ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BERNARD MALGRANGE

Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution

Annales de l'institut Fourier, tome 6 (1956), p. 271-355
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1956__6__271_0>

EXISTENCE ET APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET DES ÉQUATIONS DE CONVOLUTION

par Bernard MALGRANGE

INTRODUCTION

Ce travail a pour objet l'étude des deux questions suivantes :

Étant donné un opérateur différentiel, ou un opérateur de convolution :

D'une part, existe-t-il une solution de toute équation avec second membre? En particulier, cet opérateur possède-t-il une solution élémentaire, au sens où l'entend M. Schwartz dans son livre « Théorie des Distributions »?

D'autre part, les solutions de l'équation homogène correspondant à cet opérateur sont-elles toutes engendrées par certaines solutions remarquables? Plus précisément : les solutions d'une équation aux dérivées partielles homogène, à coefficients constants, et d'une équation de convolution homogène sont-elles limites de combinaisons linéaires des exponentielles-polynômes solutions (dans le cas d'une variable, la réponse, due à MM. Delsarte et Schwartz, est positive)? Les solutions d'une équation aux dérivées partielles homogène, dans un ouvert, sont-elles limites de solutions dans tout l'espace? Pour les fonctions harmoniques, la réponse à toutes ces questions est classique.

Le chapitre I est consacré à l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients constants. On établit d'abord qu'une telle équation possède toujours une solution élémentaire E, possédant la propriété suivante : si f est une fonction de carré sommable à support compact, $E * f$ est localement de carré sommable. Cela permet de montrer que, dans tout ouvert convexe, une équation dont le second membre est indéfiniment différentiable (resp. localement de carré sommable) admet une solution indéfiniment différentiable (resp. localement de carré sommable).

On montre aussi que, dans tout ouvert convexe, les solutions d'une équation homogène sont limites de combinaisons linéaires des exponentielles-polynômes solutions.

L'essentiel du second chapitre est consacré à la généralisation de ce résultat. Elle s'obtient en utilisant un théorème de Lindelöf : le quotient de deux fonctions entières de type exponentiel d'une variable complexe, s'il est une fonction entière, est aussi de type exponentiel (résultat que l'on étend aisément aux fonctions de plusieurs variables); et en étendant aux fonctions de plusieurs variables un résultat, qui est à la base de la théorie des fonctions moyenne-périodiques de M. Schwartz.

On trouve que toute solution d'une équation de convolution homogène est limite de combinaisons linéaires des exponentielles-polynômes solutions.

Il est connu que, pour les équations de convolution quelconques avec second membre, il n'est pas possible d'obtenir des résultats aussi simples que pour les équations aux dérivées partielles à coefficients constants (par exemple, si le noyau de convolution est n'importe quelle fonction indéfiniment différentiable, il est nécessaire, pour qu'il y ait une solution, que le second membre soit indéfiniment différentiable; cela n'est d'ailleurs pas suffisant). On peut néanmoins obtenir quelques résultats, dont le suivant : s'il existe une solution élémentaire (resp. une solution élémentaire somme finie de dérivées de fonctions continues), on peut trouver une solution de toute équation avec second membre indéfiniment différentiable (resp. somme finie de dérivées de fonctions continues).

Pour les équations de convolution homogènes sur les fonctions analytiques complexes, on démontre un théorème d'approximation analogue au précédent (résultat obtenu, pour les fonctions d'une variable, par Ritt et Valiron); et les équations avec un second membre analytique complexe ont toujours une solution analytique complexe (pour les fonctions d'une variable, résultat dû à M. Muggli; en fait conséquence immédiate du théorème de Lindelöf cité plus haut).

Le chapitre III est consacré aux équations aux dérivées partielles. Quelques préliminaires servent à définir les équations aux dérivées partielles à valeur dans des espaces fibrés à fibre vectorielle (dont l'introduction est rendue nécessaire par les applications), et à en indiquer quelques propriétés générales.

L'essentiel des résultats de ce chapitre est relatif à certaines équations elliptiques à coefficients analytiques, dont M. Petrowsky a démontré que les solutions étaient analytiques dans tout ouvert où le second membre l'est; on étudie ces équations dans le cas où la variété sur laquelle elles sont définies n'est pas compacte. En utilisant une variante d'un procédé dû à M. Gårding on montre :

1° que toute équation avec second membre admet une solution.

2° que toute solution de l'équation homogène dans un ouvert est limite de solutions sur toute la variété si et seulement si le complémentaire de cet ouvert n'a pas de composantes connexes compactes.

Enfin, en utilisant les produits tensoriels topologiques de M. Grothendieck, on obtient pour ces équations, un « noyau élémentaire bilatère très régulier » au sens de M. Schwartz.

Ces résultats s'appliquent en particulier :

A l'opérateur $d_{\bar{z}}\left(=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}d\bar{z}\right)$ sur une surface de Riemann connexe, non compacte; on retrouve ainsi la généralisation du théorème de Runge due à MM. Behnke et Stein, et le fait qu'une telle surface est une variété de Stein.

A l'opérateur de Laplace Δ sur un espace de Riemann à ds^2 analytique; cela montre, en particulier, que l'on peut calculer les groupes de cohomologie à coefficients réels d'un tel espace avec les formes différentielles à coefficients analytiques.

Les résultats essentiels de ce travail ont été résumés dans quatre notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [19], [20], [21], [22].

La plupart des résultats du chapitre I et les théorèmes 1, 4, 5 du chapitre II ont été trouvés indépendamment par M. L. Ehrenpreis ([36], [38]). (1)

(1) Récemment, M. L. Ehrenpreis a annoncé de nouveaux résultats sur les équations avec second membre [39], [40].

D'autre part, M. L. Hörmander a obtenu de nouveaux résultats sur des sujets voisins, en particulier sur les équations elliptiques à coefficients constants [41].

Qu'il me soit permis, en terminant, de remercier tous les professeurs qui ont contribué à ma formation, en particulier MM. H. Cartan, J. Dieudonné et L. Schwartz. Mes remerciements vont tout particulièrement à M. Schwartz pour l'aide constante qu'il m'a apportée tout au long de ce travail.

Je suis heureux de remercier aussi M. J. Leray de l'intérêt qu'il a pris à ce travail et des suggestions qu'il m'a faites.

PRÉLIMINAIRES

1. — Espaces de distributions.

Nous utiliserons principalement les espaces définis par L. Schwartz dans son ouvrage « Théorie des distributions » [26]; rappelons leurs définitions.

Soit Ω un ouvert $\subset R^n$, et m un entier $\geqslant 0$:

$\mathcal{E}_\Omega$ (resp. $\mathcal{E}^m_\Omega$) désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω (resp. m fois continuement dérivables dans Ω), muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de toutes leurs dérivées (resp. et de leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$).

Soit K un compact $\subset \Omega$; on désigne par $\mathcal{D}_K$ (resp. $\mathcal{D}^m_K$) le sous-espace (fermé) de $\mathcal{E}_\Omega$ (resp. $\mathcal{E}^m_\Omega$) formé des fonctions dont le support est dans K, muni de la topologie induite par $\mathcal{E}_\Omega$ (resp. $\mathcal{E}^m_\Omega$).

$\mathcal{D}_\Omega$ (resp. $\mathcal{D}^m_\Omega$) désigne la limite inductive des $\mathcal{D}_K$, $K \subset \Omega$ (resp. $\mathcal{D}^m_K$, $K \subset \Omega$), muni de la topologie localement convexe de limite inductive [8]; c'est l'espace des fonctions indéfiniment (resp. m fois) continuement dérivables à support compact contenu dans Ω.

$\mathcal{E}'_\Omega$, $\mathcal{E}'^m_\Omega$, $\mathcal{D}'_\Omega$, $\mathcal{D}'^m_\Omega$ désignent respectivement le dual de $\mathcal{E}_\Omega$, $\mathcal{E}^m_\Omega$, $\mathcal{D}_\Omega$, $\mathcal{D}^m_\Omega$; ils sont munis de leur topologie forte de dual (c'est-à-dire de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées, respectivement, de $\mathcal{E}_\Omega$, $\mathcal{E}^m_\Omega$, $\mathcal{D}_\Omega$, $\mathcal{D}^m_\Omega$). Ces espaces s'appellent respectivement : espace des distributions à support compact dans Ω, des distributions d'ordre $\leqslant m$ à support compact dans Ω, des distributions dans Ω, des distributions dans Ω d'ordre $\leqslant m$.

On pose, en outre $\mathcal{D}'^F_\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{D}'^m_\Omega$ (espace des distributions dans Ω d'ordre fini).

