

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROLAND GILLARD

**Unités cyclotomiques, unités semi-locales
et $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions. II**

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 4 (1979), p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_4_1_0

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNITÉS CYCLOTOMIQUES, UNITÉS SEMI-LOCALES ET $\mathbb{Z}_l$ -EXTENSIONS II

par Roland GILLARD

0. Introduction.

Dans un article très important ([13]), K. Iwasawa discute comment pourraient être démontrées par voie algébrique des formules de nombre de classes. Cet article l'amène à formuler certaines conjectures (non démontrées à l'heure actuelle). Les idées contenues dans cette théorie devaient se révéler fort fécondes : lien avec les lois de réciprocité explicites, rapport entre les formules du nombre de classes et le théorème de Stickelberger sur l'annulation du groupe des classes. Ce rapport s'explicite maintenant à l'aide des fonctions L l -adiques. La clef de voûte de l'article d'Iwasawa est un résultat que nous allons décrire plus en détail.

Soit l un nombre premier impair ; pour $n \in \mathbb{N}$, choisissons une racine de l'unité ζ_n d'ordre l^n . Considérons le groupe U_n des unités de $\mathbb{Q}_l(\zeta_{l^{n+1}})$, le groupe C_n des unités cyclotomiques de $\mathbb{Q}(\zeta_{l^{n+1}})$ et $\bar{C}_n$ la fermeture de C_n dans U_n . Prenons alors la limite projective Y_∞ des groupes $(U_n/\bar{C}_n)_{n \geq 0}$ pour les applications déduites des normes relatives. Désignons par ω le caractère canonique à valeurs dans $\mathbb{Z}_l$ donnant l'action de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_l)/\mathbb{Q})$ sur ζ_l . Le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ de la réunion des corps $\mathbb{Q}(\zeta_{l^n})$ contient un facteur direct Δ isomorphe à $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_l)/\mathbb{Q})$. En utilisant l'isomorphisme précédent on peut décomposer la l -partie de Y_∞ en facteurs directs $Y_\infty^{(i)}$, $0 \leq i < l-1$: sur le facteur $Y_\infty^{(i)}$, Δ opère suivant ω^i . Le résultat d'Iwasawa décrit le module galoisien $Y_\infty^{(i)}$ à l'aide de la « série de Stickelberger » liée à ω^i ; rappelons que cette série permet de reconstruire la fonction L l -adique, cf. [15], chap. 6.

Soient K/Q une extension abélienne réelle et l un nombre premier, premier au degré $[K : Q]$. Le but de cet article est de démontrer pour la Z_l -extension K_∞ de K , un résultat analogue à celui d'Iwasawa (ci-dessous théorème 1). Les groupes U_n doivent être remplacés par des groupes d'unités « semi-locales ». Par rapport à mon précédent travail ([8]), le gain est notamment de remplacer une égalité sur l'ordre de deux groupes, cf. ci-dessous lemme 5, par un isomorphisme ou une suite exacte, cf. ci-dessous théorème 2. La méthode suivie ici est une adaptation convenable de celle de J. Coates et A. Wiles ([4], cf. aussi [16]) qui repose sur l'emploi des dérivées logarithmiques. L'objet du § 6 est de montrer que, comme dans le cas de $Q(\zeta_l)$, le résultat précédent a des conséquences sur les groupes de classes : si L_∞ désigne la l -extension abélienne non ramifiée maximale de K_∞ , il permet de traduire la conjecture de R. Greenberg, [10] (intermédiaire entre la conjecture principale de [2], § 5.1 et celle de Coates et Lichtenbaum, [3] conj. 2.3) portant sur la partie *imaginaire* de $\text{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ en un énoncé portant sur la partie *réelle* : énoncé qui est une version « à la limite projective » de la conjecture de G. Gras (cf. [8], § 6.1 conjecture 1).

1. Notations et résultats.

Soient K/Q une extension abélienne, Δ son groupe de Galois et l un nombre premier, premier à $[K : Q]$. Désignons par K_∞ (resp. Q_∞) la Z_l -extension de K (resp. de Q) : on a $K_\infty = K \cdot Q_\infty$. Soient S l'ensemble fini des places de K_∞ au-dessus de l et v un élément de S , fixé dans toute la suite. Pour chaque n dans N , soit K_n le sous-corps de K_∞ avec $[K_n : K] = l^n$. Pour w dans S , notons K_n^w le complété de K_n correspondant, $\mathcal{O}_n^w$ l'anneau des entiers de K_n^w et U_n^w l'ensemble des x de $\mathcal{O}_n^w$ congrus à 1 modulo l'idéal maximal. Posons

$$(1) \quad \hat{K}_n = \prod_{w \in S} K_n^w, \quad \hat{\mathcal{O}}_n = \prod_{w \in S} \mathcal{O}_n^w, \quad U_n = \prod_{w \in S} U_n^w.$$

Désignons par C_n le groupe des unités cyclotomiques de K_n (au sens de Hasse, i.e. celui noté C^1 dans [9], § 2.1, cf. aussi ci-dessous § 4). Considérons l'intersection de U_n et de l'image de C_n par l'application diagonale $K_n \rightarrow \hat{K}_n$ et notons $\bar{C}_n$ sa fermeture dans U_n , muni de la topologie produit. Posons

$$U = \varprojlim U_n, \quad C = \varprojlim \bar{C}_n,$$

les applications de transition étant les normes, provenant de $N_{m,n} : K_m \rightarrow K_n$, pour $m \geq n$, par complétion. Ceci a un sens pour C puisque $N_{m,n}(C_m)$ est inclus dans C_n , cf. [9] formule (12).

