ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS FEYEL
ARNAUD DE LA PRADELLE

Topologies fines et compactifications associées à certains espaces de Dirichlet

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 4 (1977), p. 121-146
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_4_121_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 4 (1977), 121-146.

TOPOLOGIES FINES ET COMPACTIFICATIONS ASSOCIÉES A CERTAINS ESPACES DE DIRICHLET

par D. FEYEL et A. de LA PRADELLE

Nous commençons par définir la notion d'espace $L^1(\gamma)$ où γ est une capacité, ce qui permet d'introduire la notion de mesure d'énergie finie par rapport à γ, et de parler d'espaces de Dirichlet basés sur γ. Comme application, on peut associer un espace de Dirichlet en ce sens à tout espace de Brelot symétrique, ce qui généralise un résultat de Maeda [12].

Soit d'autre part un espace de Dirichlet en ce sens avec potentiels s.c.i. : on étudie les espaces de Dirichlet sur les ouverts fins correspondants à l'aide d'une compactification. On retrouve plus facilement et on généralise les résultats de [9].

CHAPITRE I

ESPACES DE DIRICHLET DE BASE UNE SEMI-NORME

1. Soit Ω un espace localement compact.

On considère une semi-norme N sur l'espace $\mathscr{K}(\Omega)$ (fonctions continues à support compact) qui est croissante sur $\mathscr{K}^+$, c'est-à-dire :

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \psi \Longrightarrow \mathrm{N}(\varphi) \leqslant \mathrm{N}(\psi)$$

et vérifie $\mathrm{N}(\varphi) = \mathrm{N}(|\varphi|)$. Pour f sci $\geqslant 0$, on posera

$$\mathrm{N}(f) = \sup \{\mathrm{N}(\varphi)/0 \leqslant \varphi \leqslant f,\ \varphi \in \mathscr{K}(\Omega)\}$$

et pour $g \geqslant 0$ quelconque

$$\mathrm{N}(g) = \mathrm{Inf}\ \{\mathrm{N}(f)/f \text{ sci} \geqslant g\}.$$

On sait que N vérifie l'inégalité de convexité dénombrable c'est-à-dire si $f = \sum_{n\geqslant 0} f_n$, $f_n \geqslant 0 \Longrightarrow \mathrm{N}(f) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{N}(f_n)$. On note $\mathscr{F}^1(\mathrm{N})$ l'ensemble des $f \in \mathbf{R}^\Omega$ pour lesquelles on a $\mathrm{N}(|f|) < \infty$. Soit $\mathscr{A} = \mathscr{C}(\Omega) \cap \mathscr{F}^1(\mathrm{N})$.

On note $\mathscr{L}^1(\mathrm{N})$ l'adhérence de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{F}^1(\mathrm{N})$, relativement à la distance $\mathrm{N}(|f-g|)$. Ceci a un sens car $\mathrm{N}(|f|) < \infty$ entraîne que f est finie N-presque partout. Alors le quotient $\mathbf{L}^1(\mathrm{N})$ de $\mathscr{L}^1(\mathrm{N})$ par les fonctions N-négligeables est un espace de Banach réticulé.

Hypothèse d'adaptation : pour toute $f \in \mathscr{A}$, il existe $g \geqslant 0$, $\mathrm{N}(g) < \infty$ et g dominant f à l'infini, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\varepsilon g \geqslant f$ en dehors d'un compact.

2. Proposition. — *L'hypothèse d'adaptation est équivalente à l'hypothèse de densité suivante :*

$$\mathcal{K}(\Omega) \quad \textit{est dense dans} \quad \mathcal{A}.$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{A}$, et soit $\varphi \in \mathcal{K}^+(\Omega)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi = 1$ au voisinage d'un compact K.

On a $N(f - \varphi f) \leqslant \varepsilon N(g)$ si K est assez grand.

Donc $\lim\limits_{K} N(f - \varphi f) = 0$, et $\mathcal{K}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{A}$.

Inversement supposons que $\mathcal{K}(\Omega)$ soit dense dans $\mathcal{A}$, et montrons que φf tend vers f quand K augmente indéfiniment : soit $\varphi_n \in \mathcal{K}(\Omega)$, φ_n tendant vers f.

On a :

$$N(f - \varphi f) \leqslant N(f - \varphi_n) + N(f\varphi - \varphi_n\varphi) + N(\varphi_n - \varphi\varphi_n)$$

les deux premiers termes sont inférieurs à ε donné, indépendemment de φ, quand n est assez grand. Fixons alors n : si K contient le support de φ_n, on a $N(\varphi_n - \varphi\varphi_n) = 0$ d'où $N(f - \varphi f) \leqslant 2\varepsilon$.

Choisissons alors une suite de fonctions φ, soient φ_n, telles que $N(f - \varphi_n f) \leqslant 2^{-n}$: la fonction $g = \Sigma(f - \varphi_n f)$ vérifie $N(g) < \infty$ et domine f à l'infini.

On en déduit que $\mathcal{K}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{L}^1(N)$.

3. Théorème. — *Toute forme linéaire* $\lambda \geqslant 0$ *sur* $\mathbf{L}^1(N)$ *est continue. De plus, il existe une mesure* $\mu \geqslant 0$ *unique telle que* $\mathcal{L}^1(N) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ *et telle que pour* $f \in \mathcal{L}^1(N)$, *on ait :* $\int f\,d\mu = \lambda(\tilde{f})$ ($\tilde{f} =$ *classe de* f *dans* $\mathbf{L}^1(N)$.

Démonstration. — On montre que λ est continue par un raisonnement classique.

Soit μ la mesure définie par restriction de λ à $\mathcal{K}(\Omega)$. Soit $f \in \mathcal{L}^1(N)$, il existe une série $\varphi_n \in \mathcal{K}(\Omega)$, telle que $\sum\limits_{n \geqslant 0} N(\varphi_n) < \infty$ et $f = \sum\limits_{n \geqslant 0} \varphi_n$, N-presque partout. On a

$$\int |\varphi_n|\, d\mu \leqslant \|\lambda\| N(\varphi_n),$$

donc la série converge μ-presque partout. Le théorème sera donc démontré si l'on sait que tout ensemble N-négligeable est μ-négligeable : soit A un tel ensemble d'après la propriété 4), il existe g sci $\geqslant 0$, valant $+\infty$ sur A et telle que $N(g) < \infty$. On a alors

$$\int g\, d\mu = \sup\left\{\int \varphi\, du/\varphi \in \mathcal{K}^+,\ \varphi \leqslant g\right\} \leqslant \|\lambda\| \sup\{N(\varphi)/\varphi \leqslant g\}$$

soit $\int g\, d\mu \leqslant \|\lambda\| . N(g) < +\infty$. Ainsi g est μ-intégrable, donc A est μ-négligeable.

4. *Remarque.* — Inversement, si $\mu \geqslant 0$ est continue pour la topologie induite par N sur $\mathcal{K}$, alors μ s'étend de manière unique en forme linéaire $\lambda \geqslant 0$ sur $\mathbf{L}^1(N)$.

5. *Remarque.* — Le théorème 3 caractérise la condition d'adaptation.

6. Théorème. — *Soit* T *une forme linéaire continue sur* $\mathbf{L}^1(N)$: *alors* T *est relativement bornée, donc différence de formes linéaires positives.*

Démonstration. — En effet, pour $0 \leqslant |\psi| \leqslant \varphi$, φ et $\psi \in \mathbf{L}^1(N)$, on a

$$N(\psi) = N(|\psi|) \leqslant N(\varphi)$$

donc

$$|T(\psi)| \leqslant \|T\| . N(\psi) \leqslant \|T\| N(\varphi).$$

7. *Remarque.* — On montre facilement que toute $f \in \mathcal{L}^1(N)$ a la propriété de Lusin par rapport à N : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un fermé F, tel que $N(\Omega \setminus F) \leqslant \varepsilon$ et tel que $f|_F$ soit continue sur F. Une fonction ayant cette propriété est évidemment μ-mesurable pour toute mesure μ continue par rapport à N.

8. Théorème. — *Soit* $\mu \geqslant 0$ *une mesure de Radon qui néglige les ensembles* N-*négligeables, alors* μ *est une somme de mesures continues par rapport à* N (*) (i.e. « μ *est absolument continue* » *par rapport à* N).

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathcal{L}^1(N)$, posons

$$p(\varphi) = \int \varphi^+\, d\mu < +\infty.$$

(*) L'idée de la démonstration nous a été communiquée par Ancona.