Nous aurons également à utiliser quelques autres espaces, dont voici la définition :

$\mathcal{L}^m_\Omega$ désigne l'espace des distributions qui sont des fonctions localement de carré sommable ainsi que leurs dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre m; il est muni de la topologie de la convergence dans L^2 sur tout compact $\subset \Omega$, des fonctions et de leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$.

Soit K un compact $\in \Omega$; on désigne par $\mathcal{K}_K^m$ le sous-espace (fermé) de $\mathcal{L}_\Omega^m$ formé des fonctions dont le support est dans K, muni de la topologie induite par $\mathcal{L}_\Omega^m$.

$\mathcal{K}_\Omega^m$ désigne la limite inductive des $\mathcal{K}_K^m$, muni de sa topologie de limite inductive [8] (c'est-à-dire, évidemment, l'espace des fonctions à support compact dans Ω, qui sont de carré sommable ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$).

Pour $m = 0$, il est facile de voir que $\mathcal{L}_\Omega^0$ et $\mathcal{K}_\Omega^0$ sont chacun dual fort de l'autre : cela justifie les notations suivantes :

$\mathcal{L}_\Omega^{-m}$ (que nous noterons quelquefois $\mathcal{K}_\Omega'^m$) désigne le dual de $\mathcal{K}_\Omega^m$, muni de sa topologie de dual fort; c'est, comme on le vérifie facilement, l'espace des distributions dans Ω qui sont sommes finies de dérivées d'ordre $\leqslant m$ de fonctions localement de carré sommable dans Ω.

$\mathcal{K}_\Omega^{-m}$ (que nous noterons quelquefois $\mathcal{L}_\Omega'^m$) désigne le dual de $\mathcal{L}_\Omega^m$, muni de sa topologie de dual fort; c'est l'espace des distributions à support compact dans Ω, qui sont en outre dans $\mathcal{L}_\Omega^{-m}$.

Soit K un compact $\subset \Omega$; en appliquant la proposition 2 de [8], on vérifie aisément que la topologie induite respectivement par $\mathcal{D}_\Omega$, $\mathcal{D}_\Omega^m$, $\mathcal{K}_\Omega^m$ $(m \geqslant 0)$ sur $\mathcal{D}_K$, $\mathcal{D}_K^m$, $\mathcal{K}_K^m$ est identique à la topologie de ces espaces; nous noterons également $\mathcal{E}'_K$, $\mathcal{E}_K'^m$, $\mathcal{K}_K^{-m}$ $(m \geqslant 0)$ le sous-espace respectivement de $\mathcal{E}'_\Omega$, $\mathcal{E}_\Omega'^m$, $\mathcal{K}_\Omega^{-m}$ formé des distributions à support dans K, muni de la topologie induite; il est facile de vérifier que ces définitions ne dépendent pas de l'ouvert $\Omega \supset K$ choisi.

Le produit scalaire entre un espace et son dual (qu'il s'agisse des espaces définis ci-dessus, ou d'autres espaces vectoriels topologiques) sera toujours noté $\langle , \rangle$; lorsque nous parlerons du dual d'un espace vectoriel topologique E, sans préciser de topologie, il est entendu qu'il s'agira toujours du dual *fort* (c'est-à-dire, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E).

Lorsque $\Omega = R^n$, nous écrirons, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{K}^m$ etc... au lieu de $\mathcal{E}_{R^n}$, $\mathcal{D}_{R^n}$, $\mathcal{K}_{R^n}^m$ etc...

Enfin, le support d'une distribution μ *sera toujours noté* : $\underline{\mu}$.

Transformation de Fourier.

Comme dans [26], $\mathcal{S}$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, (c'est-à-dire : dont le produit par tout polynôme est borné sur R^n) ; $\mathcal{S}'$ désigne le dual de S, et s'appelle « espace des distributions tempérées » (ou à croissance lente) ; la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}$ et sur $\mathcal{S}'$ est définie dans [26] ; *elle établit un isomorphisme* (topologique) *de* $\mathcal{S}$ *sur* $\mathcal{S}$ *et de* $\mathcal{S}'$ *sur* $\mathcal{S}'$ (sauf mention expresse du contraire, les mots « homomorphisme » et « isomorphisme » appliqués à des espaces vectoriels topologiques signifieront *toujours* « homomorphisme topologique » et « isomorphisme topologique »).

Théorème de Paley-Wiener généralisé [26]. — *La transformation de Fourier échange l'espace* $\mathcal{E}'_{R^n}$ (resp. $\mathcal{D}_{R^n}$) *et l'espace des fonctions continues à croissance lente* (*resp. à décroissance rapide*) *qui sont prolongeables analytiquement dans tout* C^n *en des fonctions analytiques entières de type exponentiel.*

Notations. — La transformation de Fourier est notée $\mathcal{F}$, et la transformation inverse $\bar{\mathcal{F}}$.

Les espaces considérés dans le théorème de Paley-Wiener sont notés ainsi :

$$\mathcal{A}\mathcal{S}'_n = \mathcal{F}\mathcal{E}'_{R^n}, \qquad \mathcal{A}\mathcal{S}_n = \mathcal{F}\mathcal{D}_{R^n}.$$

Nous renvoyons à [26] pour l'étude de la transformation de Fourier.

Convolution.

L'opération $*$ désignée dans [26] par « produit de composition » sera appelée ici « convolution ». La transformation de Fourier échange la multiplication ordinaire et la convolution.

Théorème des supports (Lions, [17]). — *Soient* μ *et* ν *deux distributions à support compact* ; *on a :*

$$\text{(enveloppe convexe de } \underline{\mu}) + (\text{enveloppe convexe de } \underline{\nu}) = \text{enveloppe convexe de } \underline{\mu * \nu}.$$

Si μ est une distribution de support l'origine, il existe un polynôme différentiel (i. e. un opérateur différentiel à coefficients constants), D, tel que $\mu = D\delta$ (δ désignant la masse $+ 1$ située à l'origine).

Dans ce dernier cas, le théorème des supports affirme :

$$(\text{enveloppe convexe de } \underline{D\mu}) = (\text{enveloppe convexe de } \underline{\mu}).$$

On désigne par $\check{\mu}$ la symétrique de la distribution μ par rapport à l'origine; pour $\mu \in \mathcal{E}'$, $\nu \in \mathcal{E}'$, $f \in \mathcal{E}$, on a :

$$\langle \check{\mu} * f, \nu \rangle = \langle f, \mu * \nu \rangle = \check{\mu} * \check{\nu} * f(0).$$

Si D est un polynôme différentiel, $\check{D}$ désigne l'opérateur différentiel transposé de D ; la formule précédente montre que l'on a :

$$(D\delta)^{\vee} = \check{D}\delta.$$

Pour les autres propriétés de la convolution (continuité, etc...) nous renvoyons à [26].

Un mot enfin d'une question qui n'est pas traitée dans cet ouvrage (voir à ce sujet [29], exposé n° 5) :

Soit μ une distribution à support compact; pour tout ouvert $\Omega \subset R^n$, et tout $f \in \mathcal{D}'_{R^n}$, la restriction de $\mu * f$ à l'ouvert $\Omega' = \{x; (x - \underline{\mu}) \subset \Omega\}$ ne dépend, d'après les propriétés du support du produit de convolution que de la restriction de f à Ω; par suite, pour tout $g \in \mathcal{D}'_{\Omega}$, on pourra définir $\mu * g \in \mathcal{D}'_{\Omega'}$; (en particulier, pour un opérateur differentiel D, on aura $D\delta * g \in \mathcal{D}'_{\Omega}$ et $D\delta * g$ sera égal à Dg).

A l'aide de cette définition, l'opération de *régularisation* [26] peut être étendue aux distributions $\in \mathcal{D}'_{\Omega}$: soit α_i une suite de fonctions $\in \mathcal{D}_{R^n}$, dont les supports tendent vers 0, et qui tendent vers δ dans $\mathcal{E}'_{R^n}$; les $\alpha_i * g$ seront définis dans des ouverts Ω'_i, non vides dès que i sera assez grand, et y seront indéfiniment différentiables; pour tout ouvert $\mathcal{O}$ relativement compact dans Ω on finira par avoir $\mathcal{O} \subset \Omega'_i$, et les restrictions des $\alpha_i * g$ à $\mathcal{O}$ tendront vers la restriction de g à $\mathcal{O}$.

2. — Matrices-distributions.

