentiel  $LH_\alpha$  lorsque  $\alpha \geq 0$ .

1° Soit  $S = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  le cercle unité. Pour toute

$$\tilde{\varphi} \in H^{t-1/2}(\partial D \times S) \text{ avec } t \in \mathbf{R},$$

il existe une solution unique  $\tilde{w} \in H^t(D \times S)$  du problème

$$\begin{cases} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{w} = 0 & \text{dans } D \times S, \\ \tilde{w}|_{\partial D \times S} = \tilde{\varphi} & \text{sur } \partial D \times S. \end{cases}$$

Ici  $z \in S$ . On définit l'opérateur harmonique

$$\tilde{H} : H^{t-1/2}(\partial D \times S) \rightarrow H^t(D \times S) \text{ par } \tilde{w} = \tilde{H}\tilde{\varphi}.$$

Notons que  $L\tilde{H}$  :

$$\tilde{\varphi} \rightarrow \mu \frac{\partial}{\partial n} (\tilde{H}\tilde{\varphi})|_{\partial D \times S} + \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i} + \gamma \tilde{\varphi} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2}$$

est un opérateur pseudo-différentiel du second ordre sur  $\partial D \times S$ .

En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 3.1 de [11], on a le

LEMME 4.3. — Soit  $\alpha' = l^2$  avec  $l \in \mathbf{Z}$ . On a alors :

$$\begin{cases} L\tilde{H}(\varphi \otimes e^{ilz}) = LH_{\alpha'} \varphi \otimes e^{ilz} & \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}'(\partial D); \\ (L\tilde{H})^*(\psi \otimes e^{ilz}) = (LH_{\alpha'})^* \psi \otimes e^{ilz} & \text{pour toute } \psi \in \mathcal{D}'(\partial D), \end{cases}$$

où  $(L\tilde{H})^*$  et  $(LH_{\alpha'})^*$  sont les adjoints formels de  $L\tilde{H}$  et  $LH_{\alpha'}$  respectivement.

La relation entre les normes  $||_{H^t(\partial D)}$  et  $||_{H^t(\partial D \times S)}$  pour  $t \geq 0$  est donnée par le

LEMME 4.4 (cf. [2], prop. 4). — Soit  $t \geq 0$ . Il existe une constante  $C_1 > 0$  dépendant de  $t$  telle que, pour tous  $\varphi \in C^\infty(\partial D)$  et  $l \in \mathbb{Z}$ , on ait :

$$\begin{aligned} C_1^{-1} |\varphi \otimes e^{ilz}|_{H^t(\partial D \times S)}^2 &\leq |\varphi|_{H^t(\partial D \times S)}^2 + l^{2t} |\varphi|_{H^t(\partial D \times S)}^2 \\ &\leq C_1 |\varphi \otimes e^{ilz}|_{H^t(\partial D \times S)}^2. \end{aligned}$$

2° On va calculer le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel  $L\tilde{H}$  du second ordre sur  $\partial D \times S$ .

Soit  $(x', \xi', z, \zeta) = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}, z, \zeta)$  des coordonnées locales du fibré cotangent  $T^*\partial D \times T^*S = T^*(\partial D \times S)$ . En raisonnant comme dans la démonstration des lemmes 2.2 et 2.4 de [12], on obtient le

LEMME 4.5 (cf. [12], lemme 3.1). — i) Le symbole de  $-L\tilde{H}$  est donné par :

$$\begin{aligned} (4.1) \quad &\tilde{q}_2(x', \xi', z, \zeta) + \tilde{q}_1(x', \xi', z, \zeta) + \text{des termes d'ordre} \leq 0 \\ &= \left[ \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j + \delta(x') \zeta^2 \right] \\ &+ \left[ \mu(x') \sqrt{|\xi'|^2 + \zeta^2} + \sqrt{-1} \sum_{i=1}^{N-1} (-\beta^i(x')) \xi_i \right] + \text{des termes d'ordre} \leq 0. \end{aligned}$$

ii) Le symbole de  $-(L\tilde{H})^*$  est donné par :

$$\begin{aligned} (4.2) \quad &\tilde{q}_2(x', \xi', z, \zeta) + \tilde{r}_1(x', \xi', z, \zeta) + \text{des termes d'ordre} \leq 0 \\ &= \left[ \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j + \delta(x') \zeta^2 \right] + \left[ \mu(x') \sqrt{|\xi'|^2 + \zeta^2} \right. \\ &+ \sqrt{-1} \left( \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \xi_i - 2 \sum_{i,j=1}^{N-1} \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x_j}(x') \xi_i \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{\rho(x')} \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j}(x') \right) \right] + \text{des termes d'ordre} \leq 0. \end{aligned}$$

Ici  $\rho(x') = (\det(g_{ij}(x')))^{1/2}$ .

