RONALD R. COIFMAN
YVES MEYER

Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 3 (1978), p. 177-202
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_3_177_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 3 (1978), 177-202

COMMUTATEURS D'INTÉGRALES SINGULIÈRES ET OPÉRATEURS MULTILINÉAIRES

par R. COIFMAN et Y. MEYER

Introduction.

Soient V une variété C^∞, compacte, de dimension k et $\alpha \in \mathbf{N}$ un entier. Rappelons qu'une dérivation de classe $\mathcal{C}^\alpha$ est un opérateur $D : \mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\alpha(V)$ qui, pour tout choix de coordonnées locales, s'écrit $\sum_1^k a_j(x) \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ où $a_j \in \mathcal{C}^\alpha$.

On sait que l'algèbre $\mathcal{L}^0$ des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 est caractérisée par des propriétés de commutation avec les dérivations de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si $T : \mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V)$ est un opérateur linéaire et $D : \mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V)$ une dérivation, on pose $T_0 = T$ et $T_{n+1} = [T_n , D]$, $n \in \mathbf{N}$. Alors $T \in \mathcal{L}^0$ si et seulement si, pour toute dérivation D, tous les commutateurs T_n $(n \in \mathbf{N})$ se prolongent en des opérateurs bornés de $L^2(V)$ dans lui-même.

L'objet de ce travail est d'améliorer ces résultats. Il est d'abord prouvé que pour toute dérivation D de classe $\mathcal{C}^1$ (ou plus généralement dont les coefficients appartiennent à l'espace de Lipschitz Λ_1) et tout opérateur $T \in \mathcal{L}^0$, $[T , D]$ est borné sur $L^2(V)$. Il revient au même d'étudier le commutateur $[S , A]$ entre un o.ψ.d. classique d'ordre 1, S, et la multiplication par une fonction $A \in \Lambda_1(V)$; $[S , A]$ est borné sur $L^2(V)$ et la condition $A \in \Lambda_1(V)$ est évidemment nécessaire pour obtenir un tel résultat.

Plus généralement soient $n \geqslant 1$ un entier, $A \in \Lambda_1(V)$ une fonction, $A : \mathcal{C}^\infty(V) \longrightarrow \Lambda_1(V)$ l'opérateur de multiplication par A et T un o.ψ.d. classique d'ordre n. On pose successivement $T_0 = T$ et $T_{j+1} = [T_j , A]$. Alors T_n est borné sur $L^2(V)$.

Les problèmes sont locaux et tout se ramène à prouver les résultats correspondants sur $\mathbf{R}^k$.

La démonstration se fait en deux étapes.

Dans un premier temps, on introduit n fonctions $A_1, \ldots, A_n$ appartenant à $\mathcal{C}^1$. On appelle encore A_j les opérateurs qui consistent à multiplier les fonctions A_j et l'on pose $T_{j+1} = [T_j, A_{j+1}]$ si $0 \leqslant j \leqslant n-1$ et $T_0 = T$. On prouve que

$$\|T_n(f)\|_r \leqslant C \|\nabla A_1\|_{p_1} \ldots \|\nabla A_n\|_{p_n} \|f\|_q \tag{1}$$

quand $1 < p_1 < +\infty, \ldots, 1 < p_n < +\infty, 1 < q < +\infty, 1 < r < +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{q}$; ∇A est le gradient de $A \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^k)$.

L'inégalité (1) résulte de l'étude de la transformée de Fourier de $T_n(f)$, regardée comme une expression multilinéaire en $A_1, \ldots, A_n$ et f. On développe, à cet effet, un calcul multilinéaire sur les o.ψ.d. classiques et l'on a besoin, en outre, de l'interpolation complexe (th. 1 et 2).

Il faut ensuite passer au cas où $p_1 = \ldots = p_n = +\infty$ et $q = r \in]1, +\infty[$. Les techniques utilisées sont complètement différentes et s'apparentent aux méthodes de variables réelles introduites par Calderon et Zygmund et développées par leurs élèves. La transformée de Fourier est abandonnée et l'on étudie les opérateurs en estimant leurs noyaux.

Un des exemples les plus simples du théorème 2 est le cas où T est la dérivée n-ième de la transformée de Hilbert (en dimension 1) : les noyaux $\dfrac{[A(x) - A(y)]^n}{(x-y)^{n+1}}$ sont bornés sur $L^2(\mathbf{R})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $A \in \Lambda_1(\mathbf{R})$. Cet exemple résulte aussi du récent théorème de Calderón relatif au noyau de Cauchy pour les courbes de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Enoncé des résultats.

Soient $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ deux entiers et $\sigma : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{nk} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction indéfiniment dérivable telle que

$\forall \beta \in \mathbf{N}^k$, $\forall \alpha \in \mathbf{N}^{nk}$, $\exists c(\alpha , \beta)$, $\forall x \in \mathbf{R}^k$, $\forall \xi = (\xi_1 , \ldots , \xi_n) \in \mathbf{R}^{nk}$,

$$|D_x^\beta \, \partial_\xi^\alpha \sigma(x , \xi)| \leqslant C(\alpha , \beta) (1 + |\xi|)^{-|\alpha|}. \tag{1}$$

Naturellement $\alpha = (\alpha_1 , \ldots , \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbf{N}^k$ et $|\alpha| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$. Par abus de langage, une telle fonction $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{nk})$ sera appelée un symbole classique d'ordre 0 et de type $(1 , n)$. On associe à σ l'opérateur multilinéaire défini sur les suites $(f_1 , \ldots , f_n)$ de fonctions $f_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$ par

$$[T(f_1 , \ldots , f_n)] (x) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{nk}} e^{ix.(\xi_1 + \ldots + \xi_n)} \sigma(x ; \xi_1 , \ldots , \xi_n) \hat{f}_1 (\xi_1) \ldots \hat{f}_n (\xi_n) \, d\xi_1 \ldots d\xi_n . \tag{2}$$

Naturellement $x \in \mathbf{R}^k$ tout comme $\xi_1 + \ldots + \xi_n$.

THEOREME 1. – *Soient* $p_j \in]1, +\infty[$, $1 \leqslant j \leqslant n$ *des nombres réels tels que* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} \leqslant 1$. *Alors pour tout symbole classique d'ordre* 0 *vérifiant* (1), *il existe une constante* C (*ne dépendant que des* p_j, *de* k , *de* n *et des* $C(\alpha , \beta)$ *telle que*

$\forall f_1 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k), \ldots , \forall f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$,

$$\|T(f_1 , \ldots , f_n)\|_p \leqslant C \, \|f_1\|_{p_1} \ldots \|f_n\|_{p_n} . \tag{3}$$

Pour énoncer le théorème 2, considérons un symbole classique d'ordre n, au sens usuel, $\tau \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$ définissant un opérateur pseudo-différentiel $\tau(x , D)$.

THEOREME 2. – *Soient* $a_1 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k), \ldots , a_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$ *et* $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$. *Formons, pour tout* $x \in \mathbf{R}^k$,

$$g(x) = \tau(x , D) \, [(a_1(x) - a_1(.)) \ldots (a_n(x) - a_n(.)) \, f(.)] .$$

Alors pour toute suite $(p_1 , \ldots , p_n , p)$ *telle que*

$$1 < p_j \leqslant +\infty , 1 < p < +\infty \quad et \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p} < 1,$$

Note. $\mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$ est l'espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^k)$ qui, ainsi que toutes leurs dérivées, ont une décroissance rapide à l'infini ; $\mathcal{D}(\mathbf{R}^k) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^k)$ est le sous-espace des fonctions à support compact.

il existe une constante C (*ne dépendant que de* $k , n , p_1 , \ldots , p_n , p$ *et des constantes* $C(\alpha , \beta)$ *intervenant dans la définition de* τ) *telle que, en appelant* ∇ *l'opérateur gradient,*

$$\|g\|_q \leqslant C \|\nabla a_1\|_{p_1} \ldots \|\nabla a_n\|_{p_n} \|f\|_p . \tag{4}$$

Un cas particulier mérite d'être mentionné.

Soit T un opérateur pseudo-différentiel associé à un symbole classique d'ordre 0. Soit $A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^k)$ une fonction telle que $\forall x \in \mathbf{R}^k$, $\forall y \in \mathbf{R}^k$, $|A(x) - A(y)| \leqslant |x - y|$. Par abus de langage, nous appellerons aussi A l'opérateur de multiplication par la fonction A. Alors le commutateur TA – AT est un opérateur régularisant d'ordre 1. Pour le voir on calcule

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T(Af) - \frac{\partial}{\partial x_j} AT(f) = T_j(Af) - AT_j(f) - \frac{\partial A}{\partial x_j} T(f).$$

On a posé $T_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j} \circ T$; T_j est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 1 auquel on applique le théorème 2, $\left|\dfrac{\partial A}{\partial x_j}\right| \leqslant 1$ et $\|T(f)\|_2 \leqslant C \|f\|_2$.

Malheureusement le théorème 2 ne découle pas immédiatement du théorème 1. La méthode est cependant d'écrire la fonction g à l'aide d'un opérateur multilinéaire dans le style de ceux décrits par le théorème 1. Cependant le symbole correspondant (même dans le cas le plus simple $k = n = 1$) ne vérifie pas les inégalités (1) dans tout l'espace. On fait alors une partition de l'identité sur l'espace des ξ pour se ramener au théorème 1 ou à des opérateurs multilinéaires que l'on étudie par interpolation complexe. La méthode employée oblige à se restreindre, en un premier temps, au cas $p_j < +\infty, 1 \leqslant j \leqslant n$. Le passage au cas général s'obtient par des méthodes de variables réelles (c'est-à-dire en retournant aux noyaux). Nous retournerons enfin au cas où $k = 1$ et à la transformation de Hilbert en prouvant le

THÉORÈME 3. – *Soient* $A_j : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ *des fonctions telles que* $|A_j(x) - A_j(y)| \leqslant |x - y|$ *pour* $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, 1 \leqslant j \leqslant n$. *Alors le noyau* $\dfrac{[A_1(x) - A_1(y)] \ldots [A_n(x) - A_n(y)]}{(x - y)^{n+1}} = K_n(x , y)$ *definit un opérateur borné sur* L^2 *par*

$$\mathrm{T}f(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \epsilon} \mathrm{K}_n(x, y) f(y)\, dy. \tag{5}$$

Pour être plus précis, pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, la limite écrite ci-dessus existe presque-partout et constitue la définition de $\mathrm{T}f$. De plus $\|\mathrm{T}f\|_2 \leq \mathrm{C}_n \|f\|_2$ où C_n ne dépend que de n.