Soient Φ un caractère de Δ , non trivial, défini et irréductible sur $\mathbf{Q}_l$ et e_Φ l'idempotent de $Z_l[\Delta]$ correspondant

$$e_\Phi = \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma \in \Delta} \Phi(\sigma^{-1}) \cdot \sigma.$$

Fixons une clôture algébrique Ω_l de $\mathbf{Q}_l$ et choisissons un facteur ψ , défini et irréductible sur Ω_l , de la décomposition de Φ sur Ω_l . On sait qu'en prolongeant ψ à $Z_l[\Delta]$, on obtient un isomorphisme

$$(2) \quad e_\Phi Z_l[\Delta] \simeq A,$$

où A désigne le sous-anneau de Ω_l engendré par l'image de ψ . Désignons par $f(T, \psi)$ la série de Stickelberger, c'est-à-dire l'élément de $A[[T]]$ construit dans [15] chap. 6, pour le caractère de Dirichlet primitif à valeurs dans Ω_l et correspondant à ψ . Soient f' le conducteur de ψ et q_0 le plus petit commun multiple de f' et q , où $q = l$ ($q=4$ si $l=2$). Pour m dans $\mathbf{N}$, désignons par ζ_m une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité (avec $\zeta_{mm'} = \zeta_m$). Posons (*) $c = 1 + q_0$ et considérons l'automorphisme de $\cup K(\zeta_n)/K(\zeta_l)$ envoyant ζ_n sur ζ_n^c (pour tout n), et notons γ sa restriction à K_∞ : γ est un générateur topologique de $\Gamma = \text{Gal}(K_\infty/K)$. En identifiant γ à la série $1 + T$, on munit les groupes U et C de structures de $Z_l[[T]]$ -modules. De plus, en identifiant Δ et $\text{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q}_\infty)$, ce sont aussi des $Z_l[\Delta]$ -modules. D'après (2), on peut donc considérer $e_\Phi U$ et $e_\Phi C$ comme des $A[[T]]$ -modules.

Pour a unité dans Z_l , soit $\omega(a)$ la racine de 1 congrue à a modulo q : ω définit un caractère de Dirichlet de conducteur q . Pour n dans $\mathbf{Z}$, on note ψ_n le caractère de Dirichlet primitif correspondant à $\psi \cdot \omega^{-n}$, ψ étant identifié à un caractère de Dirichlet primitif. Ainsi, il existe un seul entier, noté i dans la suite, avec $0 \leq i \leq l-2$ ($i=0$ si $l=2$) et tel que le conducteur f de ψ_i soit premier à l . Désignons par $\hat{T}$ la série $c(1+T)^{-1} - 1$.

L'énoncé des théorèmes suivants suppose que K est une extension réelle de $\mathbf{Q}$.

(*) Ceci permet de rappeler la formule $\frac{1}{2} L_l(s, \psi) = f(c^s - 1, \psi)$ reliant $f(T, \psi)$ aux valeurs de la fonction L l -adique évaluée en $s \in \mathbf{Z}_l$.

THÉOREME 1. — *Le $A[[T]]$ -module $e_\Phi(U/C)$ est isomorphe à $A[[T]]/(f(\dot{T}, \psi))$ si $\psi_1(l) \neq 1$ et figure dans une suite exacte si $\psi_1(l) = 1$:*

$$0 \rightarrow A[[T]]/(\dot{T}) \rightarrow e_\Phi(U/C) \rightarrow A[[T]]/(f(\dot{T}, \psi)/\dot{T}) \rightarrow 0.$$

Pour n dans $\mathbf{N}$, notons ω_n la série $(1+T)^n - 1$ et μ_n le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ; ainsi, μ_{q^n} est isomorphe à $\mathbf{Z}_l[[T]]/(\dot{T}, \omega_n)$.

THÉOREME 2. — *Le A -module $e_\Phi(U_n/\bar{C}_n)$ est isomorphe à $A[T]/(\omega_n f(\dot{T}, \psi))$ si $\psi(l)$ et $\psi_1(l)$ sont $\neq 1$; il figure dans une suite exacte*

$$0 \rightarrow A[[T]]/(\omega_n, 2\omega_n/T, f(\dot{T}, \psi)) \rightarrow e_\Phi(U_n/\bar{C}_n) \rightarrow A/\left(\frac{1}{2}f(c-1, \psi)\right) \rightarrow 0,$$

si $\psi(l) = 1$ et

$$0 \rightarrow A \otimes_{\mathbf{Z}_l} \mu_{q^n} \rightarrow e_\Phi(U_n/\bar{C}_n) \rightarrow A[[T]]/(\omega_n, f(\dot{T}, \psi)/\dot{T}) \rightarrow 0$$

si $\psi_1(l) = 1$.

2. Structure de $e_\Phi U$.

Le but des § 2.1 et 2.2 est la démonstration du résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Le $A[[T]]$ -module $e_\Phi U$ est isomorphe à $A[[T]] \oplus (A[[T]]/(\dot{T}))$ si $\psi_1(l) = 1$, et à $A[[T]]$ sinon.*

2.1. Réduction à $U^v = \varprojlim U_n^v$. Soient D le groupe de décomposition de l dans $K/\mathbf{Q}$, ψ_D la restriction de ψ à D , Φ_D la somme des conjugués de ψ_D sur $\mathbf{Q}_l$ et A_D le sous-anneau de A engendré par l'image de ψ_D . On a alors un isomorphisme de $\mathbf{Z}_l[\text{Gal}(K_n/\mathbf{Q})]$ -modules

$$(3) \quad U_n \simeq U_n^v \otimes_{\mathbf{Z}_l[D]} \mathbf{Z}_l[\Delta],$$

d'où, en utilisant (2) et un isomorphisme analogue avec D et Φ_D ,

$$e_\Phi U_n \simeq e_{\Phi_D} U_n^v \otimes_{A_D} A.$$

On en déduit donc en passant à la limite

$$(4) \quad e_\Phi U \simeq e_{\Phi_D} U^v \otimes_{A_D} A,$$

puisque A est un A_D -module libre. De plus dire que $\psi(l) = 1$ (resp. $\psi_1(l) = 1$) revient à dire que ψ_D est trivial (resp. est égal à la restriction de ω , considéré comme caractère de $\text{Gal}(K_0^v/\mathbf{Q}_l) \simeq D$) et que $i = 0$ (resp. $i = 1$).