3° En appliquant le théorème 5.9 de [4] à l'opérateur  $L\tilde{H}$  (resp.  $(L\tilde{H})^*$ ), on obtient le

LEMME 4.6. — Soit  $s \in \mathbb{R}$ ,  $t < s - 1$  et  $L$  une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à (1.2), (1.3) et (1.5). On suppose que  $L$  est transversal sur

$\partial D$  et que :

(H) en tout point  $(x', \xi')$  de

$$\Sigma = \{(x', \xi') \in T^* \partial D \setminus 0 ; |\xi'| = 1 \text{ et } q_2(x', \xi') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j = 0\},$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\text{Tr}} H_{q_2}(x', \xi') + \mu(x') + \left| \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{(j)}^{ij}(x') \xi_i - \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \xi_i \right| > 0.$$

On a alors :

i) Il existe une constante  $C_2 > 0$ , dépendant de  $s$  et  $t$ , telle que, pour toute  $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\partial D \times S)$ , on ait

$$(4.3) \quad |\tilde{\varphi}|_{H^{s-3/2}(\partial D \times S)}^2 \leq C_2 (|L\tilde{H}\tilde{\varphi}|_{H^{s-5/2}(\partial D \times S)}^2 + |\tilde{\varphi}|_{H^{t-1/2}(\partial D \times S)}^2).$$

ii) Il existe une constante  $C_2^* > 0$ , dépendant de  $s$  et  $t$ , telle que, pour toute  $\tilde{\Psi} \in C^\infty(\partial D \times S)$ , on ait

$$(4.3)^* \quad |\tilde{\Psi}|_{H^{s-3/2}(\partial D \times S)}^2 \leq C_2^* (|(L\tilde{H})^* \tilde{\Psi}|_{H^{s-5/2}(\partial D \times S)}^2 + |\tilde{\Psi}|_{H^{t-1/2}(\partial D \times S)}^2).$$

De plus,  $L\tilde{H}$  et  $(L\tilde{H})^*$  sont hypoelliptiques dans  $\partial D \times S$ .

*Démonstration.* — Notons d'abord que, le symbole principal

$$\tilde{q}_2(x', \xi', z, \zeta) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j + \delta(x') \zeta^2$$

de l'opérateur pseudo-différentiel  $-L\tilde{H}$  (resp.  $-(L\tilde{H})^*$ ) vérifiant la condition du cône (1.2) de [4] d'après (1.3) et (1.5), l'inégalité (4.3) (resp. (4.3)\*) est localisable (cf. [4]). Il suffit donc de montrer que, si  $L$  est transversal sur  $\partial D$  et si l'hypothèse (H) est satisfaite, alors  $L\tilde{H}$  et  $(L\tilde{H})^*$  vérifient les conditions du théorème 5.9 de [4] (cf. [12], théorème 5.2).

Soit  $(U, \chi)$  (resp.  $(W, \tau)$ ) une carte locale de  $\partial D$  (resp.  $S$ ). Posons :

$$\tilde{\Sigma}_{U \times W} = \{(x', \xi', z, \zeta) \in (T^* \partial D \times T^* S) \setminus 0 ; (x', z) \in U \times W, |\xi'|^2 + \zeta^2 = 1$$

$$\text{et } \tilde{q}_2(x', \xi', z, \zeta) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j + \delta(x') \zeta^2 = 0\}.$$

D'après (1.3) et (1.5), on a :

$$\tilde{\Sigma}_{U \times W} = \tilde{\Sigma}_{U \times W}^{(1)} \cup \tilde{\Sigma}_{U \times W}^{(2)}$$

$$\equiv \{(x', \xi', z, \zeta) \in T^* \partial D \times (T^* S \setminus 0) ; (x', z) \in U \times W, |\xi'|^2 + \zeta^2 = 1, \delta(x') = 0$$

$$\text{et } \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j = 0\} \cup \{(x', \xi', z, 0) \in (T^* \partial D \setminus 0) \times T^* S ; (x', z) \in U \times W, |\xi'| = 1$$

$$\text{et } \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j = 0\}.$$

D'après (4.1) (resp. 4.2)), en remarquant que sur  $\tilde{\Sigma}_{U \times W}$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i = 0 \quad (1 \leq j \leq N-1)$$

d'après (1.3), on voit que le symbole *sous-principal*  $\tilde{q}'_1(x', \xi', z, \zeta)$  (resp.  $\tilde{r}'_1(x', \xi', z, \zeta)$ ) de  $-L\tilde{H}$  (resp.  $-(L\tilde{H})^*$ ) sur  $\tilde{\Sigma}_{U \times W}$  est :

$$(4.4) \quad \tilde{q}'_1(x', \xi', z, \zeta) \equiv \tilde{q}_1(x', \xi', z, \zeta) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left( \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} (\tilde{q}_2(x', \xi', z, \zeta)) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} (\tilde{q}_2(x', \xi', z, \zeta)) \right) \\ = \mu(x') + \sqrt{-1} \left( \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{(j)}^{ij} \xi_i - \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \xi_i \right).$$

$$(4.5) \quad \tilde{r}'_1(x', \xi', z, \zeta) \equiv \tilde{r}_1(x', \xi', z, \zeta) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left( \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} (\tilde{q}_2(x', \xi', z, \zeta)) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} (\tilde{q}_2(x', \xi', z, \zeta)) \right) \\ = \mu(x') - \sqrt{-1} \left( \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{(j)}^{ij}(x') \xi_i - \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \xi_i \right).$$

