

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN COQUET

Sur la mesure spectrale des suites multiplicatives

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 3 (1979), p. 163-170

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_163_0

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA MESURE SPECTRALE DES SUITES MULTIPLICATIVES

par Jean COQUET

I. INTRODUCTION

I.1.

Dans l'article [2], T. Kamae, M. Mendès-France et l'auteur ont établi des résultats généraux concernant les propriétés spectrales des suites arithmétiques. Comme application de ces résultats, ils ont démontré qu'une suite q -multiplicative de module 1 possédait une mesure spectrale purement singulière ou purement atomique (en fait, c'est une classe de suites un peu plus large qui a été étudiée). Nous nous proposons ici de montrer le théorème suivant :

THEOREME. — *Soit g une suite multiplicative [4] de module ≤ 1 . Si le spectre de Fourier-Bohr de g est non vide, g a une mesure spectrale atomique.*

Nous commencerons par établir un résultat partiel.

PROPOSITION. — *Soit g une suite multiplicative de module ≤ 1 . Si g n'a pas une valeur moyenne nulle, c'est-à-dire si*

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n \leq N} g(n) \right| > 0,$$

g a une mesure spectrale atomique.

S'appuyant sur la propriété suivante démontrée par J.P. Bertrandias [1], la preuve du théorème évitera le calcul de la corrélation de g :

PROPRIÉTÉ. — Soit g une suite de module 1. g est M — presque — périodique (autrement dit possède une mesure spectrale atomique) si et seulement si, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un sous-ensemble E_ϵ de \mathbf{N} relativement dense tel que, pour tout t appartenant à E_ϵ :

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} |g(n+t) - g(n)| \leq \epsilon.$$

I.2. Notations.

Pour tout x réel, on pose $e(x) = e^{2i\pi x}$ et $\|x\| = \text{Min}_{n \in \mathbf{Z}} |x - n|$

P désigne l'ensemble des nombres premiers et p un élément de P .

II. DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION

II.1. Rappels.

II.1.1. *Un résultat de G. Halasz [6].*

LEMME 1. — Soit g une suite multiplicative de module ≤ 1 . Une condition suffisante pour que g ait une valeur moyenne nulle est que :

$$\forall u \in \mathbf{R}, \quad \sum_{p \in P} \frac{1}{p} (1 - \text{Re}(g(p)p^{-2i\pi u})) = +\infty.$$

II.1.2. *Inégalité de Turan-Kubilius [7].*

LEMME 2. — Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ et toute suite additive réelle f ,

$$\sum_{n=1}^N \left(f(n) - \sum_{\substack{p \in P \\ p \leq N}} \frac{f(p)}{p} \right)^2 \leq c N \sum_{\substack{(p, \alpha) \in P \times \mathbf{N}^* \\ p^\alpha \leq N}} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}.$$

II.2. Cas où g est de module 1.

D'après le lemme 1, si g n'a pas une valeur moyenne nulle, il existe u réel tel que :

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re}(g(p) p^{-2i\pi u})) < +\infty. \quad (1)$$

On pose $h(n) = g(n) n^{-2i\pi u}$ de sorte que h est multiplicative de module 1 et on définit la suite additive réelle f par :

$$h(p^\alpha) = e(f(p^\alpha)) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} < f(p^\alpha) \leq \frac{1}{2}.$$

On remarque que $h(n) = e(f(n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et d'après (1),

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{f^2(p)}{p} < +\infty, \quad \text{donc}$$

$$\sum_{(p, \alpha) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} < +\infty. \quad (2)$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{\substack{(p, \alpha) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^* \\ p^\alpha \geq k}} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} \leq \frac{\epsilon^2}{16\pi^2 c}. \quad (3)$$

Soit f_k additive définie par :

$$f_k(n) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p^{\alpha_p} \geq k}} f(p^{\alpha_p}) \quad \text{où}$$

$$\alpha_p = \operatorname{Max} \{ \alpha \in \mathbb{N} / p^\alpha | n \}.$$

L'inégalité de Turan-Kubilius appliquée à f_k donne, d'après (3) :

$$\sum_{n=1}^N \left(f_k(n+t) - \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p < N+t}} \frac{f(p)}{p} \right)^2 \leq \frac{\epsilon^2}{16\pi^2} (N+t) \quad \text{et}$$

$$\sum_{n=1}^N \left(f_k(n) - \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p < N+t}} \frac{f(p)}{p} \right)^2 \leq \frac{\epsilon^2}{16\pi^2} (N+t).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n=1}^N (f_k(n+t) - f_k(n))^2 \leq \frac{\epsilon^2}{4\pi^2} (N+t). \quad (4)$$

Soit alors $m_k = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p < k}} p^{\beta_p + 1}$ où $\beta_p = \operatorname{Max} \{ j \in \mathbb{N} / p^j < k \}$.