Remarque. — Désignons par F_n le sous-corps de K_n fixé par le noyau de ψ dans Δ (via l'isomorphisme $\Delta \simeq \text{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$). A l'aide de (4), on voit facilement que $e_\Phi U_n$ n'est pas modifié lorsqu'on remplace K_n par F_n , dans toutes les définitions faites. Ceci permet de supposer que K contient ζ_l , en imposant que Φ soit pair (i.e. $\psi(-1) = 1$), ce que nous ferons désormais.

2.2. Étude de $e_{\Phi_D} U^v$ (je remercie J.-P. Wintenberger pour ses explications sur ce point). Soient $X_n = (K_n^v)^*$ et $\hat{X}_n$ son complété l -adique : $\hat{X}_n = \varprojlim X_n/l^m \cdot X_n$; on a donc, toujours avec des notations additives, une suite exacte

$$0 \rightarrow U_n^v \rightarrow \hat{X}_n \rightarrow \mathbb{Z}_l \rightarrow 0.$$

Pour $m \geq n$, la norme induit une application $\hat{X}_m \rightarrow \hat{X}_n$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & U_m^v & \rightarrow & \hat{X}_m & \rightarrow & \mathbb{Z}_l \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & U_n^v & \rightarrow & \hat{X}_n & \rightarrow & \mathbb{Z}_l \rightarrow 0, \end{array}$$

d'où à la limite, en posant $\hat{X} = \varprojlim \hat{X}_n$,

$$(5) \quad 0 \rightarrow U^v \rightarrow \hat{X} \rightarrow \mathbb{Z}_l \rightarrow 0.$$

La structure de $e_{\Phi_D} \hat{X}$ s'obtient par un raisonnement analogue à [14], théorème 25 :

- a) $e_{\Phi_D} \hat{X} \simeq A_D[[T]]$ si ψ_D n'est ni trivial ni égal à la restriction de ω à D ,
- (6) b) $e_{\Phi_D} \hat{X} \simeq \mathbb{Z}_l[[T]] \oplus \mathbb{Z}_l[[T]]/(\dot{T})$ si ψ_D est égal à la restriction de ω à D ,
- c) $e_{\Phi_D} \hat{X} \simeq (2, T)\mathbb{Z}_l[[T]]$ si ψ_D est trivial.

Dans les cas a) et b), on a $e_{\Phi_D} U^v = e_{\Phi_D} \hat{X}$ d'après (5). Dans le cas c), en considérant la valuation, on voit que $e_{\Phi_D} U^v$ s'identifie via l'isomorphisme (6) à $T \cdot \mathbb{Z}_l[[T]] \simeq A_D[[T]]$. La proposition 1 résulte alors de (4).

2.3. Soit V_n (resp. V_n^v) l'intersection des images des U_m (resp. des U_m^v) pour $m \geq n$ pour les applications déduites des $N_{m,n}$.

PROPOSITION 2. — Pour n dans $\mathbb{N}$, on a $e_\Phi V_n \simeq e_\Phi [U/(\omega_n, 2\omega_n/T) \cdot U]$ si $\psi(l) = 1$ et $e_\Phi U_n = e_\Phi V_n \simeq e_\Phi [U/\omega_n \cdot U]$ sinon.

Démonstration. — D'après les considérations de 2.1, on peut se ramener à $e_{\Phi_D} V_n^v$. Soit alors $\hat{X}'_n$ l'intersection des images des $\hat{X}_m$ pour $m \geq n$ pour les applications déduites des $N_{m,n}$. On peut montrer, par exemple en considérant des quotients de Herbrand, que $\hat{X}'_n$ est isomorphe à $\hat{X}/\omega_n \hat{X}$. Compte tenu de (4) et (5), ceci prouve la proposition 2 si ψ_D est non trivial (i.e. $\psi(l) \neq 1$). Si ψ_D est trivial $e_{\Phi_D} U^v$ s'identifie par l'isomorphisme (6) à $T.Z_l[[T]]$: l'application $e_{\Phi_D} U^v \rightarrow V_n^v$ est surjective ; son noyau égal à $e_{\Phi_D} \cdot \omega_n \hat{X}$, correspond à $(2\omega_n T\omega_n)Z_l[[T]]$ donc est encore égal à $e_{\Phi_D}(2\omega_n/T, \omega_n)U^v$. La proposition 2 en découle encore d'après (4).

3. Semi-localisation de la méthode de [16], chap. 7.

3.1. Désignons par K_{-1}/Q la sous-extension non ramifiée en l , maximale de K/Q ; soit Δ_{-1} son groupe de Galois. On étend (1) au cas $n = -1$, avec des définitions analogues. Notons que pour tout $n \geq 0$ et tout w , K_n^w est l'extension composée des deux extensions (*) K_{-1}^w et $Q_l(\zeta_{q^n})$, linéairement disjointes sur Q_l . La place v définit un plongement φ de K_n dans Ω_l . On prolonge φ à $\hat{\mathcal{O}}_n$, puis à $\hat{K}_n$, en considérant $\hat{\mathcal{O}}_n$ comme le complété l -adique de $\mathcal{O}_n$. De même l'action de Δ sur $\hat{K}_n$ provient du prolongement de celle sur K_n (via $\Delta \simeq \text{Gal}(K_\infty/Q_\infty)$) ; soit s l'automorphisme de Frobenius de l dans $K/Q(\zeta_l)$; c'est un élément de Δ dont l'action sur $\hat{K}_n$ provient de celle sur chaque K_n^w .