Si $\varphi = \psi$ N-presque partout, on a $p(\varphi) = p(\psi)$, donc p définit une fonction sous-linéaire $\geqslant 0$, $\leqslant +\infty$ sur $\mathbf{L}^1(\mathrm{N})$. p est sci sur $\mathbf{L}^1(\mathrm{N})$ grâce au lemme de Fatou. On montre alors à l'aide du théorème de Hahn-Banach géométrique dans $\mathbf{L}^1(\mathrm{N}) \times \mathbf{R}$ que p est l'enveloppe supérieure des formes linéaires qu'elle majore. Soit σ une telle forme sous-linéaire : on a pour $\varphi \leqslant 0$ $\sigma(\varphi) \leqslant \int 0\, d\mu = 0$, donc σ est $\geqslant 0$ et est représentable par une mesure N-continue. De plus pour $\varphi \geqslant 0$, on a $\sigma(\varphi) \leqslant \int \varphi\, d\mu$, donc $\sigma \leqslant \mu$.

On en déduit le résultat par induction transfinie.

9. *Exemples :*

1) Soit $(\Omega, \mathscr{H})$ un espace harmonique de Brelot avec un potentiel > 0, et soit σ une mesure continue à support compact (cf [8]). Pour $f \geqslant 0$: posons $\mathrm{N}(f) = \int (\mathrm{R}f)\, d\sigma$ où $\mathrm{R}f$ est la réduite usuelle de $f (\leqslant +\infty)$. On vérifie toutes les propriétés, et les ensembles N-négligeables sont les ensembles polaires au sens de Brelot.

2) Soit τ une mesure de Radon $\geqslant 0$, on pose

$$\mathrm{N}(f) = \int^* f\, d\tau.$$

On trouve $\mathscr{L}^1(\mathrm{N}) = \mathscr{L}^1(\tau)$.

10. Définition. — *On appelle espace de Dirichlet de base* N, *la donnée suivante :*

a) H *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{L}^1(\mathrm{N})$.

b) H *a une structure hilbertienne pour laquelle l'injection* $\mathrm{H} \hookrightarrow \mathbf{L}^1(\mathrm{N})$ *est continue.*

c) *La contraction module opère*, ie : $u \in \mathrm{H}$ *entraîne* $|u| \in \mathrm{H}$ *et* $\||u|\| \leqslant \|u\|$ (*norme dans* H). *On dira que* H *est* N-*régulier s'il vérifie de plus :*

d) *tout* $f \in \mathbf{L}^1(\mathrm{N})$ *est majoré par un élément* $u \in \mathrm{H}$.

e) H *est dense dans* $\mathbf{L}^1(\mathrm{N})$.

Par exemple, soit H un espace de Dirichlet régulier au sens de [4], posons $\gamma(\varphi) = \operatorname{Inf} \{\|u\|/u \in \mathrm{H},\ u \geqslant \varphi\}$, pour toute $\varphi \in \mathscr{K}^+(\Omega)$, on vérifie sans difficulté que γ est une 1/2 norme adaptée et que H est γ-régulier.

11. THÉORÈME. — *Soit* H *un espace de Dirichlet* N-*régulier. Alors toute forme linéaire positive sur* H *est représentable par une mesure.*

Démonstration. — D'après la condition *d*), elle admet un prolongement linéaire $\lambda \geqslant 0$ sur $\mathbf{L}^1(\mathrm{N})$. Il existe alors une mesure $\mu \geqslant 0$ telle que $\mathscr{L}^1(\mathrm{N}) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et $\lambda(f) = \int f\,d\mu$ pour $f \in \mathscr{L}^1(\mathrm{N})$. L'unicité provient de la condition *e*).

Notons qu'en général un espace de Dirichlet de base N n'est pas N-régulier. On va cependant donner une condition suffisante pour qu'il soit γ-régulier, où γ est la capacité de H.

12. THÉORÈME. — *On suppose* Ω *dénombrable à l'infini. Soit* H *un espace de Dirichlet de base* N. *On suppose qu'il vérifie :*

α) H $\cap\, \mathscr{C}(\Omega)$ *est dense dans* H *et dans* $\mathscr{C}(\Omega)$.

β) H *est adapté, c'est-à-dire : pour tout* $u \in \mathrm{H}$, *il existe* $v \in \mathrm{H}$ *telle que* v *domine* $|u|$ *à l'infini.*

Alors la capacité γ *est adaptée, et* H *est isomorphe à un espace* $\tilde{\mathrm{H}}$ *qui est* γ-*régulier.*

Démonstration. — Rappelons que pour $\varphi \in \mathscr{K}(\Omega)$, on pose

$$\gamma(\varphi) = \mathrm{Inf}\,\{\|u\|/u \in \mathrm{H},\ u \geqslant |\varphi|\mathrm{N} - pp\}.$$

On a $\gamma(\varphi) < +\infty$ pour $\varphi \in \mathscr{K}(\Omega)$ grâce à la condition α.

Remarquons alors (Ω dénombrable à l'infini) que pour toute $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, $f \geqslant 0$, on a :

$$\gamma(f) = \mathrm{Inf}\,\{\|u\|/u \in \mathrm{H},\ u \geqslant f\,\mathrm{N} - pp\}.$$

Soit $\varphi \in \mathscr{L}^1(\gamma)$: il existe une suite de Cauchy

$$\varphi_n \in \mathscr{C}(\Omega) \cap \mathscr{F}^1(\gamma)$$

qui converge vers φ $\gamma - pp$ partout. Or on a pour $\psi \in \mathscr{C}(\Omega) \cap \mathscr{F}^1(\gamma)$

$$\mathrm{N}(\psi) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{R}\psi) \leqslant k\|\mathrm{R}\psi\| = k\gamma(\psi)$$

donc φ_n est de Cauchy dans $\mathscr{L}^1(\mathrm{N})$. Il suffit donc de montrer que tout ensemble γ-négligeable est N-négligeable. Soit P un tel ensemble : il existe f sci $\geqslant 0$, valant $+\infty$ sur P et telle que $\gamma(f) < \infty$. On a alors

$$N(f) = \sup\{N(\varphi)/0 \leqslant \varphi \leqslant f, \varphi \in \mathscr{K}^+(\Omega)\}.$$

Donc $N(f) \leqslant k\gamma(f) < \infty$.

On en déduit $\mathscr{L}^1(\gamma) \subset \mathscr{L}^1(N)$, et $N(f) \leqslant k\gamma(f)$ pour $f \in \mathscr{L}^1(\gamma)$. Tout élément $u \in H$ est égal $N - pp$ à un $\tilde{u} \in \mathscr{L}^1(\gamma)$. C'est évident car $H \cap \mathscr{C}(\Omega)$ est dense dans H et $H \cap \mathscr{C}(\Omega)$ est inclus dans $\mathscr{F}^1(\gamma) \cap \mathscr{C}(\Omega) \cap \mathscr{L}^1(\gamma)$. ($\Omega$ dénombrable à l'infini.)

Il est clair que l'on a $\tilde{H} \cap \mathbf{L}^1(\gamma)$ et que tout élément de $\mathbf{L}^1(\gamma)$ est majoré par un élément de $\tilde{H}$.

Montrons que $\mathbf{L}^1(\gamma)$ est adapté : si $f \in \mathbf{L}^1(\gamma) \cap \mathscr{C}(\Omega)$, il existe $p \in H$ tel que $f \leqslant p$ $N - pp$, et $q \in H$ dominant p à l'infini. On a alors $f \leqslant \tilde{p}$ $\gamma - pp$ partout (raisonnement classique) et $\forall \varepsilon > 0$, il existe un compact K hors duquel on a $p \leqslant \varepsilon q$ $N - pp$, donc $\tilde{p} \leqslant \varepsilon\tilde{q}$ $\gamma - pp$ (même raisonnement). Autrement dit, f est dominée à l'infini par $\tilde{q}$, avec

$$\gamma(\tilde{q}) = \|q\| < \infty.$$

Il reste à voir que $\tilde{H}$ est dense dans $\mathbf{L}^1(\gamma)$ soient μ et ν deux formes linéaires $\geqslant 0$ sur $\mathbf{L}^1(\gamma)$, coïncidant sur $\tilde{H}$: μ et ν sont représentables par des mesures qui coïncident sur $\tilde{H} \cap \mathscr{C}(\Omega)$.

Pour $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in \mathscr{K}(\Omega)$ on a :

$$\varphi = \operatorname{Inf}\{f \in H \cap \mathscr{C}(\Omega)/f \geqslant \varphi\}$$

d'après l'hypothèse α) et car $H \cap \mathscr{C}(\Omega)$ est réticulé. Les fonctions $f \in H \cap \mathscr{C}(\Omega)$ sont μ et ν-intégrables, d'où :

$$\mu(\varphi) = \nu(\varphi) \quad \text{par le théorème de Lebesgue.}$$

Ainsi $\mu = \nu$.