$\overset{(p,\,q)}{\mathcal{E}_{\Omega}}$ désigne l'espace des matrices à p lignes et q colonnes (ou « du type (p, q) ») dont les coefficients sont des fonctions $\in \mathcal{E}_{\Omega}$. On définit de même $\overset{(p,\,q)}{\mathcal{E}_{\Omega}}$, $\overset{(p,\,q)}{\mathcal{D}_{\Omega}}$, etc...; et l'on identifie $\mathcal{E}$ à $\overset{(1,\,1)}{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}'$ à $\overset{(1,\,1)}{\mathcal{E}'}$, etc... Ces espaces sont munis des topologies produits naturelles. La multiplication (quand elle est possible) se fait de la manière habituelle.

Définition. — *Soit* $g = (g_{ij}) \in \overset{(p,q)}{\mathcal{D}'}$; *on note* ${}^t g$ *la matrice* $\in \overset{(q,p)}{\mathcal{D}'}$ *dont les coefficients sont* g_{ji}, *et* $\check{g}$ *la matrice* $\in \overset{(q,p)}{\mathcal{D}'}$ *dont les coefficients sont* $\check{g}_{ji}$.

Sur les matrices à coefficients distributions la convolution s'effectue de la manière suivante : soient (f_{ij}) $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant q$ et (μ_{kl}) $1 \leqslant k \leqslant q$, $1 \leqslant l \leqslant r$ deux matrices telles que les $f_{ij} * \mu_{jl}$ aient tous un sens; on définit $(f_{ij}) * (\mu_{kl})$ comme étant la matrice de type (p, r) dont les coefficients g_{il} sont donnés par

$$g_{il} = \sum_{j=1}^{q} f_{ij} * \mu_{jl}.$$

Naturellement, la convolution n'est pas commutative en général.

L'espace $\overset{(p,q)}{\mathcal{E}'_\Omega}$ est le dual de $\overset{(p,q)}{\mathcal{E}_\Omega}$, le produit scalaire étant donné par la formule suivante :

pour $f \in \overset{(p,q)}{\mathcal{E}_\Omega}$, $\mu \in \overset{(p,q)}{\mathcal{E}'_\Omega}$ on pose :

$$\langle \mu, f \rangle = \sum_{i,j} \langle \mu_{ij}, f_{ij} \rangle.$$

De même, $\overset{(p,q)}{\mathcal{D}'_\Omega}$ est le dual de $\overset{(p,q)}{\mathcal{D}_\Omega}$, etc...

Si $\Omega = \mathrm{R}^n$, cette formule s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\langle \mu, f \rangle = \mathrm{Tr}[(\check{\mu} * f)(0)] \big(= \mathrm{Tr}[(f * \check{\mu})(0)] &= \mathrm{Tr}[(\check{f} * \mu)(0)] \\ &= \mathrm{Tr}[(\mu * \check{f})(0)]\big).\end{aligned}$$

Pour $f \in \overset{(p,q)}{\mathcal{E}_{\mathrm{R}^n}}$, $\mu \in \overset{(p,r)}{\mathcal{E}'_{\mathrm{R}^n}}$, $\nu \in \overset{(r,q)}{\mathcal{E}'_{\mathrm{R}^n}}$, on a

$$\langle f, \mu * \nu \rangle = \langle \check{\mu} * f, \nu \rangle = \langle f * \check{\nu}, \mu \rangle \big(= \mathrm{Tr}[(\check{\nu} * \check{\mu} * f)(0)]\big).$$

Ces formules peuvent être étendues au cas d'un ouvert $\Omega \neq \mathrm{R}^n$, (par le même procédé qui a été employé pour définir $\mu * f$, $f \in \mathcal{D}'_\Omega$, $\mu \in \mathcal{E}'_{\mathrm{R}^n}$).

Enfin, la transformation de Fourier se fait de la manière naturelle sur espaces de matrices à coefficients distributions tempérées; elle échange la multiplication ordinaire (des matrices) et la convolution.

3. — Espaces vectoriels topologiques.

Suivant la terminologie de [8], nous appelons espace $(\mathcal{F})$ un espace vectoriel topologique localement convexe, métrisable, complet. Nous renvoyons à [8] et à la bibliographie qu'il contient pour l'étude des espaces $(\mathcal{F})$, et pour la définition et l'étude des espaces $(\mathcal{LF})$. Rappelons seulement les résultats suivants :

Théorème 1 (Banach). — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$, E′ *son dual, et* V *un sous-espace de* E′; *pour que* V *soit faiblement fermé, il faut et il suffit que son intersection avec toute partie faiblement compacte de* E′ *soit faiblement compacte.*

Ce théorème servira, entre autres, à établir que certaines applications linéaires continues sont *sur*, grâce au :

Théorème 2. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{F})$, E′ *et* F′ *leurs duals, u une application linéaire continue de* E *dans* F, ${}^t u$ *la transposée de u; pour que u soit un homomorphisme* (faible ou fort), *il faut et il suffit que* ${}^t u(\mathrm{F}')$ *soit un sous-espace faiblement fermé de* E′.

En particulier, pour que u soit sur, il faut et il suffit que ${}^t u$ *soit biunivoque et que* ${}^t u(\mathrm{F}')$ *soit faiblement fermé.*

Les espaces $\mathcal{E}_\Omega$, $\mathcal{E}^m_\Omega$, $\mathcal{D}'^m_\Omega$, $\mathcal{L}^m_\Omega$ (Ω étant un ouvert $\subset \mathrm{R}^n$) et $\mathcal{D}_\mathrm{K}$ (K un compact de R^n) sont des espaces $(\mathcal{F})$; $\mathcal{D}^m_\mathrm{K}$ est un espace de Banach, $\mathcal{K}^m_\mathrm{K}$ est un espace de Hilbert.

Les espaces $\mathcal{E}_\Omega$, $\mathcal{D}_\Omega$, $\mathcal{K}^m_\Omega$ sont réflexifs.

Outre ce qui précède, et les résultats de [8], nous aurons encore à utiliser le résultat suivant, dû, dans le cas des espaces $(\mathcal{F})$, à Banach (pour les démonstrations, voir [2], [11] et l'introduction de [12]) :

Théorème du graphe fermé. — *Si* E *et* F *sont deux espaces du type suivant: « espaces* $(\mathcal{F})$ *ou duals forts d'espaces* $(\mathcal{F})$ *réflexifs »*

a) *Toute application linéaire* E $\rightarrow$ F *dont le graphe est fermé est continue.*

b) *Toute application linéaire continue de* E *sur* F *est un homomorphisme.*

Exemples d'espaces du type précédent : Tout sous-espace fermé de $\mathcal{E}_\Omega$, et tout quotient de $\mathcal{E}_\Omega$ par un sous-espace fermé, car ce sont des espaces ($\mathcal{F}$) ; tout sous espace fermé V de $\mathcal{E}'_\Omega$ (la théorie des *espaces de Schwartz* [11] montre en effet que V est le dual fort de $\mathcal{E}_\Omega/V^\perp$, $V^\perp$ désignant l'orthogonal de V).

4. — Un théorème sur les équations de convolution.

Nous allons terminer ces préliminaires par un résultat qui jouera un rôle essentiel dans les deux premiers chapitres.

Rappelons d'abord quelques notions sur les séries formelles, qui interviendront dans la démonstration. Soit $\mathcal{F}$ ([2]) l'anneau des séries formelles de n variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur le corps C, muni de la topologie de la convergence simple des coefficients; le dual $\mathcal{E}'_0$ de $\mathcal{F}$ s'identifie à l'espace des distributions de support l'origine, au moyen du produit scalaire suivant :

Pour $\quad f = \Sigma a_{i_1 \ldots i_n} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}$
et $\quad D\delta \in \mathcal{E}'_0$ (D est un polynôme différentiel)
on a $\quad \langle D\delta, f\rangle = \Sigma a_{i_1 \ldots i_n} \langle D\delta, \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}\rangle$

(cette formule a bien un sens, puisque tous les termes du second membre sont nuls sauf un nombre fini. Notons par ailleurs que cette formule s'écrit aussi : $\langle D\delta, f\rangle$ = coefficient constant de $\check{D}f$).

Le produit $f.(D\delta) \in \mathcal{E}'_0$ est défini par :

$$f.(D\delta) = \Sigma a_{i_1 \ldots i_n} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n} (D\delta)$$

(là aussi, tous les termes sont nuls sauf un nombre fini); pour $g \in \mathcal{F}$, on aura $\langle D\delta, fg\rangle = \langle f.(D\delta), g\rangle$.

Lorsque f est une série convergente à l'origine, il est immédiat que ces définitions coïncident avec les définitions ordinaires (i.e. lorsque f est considéré comme $\in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ étant un ouvert contenant l'origine).