Le théorème 3 découle facilement du théorème 2 par un procédé de régularisation. Le théorème 3 est également une simple conséquence de résultats récents sur le noyau de Cauchy obtenus par A.P. Calderón.

2. Preuve du théorème 1.

2.1. *On se ramène au cas où* $\sigma(x, \xi) = 0$ *si* $|\xi| \leq 1$.

Pour cela on appelle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{nk})$ une fonction égale à 1 sur $|\xi| \leq 1$. Posons

$$\sigma_0(x, \xi) = \sigma(x, \xi)\, \varphi_0(\xi) \quad \text{et} \quad \sigma_1(x, \xi) = \sigma(x, \xi)\,(1 - \varphi_0(\xi)).$$

On a $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$; $\sigma_1(x, \xi) = 0$ si $|\xi| \leq 1$ et il suffit de vérifier que σ_0 conduit à un opérateur multilinéaire borné T_0.

Pour cela on retourne au noyau associé au symbole $\sigma_0(x, \xi)$ en écrivant

$$\sigma_0(x, \xi) = \int_{\mathbf{R}^{nk}} \mathrm{K}_0(x, u)\, e^{-i(u_1 \cdot \xi_1 + \ldots + u_n \cdot \xi_n)}\, du_1 \ldots du_n .$$

Grâce à la régularité de $\sigma_0(x, \xi)$, on a

$$\mathrm{C} = \int_{\mathbf{R}^{nk}} \sup_{x \in \mathbf{R}^k} |\mathrm{K}_0(x, u)|\, du < +\infty .$$

L'opérateur T_0 associé à σ_0 n'est autre que

$$\mathrm{T}_0(f_1, \ldots, f_n)(x) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{nk}} f_1(x - u_1) \ldots f_n(x - u_n)\, \mathrm{K}_0(x, u)\, du_1 \ldots du_n$$

et l'on a $\|\mathrm{T}_0(f_1, \ldots, f_n)\|_p \leq \mathrm{C}\, \|f_1\|_{p_1} \ldots \|f_n\|_{p_n}$.

2.2. *On se ramène au cas où* $|\xi_j| \leq 2\,|\xi_1|$ si $2 \leq j \leq n$.

On appelle $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des fonctions appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{nk} \setminus \{0\})$, homogènes de degré 0, telles que $1 = \varphi_1(\xi) + \ldots + \varphi_n(\xi)$ et que $\varphi_j(\xi) \neq 0$ entraîne $|\xi_j| \geq \frac{1}{2} \sup_{1 \leq m \leq n} |\xi_m|$.

Alors $\sigma_j(x\,,\xi) = (1-\varphi_0(\xi))\,\varphi_j(\xi)\,\sigma(x\,,\xi)$ est un symbole classique d'ordre 0 et de type $(1\,,n)$.

Par symétrie, on peut se limiter au cas $j=1$ et écrire $\sigma(x\,,\xi)$ au lieu de $\sigma_1(x\,,\xi)$.

2.3. *Une seconde partition de* $\sigma(x\,,\xi)$.

On appelle ϵ un nombre positif qui sera fixé dans un instant et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ une fonction égale à 1 sur $[2\epsilon, 1]$ et dont le support est contenu dans $[\epsilon\,,2]$. On pose $\omega(x\,,\xi) = \sigma(x\,,\xi)\left[1-\theta\left(\frac{|\xi_2|}{|\xi|}\right)\right]\cdots\left[1-\theta\left(\frac{|\xi_n|}{|\xi|}\right)\right]$. Le produit $\pi(\xi) = \left[1-\theta\left(\frac{|\xi_2|}{|\xi|}\right)\right]\cdots\left[1-\theta\left(\frac{|\xi_n|}{|\xi|}\right)\right]$ est une fonction homogène de degré 0 et de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbf{R}^{nk}\setminus\{0\}$ puisque θ est nulle au voisinage de 0. Donc $\pi(\xi)$ est un symbole classique d'ordre 0 et $\omega(x\,,\xi)$ est un symbole classique d'ordre 0 et de type $(1\,,n)$.

On pourra donc écrire

$$\sigma(x\,,\xi) = \omega(x\,,\xi) - \sum_{J}(-1)^{|J|}\prod_{j\in J}\theta\left(\frac{|\xi_j|}{|\xi|}\right)\sigma(x\,,\xi)\,; \qquad (6)$$

la somme est étendue à toutes les parties J de $\{2,\ldots,n\}$, non vides, de cardinal $|J|$.

Nous allons examiner successivement chacun des termes du second membre de (6).

Désignons pour commencer par T_ω l'opérateur multilinéaire associé au symbole ω.

Pour avoir $\omega(x\,,\xi)\neq 0$, il faut que $|\xi_2|\leqslant 2\epsilon|\xi|,\ldots,|\xi_n|\leqslant 2\epsilon\,|\xi|$ ce qui, compte tenu de $|\xi_j|\leqslant 2\,|\xi_1|\ (2\leqslant j\leqslant n)$, entraîne

$$|\xi_j|\leqslant 4\,n\epsilon\,|\xi_1|\ (2\leqslant j\leqslant n).$$

2.4. *Le cas de l'opérateur multilinéaire* T_ω.

Nous allons rappeler des résultats classiques sur les opérateurs pseudo-différentiels.

LEMME 1. – *Soit* $q(x\,,\xi)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^k)$. *Supposons qu'il existe une constante* C *telle que*

$$\forall\alpha\in\mathbf{N}^k\,,\ |\alpha|\leqslant k+3 \Longrightarrow |\partial_\xi^\alpha q(x\,,\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{-|\alpha|} \qquad (7)$$

et qu'il en soit de même pour $|\partial_\xi^\alpha \nabla_x q(x\,,\xi)|$. *Alors l'opérateur pseudo-différentiel associé au symbole* $q(x\,,\xi)$ *est borné sur* L^p *pour* $1 < p < +\infty$.

LEMME 2. – *Soient* $k \geqslant 1$ *un entier,* $1 < p < +\infty$ *et* $C > c > 0$ *trois constantes. Il existe une constante* $C_1 = C_1(C, c, k, p)$ *telle que*

si, d'une part, $m_\nu(x)$, $\nu \in \mathbf{N}$, *sont des fonctions indéfiniment dérivables sur* $\mathbf{R}^k$ *telles que* $|m_\nu(x)| \leqslant 1$ *et que* $|\nabla m_\nu(x)| \leqslant 1$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}^k$ *et tout* $\nu \in \mathbf{N}$,

et si, d'autre part, $f_\nu(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$ *ont la propriété que*

$$\text{support } \hat{f}_\nu(\xi) \subset \{c2^\nu \leqslant |\xi| \leqslant C2^\nu\},$$

alors
$$\Big\|\sum_{\nu \geqslant 0} m_\nu(x) f_\nu(x)\Big\|_p \leqslant C_1 \Big\|\Big(\sum_{\nu \geqslant 0} |f_\nu(x)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p .$$

On découpe $\mathbf{N}$ en une réunion finie de progressions arithmétiques de raisons r où $2^r \dfrac{c}{4} \geqslant 2C$. Appelons Λ l'une de ces r progressions arithmétiques et posons $f(x) = \sum_{\nu \in \Lambda} f_\nu(x)$. On a, grâce au théorème de Paley-Littlewood,

$$\|f\|_p \leqslant C_p \Big\|\Big(\sum_{\nu \in \Lambda} |f_\nu(x)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \leqslant C_p \Big\|\Big(\sum_{\nu \geqslant 0} |f_\nu(x)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p .$$

Il suffit, pour prouver le lemme 2, de vérifier que $\Big\|\sum_{\nu \in \Lambda} m_\nu(x) f_\nu(x)\Big\|_p \leqslant C_p' \|f\|_p$. Pour cela appelons $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ une fonction égale à 1 si $c \leqslant |\xi| \leqslant C$ et dont le support soit contenu dans $2^{-1} c \leqslant |\xi| \leqslant 2C$. Alors $q(x\,,\xi) = \sum_{\nu \in \Lambda} m_\nu(x)\, \psi(2^{-\nu}\xi)$ est un symbole vérifiant les hypothèses du lemme 1 et

$$\sum_{\nu \in \Lambda} m_\nu(x) f_\nu(x) = q(x\,, D)\, f(x) .$$

Dans le même ordre d'idées et en conservant les notations du lemme 2, on prouve le résultat suivant

LEMME 3. – *Soient* $p_\nu(\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^k)$ *des fonctions telles que* $|\partial^\alpha p_\nu(\xi)| \leqslant 2^{-|\alpha|\nu}$ *pour* $0 \leqslant |\alpha| \leqslant n + 3$. *Définissons* $g_\nu \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$ *par* $\hat{g}_\nu(\xi) = p_\nu(\xi) \hat{f}_\nu(\xi)$. *Alors* $\Big\|\Big(\sum_{\nu \geqslant 0} |g_\nu|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \leqslant C_p'' \Big\|\Big(\sum_{\nu \geqslant 0} |f_\nu|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p$.

Retournons à T_ω.

Appelons Γ le cône défini par $|\xi_j| \leqslant 4n\epsilon|\xi_1|, 2 \leqslant j \leqslant n$, et $|\xi_1| \geqslant \eta > 0$. Cette dernière condition provient de la première partition utilisée (à l'aide de φ_0). En utilisant encore une fois le raisonnement fait en 2.1, on peut se ramener au cas où $\eta = 1$ ce que nous ferons.