D'où d'après (1.2)

$$\begin{cases} -\operatorname{Re} \tilde{q}'_1(x', \xi', z, \zeta) = -\mu(x') \leq 0 & \text{sur } \tilde{\Sigma}_{U \times W}, \\ -\operatorname{Re} \tilde{r}'_1(x', \xi', z, \zeta) = -\mu(x') \leq 0 & \text{sur } \tilde{\Sigma}_{U \times W}. \end{cases}$$

On en déduit que la condition du cône du théorème 5.2 de [12] est satisfaite pour  $\tilde{q}_2$  et  $\tilde{q}'_1$  (resp.  $\tilde{q}_2$  et  $\tilde{r}'_1$ ) et que, si  $L$  est transversal sur  $\partial D$  (cf. (1.6)), alors  $\operatorname{Re} \tilde{q}'_1 = \mu(x')$  (resp.  $\operatorname{Re} \tilde{r}'_1 = \mu(x')$ ) est strictement positif sur

$$\tilde{\Sigma}_{U \times W}^{(1)} = \{(x', \xi', z, \zeta) \in T^* \partial D \times (T^* S \setminus \{0\}) ; (x', z) \in U \times W,$$

$$|\xi'|^2 + \zeta^2 = 1, \delta(x') = 0 \text{ et } \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j = 0\},$$

i.e., que la condition ii) du théorème 5.2 de [12] est vérifiée pour  $L\tilde{H}$  (resp.  $(L\tilde{H})^*$ ) sur  $\tilde{\Sigma}_{U \times W}^{(1)}$ .

On va donc la vérifier sur  $\tilde{\Sigma}_{U \times W}^{(2)}$ . Pour cela, on calcule

$$\operatorname{Tr} H_{\tilde{q}_2}(x', \xi', z, \zeta)$$

du hessien  $H_{\tilde{q}_2}(x', \xi', z, \zeta)$  de

$$\tilde{q}_2(x', \xi', z, \zeta) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j + \delta(x') \zeta^2$$

par rapport à  $(x', \xi', z, \zeta)$  sur

$$\tilde{\Sigma}_{U \times W}^{(2)} = \{(x', \xi', z, 0) \in (T^* \partial D \setminus 0) \times T^* S; (x', z) \in U \times W, |\xi'| = 1$$

$$\text{et } \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j = 0\}.$$

En remarquant que  $\tilde{q}_2(x', \xi', z, \zeta) = q_2(x', \xi') + \delta(x') \zeta^2$  et que

$$\tilde{\text{Tr}} H_{\delta \zeta^2}(x', \xi', z, \zeta) = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Sigma}_{U \times W}^{(2)},$$

on déduit que, en tout point  $(x', \xi', z, \zeta)$  de  $\tilde{\Sigma}_{U \times W}^{(2)}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Tr}} H_{q_2}(x', \xi', z, \zeta) &= \tilde{\text{Tr}} H_{q_2}(x', \xi', z, \zeta) + \tilde{\text{Tr}} H_{\delta \zeta^2}(x', \xi', z, \zeta) \\ &= \tilde{\text{Tr}} H_{q_2}(x', \xi'). \end{aligned}$$

D'après (4.4) et (4.5), l'hypothèse (H) implique alors que la condition ii) du théorème 5.2 de [12] est vérifiée pour  $L\tilde{H}$  et  $(L\tilde{H})^*$  sur  $\tilde{\Sigma}_{U \times W}^{(2)}$ . c.q.f.d.

4° Il résulte des lemmes 4.3, 4.4 et 4.6 la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.7.** — Soit  $\alpha' = l^2$  avec  $l \in \mathbf{Z}$  et  $L$  une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à (1.2), (1.3) et (1.5). On suppose que  $L$  est transversal sur  $\partial D$  et que l'hypothèse (H) est satisfaite.