Si $t \in m_k \mathbf{N}^*$ (relativement dense !),

$$f(n+t) - f(n) = f_k(n+t) - f_k(n).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^N |h(n+t) - h(n)| \right)^2 &\leq N \sum_{n=1}^N |e(f(n+t) - f(n)) - 1|^2 \\ &\leq 4\pi^2 N \sum_{n=1}^N (f(n+t) - f(n))^2 \\ &\leq \epsilon^2 N(N+t). \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |h(n+t) - h(n)| \leq \epsilon.$$

Comme

$$\begin{aligned} |g(n+t) - g(n)| &\leq |h(n+t) - h(n)| + 2\pi |u| \operatorname{Log} \left(1 + \frac{t}{n} \right) \\ &\leq |h(n+t) - h(n)| + 2\pi |u| \frac{t}{n}, \end{aligned}$$

on a également :

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |g(n+t) - g(n)| \leq \epsilon.$$

II.3. Cas où g est de module ≤ 1 .

On définit g^* multiplicative par :

$$\begin{aligned} g^*(p^\alpha) &= \frac{g(p^\alpha)}{|g(p^\alpha)|} \quad \text{si } g(p^\alpha) \neq 0 \quad \text{et} \\ g^*(p^\alpha) &= 1 \quad \text{si } g(p^\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Alors ① entraîne

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbf{P}} \frac{1}{p} (1 - |g(p)|) &< +\infty \quad \text{et} \\ \sum_{p \in \mathbf{P}} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re}(g^*(p) p^{-2i\pi u})) &< +\infty. \end{aligned}$$

Le raisonnement fait dans le paragraphe précédent s'applique à g^* qui est donc M - presque - périodique.

D'autre part, $|g|$ est évidemment B - presque - périodique [4].

Puisque $g = |g| \cdot g^*$, g est M - presque - périodique.

III. DEMONSTRATION DU THEOREME

III.1. Un résultat de Daboussi et Delange [4].

LEMME 3. — Soit g une suite multiplicative de module ≤ 1 . Une condition nécessaire et suffisante pour que le spectre de g soit non vide est qu'il existe un nombre réel u et un caractère de Dirichlet χ tels que :

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re}(g(p) p^{-2i\pi u} \chi(p))) < +\infty.$$

III.2. Un lemme.

LEMME 4. — Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Soit

$$\Delta = \{n \in \mathbf{N}^* / \forall p \in P, p | n \implies p | d\}.$$

Il existe $K \in \mathbf{N}^*$ tel que, $\forall \delta \in \Delta, \forall r \in \mathbf{N}^*$,

$$\delta \leq d^r \implies \delta | d^{Kr}.$$

Démonstration. — Si $d = p_1^{\alpha_1} \cdot p_j^{\alpha_j}$ est la décomposition de d en facteurs premiers, il suffit de prendre K au moins égal à :

$$\operatorname{Max}_{1 \leq i \leq j} \operatorname{Log} d \cdot (\alpha_i \operatorname{Log} p_i)^{-1}.$$

III.3. Démonstration du théorème.

Soit g multiplicative de module ≤ 1 à spectre non vide. Le lemme 3 exprime qu'il existe un caractère de Dirichlet χ tel que $g' = g\chi$, multiplicative, n'ait pas une valeur moyenne nulle. D'après la proposition, g' est M -presque-périodique.

Soit d la période de χ (nous supposons évidemment que $d \geq 2$).

D'après la démonstration de la proposition, $\epsilon > 0$ étant donné, il existe $m_k \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall t \in m_k \mathbf{N}^*, \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |g'(n+t) - g'(n)| \leq \frac{\epsilon \phi(d)}{2d}. \quad (5)$$

Puisque $\sum_{\delta \in \Delta} \frac{1}{\delta}$ converge, il existe $s \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta \geq d^s}} \frac{1}{\delta} \leq \frac{\epsilon}{4}. \quad (6)$$

Nous allons vérifier que, si $t \in m_k d^{Ks+1} \mathbf{N}^*$ (relativement dense),

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |g(n+t) - g(n)| \leq \epsilon,$$

K étant la constante définie au lemme 4.

Soit donc $t \in m_k d^{Ks+1} \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |g(n+t) - g(n)| &= \sum_{\delta | d^{Ks+1}} \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, d^{Ks+1}) = \delta}}^N |g(n+t) - g(n)| \right) \\ &\leq \sum_{\substack{\delta | d^{Ks+1} \\ \delta \geq d^s}} \left(\frac{2}{N} \sum_{\substack{n=1 \\ \delta | n}}^N 1 \right) + \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, d^{Ks+1}) = \delta}}^N |g(n+t) - g(n)| \right). \quad (7) \end{aligned}$$

On remarque que, si $(n, d^{Ks+1}) = \delta < d^s$, on a, en posant $n = m\delta$,

$$1 \leq (m, d) \left| \left(m, \frac{d^{Ks+1}}{\delta} \right) \right| = 1 \quad \text{donc} \quad (m, d) = 1.$$