Nous allons recouvrir Γ par des "cylindres" dyadiques très plats R_ν, $\nu \geqslant 0$, que nous allons maintenant décrire.

Si $\nu \geqslant 0$, R_ν est défini par

$$2^\nu \leqslant |\xi_1| \leqslant 2.2^\nu \quad \text{et} \quad |\xi_j| \leqslant 16\sqrt{n}\epsilon 2^\nu, 2 \leqslant j \leqslant n .$$

Enfin R_ν^* est le cylindre "élargi" défini par $2^{\nu-1} \leqslant |\xi_1| \leqslant 2^{\nu+2}$ et $|\xi_j| \leqslant 32\sqrt{n}\epsilon\, 2^\nu$.

Nous allons maintenant décomposer, de façon naturelle, ω en $\sum\limits_{\nu\geqslant 0} \omega_\nu$ où supp $\omega_\nu \subset R_\nu^*$ (en ce qui concerne la variable ξ). Pour cela on appelle $\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ une fonction portée par $\frac{1}{2} \leqslant |\xi_1| \leqslant 4$ et telle que $\sum\limits_{\nu\geqslant 0} \psi_1(2^{-\nu}\xi_1) = 1$ si $|\xi_1| \geqslant 1$. On appelle $\psi_j(\xi_j)$, $2 \leqslant j \leqslant n$, des fonctions $\in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$, égales à 1 sur $|\xi_j| \leqslant 16\sqrt{n}\epsilon$ et à 0 hors de $|\xi_j| \leqslant 32\sqrt{n}\epsilon$.

On a alors, puisque le support de $\omega(x, \xi)$ est contenu dans Γ et que $\sum\limits_{\nu\geqslant 0} \psi_1(2^{-\nu}\xi_1)\, \psi_2(2^{-\nu}\xi_2) \ldots \psi_n(2^{-\nu}\xi_n) = 1$ sur Γ,

$$\omega(x, \xi) = \sum_{\nu\geqslant 0} \omega_\nu(x, \xi)$$

où $\omega_\nu(x, \xi) = \omega(x, \xi)\, \psi_1(2^{-\nu}\xi_1)\, \psi_2(2^{-\nu}\xi_2) \ldots \psi_n(2^{-\nu}\xi_n)$ et Supp $\omega_\nu(x, \xi) \subset R_\nu^*$.

Si l'on pose, quand $x \in \mathbf{R}^k$ et $t \in \mathbf{R}^{nk}$,

$$F_\nu(x, t) = \omega_\nu(x, 2^\nu t),$$

il est immédiat de vérifier que toutes les dérivées de $F_\nu(x, t)$ prises par rapport à x et t sont uniformément bornées par rapport à $\nu \geqslant 0$. Cela tient à l'homogénéité des conditions (1). Par ailleurs le support de $F_\nu(x, t)$ est contenu dans R_0^*. En considérant $F_\nu(x, t)$ comme un symbole, il est naturel de retourner au noyau correspondant défini par

$$F_\nu(x, t) = \int_{\mathbf{R}^{nk}} e^{-it.u}\, K_\nu(x, u)\, du .$$

Les noyaux $K_\nu(x, u)$ et leurs dérivées par rapport à x, considérés comme des fonctions de $u \in \mathbf{R}^{nk}$ indexées par ν et x, forment une partie bornée de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{nk})$. C'est-à-dire que pour tout entier $N \geqslant 1$, tout $\alpha \in \mathbf{N}^{kn}$ et tout $\beta \in \mathbf{N}^k$, on a

$$|D_x^\beta \, \partial_u^\alpha \, K_\nu(x, u)| \leqslant C_{\alpha,\beta,N} (1 + |u|)^{-N}.$$

Soit $\theta_1 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ une fonction égale à 1 quand $\frac{1}{2} \leqslant |\xi_1| \leqslant 4$ et dont le support soit contenu dans la couronne $\frac{1}{3} \leqslant |\xi_1| \leqslant 5$. Définissons la fonction $\Delta_{\nu,u} f_1 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$ par sa transformée de Fourier

$$(\Delta_{\nu,u} f_1)\hat{}(\xi_1) = \theta_1(2^{-\nu} \xi_1)\, e^{-i2^{-\nu}\xi_1 . u_1} \hat{f}_1(\xi_1).$$

De même les fonctions $S_{\nu,u} f_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$, $2 \leqslant j \leqslant n$, sont définies par

$$(S_{\nu,u} f_j)\hat{}(\xi_j) = \psi_j(2^{-\nu}\xi_j)\, e^{-i2^{-\nu}\xi_j . u_j} \hat{f}_j(\xi_j).$$

Avec ces notations on a

$$T_\omega(f_1, \ldots, f_n)(x) = \int_{\mathbf{R}^{nk}} \Big[\sum_{\nu \geqslant 0} g(\nu, u, x)\, K_\nu(x, u)\Big]\, du \tag{8}$$

où $g(\nu, u, x) = (\Delta_{\nu,u} f_1)(S_{\nu,u} f_2) \ldots (S_{\nu,u} f_n)$.

Le spectre de $\Delta_{\nu,u} f_1$ par rapport à x, est contenu dans $\frac{2^\nu}{3} \leqslant |\xi_1| \leqslant 5.2^\nu$; celui de $g_j(\nu, u, x)$ dans $|\xi_1| \leqslant 32\sqrt{n}\,\varepsilon\, 2^\nu$.

On choisit ε de sorte que, par exemple, $32\sqrt{n}(n-1)\epsilon = \frac{1}{6}$.

Alors le spectre de $g(\nu, u, x)$ est contenu dans $\frac{2^\nu}{6} \leqslant |\xi_1| \leqslant 6.2^\nu$.

Pour tout u fixé, on peut appliquer le lemme 2 pour calculer la norme L^p de $\sum_{\nu \geqslant 0} g(\nu, u, x)\, K_\nu(x, u)$. Il vient

$$\Big\|\sum_{\nu \geqslant 0} g(\nu, u, x)\, K_\nu(x, u)\Big\|_{L^p(dx)} \leqslant C(u) \|(\Sigma\, |g(\nu, u, x)|^2)^{1/2}\|_p \ ;$$

$C(u)$ ayant une décroissance rapide en u grâce aux propriétés des noyaux $K_\nu(x, u)$. Or

$$(\Sigma\, |g(\nu, u, x)|^2)^{1/2} \leqslant \sup_{\nu \geqslant 0} |S_{\nu,u} f_2| \ldots \sup_{\nu \geqslant 0} |S_{\nu,u} f_n| \Big(\sum_{\nu \geqslant 0} |\Delta_{\nu,u} f_1|^2\Big)^{1/2}$$

d'où

$$\|(\Sigma\, |g(\nu\,,u\,,x)|^2)^{1/2}\|_p \leqslant \|\sup_{\nu\geqslant 0} |S_{\nu,u} f_2|\,\|_{p_2} \ldots$$

$$\|\sup_{\nu\geqslant 0} |S_{\nu,u} f_n|\,\|_{p_n} \|\Big(\sum_{\nu\geqslant 0} |\Delta_{\nu,u}\, f_1|^2\Big)^{1/2}\|_{p_1}.$$

Grâce au lemme 3, $\|\Big(\sum_{\nu\geqslant 0} |\Delta_{\nu,u} f_1|^2\Big)^{1/2}\|_{p_1} \leqslant C_1(u)\,\|f_1\|_{p_1}$ et $C_1(u)$ a une croissance lente en $u \in \mathbf{R}^{nk}$.

De même $\|\sup_{\nu\geqslant 0} |S_{\nu,u} f_j|\,\|_{L^{p_j}(dx)} \leqslant C_j(u)\,\|f_j\|_{p_j}$ et $C_j(u)$ a une croissance lente.

Donc l'intégrale (8) définissant $T_\omega(f_1,\ldots,f_n)$ est une intégrale de Bochner et l'on a

$$\|T_\omega(f_1,\ldots,f_n)\|_p \leqslant C(p_1,\ldots,p_n)\,\|f_1\|_{p_1}\ldots\|f_n\|_{p_n}.$$

2.5. *Les autres termes de la somme* (6).

Posons $\sigma_J(x\,,\xi) = \prod_{j\in J} \theta\Big(\frac{|\xi_j|}{|\xi|}\Big)\sigma(x\,,\xi)$. Par raison de symétrie on peut supposer que $2 \in J$. Nous poserons $\tau(x,\xi) = \prod_{\substack{j\in J\\ j\geqslant 3}} \theta\Big(\frac{|\xi_j|}{|\xi|}\Big)\sigma(x\,,\xi)$.

Naturellement $\tau(x\,,\xi)$ vérifie (1) et $\sigma_J(x\,,\xi) = \theta\Big(\frac{|\xi_2|}{|\xi|}\Big)\tau(x\,,\xi)$. On a maintenant, en considérant toujours les supports en $\xi \in \mathbf{R}^{nk}$,

$$\operatorname{Supp}\sigma_J(x\,,\xi) \subset \{\epsilon\,|\xi| \leqslant |\xi_2|\ ;\ |\xi_j| \leqslant 2\,|\xi_1| \text{ pour } 2 \leqslant j \leqslant n\}$$

$$\subset \{\epsilon\,|\xi_1| \leqslant |\xi_2| \leqslant 2\,|\xi_1|\ ;\ |\xi_3| \leqslant 2\,|\xi_1|,\ldots,\ |\xi_n| \leqslant 2\,|\xi_1|\}.$$

On appelle Γ ce cône ; il est contenu dans la réunion des cylindres R_ν définis, pour $\nu \geqslant 0$, par $\frac{1}{3}\,2^\nu \leqslant |\xi_1| \leqslant 5.2^\nu$, $\frac{\epsilon}{3}\,2^\nu \leqslant |\xi_2| \leqslant 10.2^\nu$ et $|\xi_3| \leqslant 10.2^\nu,\ldots,\ |\xi_n| \leqslant 10.2^\nu$.