Pour tout  $s \geq 5/2$ , il existe alors une constante  $R > 0$  dépendant de  $s$  telle que, si  $\alpha' = l^2 \geq R$ , on ait :

i) il existe une constante  $C_3 > 0$  dépendant de  $s$  telle que, pour toute  $\varphi \in H^{s-3/2}(\partial D)$  avec  $LH_\alpha \varphi \in H^{s-5/2}(\partial D)$ , on ait

$$\begin{aligned} (4.6) \quad & |\varphi|_{H^{s-3/2}(\partial D)}^2 + \alpha'^{s-3/2} |\varphi|_{L^2(\partial D)}^2 \\ & \leq C_3 (|LH_\alpha \varphi|_{H^{s-5/2}(\partial D)}^2 + \alpha'^{s-5/2} |LH_\alpha \varphi|_{L^2(\partial D)}^2); \end{aligned}$$

ii) il existe une constante  $C_3^* > 0$  dépendant de  $s$  telle que, pour toute  $\psi \in H^{s-3/2}(\partial D)$  avec  $(LH_\alpha)^* \psi \in H^{s-5/2}(\partial D)$ , on ait

$$\begin{aligned} (4.6)^* \quad & |\psi|_{H^{s-3/2}(\partial D)}^2 + \alpha'^{s-3/2} |\psi|_{L^2(\partial D)}^2 \\ & \leq C_3^* (|(LH_\alpha)^* \psi|_{H^{s-5/2}(\partial D)}^2 + \alpha'^{s-5/2} |(LH_\alpha)^* \psi|_{L^2(\partial D)}^2). \end{aligned}$$

**Démonstration.** — Soit  $\varphi \in H^{s-3/2}(\partial D)$  telle que  $LH_\alpha \varphi \in H^{s-5/2}(\partial D)$ . En vertu de la remarque qui suit le lemme 1.4.5 de [3], il existe une suite  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{N}} \subset C^\infty(\partial D)$  telle que  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  dans  $H^{s-3/2}(\partial D)$  et  $LH_\alpha \varphi_j \rightarrow LH_\alpha \varphi$  dans  $H^{s-5/2}(\partial D)$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$ . Il suffit donc de montrer l'inégalité (4.6) pour toute  $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ . De même, il suffit de montrer l'inégalité (4.6)\* pour toute  $\psi \in C^\infty(\partial D)$ .

La proposition 4.7 se démontre en appliquant l'inégalité (4.3) (resp. (4.3)\*) avec  $s \geq 5/2$  et  $t = 1/2$  à  $\tilde{\varphi} = \varphi \otimes e^{ilz}$  (resp.  $\tilde{\psi} = \psi \otimes e^{ilz}$ ) avec  $\varphi \in C^\infty(\partial D)$  (resp.  $\psi \in C^\infty(\partial D)$ ) et  $l \in \mathbf{Z}$ , puis en utilisant les lemmes 4.3 et 4.4. c.q.f.d.

5° Soit  $\alpha \geq 0$ . Pour tout  $s \in \mathbf{R}$ , on introduit un opérateur linéaire non-borné et fermé  $\mathcal{C}(\alpha) : H^{s-3/2}(\partial D) \rightarrow H^{s-5/2}(\partial D)$  de la manière suivante :

a) Le domaine de définition de  $\mathcal{C}(\alpha)$  est

$$\mathcal{D}(\mathcal{C}(\alpha)) = \{\varphi \in H^{s-3/2}(\partial D) ; LH_\alpha \varphi \in H^{s-5/2}(\partial D)\}.$$

b)  $\mathcal{C}(\alpha)\varphi = LH_\alpha \varphi$  pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{C}(\alpha))$ .

Puisque  $\mathcal{D}(\mathcal{C}(\alpha))$  contient  $C^\infty(\partial D)$ , on voit que  $\mathcal{D}(\mathcal{C}(\alpha))$  est dense dans  $H^{s-3/2}(\partial D)$  et donc qu'il existe l'adjoint

$$\mathcal{C}(\alpha)^* : H^{-s+5/2}(\partial D) \rightarrow H^{-s+3/2}(\partial D) \text{ de } \mathcal{C}(\alpha).$$

De même, pour tout  $s \in \mathbf{R}$ , on introduit un opérateur linéaire non-borné et fermé  $\mathcal{C}_1(\alpha)^* : H^{-s+5/2}(\partial D) \rightarrow H^{-s+3/2}(\partial D)$  de la manière suivante :

c) Le domaine de définition de  $\mathcal{C}_1(\alpha)^*$  est

$$\mathcal{D}(\mathcal{C}_1(\alpha)^*) = \{\psi \in H^{-s+5/2}(\partial D) ; (LH_\alpha)^*\psi \in H^{-s+3/2}(\partial D)\}.$$

d)  $\mathcal{C}_1(\alpha)^*\psi = (LH_\alpha)^*\psi$  pour toute  $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{C}_1(\alpha)^*)$ .

En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 4.1 de [11], on obtient le

LEMME 4.8. — Soit  $\alpha \geq 0$ . On a alors  $\mathcal{C}(\alpha)^* \subset \mathcal{C}_1(\alpha)^*$ .

D'après la proposition 4.7, en utilisant le lemme 4.8, on obtient la

PROPOSITION 4.9. — Soit  $\alpha' = l^2$  avec  $l \in \mathbf{Z}$  et  $L$  une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à (1.2), (1.3) et (1.5). On suppose que  $L$  est transversal sur  $\partial D$  et que l'hypothèse (H) est satisfaite. Pour tout  $s \geq 5/2$ , il existe alors une constante  $R > 0$  dépendant de  $s$  telle que, si  $\alpha' = l^2 \geq R$ , l'opérateur  $\mathcal{C}(\alpha') : H^{s-3/2}(\partial D) \rightarrow H^{s-5/2}(\partial D)$  est bijectif.