Pour chaque w , $\pi_n = \zeta_{q^n} - 1$ est une uniformisante de K_n^w . On a l'égalité $(1 + \pi_{n+1})^l = 1 + \pi_n$. D'après [5], pour tout élément $x^v = (x_n^v)$ de U^v , il existe une série formelle $f^v(T)$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{-1}^v$ telle que

$$s^n(x_n^v) = f^v(\pi_n) \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

En utilisant les décompositions (1), on en déduit que pour tout élément $x = (x_n)$ de U , il existe une série formelle $f(T)$ à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}}_{-1}$, telle que

$$(7) \quad s^n(x_n) = f(\pi_n) \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

Pour σ élément de Δ , soit $f_\sigma(T)$ la série déduite de $f(T)$ par l'action de σ sur ses coefficients. Avec ψ et i comme au § 1, on pose pour $k \equiv i \pmod{(l-1) \pmod{2} \text{ si } l=2}$

$$(8) \quad \delta_k(x) = \sum_{\sigma \in \Delta_{-1}} \psi_i(\sigma)^{-1} \cdot \varphi \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^k \log f_\sigma(e^z - 1) \right),$$

(*) Si $l = 2$, il faut remplacer K_n^w par $K_n^w(\sqrt{-1})$ au § 3.1.

comparer à [16], chap. 7, § 4. Ainsi $\delta_k(x)$ appartient à l'anneau A' de Ω_ℓ engendré par $\varphi(\mathcal{O}_{-1}^v)$ et A .

Comme de (7), on déduit $s^n \gamma(x_n) = f(\zeta_{q^n}^c - 1)$, on voit que $\gamma(x)$ est représenté par la série $f((1+T)^c - 1)$, ce qui correspond à un changement de z en cz , d'où

$$\delta_k(\gamma(x)) = c^k \delta_k(x).$$

En supposant g dans $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$ on en déduit par linéarité et continuité que

$$\delta_k(g \cdot x) = g(c^k - 1) \cdot \delta_k(x).$$

En identifiant les caractères de Δ aux caractères de Dirichlet correspondants, pour τ dans Δ , on a

$$s^n \cdot \tau(x_n) = f_\tau(\zeta_{q^n}^{\omega(\tau)} - 1),$$

d'où en raisonnant comme plus haut

$$\delta_k(\tau(x)) = \sum \psi_i(\sigma)^{-1} \omega(\tau)^k \varphi \left(\left(\frac{d}{dz} \right)_{z=0}^k \log f_{\sigma\tau}(e^z - 1) \right),$$

c'est-à-dire encore $\delta_k(\tau(x)) = \psi_{i-k}(\tau) \delta_k(x)$. Si x est dans $e_\Phi U$ et si k vérifie $k \equiv i \pmod{(l-1) \pmod{2} \text{ si } l=2}$, d'après la définition de l'action de $A[[T]]$ sur $e_\Phi U$, cf. (2), pour g appartenant à $A[[T]]$, on a

$$(9) \quad \delta_k(g \cdot x) = g(c^k - 1) \cdot \delta_k(x).$$

3.2. PROPOSITION 3. — *Pour tout élément x de $e_\Phi U$, il existe une série G_x , à coefficients dans A' telle que*

$$(1 - l^{k-1} \psi_i(l)) \cdot \delta_k(x) = G_x(c^k - 1),$$

pour tout k entier > 0 vérifiant $k \equiv i \pmod{(l-1) \pmod{2} \text{ si } l=2}$.

Démonstration. — La série $F(T) = \left(\frac{d}{dz} \right) \log f(T)$, avec $T = e^z - 1$, étant à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}}_{-1}$, il existe une mesure sur $\mathbf{Z}_\ell$, à valeurs dans $\hat{\mathcal{O}}_{-1}$, cf. [16], chap. 4 telle que

$$\left(\frac{d}{dz} \right)_{z=0}^k F(e^z - 1) = \int_{\mathbf{Z}_\ell} t^k \mu(t),$$

pour k entier ≥ 0 , d'où encore (loc. cit. Meas. 4)

$$(10) \quad \left(\frac{d}{dz} \right)_{z=0}^k \tilde{F}(e^z - 1) = \int_{\mathbf{Z}_\ell^*} t^k \mu(t),$$

avec $\tilde{F}(T) = F(T) - \frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} F(\zeta_l^j(1+T)-1)$. Mais pour tout n , on a

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{l-1} f(\zeta_l^j(1+\pi_{n+1})-1) &= N_{n+1,n}(f(\pi_{n+1})) = N_{n+1,n}(x_{n+1}^{s^{n+1}}) \\ &= x_n^{s^{n+1}} = f_s(\pi_n), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\tilde{F}(T) = F(T) - F_s((1+T)^l - 1).$$

On déduit alors de (10), cf. [16] démonstration du théorème 4.2 du chap. 7, qu'il existe une série G_x^1 à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}}_{-1}$ telle que pour $k > 0$,

$$\left(\frac{d}{dz}\right)_{z=0}^k \left[\log f(e^z - 1) - \frac{1}{l} \log f_s(e^{lz} - 1) \right] = G_x^1(c^k - 1).$$

On peut donc prendre

$$G_x = \sum_{\sigma \in \Delta_{-1}} \psi_i(\sigma)^{-1} \varphi_\sigma(G_x^1),$$

où $\varphi_\sigma(G_x^1)$ désigne la série de $A'[[T]]$, obtenue en faisant σ puis φ sur chacun des coefficients de G_x^1 . Dégageons maintenant quelques propriétés de G_x .

LEMME 1. — Si g appartient à $A[[T]]$, on a $G_{gx} = g \cdot G_x$.

Démonstration. — Les valeurs des deux séries du lemme sont égales si $T = c^k - 1$ pour tout $k > 0$, $k \equiv i \pmod{l-1}$ ($\pmod{2}$ si $l=2$).

LEMME 2. — Si x est dans la partie de $A[[T]]$ -torsion de $e_\Phi U$, G_x est nulle.

Démonstration. — Ceci résulte immédiatement du lemme 1 puisque l'anneau $A'[[T]]$ est intègre.