On définit les cylindres élargis R_ν^* en divisant par deux les bornes inférieures et en multipliant par deux les bornes supérieures. En reprenant la méthode précédente et en utilisant une partition dyadique adaptée au recouvrement de Γ par les cylindres R_ν, on est alors conduit à majorer la norme L^p d'une somme du type $\sum_{\nu\geq 0} g(\nu, u, x) K_\nu(u, x)$ où, cette fois,

$$g(\nu, u, x) = (\Delta_{\nu,u} f_1)(\Delta_{\nu,u} f_2)(S_{\nu,u} f_3) \dots (S_{\nu,n} f_n).$$

On utilise une majoration triviale de la forme

$$\Big|\sum_{\nu>0} g(\nu, u, x) K_\nu(u, x)\Big| \leq C(u) \sum_{\nu>0} |g(\nu, u, x)| \leq$$

$$C(u)\Big(\sum_{\nu\geq 0} |\Delta_{\nu,u} f_1|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\nu\geq 0} (\Delta_{\nu,u} f_2|^2\Big)^{1/2} \sup_{\nu\geq 0} |S_{\nu,u} f_3| \dots \sup_{\nu\geq 0} |S_{\nu,u} f_n|$$

et l'on termine comme ci-dessus en tenant compte de la décroissance rapide de $C(u)$.

Ceci termine la preuve du théorème 1.

3. Preuve du théorème 2. Un lemme d'interpolation complexe.

DEFINITION 1. – *Soient $n \geq 1$ un entier et $\omega : \mathbf{R}^{(n+2)k} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction mesurable localement bornée ayant une croissance polynomiale à l'infini.*

On écrira $\omega \in M_n$ si l'opérateur multilinéaire T_ω associé à ω par

$$T_\omega(a_1, \dots, a_n, f)(x) = \int_{\mathbf{R}^{(n+1)k}} e^{ix.(\alpha_1+\dots+\alpha_n+\xi)}\, \omega(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \xi)$$

$$\hat{a}_1(\alpha_1) \dots \hat{a}_n(\alpha_n) \hat{f}(\xi)\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n\, d\xi$$

vérifie la propriété suivante :

$$\forall p_1 \in]1, +\infty[, \dots, \forall p_n \in]1, +\infty[, \forall p \in]1, +\infty[\quad (9)$$

tels que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p_1} + \dots + \dfrac{1}{p_n} + \dfrac{1}{p} \in]0,1[$, *il existe une constante* $C = C(p_1, \dots, p_n, p)$ *telle que*

$$\|T_\omega(a_1, \dots, a_n, f)\|_q \leq C \|\nabla a_1\|_{p_1} \dots \|\nabla a_n\|_{p_n} \|f\|_p .$$

On a utilisé les conventions suivantes : $\alpha_j \in \mathbf{R}^k$, $d\alpha_j$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^k$, $\xi \in \mathbf{R}^k$, $d\xi$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^k$ et $x \in \mathbf{R}^k$. Les normes L^{p_j}, L^p, L^q écrites sont, plus précisément du type $L^{p_j}(\mathbf{R}^k)$ etc.

Le théorème 2 sera prouvé dans le cas $1 < p_j < +\infty$, $1 \leqslant j \leqslant n$ si nous montrons que pour tout symbole classique $\sigma(x, \xi) \in S^n(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$, on a, si $\Delta_\alpha f(\xi) = f(\xi + \alpha) - f(\xi)$,

$$\omega_n(x, \xi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \sigma(x, \xi) \in M_n. \tag{10}$$

La démonstration s'obtient par récurrence sur n. On définit ω_0 par $\omega_0(x, \xi) = \sigma(x, \xi)$ et l'on appelle H_n l'assertion $\omega_n \in M_n$.

Alors H_0 est vérifiée. Il n'y a pas de fonctions a_j et l'on sait qu'un symbole classique d'ordre 0 est borné sur tous les $L^p(\mathbf{R}^k)$, $1 < p < +\infty$.

On se propose de montrer que $H_{n-1} \Longrightarrow H_n$ quand $n \geqslant 1$. Avant d'entrer dans les détails nous allons indiquer des conséquences de H_{n-1} que l'on obtient par interpolation complexe.

LEMME 4. — *Si* H_{n-1} *est satisfaite et si* $\tau(x, \xi) \in S^{n-1}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$, *alors pour tout* $i = 1, 2, \ldots, n$ *et tout* $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\alpha_{i,j} \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \tau(x, \xi) \in M_n. \tag{11}$$

Naturellement $\alpha_{i,j}$ est la j-ième coordonnée de $\alpha_i \in \mathbf{R}^k$. Par symétrie, nous pouvons nous restreindre au cas où $i = j = 1$. Posons

$$\tilde{\tau}(x, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \xi) = \Delta_{\alpha_2} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \tau(x, \xi)$$

et désignons par $T(a_2, \ldots, a_n, f)$ l'opérateur multilinéaire correspondant. Nous savons, par H_{n-1}, que

$$\|T(a_2, \ldots, a_n, f)\|_q \leqslant C \|\nabla a_2\|_{p_2} \ldots \|\nabla a_n\|_{p_n} \|f\|_p .$$

Alors

$$\int_{\mathbf{R}^{(n+1)k}} e^{ix.(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \xi)} \alpha_{1,1} [\Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \tau(x, \xi)] \hat{a}_1(\alpha_1) \ldots$$

$$\ldots \hat{a}_n(\alpha_n) \hat{f}(\xi) \, d\alpha \, d\xi = g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

où $g_1(x) = -\displaystyle\int_{\mathbf{R}^{(n+1)k}} e^{ix.(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \xi)} \alpha_{1,1} \hat{a}_1(\alpha_1)$

$$\tilde{\tau}(x, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \xi) \hat{a}_2(\alpha_2) \ldots \hat{a}_n(\alpha_n) \hat{f}(\xi) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \, d\xi$$

$$= i\left(\frac{\partial}{\partial x_1} a_1\right)(x) \; T(a_2, \ldots, a_n, f)(x)$$

Note. Δ_α est dans toute la suite l'opérateur de différence défini par $(\Delta_\alpha f)(\xi) = f(\xi + \alpha) - f(\xi)$, $\xi \in \mathbf{R}^k$, $\alpha \in \mathbf{R}^k$.

et où $g_2(x) = \int_{\mathbf{R}^{(n+1)k}} e^{ix.(\alpha_1+\ldots+a_n+\xi)} \widetilde{\tau}(x, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \xi+\alpha_1)$

$$\hat{a}_2(\alpha_2) \ldots \hat{a}_n(\alpha_n)(\alpha_{1,1}\, \hat{a}_1(\alpha_1) f(\xi))\, d\alpha\, d\xi$$

$$= -i\, \mathrm{T}\left(a_2, \ldots, a_n, \frac{\partial a_1}{\partial x_1} f\right).$$

Dès lors, il est clair que $g_1 \in \mathrm{L}^q$ et $g_2 \in \mathrm{L}^q$ avec les inégalités désirées sur les normes.

LEMME 5. – *Si* $m_1(\alpha_1) \ldots, m_n(\alpha_n)$ *et* $m(\xi)$ *sont des multiplicateurs bornés de* $\mathcal{F}\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^k)$ *pour tout* $p \in]1, +\infty[$, *alors* $\omega \in \mathrm{M}_n$ *implique* $m_1(\alpha_1) \ldots m_n(\alpha_n)\, m(\xi)\, \omega(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \xi) \in \mathrm{M}_n$.

La preuve est très simple et laissée au lecteur.

LEMME 6. – *Si* H_{n-1} *est satisfaite, si* $\tau(x, \xi) \in \mathrm{S}^{n-1}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$ *est un symbole classique d'ordre* $n-1$ *et si les nombres réels* $t_j \in [0, 1]$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *vérifient* $t_1 + \ldots + t_n = 1$, *alors, pour tout choix des indices* $j_1, \ldots, j_n \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$|\alpha_{1,j_1}|^{t_1} \ldots |\alpha_{n,j_n}|^{t_n}\, \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n}\, \tau(x, \xi) \in \mathrm{M}_n. \qquad (12)$$

On appelle Γ l'ensemble de toutes les suites $\mu = (t_1, \ldots, t_n) \in [0, 1]^n$ telles que $t_1 + \ldots + t_n = 1$ et pour lesquelles (12) est vérifiée. Nous allons montrer que Γ est convexe. Par les lemmes 4 et 5 on sait que Γ contient toutes les suites élémentaires (celles où tous les t_j valent 0 à l'exception d'un seul qui vaut 1). Le lemme 6 sera alors démontré.

Supposons donc que $(s_1, \ldots, s_n) \in \Gamma$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma$ et montrons que si $0 \leqslant t \leqslant 1$, $(ts_1 + (1-t)\, t_1, \ldots, ts_n + (1-t)\, t_n) \in \Gamma$.

Pour cela on appelle z un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}\, z \in [0, 1]$ et l'on définit, si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{nk}$

$$\omega_z(x, \alpha, \xi) = |\alpha_{1,j_1}|^{zs_1+(1-z)t_1} \ldots |\alpha_{n,j_n}|^{zs_n+(1-z)t_n}$$
$$\Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n}\, \tau(x, \xi). \qquad (13)$$

On a $|\omega_z(x, \alpha, \xi)| \leqslant \sup(|\omega_0(x, \alpha, \xi)|, |\omega_1(x, \alpha, \xi)|)$. A l'aide de ω_z on définit, pour tout choix de

$$a_1 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k), \ldots, a_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k), f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k) \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k),$$

$$\mathrm{I}(z) = \int_{\mathbf{R}^{(n+2)k}} e^{ix.(\xi+\alpha_1+\ldots+\alpha_n)}\, \omega_z(x, \alpha, \xi)\, g(x)\, \hat{a}_1(\alpha_1) \ldots$$
$$\ldots \hat{a}_n(\alpha_n)\, \hat{f}(\xi)\, d\alpha\, d\xi\, dx. \qquad (14)$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique sans difficulté pour montrer que $I(z)$ est continue dans la bande $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$ et analytique à l'intérieur.