De même, $\left(m + \frac{t}{\delta}, d \right) = 1$ car $d \mid \frac{t}{\delta}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad &\sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, d^{Ks+1}) = \delta}}^N |g(n+t) - g(n)| \right) \\ &\leq \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{m=1 \\ (m, d)=1}}^{\lfloor N/\delta \rfloor} |g\left(m + \frac{t}{\delta}\right) - g(m)| \right) \\ &= \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{m=1 \\ (m, d)=1}}^{\lfloor N/\delta \rfloor} |g'\left(m + \frac{t}{\delta}\right) - g'(m)| \right) \text{ car } \chi(m) = \chi\left(m + \frac{t}{\delta}\right) \neq 0 \\ &\leq \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=1}^{\lfloor N/\delta \rfloor} |g'\left(m + \frac{t}{\delta}\right) - g'(m)| \right) \quad (8) \end{aligned}$$

⑤, ⑥, ⑦ et ⑧ donnent :

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |g(n+t) - g(n)| \leq 2 \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta \geq d^s}} \frac{1}{\delta} + \frac{\epsilon \phi(d)}{2d} \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \frac{1}{\delta} \leq \epsilon.$$

g est M – presque – périodique.

IV. REMARQUES

1) Sous l’hypothèse du théorème, on peut préciser en calculant la corrélation de g que la mesure spectrale de g est concentrée sur \mathbf{Q}/\mathbf{Z} (comparer avec les résultats obtenus dans [4] et [5]).

2) La technique précédente permet, à l’aide des résultats de [3], de retrouver le théorème suivant prouvé dans [2] : si g est une suite q – multiplicative de module ≤ 1 non pseudo-aléatoire, elle est M – presque – périodique.

Elle s’adapte évidemment aux produits de telles suites (pour différentes valeurs de q) ou de leurs translatées.

3) Soit g fortement multiplicative de module 1 telle que $\lim_{\substack{p \in \mathbf{P} \\ p \rightarrow \infty}} g(p) = 1$.

Ce qui précède montre que, si $\sum_{p \in \mathbf{P}} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} g(p)) < +\infty$, la mesure spectrale de g est atomique.

Si $\sum_{p \in \mathbf{P}} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} g(p)) = +\infty$, la mesure spectrale de g est la mesure de Haar sur le tore \mathbf{R}/\mathbf{Z} . Ceci résulte du théorème suivant qui se démontre comme un théorème de Kubilius ([7], th. 5.3) :

THEOREME. – Soit $t \in \mathbf{N}^*$, soit g fortement multiplicative de module 1. Si $\lim_{\substack{p \in \mathbf{P} \\ p \rightarrow \infty}} g(p) = 1$, la suite $(g(n+t)\overline{g(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ a une valeur moyenne $\gamma(t)$ donnée par :

$$\gamma(t) = \prod_{p \nmid t} \left(1 - \frac{2(1 - \operatorname{Re} g(p))}{p} \right);$$

en particulier, si $\sum_{p \in \mathbf{P}} \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} g(p)) = +\infty$, γ est nulle sur \mathbf{N}^* .

4) Compte tenu de la remarque précédente, il semble raisonnable de conjecturer que si g est une suite multiplicative de module 1 dont le spectre de Fourier-Bohr est vide, la mesure spectrale de g existe et est la mesure de Haar sur le tore.

L'auteur remercie H. Delange et J.-P. Kahane pour leurs remarques qui ont permis d'améliorer la rédaction de l'article.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.P. BERTRANDIAS, Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p , *Bull. Soc. Math. France*, mémoire 5 (1966), 1-106.
- [2] J. COQUET, T. KAMAE, M. MENDES-FRANCE, Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, 105 (1977), 369-384.
- [3] J. COQUET, Sur les fonctions q -multiplicatives pseudo-aléatoires, *C.R.A.S.*, Paris, 282 (1976), 175-178.
- [4] H. DABOUSSI, H. DELANGE, Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module ≤ 1 , *C.R.A.S.*, Paris, 278 (1974), 657-660.
- [5] H. DABOUSSI, M. MENDES-FRANCE, Spectrum, almost-periodicity and equidistribution modulo 1, *Studia Scientiarum Math. Hung.*, 9 (1974), 173-180.
- [6] G. HALASZ, Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen, *Acta Math. Acad. Sc. Hungaricae*, 19 (1968), 365-403.
- [7] J. KUBILIUS, Probabilistic methods in the theory of numbers, *A.M.S., Mathematical monographs*, 11.

Manuscrit reçu le 20 novembre 1978.

Jean COQUET,
 Département de Mathématiques
 Centre Universitaire de Valenciennes
 Le Mont Houy
 59236 Aulnoy-les-Valenciennes.