13. Proposition. — *Soit* $(X, \mathscr{B}, \mu)$ *un espace mesuré,* $\mu(X) = 1$, *et soit* V *un opérateur de* $\mathbf{L}^\infty(\mu)$ *vérifiant :*

$$\|\lambda V\varphi\| \leqslant \|\varphi + \lambda V\varphi\| \qquad \textit{pour tous} \qquad \varphi \in \mathbf{L}^\infty(\mu), \quad \lambda > 0.$$

Alors si V *est hermitien, il est aussi de type positif.*

Démonstration. — On sait que la solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad \left| \begin{array}{l} V_0 = V \\ \dfrac{d}{d\lambda} V_\lambda = - V_\lambda^2 \end{array} \right.$$

définit la résolvante sous-markovienne (ie $\|\lambda V_\lambda\| \leqslant 1$) sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$. On a alors $V = \int_0^\infty V_\lambda^2 \, d\lambda$, d'où pour $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$:

$$\int \varphi V_\lambda^2 \, d\mu = \int_0^\infty d\lambda \left[\int \varphi V_\lambda^2 \varphi \, d\mu \right]\cdot$$

Or les V_λ sont hermitiens comme V (solution de (E)), d'où :

$$\int (\varphi V \varphi) \, d\mu = \int_0^\infty \, d\lambda \left[\int (V_\lambda \varphi)^2 \, d\mu \right] \geqslant 0.$$

Les résultats suivants généralisent un théorème de [12] :

14. Corollaire. — *Soit* Ω *localement compact, soit* τ *une mesure* $\geqslant 0$ *sur* Ω, *de support* Ω, *et soit* $G(x, y)$ *une fonction :* $\Omega \times \Omega \to [0, +\infty]$ *vérifiant :*

a) $G(x, y) = G(y, x)$ *pour* $(x, y) \in \Omega \times \Omega$

b) Pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ *telle que* G^μ *soit continu, et pour toute mesure* $\nu \geqslant 0$: *on a*

$$G^\mu \leqslant G^\nu \text{ sur le support de } \mu \Longrightarrow G^\mu \leqslant G^\nu \text{ partout.}$$

c) Pour toute $\nu \geqslant 0$, *il existe une famille* ν_i *telle que les* G^{ν_i} *soient continus et convergent en croissant vers* G^ν.

d) Il existe un potentiel G^μ *continu,* $G^\mu > 0$.

Alors on a pour toutes mesures μ *et* $\nu \geqslant 0$:

$$2 \int G^\mu \, d\nu \leqslant \int G^\mu \, d\mu + \int G^\nu \, d\nu.$$

Démonstration. — Soit τ une mesure à support compact telle que G^τ soit continu > 0, soit V l'opérateur de $\mathbf{L}^\infty(\tau)$ défini par :

$$V\varphi = \frac{G^{\varphi\tau}}{G^\tau}\cdot$$

D'après *b*), on a $\|\lambda V_\varphi\| \leqslant \|\varphi + \lambda V\varphi\|$ pour tous $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\tau)$,

$\lambda > 0$ (grâce au principe complet du maximum). D'autre part V est hermitien par rapport à la mesure $\sigma = G^{\tau}.\tau$.

D'où $\int \varphi G^{\varphi\tau}\, d\tau = \int \varphi V\varphi\, d\sigma \geqslant 0$ pour $\varphi \in \mathbf{L}^{\infty}(\tau) = \mathbf{L}^{\infty}(\sigma)$. Soient alors $\mu, \nu \geqslant 0$ telles que G^{μ} et G^{ν} soient continus à support compact : on pose $\tau = \tau_0 + \mu + \nu$ où τ_0 est une mesure à support compact telle que $G^{\tau_0} > 0$ sur Ω. On a alors

$$\mu - \nu = \varphi\tau \qquad \text{où} \qquad \varphi \in \mathbf{L}^{\infty}(\tau).$$

Ainsi $\int \varphi G^{\varphi\tau}\, d\tau \geqslant 0$, soit $2\int G^{\mu}\, d\nu \leqslant \int G^{\mu}\, d\mu + \int G^{\nu}\, d\nu$.

Grâce à *c*) on en déduit le même résultat pour $\mu, \nu > 0$ quelconques.

15. *Remarque.* — On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en particulier $G(x, y)^2 \leqslant G(x, y)G(y, y)$.

16. Théorème. — *Considérons les hypothèses suivantes* (cf. [8]).

a) Ω *est localement compact dénombrable à l'infini.*

b) $G(x, y)$ *est une fonction* sci *sur* $\Omega \times \Omega$ *à valeurs dans* $[0, +\infty]$ *symétrique,* $(G(x, y) = G(y, x))$.

c) *La condition de séparation linéaire pour tout* $k > 0$, $G^{\varepsilon_b} \equiv kG^{\varepsilon_a}$ *implique* $k = 1$ *et* $a = b$.

d) *Le principe de domination suivant :*

$G^{\mu} \leqslant \sup_i G^{\nu_i}$ *sauf peut-être en un point au voisinage du support de* μ, *où les* G^{ν_i} *vont en croissant, alors* $G^{\nu} \leqslant \sup_i G^{\mu_i}$ *partout.*

e) *Le cône* P_c *des potentiels* G^{μ} *finis continus est presque adapté.*

f) *Pour* $p, q \in P_c$, *il existe* $r \in P_c$, $r = R(p - q)$ *est le plus petit potentiel majorant* $p - q$.

g) $p - R(p - q) \in P_c$ *pour tous* $p, q \in P_c$.

Alors posons pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$:

$$N(\varphi) = \operatorname{Inf}\left\{\sqrt{\int G^{\mu}\, d\mu} \,/\, G^{\mu} \geqslant |\varphi|\right\}.$$

L'espace $\mathbf{L}^1(N)$ *est adapté, le complété* H *des* $G^{\mu} - G^{\nu}$ *où* G^{μ} *et* G^{ν} *sont finis continus tels que* $\int G^{\mu}\, d\mu + \int G^{\nu}\, d\nu < \infty$

pour la norme $\|G^\mu - G^\nu\|^2 = \int (G^\mu - G^\nu)\ d(\mu - \nu))$ $(\geqslant 0$ *d'après le corollaire* 14) *est un espace de Dirichlet de base* N *et* N-*régulier, et ses potentiels sont les* G^μ *tels que* $\int G^\mu\, d\mu < \infty$.

Démonstration. — On a d'abord pour G^μ quelconque :

$$N(G^\mu) = \operatorname{Sup} \{N(\varphi)/\varphi \in \mathcal{K}(\Omega),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant G^\mu\}$$
$$\leqslant \sqrt{\int G^\mu\, d\mu} = \|G^\mu\|.$$

D'autre part, chaque φ a une réduite G^{μ_φ} où μ_φ est continue à support compact (cf. [8]), donc $N(\varphi) = \|G^{\mu_\varphi}\|$, et $G^{\mu_\varphi} \uparrow G^\mu$, d'où

$$\|G^\mu\| = \int G^\varphi\, d\mu = \sup_\varphi \int G^{\mu_\varphi}\, d\mu = \sup_\varphi \sup_\psi \int G^{\mu_\psi}\, d\mu_\varphi$$
$$= \sup_\varphi \int G^{\mu_\varphi}\, d\mu_\varphi = \sup_\varphi N(\varphi) = N(G^\mu).$$

D'autre part, pour θ mesure positive ou non, telle que θ soit continue et $G^{|\theta|}$ d'énergie finie, on a

$$N(G^\theta)^2 = \|R(G^\theta)\|^2 = \|G^\sigma\|^2 = \int G^\theta\, d\sigma \leqslant \|G^\theta\| . \|G^\sigma\|$$

où $G^\sigma \in P_c$ est la réduite de $|G^\theta| \in P_c - P_c$, donc : $N(G^\theta) \leqslant \|G^\theta\|$.

D'où une application linéaire de H dans $\mathbf{L}^1(N)$.