$\overset{(p,q)}{\mathcal{F}}$ désigne l'espace des matrices de type (p, q) à coefficients $\in \mathcal{F}$, muni de la topologie produit; entre $f \in \overset{(p,q)}{\mathcal{F}}$ et $g \in \overset{(q,r)}{\mathcal{F}}$, le produit $fg \in \overset{(p,r)}{\mathcal{F}}$ est défini de la manière évidente.

([2]) Il ne peut y avoir aucune confusion entre cette notation, qui sera utilisée exclusivement dans ce numéro, et celles du numéro précédent.

Le dual de $\overset{(p,\,q)}{\mathcal{F}}$ s'identifie à l'espace $\overset{(p,\,q)}{\mathcal{E}'_0}$, au moyen de la formule suivante :

$$\langle f,\ \mathrm{D}\delta\rangle = \sum_{i,\,j} \langle f_{ij},\ \mathrm{D}_{ij}\delta\rangle \left\{ \begin{array}{l} f = (f_{ij}) \in \overset{(p,\,q)}{\mathcal{F}}, \\ \mathrm{D}\delta = (\mathrm{D}_{ij}\delta) \in \overset{(p,\,q)}{\mathcal{E}'_0}. \end{array} \right.$$

Pour $f \in \overset{(p,\,q)}{\mathcal{F}}$, et $\mathrm{D}\delta \in \overset{(q,\,r)}{\mathcal{E}'_0}$, on définit $f.(\mathrm{D}\delta)$ par

$$[f.(\mathrm{D}\delta)]_{ik} = \sum_{j=1}^{q} f_{ij}.(\mathrm{D}_{jk}\delta).$$

Pour $\mathrm{D}\delta \in \overset{(p,\,q)}{\mathcal{E}'_0}$, $f \in \overset{(p,\,r)}{\mathcal{F}}$, $g \in \overset{(r,\,q)}{\mathcal{F}}$, on a :

$$\langle \mathrm{D}\delta,\ fg\rangle = \langle ({}^t f).(\mathrm{D}\delta),\ g\rangle = \langle g.{}^t(\mathrm{D}\delta),\ {}^t f\rangle. \tag{1}$$

Ici encore, pour les séries convergentes, ces définitions coïncident avec les définitions ordinaires.

Avant d'énoncer le théorème que nous avons en vue, donnons une définition qui sera utilisée constamment :

Définition. — *Une exponentielle-polynôme matricielle de type* $(p,\ q)$ *est une matrice*

$$\{\mathrm{P}_{ij}(x_1,\ \ldots,\ x_n)e^{-2\pi i(\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n)}\}$$

où les P_{ij} *sont des polynômes et les* ζ_i *des nombres complexes.*

Si $p = q = 1$, *on dira simplement : « exponentielle-polynôme ».*

Théorème 3. — *Soient* $\mu \in \overset{(r,\,q)}{\mathcal{E}'_{\mathrm{R}^n}}$ *et* $\nu \in \overset{(p,\,q)}{\mathcal{E}'_{\mathrm{R}^n}}$; *pour qu'il existe une matrice* F *de type* $(p,\ r)$ *à coefficients fonctions analytiques entières de n variables complexes vérifiant* : $\mathcal{F}\nu = \mathrm{F}\,.\,\mathcal{F}\mu$ ([3]), *il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

Toute exponentielle-polynôme matricielle Q *de type* $(q,\ 1)$ *qui vérifie* $\mu * \mathrm{Q} = 0$ *vérifie aussi* $\nu * \mathrm{Q} = 0$.

La nécessité est évidente, par transformation de Fourier. Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit de le prouver lorsque $p = 1$ (car alors, on pourra déterminer F ligne par ligne). Nous nous placerons donc dans ce cas.

([3]) On désigne ici par $\mathcal{F}\mu$ (ou $\mathcal{F}\nu$), la fonction analytique entière qui prolonge la transformée de Fourier de μ (ou ν) ; cette notation sera constamment utilisée par la suite ; nous ne ferons pas la distinction entre une transformée de Fourier et son éventuel prolongement analytique.

On pose

$$\mu = (\mu_{ij})\,; \quad \mathscr{F}\mu_{ij} = M_{ij}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,; \quad M_i = (M_{1i}, \ldots, M_{ri})$$
$$\nu = (\nu_j)\,; \quad \mathscr{F}\nu_j = N_j; \quad N = (N_1, \ldots, N_q).$$

Appelons « polynôme de type $(q, 1)$ » une matrice de type $(q, 1)$ à coefficients polynômes.

Lemme 1. — *Si tout polynôme* P *de type* $(q, 1)$ *vérifiant* $\mu * P = 0$ *vérifie aussi* $\nu * P = 0$, *il existe* $S_1, \ldots, S_r$, *holomorphes à l'origine qui vérifient, pour tout* i : $N_i = S_1 M_{1i} + \cdots + S_r M_{ri}$.

Il résulte d'un théorème classique (voir, par exemple [4]) qu'il suffit de trouver des séries formelles $S'_1, \ldots, S'_r$, qui vérifient $N_i = S'_1 M_{1i} + \cdots + S'_r M_{ri}$.

Autrement dit, il suffit de démontrer que $N = (N_1, \ldots, N_q)$ est dans le sous-$\mathscr{F}$-module $\mathfrak{M}$ de $\overset{(1,\,q)}{\mathscr{F}}$ engendré par les M_i; Comme $\overset{(1,\,q)}{\mathscr{F}}$ est un module de type fini, il résulte d'un théorème de Krull (voir, par exemple, [4]) que $\mathfrak{M}$ est fermé. Alors, par dualité, il suffit de démontrer : *tout* $D\delta \in \overset{(1,\,q)}{\mathscr{E}'_0}$ *qui annule* $\mathfrak{M}$ *annule aussi* N.

Or, par transformation de Fourier, l'hypothèse entraîne : tout polynôme de dérivation $D\delta$ du type $(q, 1)$ qui vérifie, pour tout i : $M_i . (D\delta) = 0$, vérifie aussi $N . (D\delta) = 0$, donc, en particulier, d'après la formule (1) :

$$\langle {}^t(D\delta), N\rangle = \langle N . {}^t(D\delta), 1\rangle = 0$$

et, d'autre part, les $D\delta \in \overset{(q,\,1)}{\mathscr{E}'_0}$ qui vérifient $M_i . (D\delta) = 0$ sont exactement ceux qui satisfont à :

$${}^t(D\delta) \in \mathfrak{M}^{\perp} \qquad \mathfrak{M}^{\perp} : \text{orthogonal de } \mathfrak{M}$$

(car ${}^t(D\delta) \in \mathfrak{M}^{\perp}$ équivaut à : quel que soit i $(0 \leqslant i \leqslant q)$, et quel que soit $R \in \mathscr{F}$, $\langle {}^t(D\delta), M_i R\rangle = 0$; ou d'après (1) $\langle M_i . (D\delta), R\rangle = 0$, ou $M_i . (D\delta) = 0$). Le lemme est démontré.

Lemme 2. — *Soit* $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in C^n$; *pour qu'il existe* $S_1, \ldots, S_n$ *holomorphes au voisinage de* $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ *et vérifiant :*

$$N_i = S_1 M_{1i} + \cdots + S_r M_{ri}$$

il suffit que la condition suivante soit réalisée :

Tout polynôme P *de type* $(q, 1)$ *qui vérifie*

$$\mu * e^{2\pi i(\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n)} P = 0$$

vérifie aussi :

$$\nu * e^{2\pi i(\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n)} P = 0.$$

On se ramène immédiatement au lemme 1 : posons, en effet

$$\mu' = e^{-2\pi i(\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n)} \mu$$
$$\nu' = e^{-2\pi i(\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n)} \nu$$

μ' (resp. ν') a pour transformée de Fourier $M(\lambda_1 + \zeta_1, \ldots, \lambda_n + \zeta_n)$ (resp. $N(\lambda_1 + \zeta_1, \ldots, \lambda_n + \zeta_n)$).

D'autre part :

$$\mu * e^{2\pi i(\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n)} P = [e^{2\pi i(\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n)} \mu'] * [e^{2\pi i(\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n)} P] = e^{2\pi i(\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n)} (\mu' * P)$$

donc $\mu * e^{2\pi i(\text{———})} P = 0$ équivaut à : $\mu' * P = 0$; même résultat pour ν; d'où le lemme.

Démontrons maintenant le théorème :

Soit $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions entières de n variables complexes, et $\mathcal{O}_\zeta$ l'espace des fonctions holomorphes au point $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$; d'après le lemme 2, si (C) est vérifié, N est dans le $\mathcal{O}_\zeta$-module engendré par les M_i, quel que soit ζ. Il résulte alors d'un théorème de H. Cartan [3] que N est dans le $\mathcal{H}$-module engendré par les M_i. C.Q.F.D.