Si $\operatorname{Re} z = 0$, c'est-à-dire $z = iy$, on peut remarquer que $|\alpha_{1,j_1}|^{iy}, \dots, |\alpha_{n,j_n}|^{iy}$ sont des multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p(\mathbf{R}^k)$ pour tout $p \in]1, +\infty[$; la norme de ces multiplicateurs peut, pour tout p fixé, être majorée par $C_p(1 + |y|)$. Si $N = n + 1$, on a donc, pour $\operatorname{Re} z = 0$, grâce aux lemmes 4 et 5,

$$|(1+z)^{-N} I(z)| \leqslant C(p_1, \dots, p_n, p) \|\nabla a_1\|_{p_1} \dots \|\nabla a_n\|_{p_n} \|f\|_p \|g\|_{q'} \quad (15)$$

en appelant q' l'exposant conjugué de q $\left(\text{défini par } \frac{1}{q} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p}\right)$. On a une inégalité analogue à (15) si $\operatorname{Re} z = 1$.

Il suffit maintenant d'appliquer le principe du maximum à $(1 + z)^{-N} I(z)$ pour conclure que (15) est vraie pour $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$. On se restreint alors à $z \in [0, 1]$ et le lemme 6 est démontré.

4. La preuve du théorème 2.

4.1. *Plan de la démonstration.*

Une partition de l'identité dans l'espace $\mathbf{R}^{(n+1)k}$ des suites $(\xi, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ permettra de décomposer $\omega_n(x, \xi, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (défini par (10)) en une somme finie de morceaux. Pour ces morceaux il n'y aura que deux possibilités :

(a) celui pour lequel $|\xi|$ est beaucoup plus grand que $|\alpha|$ conduira à un symbole classique d'ordre 0 définissant un opérateur multinileáire sur $\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_{1,j_1}}, \dots, \frac{\partial a_n}{\partial x_{n,j_n}}, f\right)$. L'estimation découlera alors du théorème 1.

(b) les morceaux pour lesquels $|\xi| \leqslant C(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|)$ nécessiteront une analyse subtile utilisant le lemme 6. Pour des raisons techniques nous procéderons à une première partition de l'unité dans chaque espace $\mathbf{R}^k$ pour choisir la plus grande des coordonnées des vecteurs α_j ou ξ correspondants. Ensuite nous appliquerons le programme décrit ci-dessus.

4.2. *Une première partition.*

On appelle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ une fonction fixée, égale à 1 sur $|\xi| \leqslant n + 1$. On écrit

$$\sigma(x, \xi) = \sigma_0(x, \xi) + \sigma_1(x, \xi) \quad \text{où} \quad \sigma_0(x, \xi) = \sigma(x, \xi)\, \varphi(\xi) .$$

Nous nous proposons de montrer que l'on peut se restreindre à supposer que $\sigma(x, \xi) = \sigma_1(x, \xi)$. Posons, en effet,

$$m_0(x, \xi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \sigma_0(x, \xi)$$

et montrons que $m_0 \in \mathrm{M}_n$.

En retournant au noyau associé au symbole $\sigma_0(x, \xi)$, on a $\sigma_0(x, \xi) = \int_{\mathbf{R}^k} \mathrm{K}(x, u)\, e^{-iu \cdot \xi}\, du$. Grâce à la régularité de $\sigma_0(x, \xi)$, il vient que $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}^k} |\mathrm{K}(x, u)|$ a une décroissance rapide à l'infini. L'opérateur multilinéaire M_0 associé à m_0 s'écrit maintenant

$$\mathrm{M}_0(a_1, \ldots, a_n, f)(x) = (2\pi)^{(n+1)k} \int_{\mathbf{R}^k} f(x-u)\,(a_1(x-u) - a_1(x)) \ldots$$
$$\ldots (a_n(x-u) - a_n(x))\, \mathrm{K}(x, u)\, du .$$

Les inégalités évidentes $\|a_j(x-u) - a_j(x)\|_{\mathrm{L}^{p_j}(dx)} \leqslant |u|\, \|\nabla a_j\|_{\mathrm{L}^{p_j}(dx)}$ entraînent le résultat cherché.

Posons $m_1(x, \xi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \sigma_1(x, \xi)$.
On a évidemment $m_1 = 0$ dès que $|\xi| \leqslant 1$, $|\alpha_1| \leqslant 1, \ldots, |\alpha_n| \leqslant 1$.

4.3. *Une seconde partition (choix de la coordonnée dominante).*

Choisissons des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^k \setminus \{0\})$ telles que

$$\text{chaque } \varphi_j \text{ soit homogène de degré } 0 \tag{16}$$

$$1 = \varphi_1 + \ldots + \varphi_k \quad \text{sur} \quad \mathbf{R}^k \setminus \{0\} \tag{17}$$

$$\varphi_j(\xi) \neq 0 \Longrightarrow |\xi_j| \geqslant \frac{1}{2} \sup(|\xi_1|, \ldots, |\xi_k|) . \tag{18}$$

On écrit alors $\sigma(x, \xi) = \varphi_1(\xi)\, \sigma(x, \xi) + \ldots + \varphi_n(\xi)\, \sigma(x, \xi)$. Puisque $\sigma(x, \xi) = 0$ sur $|\xi| \leqslant n + 1$, on a

$$\varphi_j(\xi)\, \sigma(x, \xi) = \xi_j\, \tau_j(x, \xi)$$

où $\tau_j \in \mathrm{S}^{n-1}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$. On peut évidemment se restreindre au cas d'un seul terme. On a alors, pour tout $\tau \in \mathrm{S}^{n-1}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$, le résultat suivant.

LEMME 7. – *Si* H_{n-1} *est vérifiée, alors*

$$\Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} (\xi_j \tau(x , \xi)) - \xi_j \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \tau(x , \xi) \in M_n \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Il suffit évidemment de supposer $j = 1$. On a

$$\Delta_{\alpha_n} (\xi_1 \tau(x , \xi)) = \alpha_{n,1} \tau(x , \xi + \alpha_n) + \xi_1 \Delta_{\alpha_n} \tau(x , \xi) .$$

Or $\Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_{n-1}} (\alpha_{n,1} \tau(x , \xi + \alpha_n)) = \alpha_{n,1} \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_{n-1}} \tau(x , \xi + \alpha_n)$. qui appartient à M_n (comme on le voit en reprenant la démonstration du lemme 4). On est réduit à considérer $\Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_{n-1}} (\xi_1 \Delta_{\alpha_n} \tau(x , \xi))$ et l'on répète l'argument jusqu'à ce que l'on obtienne

$$\xi_1 \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \tau(x , \xi).$$

Il suffit donc de prouver que pour tout $\tau \in S^{n-1} (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$ *et tout* $j = 1 , \ldots , n$, $\xi_j \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \tau(x , \xi) \in M_n$.

On a $$1 = \left[\sum_1^k \varphi_j(\xi) \right] \left[\sum_1^k \varphi_j(\alpha_1) \right] \ldots \left[\sum_1^k \varphi_j(\alpha_n) \right] = \Sigma \varphi_{j_0} (\xi) \varphi_{j_1} (\alpha_1) \ldots \varphi_{j_n} (\alpha_n).$$

Il nous suffira de démontrer que chaque terme

$$\varphi_{j_0}(\xi) \varphi_{j_1}(\alpha_1) \ldots \varphi_{j_n} (\alpha_n) \xi_j \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \tau(x , \xi) \in M_n .$$

Par symétrie, on peut se restreindre au cas où $j_0 = j_1 = \ldots = j_n = 1$ et étudier, pour $\tau \in S^{n-1} (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$,

$$\pi(x , \xi , \alpha) = \xi_j \varphi_1 (\xi) \varphi_1 (\alpha_1) \ldots \varphi_1 (\alpha_n) \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \tau(x , \xi) . \qquad (19)$$

Nous allons prouver que $\pi(x , \xi , \alpha) \in M_n$.

Pour aller plus loin, il nous faut partout remplacer les vecteurs par des scalaires. En particulier, les différences vectorielles Δ_{α_j} vont être (dans certains cas) remplacées par des différences où seulement une coordonnée varie. A cet effet, posons $\widetilde{\alpha}_{j,m} = (0, \ldots, 0, \alpha_{j,m} , 0, \ldots , 0)$; le $\alpha_{j,m}$ occupant la m-ième position. On pose aussi $\widetilde{\alpha}_{j,0} = 0$. On a alors

$$\Delta_{\alpha_1} \tau(x , \xi) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant k} \Delta_{\widetilde{\alpha}_{1,m}} \tau(x , \xi + \widetilde{\alpha}_{1,1} + \ldots + \widetilde{\alpha}_{1,m-1}) .$$

Si l'on répète cette identité, il vient

$$\Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n} \tau(x , \xi) = \sum_{s=(m_1, \ldots, m_n)} \!\!\!\ldots \sum \Delta_{\widetilde{\alpha}_{1,m_1}} \circ \ldots \circ \Delta_{\widetilde{\alpha}_{n,m_n}} \tau(x , \xi + s(\alpha)) ;$$

$$s(\alpha) = \widetilde{\alpha}_{1,1} + \ldots + \widetilde{\alpha}_{1,m_1-1} + \ldots + \widetilde{\alpha}_{n,1} + \ldots + \widetilde{\alpha}_{n,m_n-1} \cdot \qquad (20)$$

La sommation porte sur $s = (m_1 , \ldots , m_n) \in I = \{1, \ldots , k\}^n$. On a donc

$$\pi(x\,,\xi\,,\alpha) = \sum_{s\in I} \pi_s(x\,,\xi\,,\alpha) \tag{21}$$

où $\pi_s(x\,,\xi\,,\alpha) = \xi_j\varphi_1(\xi)\ldots\varphi_1(\alpha_n)\,\Delta_{\alpha_1,m_1}\circ\ldots\circ\Delta_{\alpha_{n,m_n}}\tau(x\,,\xi+s(\alpha))$
et $s(\alpha) = \widetilde{\alpha}_{1,1} + \ldots + \widetilde{\alpha}_{1,m_1-1} + \ldots + \widetilde{\alpha}_{n,1} + \ldots + \widetilde{\alpha}_{n,m_n-1}$.