C'est une injection, car soit $u \in H$, d'image $\tilde{u} = 0$. On a

$$u = \operatorname*{Lim}_m G^{\theta_n} = \operatorname*{Lim}_n G^{\mu_n} - G^{\nu_n}$$

Soit

$$\|u\|^2 = \operatorname*{Lim}_m \operatorname*{Lim}_n \int (G^{\mu_n} - G^{\nu_n})\, d(\mu_m - \nu_m).$$

Or, chaque $\mu_m + \nu_m$ est continue sur les potentiels de $P_c \cap \mathbf{L}^1(N)$ pour la topologie de $\mathbf{L}^1(N)$, car on a

$$\int |G^\theta|\, d\mu \leqslant N(G^\theta) . \|G^\mu\|.$$

Ainsi $G^{\mu_n} - G^{\nu_n}$ est de Cauchy dans $\mathbf{L}^1(\mu_m + \nu_m)$, d'où :

$$\|u\|^2 = \operatorname*{Lim}_m \int 0 . d(\mu_m - \nu_m) = 0.$$

Si $\int G^{\mu}\,d\mu < \infty$, G^{μ} appartient à $H \subset \mathbf{L}^1(N)$. En effet, c'est vrai si G^{μ} est continu. Sinon, il existe une famille μ_i telle que les G^{μ_i} convergent en croissant ponctuellement vers G^{μ}, où les $G^{\mu_i} \in H \cap P_c$. Or on a

$$\|G^{\mu} - G^{\mu_i}\|^2 \leqslant \int G^{\mu}\,d\mu - \int G^{\mu_i}\,d\mu$$

donc les G^{μ_i} convergent au sens de H et de $\mathbf{L}^1(N)$. On extrait une sous-suite qui converge partout vers un potentiel $G^{\nu} \in H$, et pour lequel on a $\|G^{\mu} - G^{\nu}\| = 0$, donc $G^{\mu} = G^{\nu}$. Ainsi $G^{\mu} \in H$. Montrons que $\mathbf{L}^1(N)$ est adapté : soit G^{μ} tel que $\int G^{\mu}\,d\mu < \infty$, ses réduites $\hat{R}^{\complement K}_{G^{\mu}}$ sur les complémentaires de compacts convergent fortement vers un élément $h \in H$. On a, pour σ continue à support compact

$$\int h\,d\sigma = \operatorname{Inf} \int \hat{R}^{\complement K}_{G^{\mu}}\,d\sigma = \operatorname{Inf} \int \hat{R}^{\complement K}_{G^{\sigma}}\,d\mu \leqslant \|\hat{R}^{\complement K}_{G^{\sigma}}\| \,.\, \|G^{\mu}\|.$$

Or $\hat{R}^{\complement K}_{G^{\sigma}}$ tend vers 0 ponctuellement, donc $\|\hat{R}^{\complement K}_{G^{\sigma}}\|^2 \leqslant \int \hat{R}^{\complement K}_{G^{\sigma}}\,d_{\sigma}$ tend vers $0 \left(\int G^{\sigma}\,d\sigma < \infty\right)\cdot$ On en déduit $(h\,.\,G^{\sigma}) = 0$ pour tout G^{σ}, σ continue à support compact, d'où $\|h\|^2 = 0$ par densité, soit $h = 0$. Il existe alors une suite K_n telle que $\sum_n \|\hat{R}^{\complement K_n}_{G^{\mu}}\| < \infty$. Si l'on pose $G^{\nu} = \Sigma \hat{R}^{\complement K_n}_{G^{\mu}}$, on a $\int G^{\nu}\,d\nu < \infty$ donc $G^{\nu} \in H$ est G^{ν} domine G^{μ} à l'infini.

Si $f \in \mathbf{L}^1(N) \cap \mathscr{C}(\Omega)$, il existe G^{μ} tel que $f \leqslant G^{\mu}$ et $\int G^{\nu}\,d\mu < \infty$, donc f est dominée par un G^{ν} à l'infini et $\int G^{\mu}\,d\nu < \infty$.

On vérifie facilement la densité de $H \cap \mathscr{C}(\Omega)$ dans H et $\mathscr{C}(\Omega)$, la propriété *d*) du 6°) et la propriété *e*) en remarquant que toute forme linéaire continue sur $\mathbf{L}^1(N)$, nulle sur H est identiquement nulle.

On vérifie facilement que toute forme linéaire $\geqslant 0$ sur H se prolonge en forme linéaire positive sur $\mathbf{L}^1(N)$: elle définit alors une mesure μ dont le potentiel G^{μ} est d'énergie finie et coïncide avec le potentiel donné.

Alors la contraction module opère sur H car le cône des potentiels est stable par enveloppes inférieures finies (cf [4]).

17. THÉORÈME. — *Soit* Ω *localement compact, dénombrable à l'infini, soit* $\mathscr{F}$ *un préfaisceau de cônes convexes de fonction* sci $> -\infty$ *maximal pour le principe du minimum sur les ouverts relativement compacts.*

On suppose que $\mathscr{F}^+(\Omega)$ *sépare linéairement les points de* Ω, *on suppose que pour toute* $f \in \mathscr{F}(\overline{\omega})$, f *bornée* (cf [10]), *on a*

$$R_f^{\partial\omega} = \operatorname{Inf}\{g \in \mathscr{F}(\overline{\omega})/g \geqslant f \text{ sur } \partial\omega\}$$

est finie continue dans ω.

On suppose enfin que tous les potentiels sont de la forme G^μ, *avec* μ *mesure* $\geqslant 0$ *où* G *est une fonction de Green symétrique sur* $\Omega \times \Omega$. *Alors les potentiels vérifiant* $\int G^\mu\, d\mu < \infty$ *sont les potentiels d'un espace de Dirichlet régulier* H, *et* $\mathscr{F}$ *est en fait le faisceau des fonctions hyperharmoniques associées à un espace harmonique de Brelot. Enfin, pour* $u \in H$, *on a*

$$\| |u| \| = \|u\| \quad (\textit{type local})$$

Démonstration. — L'existence de H résulte du théorème 16 : en effet G est > 0 sur la diagonale de Ω d'après la remarque 15.

Le principe de domination de Cartan est alors vérifié. On sait alors que pour toute mesure μ d'énergie finie, et pour tout ensemble E μ-négligeable, la balayée μ^E de μ sur E est portée par la frontière finie de E (topologie fine associée au cône des potentiels). On en déduit d'après un raisonnement de [6] la forme locale de la norme de H

$$(\| |u| \| = \|u\|).$$

On sait alors (cf. [7]) associée à H un unique préfaisceau maximal $\mathscr{G}$ dont les fonctions sont les fonctions hyperharmoniques d'une théorie de Brelot. Par unicité (cf. [7]) on voit facilement que $\mathscr{G} = \mathscr{F}$.

CHAPITRE II

ESPACES DE DIRICHLET RÉGULIERS A POTENTIELS CONTINUS

18. Proposition. — *Soit* Ω *localement compact dénombrable à l'infini. Soit* N *une semi-norme adaptée sur* $\mathcal{K}(\Omega)$ *telle que* $N(\varphi) = 0$ *entraîne* $\varphi = 0$. *Soit d'autre part* H *un espace de Dirichlet de base* N. *On suppose que* H *est adapté et que les potentiels de* H *ont des représentants continus à valeurs dans* $[0, +\infty]$ *et séparant les points de* Ω. *Dans tout le chapitre, on suppose que la contraction unité opère sur* H. *Alors* H *est un espace de Dirichlet régulier par rapport à sa propre capacité* γ (cf. déf. 10).

Démonstration. — On voit d'abord que les éléments de H n'ont qu'un seul représentant continu, car N est une norme sur $\mathcal{K}(\Omega)$. Grâce au théorème 12, il suffit de vérifier que $H \cap \mathcal{C}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}(\Omega)$ et dans H : c'est évident car la contraction unité opère et car les potentiels continus séparent linéairement Ω.

19. Proposition. — *Soit* ω *un ouvert,*

$$\operatorname{cap} \omega = \gamma(\chi_\omega)^2 = \operatorname{Inf} \{\|u\|^2 / u \in H,\ u \geqslant \chi_\omega\ N - pp\}$$

alors $\operatorname{cap} \omega = \operatorname{cap} \overline{\omega}$. *De plus* P *est polaire* ($\operatorname{cap}^* P = 0$) *si et seulement si* $\overline{P}$ *est polaire. Enfin tout élément* γ *quasi-continu est continu en quasi tout point de* Ω.

Démonstration. — Soit p_ω le potentiel d'équilibre de ω, continu : on a $p_\omega \geqslant 1$ partout sur $\overline{\omega}$, car les ensembles N-négligeables sont sans point intérieur, donc $\operatorname{cap}^* \overline{\omega} \leqslant \operatorname{cap} \omega$, d'où l'égalité. Si P est polaire, il existe ω_n ouvert tel que $P \subset \omega_n$ et $\operatorname{cap} \omega_n \leqslant 1/n$, d'où $\overline{P} \subset \overline{\omega}_n$ et

$$\operatorname{cap}^* P \leqslant \operatorname{cap} \overline{\omega}_n \leqslant 1/n,$$

donc $\overline{P}$ est polaire. Enfin, si u est γ-quasi continu, soit F_n un fermé sur lequel u est continu et tel que $\text{cap}\,(\Omega \setminus F_n) \leqslant 1/n$. Posons $\omega_n = \mathring{F}_n$: on a $\text{cap}\,(\Omega \setminus \omega_n) \leqslant 1/n$. Donc u est continu sur $\omega = \bigcup_n \omega_n$ et $\text{cap}^*\,(\Omega \setminus \omega) \leqslant 1/n$ pour tout n, et $\Omega \setminus \omega$ est polaire.