Remarques. — 1° Dans les applications que nous ferons, nous supposerons toujours que μ *est de rang* r, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ compris entre 1 et q, tels que

$$\text{dét}\,(M_{i, \alpha_k}) \not\equiv 0.$$

Alors, les S_i du lemme 2 sont déterminés d'une manière unique : par « recollement », ils donnent des fonctions entières F_i; si bien que, dans ce cas, il est inutile de faire appel à la théorie globale des idéaux de fonctions analytiques.

2° Nous utiliserons le théorème 3 sous la forme suivante :

soit $\mu \in \overset{(r, q)}{\mathcal{E}'_{R^n}}$, et soit $\nu \in \overset{(q, 1)}{\mathcal{E}'_{R^n}}$ orthogonale à toutes les exponentielles-polynômes matricielles Q de type $(q, 1)$ qui vérifient

$\mu * Q = 0$; il existe alors des fonctions entières $F_1, \ldots, F_r$ telles que, pour tout i

$$\mathcal{F}\check{\nu}_i = \sum_{j=1}^{r} F_j M_{ji}$$

(en effet, si Q vérifie $\mu * Q = 0$, les « translatées » $\tau_a Q$ de Q vérifient aussi $\mu * \tau_a Q = 0$; alors, pour tout $a \in R^n$, $\langle \nu, \tau_a Q \rangle = 0$ d'où $\check{\nu} * Q = 0$, et l'on peut appliquer le théorème 3 à $\check{\nu}$).

3° Si $p = q = r = 1$, nous adopterons les notations suivantes :

Soit $\mu \in \mathcal{E}'_{R^n}$; *on désigne par* $V(\mu)$ *l'ensemble des combinaisons linéaires des exponentielles-polynômes* Q *vérifiant* $\mu * Q = 0$.

Soit $\nu \in \mathcal{E}'_{R^n}$; d'après la remarque précédente, les conditions : « $V(\mu) \subset V(\nu)$ » et « $\nu \in [V(\check{\mu})]^{\perp}$ » sont équivalentes. Alors, d'après le théorème 3 : *Pour que la fonction* (méromorphe) $\dfrac{\mathcal{F}\nu}{\mathcal{F}\mu}$ *soit entière, il faut et il suffit que l'on ait:* $V(\mu) \subset V(\nu)$ (ou : $\nu \in [V(\check{\mu})]^{\perp}$).

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉS PARTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS

§ 1. Existence d'une solution élémentaire.

LEMME 1. — *Soit* $f(\lambda)$ *une fonction entière d'une variable complexe et* $P(\lambda)$ *un polynôme unitaire de degré m. Pour tout* $\lambda \in C$, *on a :*

$$(1) \qquad |f(\lambda)| \leqslant \frac{1}{r^m} \operatorname*{Max}_{|\lambda-\lambda'|\leqslant 2mr} |P(\lambda')f(\lambda')|$$

On peut écrire $P(\lambda) = (\lambda - \zeta_1) \ldots (\lambda - \zeta_m)$; en raisonnant par récurrence, tout revient à démontrer que l'on a :

$$|f(\lambda)| \leqslant \frac{1}{r} \operatorname*{Max}_{|\lambda'-\lambda|\leqslant 2r} |f_1(\lambda')| \quad (f_1(\lambda) = (\lambda - \zeta_1)f(\lambda)).$$

Si $|\lambda - \zeta_1| \geqslant r$, c'est évident; si $|\lambda - \zeta_1| \leqslant r$, on aura, d'après le principe du module maximum :

$$|f(\lambda)| \leqslant \operatorname*{Max}_{|\lambda'-\zeta_1|=r} |f(\lambda')| \leqslant \frac{1}{r} \operatorname*{Max}_{|\lambda'-\zeta_1|=r} |f_1(\lambda')| \leqslant \frac{1}{r} \operatorname*{Max}_{|\lambda'-\lambda|\leqslant 2r} |f_1(\lambda')|.$$

Dans la formule (1), on peut remplacer $\frac{1}{r^m} \operatorname*{Max}_{|\lambda'-\lambda|\leqslant 2mr}$ par $\frac{1}{r^m} \operatorname*{Max}_{|\lambda'-\lambda|\leqslant r}$ (cela se démontre facilement avec la formule de Jensen); c'est le meilleur résultat possible, comme le montre l'exemple suivant : $f = 1$; $P = z^m$; $\lambda = 0$.

LEMME 2. — *Soit* $f(\lambda)$, *avec* $\lambda = \sigma + i\tau$, *la transformée de Fourier d'une fonction* $\varphi \in \mathfrak{D}$; *on posera* $|||f|||_\tau = \int |f(\sigma + i\tau)|\, d\sigma$.

Soit $P(\lambda)$ *défini comme au lemme* 1. *Il existe une constante* C, *ne dépendant que de m et r, telle que* :

$$(2)\quad |||f|||_0 \leqslant C\{|||Pf|||_0 + |||Pf|||_r + |||Pf|||_{-r}\} \quad (r>0)\ (^4)$$

Soit I l'ensemble des points réels qui vérifient $|P(\sigma)| \leqslant 1$; et soit J le complémentaire de I dans R; majorons séparément $\int_I$ et $\int_J$;

$$\alpha) \qquad \int_J |f(\sigma)|\,d\sigma \leqslant \int_J |P(\sigma)f(\sigma)|\,d\sigma \leqslant |||Pf|||_0.$$

b) Pour tout $\sigma \in R$, on a, d'après le lemme 1 :

$$|f(\sigma)| \leqslant \left(\frac{4m}{r}\right)^m \operatorname*{Max}_{|\lambda'-\sigma|\leqslant\frac{r}{2}} |P(\lambda')f(\lambda')| \leqslant \left(\frac{4m}{r}\right)^m \operatorname*{Max}_{|\tau|\leqslant\frac{r}{2}} |P(\lambda')f(\lambda')|.$$

Majorons le dernier terme de cette formule; posons $g = Pf$; pour $\lambda' = \sigma' + i\tau'$, $|\tau'| \leqslant \frac{r}{2}$, on a, par la formule de Cauchy :

$$g(\lambda') = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{g(\sigma - ir)}{\lambda' - \sigma + ir}\,d\sigma - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{g(\sigma + ir)}{\lambda' - \sigma - ir}\,d\sigma$$

donc :

$$|g(\lambda')| \leqslant \frac{1}{\pi r}\left\{\int |g(\sigma - ir)|\,d\sigma + \int |g(\sigma + ir)|\,d\sigma\right\} = \frac{1}{\pi r}\{|||g|||_r + |||g|||_{-r}\}$$

et enfin :

$$|f(\sigma)| \leqslant \frac{1}{\pi r}\left(\frac{4m}{r}\right)^m \{|||g|||_r + |||g|||_{-r}\}.$$

Or, l'ensemble I a une mesure finie, majorée par $2m$ (en effet, si σ est dans I, l'un au moins des $|\sigma - \zeta_i|$ sera $\leqslant 1$). Par conséquent :

$$\int_I |f(\sigma)|\,d\sigma \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4m}{r}\right)^{m+1} \{|||g|||_r + |||g|||_{-r}\} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Placons-nous maintenant dans l'espaçe R^n, de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$; si φ est dans $\mathcal{D}_{R^n}$, désignons par $\mathcal{F}\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sa transformée de Fourier; nous poserons $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$ et :

$$|||\varphi||| = \int |\mathcal{F}\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)|\,d\sigma_1, \ldots, d\sigma_n.$$

(4) Remarquons que, en utilisant une inégalité de convexité, on pourrait supprimer le terme en $|||Pf|||_0$ dans cette formule.

Proposition 1. — *Soit* D *un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre m, défini sur* R^n; *on suppose que le coefficient de* $\frac{\partial^m}{\partial x_1^m}$ *est égal à* 1. *Il existe alors une constante* K *ne dépendant que de r et m telle que :*

$$|||\varphi||| \leqslant K \sup_{|\rho| \leqslant r} |||e^{2\pi\rho x_1} D\varphi|||. \tag{3}$$

Soit en effet $R(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la transformée de Fourier de $D\delta$; on a

$$R(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (2\pi i)^m \lambda_1^m + \sum_{j=1}^{m} \lambda_1^{m-j} R_j$$

les R_j étant des polynômes en $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Soit $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la transformée de Fourier de φ; $G = RF$ est la transformée de Fourier de $D\varphi$; d'après le lemme 2, quels que soient $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$, on aura

$$\int |F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)| d\sigma_1 \leqslant \frac{C}{(2\pi)^m} \int \{|G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)| + |G(\sigma_1 - ir, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)| + |G(\sigma_1 + ir, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)|\} d\sigma_1$$

en intégrant par rapport à $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$:

$$\int |F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)| d\sigma_1, \ldots, d\sigma_n \leqslant \frac{C}{(2\pi)^m} \int \{\cdots\} d\sigma_1, \ldots, d\sigma_n.$$

D'où, par transformation de Fourier, la formule (3).