Démonstration. — Il résulte du résultat i) de la proposition 4.7 que, si  $\alpha' = l^2 \geq R$ , l'opérateur  $\mathcal{C}(\alpha')$  est injectif. Il reste alors à vérifier que  $\mathcal{C}(\alpha')$  est surjectif.

En utilisant le lemme 4.3, il résulte de l'hypoellipticité de  $(L\tilde{H})^*$  (cf. lemme 4.6) que

$$\psi \in \mathcal{D}'(\partial D) \quad \text{et} \quad (LH_\alpha)^*\psi \in C^\infty(\partial D) \Rightarrow \psi \in C^\infty(\partial D).$$

D'après le résultat ii) de la proposition 4.7, on en déduit que, si  $\alpha' = l^2 \geq R$ , l'opérateur  $\mathcal{C}_1(\alpha')^*$  est injectif; donc aussi que  $\mathcal{C}(\alpha')^*$  est injectif d'après le lemme 4.8. D'où la surjectivité de  $\mathcal{C}(\alpha')$ . c.q.f.d.

3) Par un argument de perturbation compacte, on va montrer que, pour tout  $\alpha \geq 0$ , l'opérateur  $\mathcal{C}(\alpha)$  est d'indice zéro.

D'après (4.1) de [12], on voit que, pour tout  $\alpha \geq 0$  fixé, le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel  $-LH_\alpha$  sur  $\partial D$  est donné par :

$$(4.7) \quad \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \xi_i \xi_j + \left[ \mu(x') |\xi'| + \sqrt{-1} \sum_{i=1}^{N-1} (-\beta^i(x')) \xi_i \right] \\ + \text{des termes d'ordre} \leq 0 \text{ dépendant de } \alpha.$$

On en déduit que, pour tous  $\alpha, \alpha' \geq 0$ , il existe un opérateur pseudo-différentiel  $K(\alpha, \alpha')$  d'ordre zéro sur  $\partial D$ , dépendant de  $\alpha$  et  $\alpha'$ , tel que

$$LH_\alpha = LH_{\alpha'} + K(\alpha, \alpha').$$

D'où

$$\text{Ind } \mathcal{C}(\alpha) = \text{Ind } \mathcal{C}(\alpha'),$$

car l'opérateur  $K(\alpha, \alpha') : H^{s-3/2}(\partial D) \rightarrow H^{s-5/2}(\partial D)$  est compact d'après le théorème de Rellich. On déduit donc de la proposition 4.9 la

**PROPOSITION 4.10.** — Soit  $\alpha \geq 0$  et  $L$  une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à (1.2), (1.3) et (1.5). On suppose que  $L$  est transversal sur  $\partial D$  et que l'hypothèse (H) est satisfaite. Alors, pour tout  $s \geq 5/2$ , l'opérateur  $\mathcal{C}(\alpha) : H^{s-3/2}(\partial D) \rightarrow H^{s-5/2}(\partial D)$  est d'indice zéro.

4) D'après le corollaire du théorème XI de [1], on obtient une variante du principe du maximum au bord :

**PROPOSITION 4.11.** — Soit  $L$  une condition aux limites de Ventcel' satisfaisant à (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5). On suppose que  $L$  est transversal sur  $\partial D$ . Pour tout  $\alpha > 0$ , on a alors :

$$u \in C^2(\bar{D}), \quad Lu(x') \geq 0 \quad \text{sur } \partial D$$

et

$$(\Delta - \alpha)u(x) \geq 0 \quad \text{dans } D \Rightarrow u(x) \leq 0 \quad \text{sur } \bar{D}.$$

*Fin de la démonstration du théorème 4.1.* — En vertu de la proposition 4.2 avec  $t = s - 1$ , il suffit de montrer que, si  $\alpha > 0$  et  $s \geq 3$ , l'opérateur  $\mathcal{C}(\alpha) : H^{s-3/2}(\partial D) \rightarrow H^{s-5/2}(\partial D)$  est bijectif. Pour cela, en remarquant que

$\mathcal{C}(\alpha)$  est d'indice zéro d'après la proposition 4.10, il suffit de montrer que l'opérateur est *injectif*.

Notons d'abord que, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 4.6, on voit d'après (4.7) que, si l'hypothèse (H) est satisfaite, l'opérateur pseudo-différentiel  $LH_\alpha$  est hypoelliptique pour tout  $\alpha \geq 0$  sur  $\partial D$ .