20. Définition. — *Soit* ω *ouvert dans* Ω, *on pose*

$$\mathrm{H}(\omega) = \{u \in \mathrm{H}/u = 0 \text{ } qp \quad \textit{hors de} \quad \omega \text{ } (u \textit{ quasi continu})\}.$$

21. Proposition. — $\mathrm{H}(\omega)$ *est un espace de Dirichlet régulier de base* N *sur* ω.

Démonstration. — D'abord $\mathrm{H}(\omega) \cap \mathscr{K}(\omega)$ est dense dans $\mathscr{C}(\omega)$ (évident). Soit $h \in \mathrm{H}(\omega)$, h orthogonale à $\mathrm{H}(\omega) \cap \mathscr{K}(\omega)$ et soit μ une mesure $\geqslant 0$ à support compact K dans ω et telle que son potentiel $\mathscr{U}^\mu$ dans H soit fini continu sur Ω. Soit $\mu^{\complement\alpha}$ la balayée de μ sur $\complement\alpha$ où α est un ouvert relativement compact $\mathrm{K} \subset \alpha \subset \bar{\alpha} \subset \in$.

$$\mathscr{U}^\mu - \mathscr{U}^{\mu^{\complement\alpha}} \in \mathrm{H}(\omega) \cap \mathscr{K}(\omega),$$

donc $\int h\,d\mu = \int h\,d\mu^{\complement\alpha}$. Quand α tend vers ω, $\mu^{\complement\alpha}$ converge en énergie vers $\mu^{\complement\omega}$, d'où $\int h\,d\mu = \int h\,d\mu^{\complement\omega} = 0$ car $h \in \mathrm{H}(\omega)$.

Supposons maintenant μ à support compact dans α et d'énergie fine : $\int \mathscr{U}^\mu\,d\mu < \infty$, donc (théorème de Lusin), $\mu = \sum_n \mu_n$ où les $\mathscr{U}^{\mu_n}$ sont finis continus sur leur support donc dans tout Ω car la contraction unité opère (d'où le principe complet du maximum). On a alors

$$\int h\,d\mu = \sum_n \int h\,d\mu_n = 0.$$

Ainsi h vaut 0 quasi partout dans ω, i.e. $h = 0$ qp dans Ω.

Il reste à voir que $\mathrm{H}(\omega)$ est adapté : soit p un potentiel de $\mathrm{H}(\omega)$, et soit α ouvert relativement compact, $\bar{\alpha} \subset \omega$: $\mathrm{R}_p^{\complement\alpha}$ tend vers 0 quand α tend vers ω, car $\mathrm{H}(\omega) \cap \mathscr{K}(\omega)$ est dense dans $\mathrm{H}(\omega)$. *c.q.f.d.*

22. Corollaire. — P *est polaire si et seulement si*

$$H(\Omega \setminus \overline{P}) = H(\Omega).$$

Démonstration. — C'est évident (considérer le potentiel capacitaire de $\overline{P}$).

23. Proposition. — *Si* H *est de type dénombrable, tout ouvert* ω *est un ouvert de type* K_σ *réuni à un polaire.*

Démonstration. — Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ la famille des ouverts de type K_σ contenus dans ω. On a $H(\omega) = \overline{\mathrm{U}H(\omega_i)}$ (évident d'après la proposition 20). Il existe une suite croissante i_n telle que

$$H(\omega) = \overline{\bigcup_n H(\omega_{i_n})}.$$

On pose alors $\alpha = \bigcup_n \omega_{i_n}$, d'où le résultat.

24. Théorème. — *On suppose que les potentiels finis continus forment un cône* C *adapté. Soit* p *potentiel fini continu : le support fin* $\delta(p)$ *de* p *i.e. la frontière de Choquet de* $C - \mathbf{R}^+p$ (cf. [14]) *est dense dans le support de la mesure associée à* p.

De plus les potentiels de $H(\omega)$ *sont continus et* $H(\omega)$ *vérifie ainsi les mêmes hypothèses que* H.

Démonstration. — Soit μ la mesure associée à p : elle est minimale pour le balayage défini par le cône $C - \mathbf{R}^+p$. En effet, soit ν balayée de μ on a $\mathcal{U}^\nu \leqslant \mathcal{U}^\mu = p$ (potentiels engendrés) et $\int \mathcal{U}^\mu \, d\nu = \int \mathcal{U}^\mu \, d\mu$ d'où $\| \mathcal{U}^\mu - \mathcal{U}^\nu \| = 0$, d'après Cauchy-Schwarz et $\nu = \mu$. Le support de μ est donc contenu dans $\overline{\delta(p)}$. Posons alors $\mu = \mu' + \mu''$ avec $\mu' = \chi_{\overline{\delta(p)}} \cdot \mu$, $\mu'' = \mu - \mu'$: μ'' a une balayée portée par $\overline{\delta(p)}$. Comme μ est minimale, on en déduit $\mu'' = 0$. Ainsi $\overline{\delta(p)} = \operatorname{Supp} \mu$. Soit $a \in \omega$. Il existe un potentiel q sur Ω tel que $0 < \hat{R}_q^{\complement\Omega}(a) < q(a) < \infty$. Soit p un potentiel de $H(\omega)$, p est le potentiel d'une mesure $\mu \geqslant 0$ dans ω, ne chargeant pas les polaires. D'où $\mu = \Sigma\mu_\alpha$ où les μ_α sont des mesures à support compact dans ω, et dont les potentiels q_α dans Ω sont finis continus partout (théorème 8 et théorème de Lusin). Ainsi $p = \sum_\alpha p_\alpha$ où les p_α sont de la forme $q_\alpha - R_{q_\alpha}^{\complement\Omega}$, donc les p_α sont tous nuls sauf une infinité dénombrable : leur somme ponctuelle est sci et est un représentant quasi-continu de p. Posons alors $\rho = \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{\substack{y \to a \\ y \neq a}} p(y)$ (on peut supposer que p est borné). Si $\rho = 0$, p est continu en a, sinon, soit

$$\lambda < \frac{q(a) - \hat{R}_q^{\complement\omega}(a)}{\rho}$$

La fonction $u = q \wedge (\lambda p + \hat{R}_q^{\complement\omega})$ est un potentiel de Ω qui vaut q hors de ω.

En effet, on a, en notant Ru la réduite de u :

$$\begin{aligned}(u - Ru, u - Ru) &= (u, u - Ru) \\ &= (R_q^{\complement\omega}, u - Ru) + (u - R_q^{\complement\omega}, u - Ru).\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}\|u - Ru\|^2 &\leqslant (u - R_q^{\complement\omega}, u - Ru) \\ &= ((q - R_q^{\complement\omega} \wedge \lambda p), u - Ru).\end{aligned}$$

Or, $u - Ru \in H(\omega)$, $u - Ru \leqslant 0$ et $(q - R_q^{\complement\omega}) \wedge \lambda p$ est un potentiel dans ω : on en déduit $\|u - Ru\| = 0$, ainsi u est un potentiel dans Ω.

Or, au voisinage de a, λp vaut $u - \hat{R}_q^{\complement\omega}$ et est donc fini continu en a : d'où $\rho = \underline{\mathrm{Lim}}_{\substack{y \to a \\ y \neq a}}\, p(y)$.

CHAPITRE III

ESPACES DE DIRICHLET RÉGULIERS A POTENTIELS S.C.I. COMPACTIFICATION DE L'ESPACE DE BASE

25. *Hypothèses.* — Soit Ω localement compact dénombrable à l'infini. Soit N une norme (i.e. $N(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$) adaptée sur $\mathscr{K}(\Omega)$. Soit enfin H un espace de Dirichlet régulier adapté de base N où la contraction unité opère.

Posons pour tout p potentiel :

$$\hat{p} = \sup \{\varphi \in \mathscr{K}(\Omega)/0 \leqslant \varphi \leqslant p\, N - pp\}.$$

On suppose que les $\hat{p}$ (qui sont sci $\leqslant +\infty$) sont quasi-continus (par rapport à la capacité de H), dépendant linéairement de p ($\widehat{p+q} = \hat{p} + \hat{q}$) et $\hat{p} = p\ \underline{N - pp}$.

On suppose que le cône P_0 des $\hat{p}$ sépare linéairement les points de Ω et, que pour toute $\varphi \in \mathscr{K}(\Omega)$, la réduite R_φ a un représentant continu (qui vaut donc $\widehat{R_\varphi}$) et que le cône P_1 des éléments localement bornés de P_0 est adapté.