Théorème 1. — *Tout opérateur différentiel* D *à coefficients constants admet une solution élémentaire* E (*i.e.* $E \in \mathcal{D}'$, $DE = \delta$) *qui possède la propriété suivante :*

Pour tout $\varphi \in L^2 \cap \mathcal{E}' (= \mathcal{K}^0)$, $E * \varphi$ *est localement* L^2 (*i.e. est dans* $\mathcal{L}^0$), *et* $E *$ *opère continuement de* $\mathcal{K}^0$ *dans* $\mathcal{L}^0$.

Pour démontrer ce théorème, nous pouvons supposer (en faisant au besoin un changement de variables) que le transposé $\check{D}$ de D vérifie les hypothèses de la proposition 1; cela étant, munissons $\mathcal{D}$ de la norme :

$$\psi \to \sup_{|\rho| \leqslant r} |||e^{2\pi\rho x_1}\psi||| \quad (r > 0, \text{ fixé})$$

et montrons qu'il existe une forme linéaire sur $\mathcal{D}$, soit E, continue pour cette norme, et vérifiant $\langle E, \check{D}\varphi \rangle = \varphi(0)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$. La dernière formule définit une forme linéaire sur $\check{D}\mathcal{D}$ (car $\check{D}\varphi = 0$ entraîne $\varphi = 0$); elle est continue pour la norme envisagée, car, d'après la proposition 1 :

$$|\varphi(0)| \leqslant |||\varphi||| \leqslant K \sup_{|\rho| \leqslant r} |||e^{2\pi\rho x_1}\check{D}\varphi|||.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, cette forme linéaire se prolonge en une forme linéaire sur $\mathcal{D}$, continue pour la norme considérée, soit E; montrons que E répond à la question.

a) E est *a fortiori* continue pour la topologie habituelle de $\mathcal{D}$; donc c'est une distribution; et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\langle DE, \varphi \rangle = \langle E, \check{D}\varphi \rangle = \varphi(0) \qquad \text{donc} \qquad DE = \delta.$$

b) Soient φ et ψ dans $\mathcal{D}$; il existe K tel que l'on ait :

$$|\langle E * \varphi, \psi \rangle| = |\langle E, \check{\varphi} * \psi \rangle| \leqslant K \sup_{|\rho| \leqslant r} |||e^{2\pi\rho x_1}(\check{\varphi} * \psi)|||$$
$$\leqslant K \sup_{|\rho| \leqslant r} |||(e^{2\pi\rho x_1}\check{\varphi}) * (e^{2\pi\rho x_1}\psi)|||.$$

Mais, si u et v sont dans $\mathcal{D}$, et si l'on pose $||u||^2 = \int u\bar{u}\, dx_1 \ldots dx_n$ on a, (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Plancherel) :

$$|||u * v||| = \int |\mathcal{F}u . \mathcal{F}v|\, d\sigma_1 \ldots d\sigma_n \leqslant ||u|| . ||v||.$$

Finalement :

$$|\langle E * \varphi, \psi \rangle| \leqslant K \sup_{|\rho| \leqslant r} \{||e^{2\pi\rho x_1}\check{\varphi}|| . ||e^{2\pi\rho x_1}\psi||\}.$$

Cette dernière formule montre : si φ et $\psi \in \mathcal{D}$ gardent leurs supports dans des compacts fixes et restent bornées dans L^2, $\langle E * \varphi, \psi \rangle$ reste borné; le théorème en résulte immédiatement.

Remarques :

1° Pour tout $m \gtrless 0$, E opère continuement de $\mathcal{K}^m$ dans $\mathcal{L}^m$.

2° Toute distribution T telle que T $*$ opère continuement de $\mathcal{K}^0$ dans $\mathcal{L}^0$ est somme de dérivées d'ordre $\leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ de fonctions localement de carré sommable (c'est-à-dire : est dans $\mathcal{K}'^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$); en effet, si des $\varphi_i \in \mathcal{D}$ tendent vers zéro dans $\mathcal{K}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, les $T * \check{\varphi}_i$ tendent vers zéro dans $\mathcal{L}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, on sait qu'alors les $T * \check{\varphi}_i$ tendent vers zéro uniformément sur tout compact [26];

donc $\langle T, \varphi_i \rangle = T * \check{\varphi}_i(0)$ tend vers zéro. (Notons d'ailleurs que la réciproque est fausse : $T \in \mathcal{K}'^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ n'entraîne pas que $T *$ opère continuement de $\mathcal{K}^0$ dans $\mathcal{L}^0$).

Par conséquent : E *est somme de dérivées d'ordre* $\leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ *de fonctions localement de carré sommable.*

Ce résultat est le meilleur possible, lorsque l'on considère tous les opérateurs différentiels et que l'on cherche une majoration ne dépendant pas de l'ordre de D; en effet, si D = identité, δ est la seule solution élémentaire de D; or $\delta \notin \mathcal{K}'^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

3° Un problème important (et non résolu) de la théorie des équations aux dérivées partielles est le suivant : existe-t-il une solution élémentaire *tempérée* pour toute équation aux dérivées partielles à coefficients constants?

Le théorème 1 ne permet pas de l'affirmer. On obtient néanmoins un résultat sur la croissance des solutions élémentaires.

Supposons que la direction $x_1 = 0$ n'est pas caractéristique (c'est-à-dire que, m désignant l'ordre de D, le coefficient de $\dfrac{\partial^m}{\partial x_1^m}$ dans D n'est pas nul); il existe alors une solution élémentaire E qui vérifie

$$|\langle E, \varphi \rangle| \leqslant K \sup_{|\rho| < r} |||e^{2\pi\rho x_1}\varphi|||.$$

Cela montre, en particulier : si $e^{2\pi\rho x_1}\varphi$ tend uniformément vers zéro dans $\mathcal{S}$ pour $|\rho| \leqslant r$, $\langle E, \varphi \rangle$ tend vers zéro.

Soit $\alpha(x_1)$ une fonction indéfiniment différentiable de la variable x_1, égale à 1 si x_1 est assez grand, nulle pour $x_1 \leqslant 0$; αE pourra s'écrire $e^{2\pi r x_1}E_1$, où E_1 est tempérée : en effet, si des ψ_i tendent vers zéro dans $\mathcal{S}$, les $e^{2\pi\rho x_1}\alpha\psi_i (\rho \leqslant 0)$, donc les

$$e^{2\pi\rho x_1}(e^{-2\pi r x_1}\alpha\psi_i) \quad (|\rho| \leqslant r)$$

tendent uniformément vers zéro dans $\mathcal{S}$, donc

$$\langle E, e^{-2\pi r x_1}\alpha\psi_i \rangle = \langle e^{-2\pi r x_1}\alpha E, \psi_i \rangle$$

tend vers zéro, d'où

$$e^{-2\pi r x_1}\alpha E \in \mathcal{S}'.$$

De même, $(1 - \alpha)E$ pourra s'écrire $e^{2\pi r x_1}E_2$, où E_2 est tempérée.

Par conséquent : *si la direction* $x_1 = 0$ *n'est pas caractéristique, quel que soit* $r > 0$, *il existe une solution élémentaire de la forme* : $e^{2\pi r x_1}E_1 + e^{-2\pi r x_1}E_2$ *avec* E_1 *et* E_2 *tempérées.*

4° Nous avons obtenu dans la Proposition 1 et le théorème 1 des majorations qui ne dépendent pas de D, mais seulement du fait que D est d'ordre m et que le coefficient de $\dfrac{\partial^m}{\partial x_1^m}$ est égal à 1 ; il en résulte que, pour tous les D qui vérifient ces deux propriétés, on pourra choisir des solutions élémentaires qui seront toutes dans un ensemble borné de l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{K}^0, \mathcal{L}^0)$ des applications continues de $\mathcal{K}^0$ dans $\mathcal{L}^0$; en se ramenant au cas précédent par des changements de variables, on voit que cette propriété subsiste pour les D qui sont d'ordre égal à m et vérifient en outre la condition suivante; *le plus grand coefficient des dérivées d'ordre m dans* D *est borné inférieurement.*

§ 2. — Équations homogènes.