Supposons que  $\psi \in H^{s-3/2}(\partial D)$  et  $\mathcal{C}(\alpha)\psi = LH_\alpha\psi = 0$  ( $s \geq 3$  et  $\alpha > 0$ ). On en déduit que  $\psi$  est dans  $C^\infty(\partial D)$  d'après l'hypoellipticité de  $LH_\alpha$ ; donc aussi que  $w = H_\alpha\psi \in C^\infty(\bar{D})$  et  $w$  est une solution du problème (\*) avec  $f = 0$  et  $\varphi = 0$  d'après le corollaire 2.2. Par conséquent  $w = 0$  d'après la proposition 4.11, d'où  $\psi = w|_{\partial D} = 0$ , ce qui montre que  $\mathcal{C}(\alpha)$  est injectif.

Le théorème 4.1 est ainsi démontré.

## 5. Démonstration des théorèmes 2, 3 et 4 : cas du premier ordre.

5.1. *Démonstration du théorème 2.* — 1) Soit  $L_0$  une condition aux limites de la dérivée oblique :

$$L_0 u(x') = \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x') u(x') \quad (u \in C^2(\bar{D})).$$

On considère le problème aux limites suivant : pour deux fonctions  $f$  et  $\varphi$  définies dans  $D$  et sur  $\partial D$  respectivement, trouver une fonction  $u$  dans  $D$  telle que

$$(*)' \quad \begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & \text{dans } D, \\ (\lambda - L_0)u = \mu \left( -\frac{\partial u}{\partial n} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} (-\beta^i) \frac{\partial u}{\partial x_i} + (\lambda - \gamma)u|_{\partial D} = \varphi & \text{sur } \partial D, \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\lambda$  sont des nombres réels.

Pour  $g$  et  $h$  dans  $C^\infty(T^* \partial D)$ , on désigne par  $\{g, h\}$  le crochet de Poisson de  $g$  et  $h$  :

$$\{g, h\} = \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial \xi_i} \right).$$



D'après le théorème 1 de [12], on obtient le

LEMME 5.1. — Soit  $s \geq [n/2] + 4$ . On suppose :

(H.1)  $\mu(x') \geq 0$  et  $\gamma(x') \leq 0$  sur  $\partial D$ .

(B.1)  $\lambda > 0$ .

(C)<sub>s</sub>  $\lambda$  est assez grand pour que, en tout point  $x'$  de

$$M = \{x' \in \partial D ; \mu(x') = 0\},$$

$$(\lambda - \gamma(x')) + \frac{1}{2} \operatorname{div} \beta(x') - \frac{1}{2}(s-3/2) \{|\xi'|^2, \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \xi_i\} > 0$$

pour tout  $\xi' \in T_{x'}^* \partial D$  avec  $0 \leq |\xi'| \leq 1$ . Ici  $\operatorname{div} \beta$  est la divergence de  $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^{N-1})$  par rapport à la métrique  $(g_{ij}(x'))$  de  $\partial D$ .

Alors, pour tout  $\alpha > 0$ , le problème  $(*)'$  admet une solution unique  $u \in H^{s-1}(D)$  pour toutes  $f \in H^{s-2}(D)$  et  $\varphi \in H^{s-3/2}(\partial D)$ .

En effet, il suffit de remplacer  $\mathbf{R}^n, \Omega, \Gamma, \Gamma_0, \lambda, a, b, \alpha, v$  et  $\emptyset$  dans [12] par  $\mathbf{R}^N, D, \partial D, M, -\alpha, \mu, \lambda - \gamma, -\beta, -n$  et  $\varphi$  respectivement.

En remarquant que  $H^{s-1}(D) \subset C^2(\bar{D})$  d'après le lemme de Sobolev ( $s \geq [n/2] + 4$ ) et que  $C^\infty(\bar{D}) \subset H^{s-2}(D)$  et  $C^\infty(\partial D) \subset H^{s-3/2}(\partial D)$ , on obtient le

COROLLAIRE 5.2. — On suppose que l'hypothèse (H.1) est satisfaite. Il existe alors un nombre  $\lambda > 0$  tel que, pour tout  $\alpha > 0$ , le problème  $(*)'$  admette une solution unique  $u \in C^2(\bar{D})$  pour toutes  $f \in C^\infty(\bar{D})$  et  $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ .

2) Soit  $L$  une condition aux limites de Ventcel' du premier ordre satisfaisant à (1.2), (1.4) et (1.5).

$$Lu(x') = \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma(x') u(x') - \delta(x') \Delta u(x') \quad (u \in C^2(\bar{D})).$$

$$(1.2) \quad \mu(x') \geq 0 \quad \text{sur} \quad \partial D.$$

$$(1.4) \quad \gamma(x') \leq 0 \quad \text{sur} \quad \partial D.$$

$$(1.5) \quad \delta(x') \geq 0 \quad \text{sur} \quad \partial D.$$

Puisque  $C^\infty(\partial D)$  est dense dans  $C(\partial D)$ , en utilisant le théorème 5.1 de Sato-Ueno [8], on voit d'après le corollaire 5.2 avec  $f = 0$  que  $\overline{L_0 H_x}$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur  $\partial D$ ; donc aussi que

$\overline{LH_\alpha}$  ( $L = L_0 - \delta \Delta$ ) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur  $\partial D$  en vertu du lemme 6.4 de [8]. D'après le théorème 5.2 de [8], on en déduit que, si  $L$  est transversal sur  $\partial D$ , il existe un semi-groupe de Feller  $\{T_t\}_{t \geq 0}$  sur  $\bar{D}$ . De plus, d'après les lemmes 4.5 et 2.3 de [8], on a les propriétés i) et ii) du théorème 2 pour le générateur infinitésimal  $A$  de  $\{T_t\}$ .