26. Théorème (cf [11]). — *Il existe un espace localement compact* $\tilde{\Omega}$, *unique à un isomorphisme près, ayant les propriétés suivantes :*

a) Ω *est un sous-ensemble dense dans* $\tilde{\Omega}$.

b) $\tilde{\Omega}$ *induit sur* Ω *la topologie fine associée au cône* P_0 : *elle est plus fine que la topologie initiale de* Ω, *et tout potentiel* $p \in P_0$ *se prolonge par continuité sur* $\tilde{\Omega}$.

c) *Le cône* P *des potentiels prolongés sépare linéairement les points de* P.

d) *Il existe une application propre* $\pi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ *et une seule telle que pour tout* $p \in P_0$, p *continu sur* Ω, *on ait :*

$$\tilde{p} = p \circ \pi.$$

Démonstration. — Soit χ le spectre de l'algèbre fermée engendrée par les potentiels bornés de P_0. Cette algèbre contient $\mathscr{C}_0(\Omega)$ (car P_0 sépare linéairement les points de Ω), d'où une application continue π de X sur $\Omega \cup \{\infty\}$. On pose $\tilde{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$. On vérifie alors facilement les propriétés annoncées ainsi que l'unicité. On remarque que $\tilde{\Omega}$ est dénombrable à l'infini.

27. Théorème. — *Soit* $\varphi \in \mathscr{K}(\tilde{\Omega})$, *alors la restriction à* Ω, *soit* $\varphi|_\Omega$ *appartient à* $\mathbf{L}^1(\gamma)$, *on peut alors poser :*

$$\tilde{\gamma}(\varphi) = \gamma(\varphi|_\Omega).$$

Alors $\tilde{\gamma}$ *vaut* $\|R\varphi\|$ *où* $R\varphi$ *est le plus petit élément de* $\tilde{P}$ *majorant* φ. *De plus* $\mathbf{L}^1(\tilde{\gamma})$ *est isomorphe à* $\mathbf{L}^1(\gamma)$ *par l'application*

$$f \longrightarrow f|_\Omega.$$

Soit $\tilde{H}$ *l'image réciproque de* H *par cet isomorphisme :* $\tilde{H}$ *est un espace de Dirichlet régulier de base* $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}$ *régulier, vérifiant les hypothèses du chapitre* II, *et pour lequel* $\tilde{P}$ *est le cône des potentiels.*

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathscr{K}(\tilde{\Omega})$, $\varphi \geqslant 0$ et soit

$$\theta \in H \cap \mathscr{K}(\Omega), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \qquad \theta = 1$$

au voisinage du support de $\varphi|_\Omega$. Soit enfin $\tilde{p}_n - \tilde{q}_n$ tendant vers φ uniformément sur tout compact : pour n et m assez grands, on a

$$\theta \times |\hat{p}_n - \hat{q}_n - \hat{p}_m + \hat{q}_m| \leqslant \varepsilon\theta \text{ sur } \Omega$$

donc

$$\gamma[\theta|\hat{p}_n - \hat{q}_n - \hat{p}_m + \hat{q}_m|] \leqslant \varepsilon\gamma(\theta).$$

Ainsi $\theta|\hat{p}_n - \hat{q}_n| \in H$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^1(\gamma)$ on peut en extraire une suite qui converge $\gamma - pp$ vers $\varphi|_\Omega$: ainsi $\varphi|_\Omega \in \mathbf{L}^1(\gamma)$.

La deuxième assertion est évidente.

Soit maintenant $f \in \mathscr{C}(\tilde{\Omega})$, $f \geqslant 0$, $\tilde{p}(f) < \infty$. On a

$$\tilde{\gamma}(f) = \sup\{\tilde{\gamma}(\varphi f)/0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \varphi \in \mathscr{K}^+(\tilde{\Omega})\}.$$

D'après ce qui précède, $\tilde{\gamma}(\varphi f) = \|R(\varphi f)\|$. Quand $\varphi \uparrow 1$,

$R(\varphi f)|_\Omega$ tend vers un potentiel p dans H, d'où :

$$f|_\Omega \leqslant \hat{p}|_\Omega \qquad \gamma - qp \quad \text{sur} \quad \Omega.$$

Comme $f|_\Omega$ et $\hat{p}|_\Omega$ sont finement continus sur Ω, on a

$$f|_\Omega \leqslant \hat{p}|_\Omega \qquad \text{partout sur } \Omega.$$

d'où $f \leqslant \tilde{p}$ partout sur $\tilde{\Omega}$.

Soit alors q un potentiel dominant p à l'infini dans Ω : $\tilde{q}$ domine f à l'infini dans $\tilde{\Omega}$. Il s'ensuit que $\{\varphi f\}_\varphi$ est un filtre de Cauchy dans $\mathbf{L}^1(\tilde{\gamma})$ et par suite f appartient à $\mathbf{L}^1(\tilde{\gamma})$, et $\tilde{\gamma}$ est adaptée.

Il est alors facile de voir que $\mathbf{L}^1(\tilde{\gamma})$ est isomorphe à $\mathbf{L}^1(\gamma)$. Remarquons qu'un ouvert de $\tilde{\Omega}$ a la même capacité $\tilde{\gamma}$ que sa trace sur Ω. Il reste donc seulement à voir que les ouverts fins dans Ω sont de capacité γ positive. Soit ω un tel ouvert fin $\neq \emptyset$: il existe $p \in P$, tel que $\hat{p} \neq \hat{R}_p^{\complement\omega}$, donc ω contient à un γ-polaire près un ensemble non N-négligeable, par suite ω n'est pas γ-polaire.

28. Corollaire. — *$\tilde{\Omega}\setminus\Omega$ est intérieurement polaire.*

Démonstration. — Soit K compact inclus dans $\tilde{\Omega}\setminus\Omega$, on a :

$$\tilde{H}(\tilde{\Omega}\setminus K) = i^{-1}[H(\Omega\setminus K)] = i^{-1}[H(\Omega)] = \tilde{H}(\tilde{\Omega})$$

donc K est polaire d'après le corollaire 22.

29. Théorème. — *Soit ω ouvert fin dans Ω, on note $\overline{\omega}^f$ son adhérence fine dans Ω, $\tilde{\omega}$ le plus grand ouvert de $\tilde{\Omega}$ tel que $\omega = \tilde{\omega} \cap \Omega$, et $\overline{\omega}$ son adhérence dans $\tilde{\Omega}$. Alors on a :*

$$\text{cap}^*(\omega) = \text{cap}^*(\overline{\omega}^f) = \widetilde{\text{cap}}(\tilde{\omega}) = \widetilde{\text{cap}}^*(\overline{\omega}).$$

Et pour tout ensemble $A \subset \Omega$:

$$\text{cap}^*(A) = \text{cap}^*(\overline{A}^f) = \widetilde{\text{cap}}^*(\overline{A})$$

où $\overline{A}$ est l'adhérence de A dans $\tilde{\Omega}$.

Démonstration. — Il suffit de considérer le potentiel capacitaire de ω (il en résulte d'ailleurs que p_ω vaut 1 partout sur ω).

30. Théorème. — *Soit* μ *une mesure d'énergie finie sur* $\tilde{\Omega}$, *posons pour tout* $A \subset \Omega$:

$$m(A) = \mu^*(A)$$

ceci définit une mesure extérieure m *sur* Ω *au sens de Carathiodory,* m *est une mesure de Radon sur* Ω, *c'est la mesure* $\pi(\mu)$, *les ensembles* m*-mesurables sont les traces des ensembles* μ*-mesurables. En particulier tous les ouverts fins sont* m*-mesurables, et l'on a :*

$$m\left(\bigcup_{i} \omega_i\right) = \operatorname*{Sup}_{i} m(\omega_i)$$

pour tout ensemble filtrant croissant d'ouverts fins. De plus, le support fin de m *(qui existe donc) est partout dense dans le support de* μ. *Le potentiel de* m *est la trace du potentiel de* μ.

Démonstration. — $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$ est intérieurement polaire, donc intérieurement μ-négligeable, d'où l'assertion relative aux ensembles m-mesurables. Pour tout potentiel p sur Ω, on a alors $\int \tilde{p}\, d\mu = \int \hat{p}\, dm$. On en déduit que m est la mesure de Radon $\pi(\mu)$ sur Ω.

Soit $\omega = \bigcup_i \omega_i$, $\alpha = \bigcup_i \tilde{\omega}_i$ dans $\tilde{\Omega}$: on a

$$\mu(\alpha) = \sup_i \mu(\tilde{\omega}_i)$$

d'où

$$m(\omega) = \operatorname*{Sup}_i m(\omega_i)$$

puisque $m(\omega) = m^*(\omega) = \mu^*(\omega) \leqslant \mu(\alpha) \leqslant \mu(\tilde{\omega})$ les inégalités sont en fait des égalités car $\tilde{\omega} \setminus \alpha$ est μ-négligeable.

On en déduit l'existence du support fin F de m. Son complémentaire ω est m-négligeable, et $\tilde{\omega}$ est μ-négligeable. Alors $\overline{F}$ contient le support de μ. $\overline{F}$ est exactement le support de μ puisque $\tilde{\omega}$ est le plus grand ouvert μ-négligeable.