4.4. *La dernière partition de l'identité.*

Elle a pour but de comparer les tailles relatives de $|\xi|$ et $|\alpha|$. On appelle $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ une fonction valant 1 sur $[-10\,\mathrm{kn}\,,10\,\mathrm{kn}]$ et l'on définit

$$\Omega(x\,,\xi\,,\alpha) = \left[1-\lambda\left(\frac{\xi_1}{\alpha_{1,1}}\right)\right]\ldots\left[1-\lambda\left(\frac{\xi_1}{\alpha_{n,1}}\right)\right]\pi(x\,,\xi\,,\alpha)\,. \tag{22}$$

Cette définition est rendue possible grâce au choix des coordonnées dominantes de ξ et α_j.

Nous allons d'abord montrer que $\Omega \in \mathrm{M}_n$. Ensuite nous examinerons le cas des termes du membre de droite de (22) ; $\pi(x\,,\xi\,,\alpha)$ étant excepté, tous les autres appartiennent à M_n. Il en résultera que $\pi(x\,,\xi\,,\alpha) \in \mathrm{M}_n$.

4.5. *La preuve de* $\Omega(x\,,\xi\,,\alpha) \in \mathrm{M}_n$.

La décomposition (21) de $\pi(x\,,\xi\,,\alpha)$ nous amène à poser

$$\Omega_s(x\,,\xi\,,\alpha) = \xi_j\left[1-\lambda\left(\frac{\xi_1}{\alpha_{1,1}}\right)\right]\ldots$$
$$\left[1-\lambda\left(\frac{\xi_1}{\alpha_{n,1}}\right)\right]\Delta_{\alpha_{1,m_1}}\circ\ldots\circ\Delta_{\alpha_{n,m_n}}\tau(x\,,\xi+s(\alpha))\,.$$

On a alors

$$\Omega(x\,,\xi\,,\alpha) = \sum_{s\in I}\Omega_s(x\,,\xi\,,\alpha)\,. \tag{23}$$

On aura $\Omega(x\,,\xi\,,\alpha) \in \mathrm{M}_n$ dès que l'on aura prouvé le résultat suivant.

PROPOSITION 1. — *Pour toute suite* $s = (m_1\,,\ldots,m_n) \in \mathrm{I}$, $\dfrac{\Omega_s(x\,,\xi\,,\alpha)}{\alpha_{1,m_1}\,\alpha_{2,m_2}\ldots\alpha_{n,m_n}}$ *est un symbole classique d'ordre* 0 *par rapport aux variables* $x \in \mathbf{R}^k$, $\xi \in \mathbf{R}^k$ *et* $\alpha \in \mathbf{R}^{nk}$.

Cela signifie que les inégalités (1) sont satisfaites par ce symbole. En particulier le théorème 1 s'applique et $\Omega_s(x,\xi,\alpha) \in \mathrm{M}_n$. Pour démontrer la proposition 1, on appelle $\Delta \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{nk}$ le cône fermé défini par $|\xi_1| \geqslant 10\,\mathrm{kn}\,|\alpha_{j,1}|$, $|\alpha_{j,1}| \geqslant \frac{1}{2}\,|\alpha_{j,\ell}|$ et

$$|\xi_1| \geqslant \frac{1}{2}\,|\xi_\ell|, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant k, \quad 1 \leqslant j \leqslant n\,.$$

Alors $\Delta \setminus \{0\}$ est contenu dans le cône ouvert $\widetilde{\Delta}$ défini par $|\xi_1| > \frac{1}{3n}\,|\xi|$ et $|\xi_1| > 4n\,|\alpha_j|$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Il existe donc une fonction $\theta_1(\xi,\alpha) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{(n+1)k}\setminus\{0\})$ qui est homogène de degré 0 et telle que

$$\theta_1 = 1 \quad \text{sur} \quad \Delta\setminus\{0\}, \ \text{support}\ \theta_1 \subset \widetilde{\Delta} \cup \{0\}\,. \tag{24}$$

En particulier $\theta_1 = 1$ sur le support de $\Omega_s(x,\xi,\alpha)$. Il n'y a pas à se préoccuper de ce qui se passe près de l'origine car $\Omega_s(x,\xi,\alpha) = 0$ si $|\xi| \leqslant 1$ et $|\alpha_j| \leqslant 1$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, tout comme $\pi(x,\xi,\alpha)$. En particulier si l'on appelle $\theta_2(\xi_1)$ une fonction indéfiniment dérivable, nulle au voisinage de 0 et égale à 1 quand $|\xi_1| \geqslant 1$, on aura aussi $\theta_2(\xi_1) = 1$ sur le support de $\Omega_s(x,\xi,\alpha)$. Posons $\theta = \theta_1\theta_2$ et remarquons que $\theta = 1$ sur le support de $\Omega_s(x,\xi,\alpha)$. On peut donc écrire $\Omega_s(x,\xi,\alpha) = \theta^{n+1}\,\Omega_s(x,\xi,\alpha) = \theta(\xi,\alpha)\left[1-\lambda\left(\frac{\xi_1}{\alpha_{1,1}}\right)\right]\ldots$ $\theta(\xi,\alpha)\left[1-\lambda\left(\frac{\xi_1}{\alpha_{n,1}}\right)\right]\xi_j\,\theta(\xi,\alpha)\,\Delta_{\widetilde{\alpha}_{1,m_1}}\circ\ldots\circ\Delta_{\widetilde{\alpha}_{n,m_n}}\;\tau(x,\xi+s(\alpha)).$

Remarquons tout d'abord que chaque produit $\theta(\xi,\alpha)\left[1-\lambda\left(\frac{\xi_1}{\alpha_{j,1}}\right)\right]$ est un symbole classique. On a en effet $1-\lambda(x) = \mu\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbf{R}$, $\mu \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$; pour toute fonction $\mu \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, $\theta(\xi,\alpha)\,\mu\left(\frac{\alpha_{j,1}}{\xi_1}\right)$ est un symbole classique car c'est une fonction indéfiniment dérivable sur tout l'espace $\mathbf{R}^{(n+1)k}$ qui est, de plus, homogène de degré 0 en dehors d'une boule de centre 0.

Il reste à examiner le terme

$$\xi_j\theta(\xi,\alpha)\;\Delta_{\widetilde{\alpha}_{1,m_1}}\circ\ldots\circ\Delta_{\widetilde{\alpha}_{n,m_n}}\,\tau(x,\xi+s(\alpha))\,.$$

On se sert, à cet effet, de la remarque suivante

LEMME 8. – *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^k)$, *on a*

$$\Delta_{\widetilde{\alpha}_{1,m_1}} \circ \ldots \circ \Delta_{\widetilde{\alpha}_{n,m_n}} f(\xi) = \alpha_{1,m_n} \ldots \alpha_{n,m_n} \int_{0 \leqslant t_j \leqslant 1} \!\!\ldots\! \int \frac{\partial}{\partial \xi_{m_1}} \ldots$$

$$\ldots \frac{\partial}{\partial \xi_{m_n}} f(\xi + t_1 \widetilde{\alpha}_{1,m_1} + \ldots + t_n \widetilde{\alpha}_{n,m_n})\, dt_1 \ldots dt_n \,. \tag{25}$$

La vérification de (25) est immédiate et laissée au lecteur. Il suffit maintenant d'observer que si $\tau \in S^{n-1}$, $\dfrac{\partial^n \tau}{\partial \xi_{m_1} \ldots \partial \xi_{m_n}} \in S^{-1}$ et que pour tout symbole $\rho = \rho(x, \xi) \in S^{-1}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$, on a, uniformément par rapport à $t_j \in [0, 1]$, $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\theta(\xi, \alpha)\, \xi_j \rho(x, \xi + s(\alpha) + t_1 \widetilde{\alpha}_{1,m_1} + \ldots + t_n \widetilde{\alpha}_{n,m_n}) \in S^0 \,. \tag{26}$$

Cette dernière remarque résulte de ce que

$$|s(\alpha) + t_1 \widetilde{\alpha}_{1,m_1} + \ldots + t_n \widetilde{\alpha}_{n,m_n}| \leqslant |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$$

et de ce que, sur le support de $\theta(\xi, \alpha)$, on a donc

$$|\xi + s(\alpha) + t_1 \widetilde{\alpha}_{1,m_1} + \ldots + t_n \widetilde{\alpha}_{n,m_n}| \geqslant |\xi| - \frac{|\xi_1|}{4} \geqslant 3\frac{|\xi_1|}{4} \geqslant \frac{|\xi|}{4n}.$$

Les coefficients de la matrice de $s : \mathbf{R}^{nk} \longrightarrow \mathbf{R}^k$ valent 0 ou 1 et les détails de la vérification de (26) ne présentent plus de difficulté. Nous venons de montrer que $\Omega(x, \xi, \alpha) \in M_n$ en utilisant essentiellement le théorème 1.

4.6. *La preuve de* $\prod_{j \in J} \lambda\Big(\dfrac{\xi_1}{\alpha_{j,1}}\Big)\, \pi(x, \xi, \alpha) \in M_n$.

Nous désignons par J une partie non vide de $\{1, \ldots, n\}$ et nous proposons de prouver ce qui est annoncé. Cette fois le théorème 1 n'est plus utilisé et tout repose sur l'hypothèse de récurrence et le lemme 6 (interpolation complexe).