LEMME 3. — Fixons un épimorphisme $\Lambda_\Phi : e_\Phi U \rightarrow A[[T]]$ de $A[[T]]$ -modules dont le noyau est la partie de torsion de $e_\Phi U$, cf. prop. 1 ; alors il existe une série G_Φ de $A'[[T]]$ telle que l'on ait pour tout x dans $e_\Phi U$

$$(11) \quad G_x = G_\Phi \cdot \Lambda_\Phi(x).$$

Démonstration. — Soit x_1 une image réciproque par Λ_Φ de l'unité de $A[[T]]$, de sorte qu'on a la décomposition

$$e_\Phi U = A[[T]].x_1 \oplus \text{Ker } \Lambda_\Phi;$$

le lemme 3 résulte des deux lemmes précédents en prenant $G_\Phi = G_{x_1}$.

4. Unités cyclotomiques.

4.1. Soient $F/\mathbb{Q}$ une extension abélienne (réelle sinon remplacer F dans les définitions suivantes par son sous-corps réel maximal) de conducteur m et u un élément de l'idéal d'augmentation de l'anneau $\mathbb{Z}[\text{Gal}(F/\mathbb{Q})]$; en prolongeant l'action de $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ par multiplicativité, on vérifie que l'élément $N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/F}(1 - \zeta_m)^u$ est le carré d'une unité de F . Le groupe des *unités cyclotomiques (*) propres* de F est formé des racines carrées des éléments précédents pour toutes les valeurs possibles de u . Le groupe des *unités cyclotomiques (*)* de F est le groupe engendré par les groupes d'unités cyclotomiques propres des sous-corps de F . Désignons par Ω_n le groupe des unités cyclotomiques propres de F_n (le sous-corps de K_n fixé par $\ker \psi$). Considérons l'intersection de U_n et de l'image de Ω_n dans $\hat{K}_n$ et notons $\bar{\Omega}_n$ sa fermeture dans U_n . On montre facilement que $e_\Phi \bar{C}_n$ est égal à $e_\Phi(\bar{\Omega}_n \cdot \bar{\Omega}_0)$, cf. notamment [9], § 5 et § 3 formule (9) et même à $e_\Phi \bar{\Omega}_n$ si $\psi(l) \neq 1$. De plus la norme induit des surjections $e_\Phi \bar{\Omega}_m \rightarrow e_\Phi \bar{\Omega}_n$ pour $m > n > 0$; ceci montre que $e_\Phi C$ s'identifie à la limite projective des groupes $e_\Phi \bar{\Omega}_n$. À l'aide de [9] § 3 (9), on voit que le $A[[T]]$ -module $e_\Phi \bar{\Omega}_n$ s'identifie si $\psi(l) \neq 1$ à

$$A[[T]]/(\omega_n) \simeq \hat{A}[\text{Gal}(K_n/K_0)]$$

et si $\psi(l) = 1$ à l'idéal d'augmentation de $A[\text{Gal}(K_n/K_0)]$, encore isomorphe à $A[[T]]/(\omega_n/T)$. On en déduit les isomorphismes

$$(12) \quad e_\Phi C \simeq A[[T]], \quad \begin{cases} e_\Phi \bar{\Omega}_n \simeq e_\Phi(C/(\omega_n)C) & \text{si } \psi(l) \neq 1 \\ e_\Phi \bar{\Omega}_n \simeq e_\Phi(C/(\omega_n/T)C) & \text{si } \psi(l) = 1 \end{cases}$$

4.2. Soit r l'ordre commun du groupe multiplicatif des corps résiduels des F_n , l'élément de $\hat{K}_n$ $\theta_n(\Phi) = N_{\mathbb{Q}(\zeta_{q_0^n})/F_n}(1 - \zeta_f \cdot \zeta_{q_0^n})^{s^{-n} r \cdot e_\Phi/2}$ est dans $\bar{\Omega}_n$; de plus la famille de ces éléments, pour $n \geq 1$, définit un élément $\theta(\Phi)$, générateur du $A[[T]]$ -module $e_\Phi C$. Par ailleurs, on a

$$\theta_n(\Phi)^{2s^n} = f_\Phi(T)^{r \cdot e_\Phi}|_{T=\pi_n}$$

(*) Au sens de H. HASSE, cf. [9], § 2.3.

avec $f_\Phi(T) = \prod (1 - \zeta_f^\sigma (1+T)^{\alpha(\sigma)})$ où σ parcourt $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{q_0})/F_0)$. Ceci permet de calculer $\delta_k(\theta(\Phi))$:

$$\delta_k(\theta(\Phi)) = (R/2) \sum_{a=1}^f \psi_i(a)^{-1} \varphi \left(\left(\frac{d}{dz} \right)_{z=0}^k \log(1 - \zeta_f^a (1+T)) \right)$$

où R est un entier indépendant de k , premier à l si $l \neq 2$. D'où encore

$$\delta_k(\theta(\Phi)) = (R/2) \left(\frac{d}{dz} \right)_{z=0}^{k-1} \sum_{a=1}^f \psi_i(a)^{-1} \frac{\zeta_f^a \cdot e^z}{\zeta_f^a e^z - 1}.$$

Utilisant l'identité $1/(U-1) = \sum_0^{f-1} U^j/(U^f-1)$, on trouve, en introduisant

la somme de Gauss $\tau(\psi_i) = \sum_{a=1}^f \zeta_f^a \psi_i(a)^{-1}$,

$$\delta_k(\theta(\Phi)) = (R/2) \cdot \tau(\psi_i) \cdot \left(\frac{d}{dz} \right)_{z=0}^{k-1} \sum_{j=1}^f \frac{e^{jz} \psi_i(j)}{e^{fz} - 1} = (\tau(\psi_i) R/2) \cdot \frac{B_k, \psi_i}{k}.$$

Avec la série de Stickelberger $f(T, \psi)$, cf. [15], la proposition 3 donne

$$(13) \quad G_{\theta(\Phi)}(T) = -R \cdot \tau(\psi_i) \cdot f(\dot{T}, \psi).$$

Nous sommes en mesure de prouver la version affaiblie suivante du théorème 1 :

THÉORÈME 1'. — *Il existe un diviseur $f'(T, \psi)$ de $f(T, \psi)$ dans $A[[T]]$ tel que le $A[[T]]$ -module $e_\Phi(U/C)$ soit isomorphe à $A[[T]]/(f'(\dot{T}, \psi))$ si $\psi_1(l) \neq 1$, ou figure dans une suite exacte*

$$0 \rightarrow A[[T]]/(\dot{T}) \rightarrow e_\Phi(U/C) \rightarrow A[[T]]/(f'(\dot{T}, \psi)) \rightarrow 0$$

si $\psi_1(l) = 1$.