5.2. *Démonstration du théorème 3.* — Il suffit de montrer que les hypothèses (I) et (II) du théorème 3.1 sont vérifiées. D'après le théorème 2 de [12], on obtient comme le corollaire 5.2 le

LEMME 5.3. — *On suppose :*

(H.1)  $\mu(x') \geq 0$  et  $\gamma(x') \leq 0$  sur  $\partial D$ .

(H.2) Il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que

$$\left| \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \xi_i \right| \leq C_0 \mu(x') |\xi'| \quad \text{sur } T^* \partial D.$$

(B.1)  $\lambda > 0$ .

Alors, pour tout  $\alpha > 0$ , le problème

$$\begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & \text{dans } D, \\ (\lambda - L_0)u = \mu \left( -\frac{\partial u}{\partial n} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} (-\beta^i) \frac{\partial u}{\partial x_i} + (\lambda - \gamma)u|_{\partial D} = \varphi & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

admet une solution unique  $u \in C^\infty(\bar{D})$  pour toutes  $f \in C^\infty(\bar{D})$  et  $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ .

On déduit du lemme 5.3 que l'hypothèse (I) du théorème 3.1 est vérifiée avec  $\lambda > 0$  et  $\delta_0 = \delta$ .

On va donc montrer que l'hypothèse (II) du même théorème est vérifiée. D'après (4.1) de [12], on sait que, pour tout  $\alpha \geq 0$  fixé, le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel  $-\overline{LH_\alpha}$  du premier ordre sur  $\partial D$  est donné par :

$$\begin{aligned} (5.1) \quad & \left[ \mu(x') |\xi'| + \sqrt{-1} \sum_{i=1}^{N-1} (-\beta^i(x')) \xi_i \right] \\ & + \left[ (-\gamma(x') + \alpha \delta(x')) + \frac{1}{2} \mu(x') \left( \frac{\omega_x(\hat{\xi}', \hat{\xi}')}{|\xi'|^2} - (N-1) M(x') \right) \right. \\ & \left. + \sqrt{-1} \mu(x') \left( \sqrt{\rho(x')} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (|\xi'|) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho(x')}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} (|\xi'|) \right) \right] \\ & + \text{des termes d'ordre } \leq -1 \text{ dépendant de } \alpha. \end{aligned}$$

Ici  $\omega_x(\cdot)$  est la deuxième forme fondamentale en un point  $x'$  de l'hypersurface  $\partial D \subset \mathbb{R}^N$ ,  $M(x')$  est la courbure moyenne en un point  $x'$  de  $\partial D$  et

$$\hat{\xi}' = (g^{1j}(x')\xi_j, g^{2j}(x')\xi_j, \dots, g^{N-1j}(x')\xi_j).$$

D'après (5.1), en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 5.1 de [12], on obtient le

LEMME 5.4. — Soit  $\alpha \geq 0$ . On suppose :

$$(A.1) \quad \mu(x') \geq 0 \quad \text{sur} \quad \partial D.$$

(H.2) Il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que

$$\left| \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \xi_i \right| \leq C_0 \mu(x') |\xi'| \quad \text{sur} \quad T^* \partial D.$$

$$(B.1) \quad -\gamma(x') + \alpha \delta(x') > 0 \quad \text{sur} \quad M = \{x' \in \partial D; \mu(x') = 0\}.$$

Alors  $LH_\alpha$  est hypoelliptique dans  $\partial D$ .

En effet, il suffit de remplacer  $\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma, \Gamma_0, \lambda, a, b, \alpha, v, T(\lambda)$  et  $\varphi$  dans [12] par  $\mathbb{R}^N, D, \partial D, M, -\alpha, \mu, -\gamma + \alpha \delta, -\beta, -n, LH_\alpha$  et  $\psi$  respectivement.

Puisque, si  $L$  est transversal sur  $\partial D$  (cf. (1.6)), l'hypothèse (B.1) du lemme 5.4 est satisfaite pour tout  $\alpha > 0$ , on déduit du lemme 5.4 que l'hypothèse (II) du théorème 3.1 est vérifiée d'après la remarque 3.2.