Supposons que les fonctions λ aient été choisies paires. Alors on a

LEMME 9. – *Pour tout* $\epsilon > 0$, *on peut trouver une fonction* $\eta(u) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ *telle que, pour tout* $t \neq 0$,

$$|t|^{\epsilon}\,\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{iu}\,\eta(u)\,du. \tag{27}$$

On peut se restreindre à $t > 0$. On pose alors $t = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, et l'on remarque que $x \longrightarrow e^{\epsilon x}\lambda(e^x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

On retourne à la définition (19) de $\pi(x, \xi, \alpha)$ et cette fois, on n'utilise pas (21). Grace au lemme 5 tout revient à prouver

$$|\xi_1| \prod_{j\in J} \lambda\left(\frac{\xi_1}{\alpha_{j,1}}\right) \Delta_{\alpha_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\alpha_n}\, \tau(x, \xi) \in M_n \tag{28}$$

pour tout symbole $\tau(x, \xi) \in S^{n-1}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$.

La réduction se fait en remarquant que

$$\frac{\xi_j}{|\xi_1|}\,\varphi_1(\xi),\ \varphi_1(\alpha_1),\ \ldots,\ \varphi_n(\alpha_n)$$

sont des multiplicateurs de $\mathcal{F} L^p(\mathbf{R}^k)$ et en utilisant le lemme 5.

Désignons par $p \geqslant 1$ le cardinal de J. On écrit

$$|\xi_1| \prod_{j\in J} \lambda\left(\frac{\xi_1}{\alpha_{j,1}}\right) = \prod_{j\in J} |\alpha_{j,1}|^{1/p} \prod_{j\in J} \left|\frac{\xi_1}{\alpha_{j,1}}\right|^{1/p} \lambda\left(\frac{\xi_1}{\alpha_{j,1}}\right). \tag{29}$$

En utilisant le lemme 9, on peut développer cette dernière expression en

$$|\xi_1| \prod_{j\in J} \lambda\left(\frac{\xi_1}{\alpha_{j,1}}\right) =$$

$$\prod_{j\in J} |\alpha_{j,1}|^{1/p} \int_{\mathbf{R}^p} \prod_{j\in J} \left|\frac{\xi_1}{\alpha_{j,1}}\right|^{iu_j} \eta(u_{j_1}) \ldots \eta(u_{j_p})\, du_{j_1} \ldots du_{j_p}\,. \tag{30}$$

En utilisant cette identité, (28) résulte immédiatement des lemmes 5 et 6.

5. Preuve du théorème 2 quand $p_1 = \ldots = p_n = +\infty$.

La démonstration s'obtient par les méthodes de variable réelle introduites par A. Calderón et A. Zygmund et développées par leur Ecole. Ces méthodes reposent sur l'étude de la régularité du noyau associé à l'opérateur étudié. Cette régularité et une estimation de la norme de l'opérateur (agissant sur L^2, par exemple) permettent de déduire que l'opérateur est continu sur L^p, de type faible L^1 etc.

Dans notre cas, l'opérateur est multilinéaire. L'estimation obtenue au § 4 sera cependant suffisante pour appliquer les méthodes de variable réelle et passer au cas $p_1 = \ldots = p_n = +\infty$.

Nous aurons besoin d'une définition et d'une proposition qui permettent d'élargir un peu le problème.

DEFINITION 2. — *Un noyau de Calderón-Zygmund est une fonction* $K(x, y)$, $x \in \mathbf{R}^k$, $y \in \mathbf{R}^k$, $y \neq x$, *à valeurs complexes, continue sur* $y \neq x$ *et possédant les quatre propriétés suivantes* :

— *il existe une constante* C *telle que* $|K(x, y)| \leqslant C\,|y - x|^{-k}$; (31)

— *les gradients* $\nabla_x K(x, y)$ *et* $\nabla_y K(x, y)$, (32)

pris au sens des distributions, sont en fait des fonctions localement bornées sur $y \neq x$ *telles qu'il existe une constante* C *pour laquelle*

$$|\nabla_x K(x, y)| \leqslant C\,|y - x|^{-k-1} \quad \text{et}$$

$$|\nabla_y K(x, y)| \leqslant C\,|y - x|^{-k-1} ;$$

— *pour toute fonction* $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ (33)

$$(\mathrm{T}f)(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geqslant \epsilon} K(x, y) f(y)\, dy$$

existe presque-partout ;

— *il existe une constante* C *pour laquelle* (34)

$$\|\mathrm{T}f\|_2 \leqslant C\,\|f\|_2 \quad (f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)).$$

Si K possède ces quatre propriétés, nous désignerons par $\|K\|$ la borne inférieure des constantes C figurant dans (31), (32) et (34).

On peut, si on le désire, se ramener à des noyaux

$$K(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$$

grâce au procédé de troncation suivant. On fixe une fonction radiale $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$, égale à 1 au voisinage de 0 et l'on pose, si $\nu \geqslant 1$, $\varphi_\nu(x, y) = 1 - \varphi(\nu x - \nu y)$ et $K_\nu(x, y) = \varphi_\nu(x, y)\,K(x, y)$. On appelle T_ν l'opérateur associé à K_ν. Il n'est pas difficile de vérifier que $\|K_\nu\| \leqslant C(\varphi)\|K\|$. Seule l'inégalité (34) n'est pas triviale et on l'obtient en remarquant que φ est la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$; ce qui permet d'écrire

$$\varphi_\nu(x,y) = 1 - \int_{\mathbf{R}^k} e^{i\nu x.u}\, e^{-i\nu y.u}\, \psi(u)\, du\,.$$

Il suffit alors de remarquer que les noyaux $K(x,y)$ et $e^{i\nu x.u}\, e^{-i\nu y.u}\, K(x,y)$ définissent des opérateurs de $L^2(\mathbf{R}^k)$ ayant la même norme.

En ce qui concerne la façon dont K_ν approche K, on a

$$\lim_{\nu\to+\infty} \int K_\nu(x,y)\, f(y)\, dy = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{|y-x|\geq\epsilon} K(x,y)\, f(y)\, dy \tag{35}$$

au sens suivant : chaque fois que la limite écrite au membre de droite de (35) existe, celle écrite au membre de gauche existe et lui est égale.

Il est remarquable que l'ensemble des quatre propriétés (31), (32), (33) et (34) définissant les noyaux de Calderón-Zygmund soit équivalent à un autre groupe que nous allons maintenant définir.

Definition 3. – *Soit* $q \in [1, +\infty]$ *et* $f : \mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{C}$ *une fonction appartenant localement à* $L^q(\mathbf{R}^k)$. *Pour tout cube* $Q \subset \mathbf{R}^k$, *on pose*
$M_q(f\,;Q) = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|^q\, dx\right)^{1/q}$.

Proposition 2. – *Soit* $K(x,y)$, $x \in \mathbf{R}^k$, $y \in \mathbf{R}^k$, $y \neq x$, *une fonction vérifiant les propriétés* (31), (32) *et* (33) *de la définition des noyaux de Calderón-Zygmund et soient* $1 < q \leq r < +\infty$ *deux nombres réels. Alors le noyau* $K(x,y)$ *définit un opérateur* T *borné sur* $L^2(\mathbf{R}^k)$ *si et seulement si il existe une constante* C *telle que pour tout cube* Q *et toute fonction* $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ *dont le support est contenu dans* Q, *on a*

$$M_q(\mathrm{Tf}\,;Q) \leq C\, M_r(f\,;Q)\,. \tag{36}$$

De plus on a l'inégalité

$$\|T\|_{2,2} \leq C(k,q,r)\, C \tag{37}$$

où $\|T\|_{2,2}$ *est la norme de* $T : L^2(\mathbf{R}^k) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^k)$, $C(k,q,r)$ *est une fonction ne dépendant que de* k, q *et* r *; et* C *est la constante figurant dans* (31), (32) *et* (36).

La démonstration qui suit est due à J.O. Strömberg [7].

Nous ne nous servirons que de l'implication

(31), (32), (33) et (36) $\Longrightarrow$ (34).

Mais par souci de symétrie nous allons d'abord prouver (36) pour un noyau de Calderón-Zygmund K.

Si $q \leqslant r$ et si $g : \mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{C}$ appartient localement à L^r, on a évidemment $M_q(g\,;Q) \leqslant M_r(g\,,Q)$.

Il en résulte que

$$M_q(\mathrm{T}f\,;Q) \leqslant M_r(\mathrm{T}f\,;Q) \leqslant \frac{\|\mathrm{T}f\|_r}{|Q|^{1/r}} \leqslant \frac{C\|f\|_r}{|Q|^{1/r}} = CM_r(f\,;Q)$$

puisque T est borné sur L^r et que f est portée par Q.

Venons en à la preuve de (31), (32), (33) et (36) $\Longrightarrow$ (34).

Appelons $K_\nu(x\,,y)$ les noyaux tronqués associés à $K(x\,,y) : K_\nu(x\,,y) = \varphi_\nu(x\,,y)\,K(x\,,y) = K(x\,,y) -$

$$\int_{\mathbf{R}^k} e^{i\nu x.u}\, e^{-i\nu y.u}\, K(x\,,y)\ \psi(u)\,du\ ;\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)\ .$$

Il est immédiat de vérifier, grâce à cette dernière expression que les opérateurs T_ν associés à K_ν vérifient (36) uniformément en ν. Si nous montrons que $\|T_\nu f\|_2 \leqslant C\|f\|_2$ où C ne dépend pas de ν, le lemme de Fatou donnera $\|\mathrm{T}f\|_2 \leqslant \underline{\lim}\ \|T_\nu f\|_2 \leqslant C\|f\|_2$. On peut donc supposer que $K(x\,,y)$ est remplacé par $K_\nu(x\,,y)$ et désormais nous n'écrirons plus l'indice ν.