Démonstration. — D'après la proposition 1 et les lemmes 1 et 2, on a l'isomorphisme ou la suite exacte comme dans l'énoncé précédent en posant $f'(\dot{T}, \psi) = \Lambda_\Phi(\theta(\Phi))$. Pour évaluer $f'(\dot{T}, \psi)$, on utilise le lemme 3 ; ainsi $f'(\dot{T}, \psi)$ divise $G_{\theta(\Phi)}(T)$. Le conducteur de ψ_i étant premier à l , $R \cdot \tau(\psi_i)$ est une unité de A' si $l \neq 2$ et $f'(T, \psi)$ divise $f(T, \psi)$. Ce résultat est encore vrai si $l = 2$, cf. [6], § 2.8.

5. Démonstration des théorèmes 1 et 2.

5.1. Démontrons d'abord une version affaiblie du théorème 2. Soit $\mathcal{C}$ la partie de torsion de U_0 .

THÉORÈME 2'. — Le A -module $e_\Phi(U_n/\bar{C}_n)$ est isomorphe à

$$A[[T]]/(\omega_n, f'(\dot{T}, \psi))$$

si $\psi(l)$ et $\psi_1(l)$ sont $\neq 1$. Il figure dans la suite exacte

$$0 \rightarrow A[[T]]/(2\omega_n/T, \omega_n, f'(\dot{T}, \psi)) \rightarrow e_\Phi(U_n/\bar{C}_n) \rightarrow e_\Phi(U_0/\mathcal{C} \cdot \bar{C}_0) \rightarrow 0$$

si $\psi(l) = 1$ et

$$0 \rightarrow A[[T]]/(\omega_n, \dot{T}) \rightarrow e_\Phi(U_n/\bar{C}_n) \rightarrow A[[T]]/(\omega_n, f'(\dot{T}, \psi)) \rightarrow 0$$

si $\psi_1(l) = 1$.

Démontrons d'abord le lemme :

LEMME 4. — Pour tout $n \geq 1$, on a un isomorphisme

$$e_\Phi(V_n/\bar{\Omega}_n) \simeq e_\Phi((U/C)/\mathcal{J}_n(U/C))$$

où $\mathcal{J}_n = (\omega_n)$ si $\psi(l) \neq 1$ et $(2\omega_n/T, \omega_n)$ si $\psi(l) = 1$.

Démonstration. — D'après la proposition 2, on a une surjection de $e_\Phi V_n$ dans $e_\Phi((U/C)/\mathcal{J}_n(U/C))$, dont le noyau est l'image de C dans $e_\Phi V_n$. On sait de plus que $e_\Phi C$ est la limite projective des $e_\Phi \bar{\Omega}_m$. Comme les applications de passage $e_\Phi \bar{\Omega}_{m+1} \rightarrow e_\Phi \bar{\Omega}_m$ sont surjectives pour $m \geq 1$, le lemme en résulte.

Le théorème 2' résulte du théorème 1' si $\psi(l) \neq 1$ et $\psi_1(l) \neq 1$.

Si $\psi(l) = 1$, on déduit du lemme 4 la suite exacte

$$(14) \quad 0 \rightarrow e_\Phi[(U/C)/\mathcal{J}_n(U/C)] \rightarrow e_\Phi(U_n/\bar{C}_n) \rightarrow e_\Phi(U_n/V_n \cdot \bar{C}_n) \rightarrow 0.$$

On vérifie facilement (comparer à [2], appendice, lemmes 2 et 3) que $e_\Phi V_n$ s'identifie au noyau de l'application $e_\Phi U_n \rightarrow e_\Phi(U_0/\mathcal{C})$ déduite de la norme, et que l'image de cette application est $e_\Phi(U_0^m/\mathcal{C}/\mathcal{C})$. De même, l'image de $e_\Phi \bar{C}_n = e_\Phi(\bar{\Omega}_n \cdot \bar{\Omega}_0)$ est encore l'image de $e_\Phi \bar{\Omega}_0^m = e_\Phi \bar{C}_0^m$ dans $e_\Phi(U_0/\mathcal{C})$. Le groupe de droite dans (14) est donc isomorphe à $e_\Phi(U_0/\mathcal{C} \cdot \bar{C}_0)$ si $n > 0$. Si $n = 0$, la suite exacte du théorème 2' se réduit à

$$0 \rightarrow e_\Phi(\mathcal{C}) \rightarrow e_\Phi(U_0/\bar{C}_0) \rightarrow e_\Phi(U_0/\mathcal{C} \cdot \bar{C}_0) \rightarrow 0,$$

la série $f'(\dot{T}, \psi)$ étant non inversible, d'après le cas $n > 0$, cf. aussi [12].

Si $\psi_1(l) = 1$, on applique le lemme du serpent au diagramme constitué par la suite exacte du théorème 1' écrite deux fois. On utilise aussi le fait que

dans $A[[T]]/(f'(\tilde{T}, \psi))$ la multiplication par ω_n est injective puisque le quotient $A[[T]]/(f'(\tilde{T}, \psi), \omega_n)$ est fini, ce qui se déduit du lemme suivant.

LEMME 5. — *L'ordre du groupe $e_\Phi(U_n/\bar{C}_n)$ est égal à celui de*

$$A[[T]]/(f(\tilde{T}, \psi), \omega_n).$$

Démonstration. — Ceci n'est qu'une reformulation de [8], théorème 2, compte tenu des calculs de [8], §6.3.