31. *Remarque.* — Le théorème précédent est vrai pour $\mu \geqslant 0$ de Radon sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\tilde{\Omega}$ qui ne charge pas les polaires (théorème 8).

32. *Remarque.* — Si H est à base dénombrable on a le théorème de Getoor : si $\omega = \bigcup_i \omega_i$, ω_i ouverts fins, alors $\omega = \bigcup_n \omega_{i_n}$ à un polaire près : en effet, c'est vrai dans $\tilde{\Omega}$.

33. Corollaire. — *Soit* ω *un ouvert fin dans* Ω, *et soit* λ *une forme linéaire* $\geqslant 0$ *sur* $\mathrm{H}(\omega)$. *Il existe une famille* μ_α *de mesure de Radon sur* Ω, *concentrée sur* ω, *d'énergies finies dans* Ω, *et telles que pour* $f \geqslant 0, f \in \mathrm{H}(\omega)$, *on ait :*

$$\lambda(f) = \sum_\alpha \int f\, d\mu_\alpha.$$

Démonstration. — Soit $\tilde{\lambda}$ la forme linéaire correspondante sur $\tilde{\mathrm{H}}(\tilde{\omega})$: Considérons la mesure ν qu'elle définit sur $\tilde{\omega}$: on applique le théorème de Lusin à son potentiel dans $\tilde{\omega}$: on en déduit les mesures ν_n de Radon à support compact dans $\tilde{\omega}$, telles que $\nu = \Sigma \nu_n$. Ces ν_n sont des mesures de Radon sur $\tilde{\Omega}$ qui ne chargent pas les polaires et vérifient donc les conditions de la remarque 31 et le théorème 8, d'où $\nu_n = \sum_i \nu_{n,i}$. On pose alors

$$\mu_{n,i} = (\nu_{n,i}), \qquad \text{d'où} \qquad \lambda(f) = \sum_{n,i} \int f\, d\mu_{n,i}$$

pour $f \geqslant 0, f \in \mathrm{H}(\omega)$.

34. *Remarque.* — Si H est de type dénombrable, la famille de mesures $\mu_{n,i}$ peut être choisie dénombrable.

35. Théorème. — *Soit* T *une forme linéaire sur* $\mathrm{H}(\omega)$, ω *ouvert fin, alors* T *possède un support fin dans* ω, *c'est-à-dire qu'il existe un plus grand ouvert fin* $\alpha \subset \omega$ *sur lequel* T *induit* 0 (T *vaut* 0 *sur* $\mathrm{H}(\alpha)$).

Démonstration. — Soit $\tilde{\mathrm{T}}$ la forme linéaire correspondante sur $\tilde{\mathrm{H}}(\tilde{\omega})$: on sait que $\tilde{\mathrm{T}}$ possède un support dans $\tilde{\omega}$ (cf [4]), d'où le résultat. On montre comme pour les mesures que le support fin de T est partout dense dans le support de $\tilde{\mathrm{T}}$.

36. Théorème (synthèse spectrale fine). — *Soit* F *un fermé fin relatif à un ouvert fin* ω *de* Ω. *Notons* $\mathscr{H}(\omega \setminus \mathrm{F})$

l'ensemble des éléments « harmoniques » dans $\omega \setminus F$ (i.e. $u \in H(\omega)$ *et* u *est le potentiel d'une forme linéaire continue à support fin dans* F). *Alors on a :*

$$H(\omega) = H(\omega \setminus F) \oplus \mathscr{H}(\omega \setminus F).$$

De plus des différences de potentiels de mesures d'énergies finies à supports fins dans F *sont denses dans* $\mathscr{H}(\Omega \setminus F)$.

Démonstration. — Le résultat est classique sur $\tilde{\Omega}$ (cf [4]) : on obtient alors le théorème grâce à l'isomorphisme de restriction.

37. Corollaire. — F *est polaire si, et seulement s'il ne porte aucune forme linéaire continue sur* $H(\omega)$.

38. Corollaire. — *Si* $u \in H(\omega)$ *s'annule quasi-partout sur le support fin d'une forme linéaire continue* T *sur* $H(\omega)$, *on a* $T(u) = 0$.

Démonstration. — En effet : $T(u) = (\mathscr{U}^T, u) = 0$ où $\mathscr{U}^T$ est le potentiel de T dans $H(\omega)$.

39. Théorème (Principe complet du maximum fin). — *Soit* T *une forme linéaire continue sur* $H(\omega)$, ω *ouvert fin, et soit* μ *une forme linéaire* $\geqslant 0$ *sur* $H(\omega)$:

Si l'on a $1 + \mathscr{U}^\mu \geqslant \mathscr{U}^T$ *q.p sur le support fin de* T *on a aussi* $1 + \mathscr{U}^\mu \geqslant \mathscr{U}^T$ *q.p sur* ω.

Démonstration. — On connaît le théorème sur $\tilde{\omega}$ (cf [4]) : il suffit alors d'utiliser l'isomorphisme de restriction en remarquant que le support fin de T est dense dans le support de $\tilde{T}$.

Cas de la base dénombrable.

40. Théorème. — *Si* Ω *est à base dénombrable, on peut fabriquer une mesure* τ, *dite « mesure de base » ayant les propriétés suivantes :*

a) $\int d\tau = 1$.

b) $H \subset \mathbf{L}^2(\tau)$ (i.e. H *est de base* τ).

c) *Le potentiel* $\mathscr{U}^\tau$ *de* τ *est continu et borné.*

Démonstration. — Soit τ_n une suite de mesures à support compact telles que leurs potentiels $\mathcal{U}^{\tau_n}$ soient finis continus et bornés, et telles que les différences $\mathcal{U}^{\tau_n} - \mathcal{U}^{\tau_m}$ soient denses dans $\mathcal{C}(\Omega)$. Il existe une suite $\alpha_n > 0, 0 < \alpha_n \leqslant 1$ telle que $\tau = \Sigma \alpha_n \tau_n$ vérifie $\int d\tau = 1$ et $\mathcal{U}^\tau$ continu $\leqslant 1$.

Pour $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\tau)$, posons $V_\varphi = \mathcal{U}^{\varphi\tau}$: on déduit un noyau vérifiant le principe complet du maximum et appliquant $\mathbf{L}^\infty(\tau)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$ (fonctions continues et bornées). V est hermitien et applique $\mathbf{L}^1(\tau)$ dans $\mathbf{L}^1(\tau)$ et $\mathbf{L}^2(\tau)$ dans $\mathbf{L}^2(\tau)$. Soit H′ l'espace de Dirichlet associé à V (V est de type positif). On vérifie facilement à l'aide de la résolvante de V que $H' = H$ en remarquant que toute différence de potentiels nulle $\tau - pp$ est nulle. Ainsi $H \subset \mathbb{L}^2(\tau)$.

41. Proposition. — *L'espace* $\tilde{H}$ *sur* $\tilde{\Omega}$ *est de base* $\tilde{\tau}$ *où* $\tilde{\tau}$ *est la seule mesure d'énergie finie dont la projection est* τ.

Démonstration. — Le potentiel $\mathcal{U}^\tau$ est la restriction d'un potentiel $\tilde{\mathcal{U}}^{\tilde{\tau}} \in \tilde{H}$.

42. Théorème. — *Soit* V *le noyau de* H, *la résolvante* V_λ. *On pose* $V_\lambda\varphi = V[\varphi - \lambda V_\lambda \varphi]$ *pour* $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\tau)$, *donc* $V_\lambda\varphi$ *est continue bornée. Alors* $(V_\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$ *est une famille résolvante de noyaux. On suppose que* $V(\mathbf{L}^\infty)$ *est dense dans* $\mathcal{C}(\Omega)$.

Posons pour $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\tilde{\tau})$, $\tilde{V}_\varphi = \tilde{\mathcal{U}}^{\varphi\tilde{\tau}}$ *continu et*

$$\tilde{V}_\lambda\varphi = \tilde{V}[\varphi - \lambda\tilde{V}_\lambda\varphi].$$

Alors $(\tilde{V}_\lambda)_{\lambda > 0}$ *est une famille résolvante de noyaux sur* $\tilde{\Omega}$, *et c'est une résolvante de Ray, dont les points de branchement* (cf [13]) *sont les points de* $\tilde{\Omega}\setminus\Omega$.

Démonstration. — On vérifie sans peine que les V_λ (resp. $\tilde{V}_\lambda$) s'obtiennent par prolongement de Lebesgue de leurs restrictions à $\mathcal{K}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{K}(\tilde{\Omega})$). Dans les deux cas, les fonctions surmédianes continues séparent les points de Ω (resp. $\tilde{\Omega}$) : ce sont deux résolvantes de Ray.