On a alors, pour tout noyau $K(x\,,y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$ vérifiant (31) et (32) pour tout cube Q et pour toute fonction $f \in L^1(\mathbf{R}^k)$,

$$\forall x_1\,,x_2\,,x_3 \in Q,\ \int_{^c\tilde{Q}} |K(x_1\,,y) - K(x_2\,,y)\,\|f(y)|\,dy \leqslant C_1 f^*(x_3)\,. \tag{38}$$

On a désigné par $\tilde{Q}$ le cube de même centre que Q et de côté double et par f^* la fonction maximale de Hardy et Littlewood de f.

Pour montrer l'inégalité classique (38) on majore d'abord $|K(x_1\,,y) - K(x_2\,,y)|$ par $Cd\,|x_3 - y|^{-n-1}$; d est le côté de Q et C ne dépend que de la dimension. Ensuite on continue comme dans [6] p. 29.

Pour démontrer (37), nous allons rappeler la définition de $g^\#(x)$ pour une fonction g localement intégrable. On pose

$$g^\#(x) = \sup_{Q \ni x} \left\{ \inf_{c\in\mathbf{C}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |g(t) - c\,|\,dt \right\}.$$

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ et $g = \mathrm{T}(f)$. Pour montrer (37), il suffit de montrer que $\|g^\#\|_2 \leqslant C\|f\|_2$ car on a, pour toute fonction

$$g \in L^2(\mathbf{R}^k), \ \|g\|_2 \leqslant C' \|g^\#\|_2$$

([5] p. 153) par un théorème de Fefferman et Stein. Les hypothèses faites sur f et $K(x,y)$ assurent bien que $g \in L^2(\mathbf{R}^k)$ sans permettre toutefois une évaluation précise de $\|g\|_2$.

Définissons $M_r^*(f)(x) = \sup_{Q \ni x} M_r(f; Q)$.

LEMME 10. – *Si le noyau tronqué* $K(x, y)$ *vérifie* (31), (32) *et* (36), *pour toute fonction* $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$, *on a*

$$(Tf)^\# (x) \leqslant C M_r^*(f)(x) \tag{39}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^k$; C *ne dépend que de* q, r, k *et des constantes figurant dans les seconds membres de* (31), (32) *et* (36).

La preuve du lemme 10 est immédiate. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^k$, $Q \ni x_0$ un cube, $\tilde{Q}$ le cube double et $\tilde{\tilde{Q}}$ le double de $\tilde{Q}$. On peut décomposer f en $f = f_1 + f_2$ où $f_j \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$, $|f_j| \leqslant |f|$, support $f_1 \subset \tilde{\tilde{Q}}$ et $f_2 = 0$ sur $\tilde{Q}$. Posons $c_Q = (Tf_2)(x_0)$. On a, grâce à (38),

$$|T(f_2)(x) - T(f_2)(x_0)| \leqslant C f_2^*(x_0) \leqslant C f^*(x_0)$$

pour tout $x \in Q$. Par ailleurs

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T(f_1)(x)|\, dx \leqslant \frac{4^n}{|\tilde{\tilde{Q}}|} \int_{\tilde{\tilde{Q}}} |T(f_1)(x)|\, dx \leqslant$$

$$4^n M_q(T(f_1)\,;\tilde{\tilde{Q}}) \leqslant C M_r(f_1\,;\tilde{\tilde{Q}}) \leqslant C M_r^*(f)(x_0).$$

Donc

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T(f)(x) - c_Q|\, dx \leqslant C f^*(x_0) + C M_r^*(f)(x_0) \leqslant 2 C M_r^*(f)(x_0).$$

Il suffit maintenant de prendre la borne supérieure sur l'ensemble des $Q \ni x_0$.

Si $r < 2$, la preuve est terminée car, grâce au théorème de Hardy et Littlewood sur la fonction maximale usuelle et à la remarque que $M_r^*(f)(x) = [(|f|^r)^*]^{1/r}(x)$, on a $\|M_r^*(f)\|_2 \leqslant C(r) \|f\|_2$.

Si $r \geqslant 2$, on peut appeler r_1 un nombre réel dépassant r et conclure du lemme 10 que $T : L^{r_1}(\mathbf{R}^k) \longrightarrow L^{r_1}(\mathbf{R}^k)$ est un opérateur borné. Cela suffit pour appliquer la théorie (classique) de Calderón-Zygmund ([6] p. 31) et pour démontrer que T envoie L^1 dans L^1_{faible}. Alors T envoie L^2 dans L^2 par interpolation.

Il reste à appliquer la proposition 2 au théorème 2 quand $p_1 = \ldots = p_n = +\infty$. Pour définir un opérateur pseudo-différentiel à l'aide d'un noyau il est commode de tronquer le symbole correspondant.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ une fonction égale à 1 au voisinage de 0 et soit $\varphi_\nu(\xi) = \varphi(\nu^{-1}\xi)$, $\nu \geqslant 1$. On définit $\tau_\nu(x,\xi) = \tau(x,\xi)\varphi_\nu(\xi)$ et l'on appelle $\mathrm{L}_\nu(x,y)$ le noyau correspondant. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$, $(\mathrm{T}f)(x) = \int e^{ix\cdot\xi}\,\tau(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \mathrm{L}_\nu(x,y) f(y)\,dy$.

En particulier si $a_1 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k), \ldots, a_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$,

$$(\mathrm{T}(a_1(x) - a_1(.)) \ldots (a_n(x) - a_n(.))f(.))(x)$$
$$= \lim_{\nu\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^k} \mathrm{L}_\nu(x,y)(a_1(x) - a_1(y)) \ldots (a_n(x) - a_n(y)) f(y)\,dy\,.$$

Il suffira d'étudier le cas d'un symbole tronqué puis d'appliquer le lemme de Fatou pour passer au cas général. Supposons donc $\|\nabla a_j\|_\infty \leqslant 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. On vérifie sans peine que, uniformément en $\nu \geqslant 1$, $|\mathrm{L}_\nu(x,y)| \leqslant \mathrm{C}|y-x|^{-k-n}$ et que

$$|\nabla_x \mathrm{L}_\nu(x,y)| \leqslant \mathrm{C}\,|y-x|^{-k-n-1}\,,\ |\nabla_y \mathrm{L}_\nu(x,y)| \leqslant \mathrm{C}\,|y-x|^{-k-n-1}$$

quand L_ν est le noyau d'un o.Ψ.d. d'ordre n.

Oublions l'indice ν et posons

$$\mathrm{K}(x,y) = (a_1(x) - a_1(y)) \ldots (a_n(x) - a_n(y))\,\mathrm{L}(x,y)\,.$$

On a $\mathrm{K}(x,y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k)$ et $\mathrm{K}(x,y)$ vérifie, uniformément en ν, (31) et (32).

Il reste à prouver (36). Soit Q un cube de côté d et de centre x_0. Appelons $\widetilde{\mathrm{Q}}$ le cube double et $\chi(x)$ une fonction appartenant à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$, égale à 1 sur Q, dont le support est contenu dans $\widetilde{\mathrm{Q}}$ et telle que $\|\nabla\chi\|_\infty \leqslant \dfrac{\mathrm{C}}{d}$. Posons $\alpha_j(x) = (a_j(x) - a_j(x_0))\,\chi(x)$. Si $x \in \mathrm{Q}$ et $y \in \mathrm{Q}$ on a évidemment $\alpha_j(x) - \alpha_j(y) = a_j(x) - a_j(y)$. Par ailleurs $\|\nabla\alpha_j\|_\infty \leqslant \|a_j(x) - a_j(x_0)\|_{\mathrm{L}^\infty(\widetilde{\mathrm{Q}})}\|\nabla\chi\|_\infty + \|\chi\|_\infty\|\nabla a_j\|_\infty \leqslant \mathrm{C}$ si nous supposons $\|\nabla a_j\|_\infty \leqslant 1$. On a donc $\|\nabla\alpha_j\|_p \leqslant \mathrm{C}|\mathrm{Q}|^{1/p}$. Soit T_Q l'opérateur associé au noyau

$$(\alpha_1(x) - \alpha_1(y)) \ldots (\alpha_n(x) - \alpha_n(y))\mathrm{L}(x,y)\,.$$

Si f est supportée par Q et $x \in \mathrm{Q}$, on a clairement $\mathrm{T}(f)(x) = \mathrm{T}_\mathrm{Q}(f)(x)$ et les résultats du §4 donnent si $\dfrac{n}{p} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q}$, $1 < p < +\infty$,

$$\left(\int_Q |T(f)|^q\,dx\right)^{1/q} = \left(\int_Q |T_Q(f)|^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^k} |T_Q(f)|^q\,dx\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C\,\|\nabla\alpha_1\|_p \ldots \|\nabla\alpha_n\|_p\,\|f\|_r \leqslant C'\,|Q|^{\frac{n}{p}}\|f\|_r = C'\,|Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\|f\|_r$$

ce qui est exactement (36).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.P. CALDERON, Commutators of singular integral- operators, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, 53 (1965), 1 092-1 099.

[2] A.P. CALDERON, Cauchy integral on Lipschitz curves and related operators, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, USA, Vol. 74, No. 4 (1977) 1324-1327.

[3] R.R. COIFMAN and Y. MEYER, On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 212 (1975), 315-331.

[4] R.R. COIFMAN et Y. MEYER, Commutateurs d'intégrales singulières, *Tracts du groupe d'analyse Harmonique d'Orsay.*

[5] Ch. FEFFERMAN, and E.M. STEIN, H^p spaces of several variables, *Acta Math.*, 129 (1972), 137-193.

[6] E.M. STEIN, Singular integrals and differentiability properties of functions, *Princeton Math. Ser.*, n° 30, Princeton Univ. Press.

[7] J.O. STRÖMBERG, (Inst. Mittag-Leffler), Communication orale.

[8] A. ZYGMUND, Trigonometric series. Vol. I and II, Cambridge University Press.

Manuscrit reçu le 15 juin 1977
Proposé par J.P. Kahane .

R. COIFMAN et Y. MEYER ,
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.