5.2. Nous pouvons maintenant prouver les théorèmes 1 et 2. Prenons $f'(T, \psi)$ comme dans le théorème 1' : c'est un diviseur de $f(T, \psi)$ qui d'après le lemme 5 et le théorème 2' a mêmes invariants λ et μ (cf. [15], chap. 7) qu'elle si $\psi_1(l) \neq 1$. Leur quotient est donc une unité de $A[[T]]$, ce qui démontre les théorèmes 1 et 2 à partir des théorèmes 1' et 2' dans ce cas. On sait en effet que si $\psi(l) = 1$, le A -module $e_\Phi(U_0/\bar{C}_0)$ est monogène ; son ordre est le même que $A/\left(\frac{1}{2}f(c-1, \psi)\right)$ d'après le lemme 5 appliqué à $n = 0$.

Si $\psi_1(l) = 1$, on sait seulement, d'après le lemme 5 et le théorème 2', que la différence des invariants λ des séries $f(T, \psi)$ et $f'(T, \psi)$ est égale à 1 : leur quotient est donc, à une unité de $A[[T]]$ près, un polynôme unitaire de degré 1. Par ailleurs, on déduit de la proposition 3 et de la construction de G_Φ (cf. démonstration du lemme 3) la nullité de $G_\Phi(c-1)$. On voit alors, en utilisant (11) et (13) que le quotient $f(\tilde{T}, \psi)/f'(\tilde{T}, \psi)$ s'annule pour $T = c - 1$, i.e. $\tilde{T} = 0$. Ainsi $f(\tilde{T}, \psi)$ ne diffère de $\tilde{T} \cdot f'(\tilde{T}, \psi)$ que par une unité de $A[[T]]$, ce qui achève la démonstration des théorèmes 1 et 2 à partir des théorèmes 1' et 2' lorsque $\psi_1(l) = 1$.

6. Application aux groupes de classes.

Désignons par M_∞ (resp. L_∞) la l -extension non ramifiée pour les places finies ou infinies premières à l (resp. pour toutes les places) maximale de K_∞ . On se restreint (*) au cas $l \neq 2$ et on suppose toujours que ζ_l appartient à K et que Φ est pair. On note $\tilde{\Phi}$ (resp. $\tilde{\Psi}$) le caractère de Δ défini et irréductible sur $\mathbf{Q}_l$ (resp. Ω_l) donné par $\sigma \rightarrow \omega(\sigma)\Phi(\sigma^{-1})$ (resp. $\sigma \rightarrow \omega(\sigma)\psi(\sigma^{-1})$) ; l'isomorphisme (2) est encore valable en remplaçant Φ par $\tilde{\Phi}$. En utilisant la conjugaison dans $\text{Gal}(M_\infty/\mathbf{Q})$ (resp. $\text{Gal}(L_\infty/\mathbf{Q})$), on sait qu'on peut considérer $\text{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ (resp. $\text{Gal}(L_\infty/K_\infty)$) comme un

(*) Cf. cependant la remarque finale.

$Z_l[\Delta][[T]]$ -module; la structure précédente dépend du choix de γ fait au § 1. On peut donc munir, cf. (2),

$$e_\Phi \text{Gal}(L_\infty/K_\infty), \quad e_\Phi \text{Gal}(L_\infty/K_\infty) \quad \text{et} \quad e_\Phi \text{Gal}(M_\infty/K_\infty)$$

de structures de $A[[T]]$ -modules; ce sont des $A[[T]]$ -modules de torsion, cf. [14] théorèmes 5 et 16. Si X est un $A[[T]]$ -module de torsion, il existe un morphisme à noyau et conoyau finis

$$(15) \quad X \rightarrow \bigoplus_h A[[T]]/(h)$$

où h parcourt un sous-ensemble fini de $A[[T]]$. La série caractéristique de X est par définition le produit des séries h ; elle n'est bien définie qu'à une série inversible près, cf. par exemple [1] § 4 et [14] § 1.1. Dans [10], Greenberg pose une conjecture qui, compte-tenu de $\mu = 0$ (cf. [7]), peut s'énoncer ainsi :

CONJECTURE 1. — *L'élément $f(T, \psi)$ est une série caractéristique de $e_\Phi \text{Gal}(L_\infty/K_\infty)$.*

Dans [3], Coates et Lichtenbaum conjecturent que pour $e_\Phi \text{Gal}(L_\infty/K_\infty)$, (15) peut s'écrire avec une seule série h égale à $f(T, \psi)$. La conjecture principale de [2] § 5.1 est plus faible que la conjecture 1 puisque l'action de Δ y est remplacée par celle de $\text{Gal}(K/K_{-1})$; elle est énoncée dans un cadre beaucoup plus général.

En utilisant la théorie de Kummer comme dans la démonstration du théorème 16 de [14], on obtient, cf. aussi [11], l'équivalence entre la conjecture 1 et la conjecture suivante.

CONJECTURE 2. — *L'élément $f(\tilde{T}, \psi)$ est une série caractéristique de $e_\Phi \text{Gal}(M_\infty/K_\infty)$.*

Désignons par E_n le groupe des unités réelles de K_n et définissons $\bar{E}_n$ par le même procédé que pour $\bar{C}_n$. Notons $(E_n/C_n)_l$ le l -sous-groupe de Sylow de E_n/C_n . On voit d'après [9] corollaire 1 du théorème 2 que $(E_n/C_n)_l$ a même ordre que le l -groupe des classes réelles $\mathcal{C}(K_n)$ de K_n . C'était le but de [8] de démontrer que la conjecture 1 implique que la Φ -partie de $(E_n/C_n)_l$ a même ordre que la Φ -partie de $\mathcal{C}(K_n)$ (énoncé de la conjecture de Gras relative à K_n). En passant à la limite projective il est naturel d'énoncer

CONJECTURE 3. — *Les $A[[T]]$ -modules $e_\Phi(\varprojlim (E_n/C_n)_l)$ et $e_\Phi \text{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ ont mêmes séries caractéristiques.*

En fait cette conjecture se ramène aux précédentes :