1. On sait que toute fonction harmonique dans R^n est limite, uniformément sur tout compact, de polynômes harmoniques; nous allons généraliser ce résultat.

Proposition 2. — *Soit* D *un opérateur différentiel à coefficients constants sur* R^n; *on pose* $R(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathcal{F}(D\delta)$; *pour que* $\nu \in \mathcal{E}'$ *puisse s'écrire* $\nu = D\mu$, $\mu \in \mathcal{E}'$ *il faut et il suffit que* $M = \dfrac{\mathcal{F}\nu}{R}$ *soit une fonction entière.*

Même énoncé, en remplaçant $\mathcal{E}'$ *par* $\mathcal{D}$ *ou* $\mathcal{K}^p$ $(p \lesseqgtr 0)$.

Si $\nu \in \mathcal{E}'$ vérifie $\nu = D\mu$, avec $\mu \in \mathcal{E}'$, on aura $M = \mathcal{F}\mu$ donc M est analytique entière.

Réciproquement, soit $\nu \in \mathcal{E}'$ avec $M = \dfrac{\mathcal{F}\nu}{R}$ entière; nous allons montrer que M est de type exponentiel et à croissance lente pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels; d'après le théorème de Paley-Wiener, il existera $\mu \in \mathcal{E}'$ tel que $M = \mathcal{F}\mu$; et l'on aura : $\nu = D\mu$.

En faisant au besoin un changement de variables, nous pouvons supposer que D vérifie les hypothèses de la proposition 1; on aura donc $R(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (2\pi i)^m \lambda_1^m + \sum_{j=1}^{m} \lambda_1^{m-j} R_j$, les R_j étant des polynômes en $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$; en appliquant le lemme 1, paragraphe 1, il vient :

$$|M(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| \leqslant \operatorname*{Max}_{|\lambda'-\lambda_1|\leqslant 2m} |\mathcal{F}\nu(\lambda', \lambda_2, \ldots, \lambda_n)|.$$

Comme $\mathcal{F}\nu$ est de type exponentiel, M le sera aussi en vertu de cette formule; d'autre part, $\mathcal{F}\nu$ est majoré, par un polynôme en $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ dans toute la bande $|\tau_1| \leqslant 2m$, $\tau_2 = \cdots = \tau_n = 0$ [26]; donc M sera à croissance lente pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels.

Pour terminer la démonstration, il suffit maintenant de montrer : si μ est dans $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{K}^p$), et s'il existe $\nu \in \mathcal{E}'$ vérifiant $\mu = D\nu$, alors ν est dans $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{K}^p$).
Or, soit E une solution élémentaire de D qui vérifie : $E * \mathcal{K}^0 \subset \mathcal{L}^0$; le résultat découle de la formule : $\nu = E * \mu$.

Corollaire. — $D\mathcal{E}'$ *est fermé.*

En effet, la proposition 2 montre que l'on a : $D\mathcal{E}' = [V(\check{D}\mathcal{E})]^{\perp}$

Théorème 2. — *Soit* Ω *un ouvert convexe, et* D *un opérateur différentiel à coefficients constants. Toute* $f \in \mathcal{E}_\Omega$ *qui vérifie* $Df = 0$ *est limite dans* $\mathcal{E}_\Omega$ *de combinaisons linéaires d'exponentielles-polynômes qui vérifient cette équation* (autrement dit : est adhérente dans $\mathcal{E}_\Omega$ à $V(D\mathcal{E})$). *Même énoncé en remplaçant* $\mathcal{E}_\Omega$ *par* $\mathcal{D}'_\Omega$, $\mathcal{L}^p_\Omega$, $\mathcal{E}^p_\Omega$ *ou* $\mathcal{D}'^p_\Omega$ *faible.*

a) cas de $\mathcal{E}_\Omega$; raisonnons par dualité : soit $\nu \in \mathcal{E}'_\Omega$ orthogonale à $V(D\mathcal{E})$; montrons que, si $f \in \mathcal{E}_\Omega$ vérifie $Df = 0$, on a $\langle \nu, f\rangle = 0$. D'après l'hypothèse, on a : $V(\nu) \supset V(\check{D}\mathcal{E})$; donc (préliminaires $\mathcal{F}\nu/\mathcal{F}(\check{D}\mathcal{E})$ est une fonction entière; d'après la proposition 2, il existe $\mu \in \mathcal{E}'$ qui satisfait à : $\nu = \check{D}\mu$; d'après le théorème des supports, on aura : $\underline{\mu} \subset \Omega$ (Ω est convexe par hypothèse); par suite

$$\langle \nu, f\rangle = \langle \check{D}\mu, f\rangle = \langle \mu, Df\rangle = 0.$$

b) Le même raisonnement vaut pour $\mathcal{D}'_\Omega$, et $\mathcal{L}^p_\Omega$ $(p \gtrless 0)$. Les autres se déduisent de *a*) par régularisation.

2. Revenons un instant aux fonctions harmoniques; dans ce cas, le théorème d'approximation est plus précis que le théorème 2; il dit en effet que toute fonction harmonique dans un ouvert Ω est limite uniformément sur tout compact de polynomes harmoniques, pourvu que $\complement\,\Omega$ n'ait pas de composantes connexes compactes; cela suggère deux questions :

a) A quelle condition un ouvert Ω vérifie-t-il le théorème 2? Cela sera étudié au chapitre 3, en particulier dans le cas des opérateurs *analytiques-elliptiques*.

b) A quelle condition peut-on remplacer, dans le théorème 2 « exponentielles-polynômes » par « polynômes »?

Pour cela, il suffit que tout $\nu \in \mathcal{E}'$ orthogonal aux polynômes $\subset V(D\delta)$ soit orthogonal à $V(D\delta)$; autrement dit (voir les préliminaires, numéro 4) que « $\dfrac{\mathcal{F}\check{\nu}}{\mathcal{F}(D\delta)}$ holomorphe à l'origine » entraîne « $\dfrac{\mathcal{F}\check{\nu}}{\mathcal{F}(D\delta)}$ entière ». Soit $R = \prod_1^q R_i$ une décomposition de $R = \mathcal{F}(D\delta)$ en polynômes irréductibles; il est classique que toute variété algébriquement irréductible est analytiquement irréductible; en particulier, la variété V, définie par l'équation $R_i = 0$ est analytiquement irréductible.

Pour $\nu \in \mathcal{E}'$, la variété polaire de $\dfrac{\mathcal{F}\check{\nu}}{\mathcal{F}(D\delta)}$ est donc une réunion de V_i; si toutes les V_i passent par l'origine (c'est-à-dire, si pour tout i, on a $R_i(0) = 0$), et si $\dfrac{\mathcal{F}\check{\nu}}{\mathcal{F}(D\delta)}$ est holomorphe à l'origine, sa variété polaire sera vide et $\dfrac{\mathcal{F}\check{\nu}}{\mathcal{F}(D\delta)}$ sera entière.

Supposons par contre que V_1 ne passe pas par l'origine; il existe $\nu \in \mathcal{E}'$ vérifiant :

$\mathcal{F}\check{\nu} = \prod_2^q R_i$; $\dfrac{\mathcal{F}\check{\nu}}{\mathcal{F}(D\delta)}$ est holomorphe à l'origine, donc ν est orthogonal à tous les polynômes $\subset V(D\delta)$; mais $\check{\nu}$ n'est pas de la forme $D\check{\mu}$, $\mu \in \mathcal{E}'$, donc (proposition 2), n'est pas orthogonal à $V(D\delta)$. Par suite, les polynômes $\subset V(D\delta)$ ne sont pas denses dans $V(D\delta)$ pour la topologie induite par $\mathcal{E}$; ils ne peuvent pas non plus être denses dans $V(D\delta)$ pour la topologie induite par $\mathcal{D}'$ ou $\mathcal{L}^p$ (sinon, en régularisant, on trouverait qu'ils sont denses pour la topologie induite par $\mathcal{E}$). Énonçons le résultat :

THÉORÈME 2'. — *Pour que, dans l'énoncé du théorème* 2, *on puisse remplacer « exponentielles-polynômes » par « polynômes », il faut et il suffit que tous les facteurs irréductibles de* $\mathcal{F}(D\delta)$ *s'annulent à l'origine.*

Exemples : La propriété vaut pour

$$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}; \qquad \Delta^m; \qquad \frac{\partial}{\partial t} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2};$$

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Elle ne vaut pas pour $\Delta + \lambda$, $\lambda \neq 0$ (dans ce cas, où $R(0) \neq 0$, il n'y a pas de polynômes $\not\equiv 0$ solutions de l'équation).