5.3. *Démonstration du théorème 4.* — D'après le théorème 2 de [11], on obtient un lemme analogue au lemme 5.3 :

LEMME 5.5. — On suppose :

$$(H.1) \quad \mu(x') \geq 0 \quad \text{et} \quad \gamma(x') \leq 0 \quad \text{sur} \quad \partial D.$$

(C.2) Le champ de vecteurs  $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^{N-1})$  sur  $\partial D$  est non nul sur  $M = \{x' \in \partial D; \mu(x') = 0\}$  et aucune courbe intégrale maximale de  $\beta$  n'est entièrement contenue dans  $M$ .

$$(B.1) \quad \lambda > 0.$$

Alors, pour tout  $\alpha > 0$ , le problème

$$\begin{cases} (\alpha - \Delta)u = f & \text{dans } D, \\ (\lambda - L_0)u = \mu \left( -\frac{\partial u}{\partial n} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} (-\beta^i) \frac{\partial u}{\partial x_i} + (\lambda - \gamma)u|_{\partial D} = \varphi & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

admet une solution unique  $u \in C^\infty(\bar{D})$  pour toutes  $f \in C^\infty(\bar{D})$  et  $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ .

De plus, on obtient un lemme analogue au lemme 5.4 :

LEMME 5.6. — *On suppose :*

$$(A.1) \quad \mu(x') \geq 0 \quad \text{sur} \quad \partial D.$$

(C.2) *Le champ de vecteurs  $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^{N-1})$  sur  $\partial D$  est non-nul sur  $M = \{x' \in \partial D; \mu(x') = 0\}$  et aucune courbe intégrale maximale de  $\beta$  n'est entièrement contenue dans  $M$ .*

Alors, pour tout  $\alpha \geq 0$ ,  $LH_\alpha$  est globalement hypoelliptique dans  $\partial D$ .

*Démonstration.* — D'après (5.1), en utilisant la théorie des opérateurs intégraux de Fourier à phases complexes de Melin-Sjöstrand [6] comme dans la démonstration du lemme 3.6 de [11], on voit que l'opérateur pseudo-différentiel  $LH_\alpha$  sur  $\partial D$  admet pour tout  $\alpha \geq 0$  une paramétrix bilatère  $E_\alpha$ , continue de  $H^s(\partial D)$  dans  $H^s(\partial D)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , au sens habituel :

$$LH_\alpha \cdot E_\alpha \equiv E_\alpha \cdot LH_\alpha \equiv I_{\mathcal{D}(\partial D)},$$

où  $A \equiv B$  si  $A - B$  est un opérateur régularisant. D'où en particulier l'hypoellipticité globale de  $LH_\alpha$ . c.q.f.d.

On déduit des lemmes 5.5 et 5.6 que les hypothèses (I) et (II) du théorème 3.1 sont vérifiées avec  $\lambda > 0$  et  $\delta_0 = \delta$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. M. BONY, P. COURRÈGE et P. PRIOURET, Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégral-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum, *Ann. Inst. Fourier*, vol. 18 (1968), 369-521.
- [2] D. FUJIWARA, On some homogeneous boundary value problems bounded below, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA*, vol. 17 (1970), 123-152.
- [3] L. HÖRMANDER, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, *Ann. of Math.*, vol. 83 (1966), 129-209.
- [4] L. HÖRMANDER, A class of hypoelliptic pseudo-differential operators with double characteristics, *Math. Ann.*, vol. 217 (1975), 165-188.
- [5] A. MELIN, Lower bounds for pseudo-differential operators, *Ark. för Mat.*, vol. 9 (1971), 117-140.
- [6] A. MELIN and J. SJÖSTRAND, Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem, *Comm. in P.D.E.*, vol. 1 (1976), 313-400.
- [7] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer Verlag, Berlin, 1955.

- [8] K. SATO et T. UENO, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 14 (1965), 529-605.
- [9] K. TAIRA, On non-homogeneous boundary value problems for elliptic differential operators, *Kôdai Math. Sem. Rep.*, vol. 25 (1973), 337-356.
- [10] K. TAIRA, Sur l'existence des processus de diffusion satisfaisant aux conditions aux limites de Ventcel', *C.R. Acad.*, t. 284, série A (1977), 1133-1136.
- [11] K. TAIRA, Sur le problème de la dérivée oblique I, *J. Math. pures et appl.*, vol. 57 (1978), 379-395.
- [12] K. TAIRA, Sur le problème de la dérivée oblique II, à paraître dans *Ark. för Mat.*
- [13] A. D. VENTCEL', O graničnykh uslovijakh dlja mnogomernykh diffuzionnykh processov, *Teor. Veroj. i Primen.*, t.4 (1959), 172-185; trad. anglaise dans *Theor. Prob. and Appl.*, t.4 (1959), 164-177.

Manuscrit reçu le 2 janvier 1979.

Kazuaki TAIRA,  
Département de Mathématiques  
Université de Paris Sud  
91405 Orsay.

Adresse courante :  
Institut de Mathématiques  
Université de Tsukuba  
300-31 Ibaraki (Japon).

---