THÉOREME 3. — *Les conjectures 1, 2 et 3 sont équivalentes.*

Démonstration. — Notons d'abord que $(E_n/C_n)_l$ étant fini, il s'identifie à $\bar{E}_n/\bar{C}_n$. Ceci permet d'écrire le diagramme suivant où les lignes sont les suites exactes évidentes mais vont malheureusement en sens contraire :

$$0 \rightarrow e_\Phi \text{Gal}(M_\infty/L_\infty) \rightarrow e_\Phi \text{Gal}(M_\infty/K_\infty) \rightarrow e_\Phi \text{Gal}(L_\infty/K_\infty) \rightarrow 0$$

$$\downarrow (*)$$

$$0 \leftarrow e_\Phi \varprojlim (U_n/\bar{E}_n) \leftarrow e_\Phi(U/C) \leftarrow e_\Phi \varprojlim (\bar{E}_n/\bar{C}_n) \leftarrow 0.$$

Dans ce diagramme (*) est un isomorphisme déduit de la théorie du corps de classes. D'après le théorème 1, la série $f(\bar{T}, \psi)$ est une série caractéristique de $e_\Phi(U/C)$. Le théorème 3 provient alors du fait général suivant : dans une suite exacte de $A[[T]]$ -modules de torsion $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$, si F', F, F'' sont respectivement des séries caractéristiques de X', X et X'' , alors on a $F = F' \cdot F''$ à une unité de $A[[T]]$ près, cf. par exemple [1], § 4, n° 5.

Remarque sur le cas $l = 2$. — Le cas $l = 2$ se traite de façon analogue, mais nécessite quelques ajustements pour l'énoncé de la conjecture 1, comparer à [8], § 7. Reprenons les hypothèses initiales : K/Q est une extension abélienne réelle de degré impair, $\Delta = \text{Gal}(K/Q)$. On note $\bar{\Phi}$ (resp. $\bar{\Psi}$) le caractère de Δ défini par $\sigma \rightarrow \bar{\Phi}(\sigma^{-1})$ (resp. $\sigma \rightarrow \bar{\Psi}(\sigma^{-1})$). Soient $K' = K(\zeta_4)$, Δ' son groupe de Galois sur Q et J l'élément de Δ' représentant la conjugaison complexe. Pour tout Δ' -module X , notons X^- le noyau de la multiplication par $1 + J$. On définit L_∞ et M_∞ comme au début du § 6 ; en remplaçant K_∞ par $K'_\infty = K' \cdot K_\infty$, on définit de même L'_∞ et M'_∞ . On peut alors énoncer

CONJECTURE 1'. — *L'élément $f(\bar{T}, \bar{\psi})$ est une série caractéristique de $e_\Phi \text{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)^-$. Pour chaque conjugué de $\bar{\Phi}$ sur Q , la condition analogue est vérifiée.*

On voit en reprenant la démonstration des théorèmes 3' et 4' de [8] que la conjecture 1' se ramène à la suivante :

CONJECTURE 2'. — *L'élément $f(\bar{T}, \bar{\psi})$ est une série caractéristique de $e_\Phi \text{Gal}(M_\infty/K_\infty)$. Pour chaque conjugué de $\bar{\Phi}$ sur Q , la condition analogue est vérifiée.*

On déduit alors, en reprenant la démonstration du théorème 3 et en

appelant conjecture 3', la conjecture 3 énoncée pour Φ et tous ses conjugués sur $\mathbb{Q}$:

THÉORÈME 3'. — *Les conjectures 1', 2' et 3' sont équivalentes.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, Éléments de mathématique, Algèbre commutative, Chap. 7, Hermann, Paris, 1965.
- [2] J. COATES, p -adic L-functions and Iwasawa's theory, Durham conference on Algebraic Number Theory, edited by A. Fröhlich, Academic Press, Londres, 1977.
- [3] J. COATES et S. LICHTENBAUM, On l -adic zeta functions, *Ann. of Math.*, 98 (1973), 498-550.
- [4] J. COATES et A. WILES, On p -adic L-functions and elliptic units, *J. Austral. Math. Soc.*, series A 26 (1978), 1-25.
- [5] R. COLEMAN, Some modules attached to Lubin-Tate groups, à paraître.
- [6] B. FERRERO, Iwasawa invariants of abelian number fields, *Math. Ann.*, 234 (1978), 9-24.
- [7] B. FERRERO et L. WASHINGTON, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, *Ann. of Math.*, à paraître.
- [8] R. GILLARD, Unités cyclotomiques, unités semi-locales et $\mathbb{Z}_l$ -extensions, *Ann. Inst. Fourier*, t. 29, fasc. 1 (1979), 49-79.
- [9] R. GILLARD, Remarques sur les unités cyclotomiques et les unités elliptiques, *J. of Numbers Theory*, 11, 1 (1979), 21-48.
- [10] R. GREENBERG, On p -adic L-functions and cyclotomic fields, *Nagoya Math. J.*, 56 (1974), 61-77.
- [11] R. GREENBERG, On p -adic L-functions and cyclotomic fields II, *Nagoya Math. J.*, 67 (1977), 139-158.
- [12] R. GREENBERG, On 2-adic L-functions and cyclotomic invariants, *Math. Zeit.*, 159 (1978), 37-45.
- [13] K. IWASAWA, On some modules in the theory of cyclotomic fields, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 16, n° 1, (1964), 42-82.
- [14] K. IWASAWA, On $\mathbb{Z}_l$ -extensions of algebraic number fields, *Ann. of Math.*, 98 (1973), 246-326.
- [15] K. IWASAWA, Lectures on p -adic L-functions, *Ann. Math. Studies*, 74, Princeton Univ. Press, 1972.
- [16] S. LANG, Cyclotomic fields, Springer Verlag, 1978.

Manuscrit reçu le 26 mars 1979

révisé le 16 avril 1979.

Roland GILLARD,

Université Grenoble I

Laboratoire de Mathématiques Pures

Institut Fourier

B.P. 116

38402 St-Martin d'Hères Cedex.