Soit $a \in \Omega$: de la définition même de V, on voit que a est un point de non branchement pour $(V_\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$ dans Ω.

On voit aussi que c'est un point de non branchement pour $(\tilde{V}_\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$. Soit alors $b \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega$, et soit $a = \pi(b)$. Il existe p potentiel sci de $H(\Omega)$, tel que $\tilde{p}(b) > \tilde{p}(a) = p(a)$, d'où $\sup_\lambda (\lambda \tilde{V}_\lambda \tilde{p})(b) = \tilde{p}(a) < \tilde{p}(b)$, et b est un point de branchement.

43. LEMME. — *Soit* p *un potentiel de* $H(\Omega)$. *Alors*

$$\hat{p} = \sup_\lambda \lambda V_\lambda p.$$

Démonstration. — On a

$$\hat{p} = \sup \{R\varphi / 0 \leqslant \varphi \leqslant p \varphi \in \mathscr{K}(\Omega) \ N - pp\}$$
$$= \sup \{R\varphi / 0 \leqslant \varphi \leqslant p \varphi \in \mathscr{K}(\Omega) \ \gamma - pp\}.$$

Or $R\varphi$ est surmédiane continue, donc excessive pour $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$. Ainsi $\hat{p}$ est excessive : c'est la régularisée excessive de p car elle vaut p quasi-partout.

44. COROLLAIRE. — *Toute fonction* $f(V_\lambda)$*-excessive est finement continue sur* Ω.

Démonstration. — Soit p un potentiel continu : $f \wedge p$ est un potentiel égal quasi-partout à sa régularisée excessive $\widehat{f \wedge p}$, laquelle est finement continue. D'une part

$$\widehat{f \wedge p} \leqslant f \wedge p$$

car $f \wedge p$ est surmédiane d'autre part $f \wedge p \leqslant \widehat{f \wedge p}$ car $f \wedge p$ est finement sci et vaut $\widehat{f \wedge p}$ quasi-partout. On en déduit, en faisant croître p que f est finement continue.

45. THÉORÈME. — *Soit* ω *un ouvert de* $\tilde{\Omega}$. *L'espace de Dirichlet* $\tilde{H}(\omega)$ *définit de la même manière une résolvante sous markovienne sur* ω : *la mesure de base est* $\tilde{\tau}|_\omega$, *de potentiel* $\tilde{\mathscr{U}}^{\tilde{\tau}} - \tilde{R}^{\complement \omega}_{\tilde{\mathscr{U}}^{\tilde{\tau}}}$. *On la note* $\tilde{W}_\lambda$. *Alors* $\tilde{W}_\lambda$ *est une résolvante de Ray sur* ω *et les points de branchement sont les points de* $\omega \setminus \Omega$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que tout p potentiel continu de $\tilde{\mathrm{H}}(\tilde{\Omega})$ est une fonction $(\tilde{\mathrm{W}}_\lambda)$-surmédiane dans ω. Soit $\varphi \in \mathscr{K}(\omega)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant p$, et soit u la fonction :

$$u = \begin{cases} \mathrm{R}\varphi & \text{dans} \quad \omega \\ 0 & \text{dans} \quad \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

u est un élément de $\tilde{\mathrm{H}}(\tilde{\Omega})$; c'est le potentiel d'une forme linéaire continue T qui induit une mesure $\mu \geqslant 0$ dans ω, et μ est portée par l'ensemble des points où $\mathrm{R}\varphi = \varphi$. Ainsi on a $p \geqslant u$ sur le support de T (car $p \geqslant 0$ hors de ω) donc $p \geqslant u$ partout dans Ω, soit $p \geqslant \mathrm{R}\varphi$ dans ω. Il s'ensuit que p est $(\tilde{\mathrm{W}}_\lambda)$-surmédiane continue et $\tilde{\mathrm{W}}_\lambda$ est donc une résolvante de Ray.

Soit f une fonction $(\tilde{\mathrm{W}}_\lambda)$-excessive : supposons f bornée, alors la fonction $u = q \wedge (\lambda + \hat{\mathrm{R}}_q^{\complement\omega})$ (notations de la proposition 21) est $(\tilde{\mathrm{V}}_\lambda)$-excessive sur $\tilde{\Omega}$: sa trace sur Ω est donc finement continue : ainsi $f|_{\Omega\cap\omega}$ est finement continue dans ω.

Soit alors f $(\tilde{\mathrm{W}}_\lambda)$-surmédiane continue, de régularisée excessive $\tilde{f}$: $\tilde{f}|_{\omega\cap\Omega}$ et $f|_{\omega\cap\Omega}$ sont finement continues dans $\Omega \cap \omega$ et égales quasi-partout : elles coïncident donc dans $\omega \cap \Omega$, ce qui prouve que tout point de $\omega \cap \Omega$ est un point de non branchement.

Montrons maintenant que les points de $\omega \setminus \Omega$ sont des points de branchement : soit d'abord $b \in \omega$ et soit $a = \pi(b)$ il existe p potentiel continu de $\tilde{\mathrm{H}}(\tilde{\Omega})$ tel que sa régularisée $(\tilde{\mathrm{V}}_\lambda)$-excessive $\tilde{p}$ vale $\tilde{p}(b) \neq p(b) = p(a)$.

La fonction $\tilde{p}$ est $(\tilde{\mathrm{W}}_\lambda)$-surmédiane et donc majore sa régularisée $\tilde{\tilde{p}}$ $(\tilde{\mathrm{W}}_\lambda)$-excessive : ainsi $\tilde{\tilde{p}}(b) \leqslant \tilde{p}(b) < p(b)$ et le point b est un point de branchement. *c.q.f.d.*

46. Corollaire. — *Soit* $(\mathrm{W}_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ *définie de la manière suivante, pour* ω *ouvert fin de* Ω :

Pour $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\tau)$, *on pose* $\mathrm{W}_\lambda\varphi =$ *Trace sur* ω *de* $\tilde{\mathrm{W}}_\lambda\tilde{\varphi}$ *où* $\tilde{\varphi}$ *est un prolongement quelconque de* φ *en fonction* $\in \mathbf{L}^\infty(\tilde{\tau})$ *sur* $\tilde{\omega}$, *et où* $\tilde{\mathrm{W}}_\lambda$ *est la résolvante associée à* $\tilde{\omega}$.

Alors $\mathrm{W}_\lambda\varphi$ *est une fonction finement continue et bornée sur* ω. *De plus* $(\mathrm{W}_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ *est une famille résolvante de noyaux, dont les fonctions excessives sont finement continues.*

En particulier, pour tout potentiel $p \in \mathrm{H}(\omega)$, p *finement continue, alors* p *est une fonction* (W_λ)*-excessive.*

Démonstration. — Évidente d'après le théorème précédent.

47. *Remarque.* — On retrouve ainsi les résultats de [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BAUER, Harmonische Raüme und ihre Potential Theorie, *Lectures Notes*, 22.

[2] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques, Cours d'été 1965, Montréal. Presses de l'Université.

[3] G. CHOQUET, Le problème des moments. Séminaire d'initiation à l'analyse I.H.P. Paris 1962.

[4] J. DENY, Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, CIME Stresa 1969.

[5] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Sur le rôle des espaces adaptés en théorie de l'énergie, *C.R.A.S.* Paris t. 282, Série A, p. 153.

[6] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Régularisation de noyaux-fonctions symétriques *C.R. de l'Acad. Royale de Belgique*, (1976) (à paraître).

[7] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Construction d'un espace harmonique de Brelot associé à un espace de Dirichlet de type local vérifiant une hypothèse d'hypoellipticité, (à paraître).

[8] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Cônes en dualité. Applications aux fonctions de Green (à paraître), *Lectures Notes*.

[9] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Le rôle des espaces de Sobolev en topologie fine (à paraître), *Lectures Notes*.

[10] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Principes du minimum et préfaisceaux maximaux, *Annales de l'Inst. Fourier*, 24, fasc. 1 (1974).

[11] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Espaces localement compacts associés aux fonctions hyperharmoniques de la théorie de B. Fuglede, *C.R.A.S.*, Paris, t. 280, Série A, p. 33.

[12] F. Y. MAEDA, On the Green function on a self-adjoint harmonic space, *Hiroshima Math. J.*, vol 3, n° 2 (1973).

[13] P. A. MEYER, Probabilités et potentiel, Paris, Hermann 1966.

[14] G. MOKOBODZKI et D. SIBONY, Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel. Séminaire Choquet 1966-67, n° 5, I.H.P. Paris.

Manuscrit reçu le 29 septembre 1976
Proposé par M. Brelot.

D. FEYEL et A. de LA PRADELLE,
Équipe d'Analyse
Université Pierre et Marie Curie
Tour 46 - 4e étage
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.