§ 3. — Équations avec second membre.

Théorème 3. — *Soit* Ω *un ouvert convexe de* R^n, *et* D *un opérateur différentiel à coefficients constants. Si* f *est une fonction indéfiniment différentiable dans* Ω (*resp.* $\in \mathcal{L}^p_\Omega$), *il existe* g *indéfiniment différentiable dans* Ω (*resp.* $\in \mathcal{L}^p_\Omega$) *et vérifiant* : $Dg = f$.

Soit f donnée dans $\mathcal{E}_\Omega$ (resp. $\mathcal{L}^p_\Omega$) et soit $\mathcal{O}_i$ une suite croissante d'ouverts convexes $\subset \Omega$, relativement compacts dans Ω avec $\cup\, \mathcal{O}_i = \Omega$; on met f sous la forme $\sum f_i$, f_i étant à support compact $\subset \Omega \cap \complement\, \overline{\mathcal{O}}_i$ et indéfiniment différentiable (resp. $\in \mathcal{L}^p_\Omega$).

Soit E une solution élémentaire de D, satisfaisant à la propriété $E * \mathcal{K}^0 \subset \mathcal{L}^0$; on pose h_i = restriction à Ω de $E * f_i$. Si la série $\sum h_i$ converge dans $\mathcal{E}_\Omega$ (resp. $\mathcal{L}^p_\Omega$), elle répond à la question. En général, elle ne convergera pas. Mais remarquons que, dans un voisinage convexe de $\overline{\mathcal{O}}_i$, on a $Dh_i = 0$; on peut donc approcher h_i sur $\overline{\mathcal{O}}_i$ par une somme d'exponentielles-polynômes, soit Q_i vérifiant $DQ_i = 0$; si l'on peut choisir Q_i de manière que la série $g = \sum (h_i - Q_i)$ converge dans $\mathcal{E}_\Omega$ (resp. $\mathcal{L}^p_\Omega$), g répondra à la question.

Pour cela, si f est dans $\mathcal{E}_\Omega$, on choisira Q_i de manière que $|D^k(h_i - Q_i)| \leqslant 2^{-i}$ dans $\mathcal{O}_i$, les D^k étant tous les monômes de dérivation d'ordre $|k| \leqslant i$. Si f est dans $\mathcal{L}^p_\Omega (p \geqslant 0)$, on choisira Q_i de manière que

$$\int_{\mathcal{O}_i} |D^k(h_i - Q_i)|^2 \, dx_1 \ldots, dx_n \leqslant 2^{-i} \qquad \text{pour} \qquad |k| \leqslant p.$$

On a donc démontré : $D\mathcal{E}_\Omega = \mathcal{E}_\Omega$, et $D\mathcal{L}^p_\Omega \supset \mathcal{L}^p_\Omega (p \geqslant 0)$.

Soit enfin $f \in \mathcal{L}^p_\Omega (p < 0)$; on peut écrire f sous la forme d'une somme finie de dérivées d'ordre $\leqslant p$ de fonctions localement-L^2,

$f = \sum D^k f^k$; on résoud dans $\mathfrak{L}^0$ les équations $Dg^k = f^k$; et $g = \sum D^k g^k$ répond à la question.

Remarques : — 1° On démontrerait de la même manière : *si* f *est* $p + k$ *fois continuement différentiable dans un ouvert convexe* Ω, *et s'il existe une solution élémentaire de* D *d'ordre* k(*i.e.* $\in \mathcal{D}'^k$), *il existe* $g \in \mathcal{E}^p_\Omega$ *qui vérifie* $Dg = f$; *en particulier, d'après le théorème* 1, *pour tout ouvert* Ω *convexe, on aura :*

$$D\mathcal{E}^p_\Omega \supset \mathcal{E}_\Omega^{p+\left[\frac{n}{2}\right]+1}.$$

2° Le théorème 3 entraîne : si Ω *est un ouvert convexe*, $D\mathcal{D}'^F_\Omega = \mathcal{D}'^F_\Omega$.

Nous avons donné ce résultat à cause de sa démonstration relativement élémentaire; en voici maintenant une généralisation :

Théorème 4. — *Soit* Ω *un ouvert* $\in R^n$, *et* D *un opérateur différentiel à coefficients constants*; *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° $D\mathcal{E}_\Omega = \mathcal{E}_\Omega$.

2° $D\mathcal{D}'^F_\Omega = \mathcal{D}'^F_\Omega$.

3° *Pour tout compact* $K \subset \Omega$, *il existe un compact* $K' \subset \Omega$ *qui vérifie ceci :* $\mu \in \mathcal{E}'_\Omega$ et $\check{D}\mu \subset K$ *entraînent* $\mu \subset K'$.

a) 1° entraîne 3° Soit K un compact $\subset \Omega$, et soit Φ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$, telles que $|\check{D}\varphi|$ ait son support dans K et soit $\leqslant 1$; $\check{D}\Phi$ est un ensemble borné dans $\mathcal{E}'_\Omega$; montrons que Φ est aussi borné dans $\mathcal{E}'_\Omega$.

Il suffit de montrer que Φ est faiblement borné dans $\mathcal{E}'_\Omega$, c'est-à-dire, pour tout $f \in \mathcal{E}_\Omega$, que $|\langle f, \varphi\rangle|$ reste borné quand φ parcourt Φ. Par hypothèse, il existe $g \in \mathcal{E}_\Omega$ tel que $Dg = f$; alors

$$\sup_{\varphi \in \Phi} |\langle f, \varphi\rangle| = \sup_{\varphi \in \Phi} |\langle Dg, \varphi\rangle| = \sup_{\varphi \in \Phi} |\langle g, \check{D}\varphi\rangle| < +\infty.$$

Comme Φ est borné, les $\varphi \in \Phi$ ont leurs supports dans un compact fixe, soit K'; si maintenant $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$ est telle que $\check{D}\varphi$ ait son support dans K, il existe $C > 0$ tel que $C\varphi \in \Phi$, donc φ aura son support dans K'; cela montre 3° dans le cas particulier où $\mu \in \mathcal{D}$. (Cette démonstration est encore valable si D est un opérateur différentiel à coefficients variables sur une variété Ω).

Soit L un voisinage compact de K, $L \subset \Omega$; si $\mu \in \mathcal{E}'_\Omega$ est tel que

$\check{D}\mu$ ait son support dans K, le support de $\alpha * \check{D}\mu = \check{D}(\alpha * \mu)$ sera contenu dans L dès que $\alpha \in \mathcal{D}_{R^n}$ aura son support assez voisin de l'origine; alors, il existe L' compact $\subset \Omega$ tel que $\alpha * \mu$ ait son support dans L', et par passage à la limite $(\alpha \rightarrow \delta)$, on aura aussi : $\underline{\mu} \subset L'$.

b) 2° entraîne 3° Soit K un compact $\subset \Omega$; considérons l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$ tels que $\check{D}\varphi$ ait son support dans K; montrons que les φ ont leurs supports dans un compact $K' \subset \Omega$; la propriété 3° s'en déduira par régularisation, comme en *a*).

Si la proposition annoncée était fausse, on pourrait trouver une *suite* $\varphi_i \in \mathcal{D}_\Omega$, telle que les $\check{D}\varphi_i$ aient leurs supports dans K, et que les φ_i aient des supports dont la réunion ne soit contenue dans aucun compact de Ω. En multipliant au besoin les φ_i par des constantes convenables, on pourrait supposer que les $\check{D}\varphi_i$ forment un ensemble borné dans $\mathcal{D}_K$; on déduirait de là, en raisonnant comme en *a*), que les φ_i forment un ensemble borné dans $\mathcal{E}'^0_\Omega$, ce qui est absurde.

c) 3° entraîne 1° Il suffit de démontrer (cf. préliminaires numéro 3) que l'application $\check{D} : \mathcal{E}'_\Omega \rightarrow \mathcal{E}'_\Omega$ est biunivoque, et que $\check{D}\mathcal{E}'_\Omega$ est fermé dans $\mathcal{E}'_\Omega$.

La première propriété est immédiate par transformation de Fourier. Pour montrer que $\check{D}\mathcal{E}'_\Omega$ est fermé (fortement ou faiblement, ce qui est la même chose, puisque $\mathcal{E}_\Omega$ est réflexif), il suffit de démontrer que l'intersection de $\check{D}\mathcal{E}'_\Omega$ avec tout ensemble borné faiblement fermé est faiblement fermée; les distributions d'un ensemble borné ayant leurs supports dans un compact fixe, il suffit de démontrer ceci : *pour tout* K *compact* $\subset \Omega$, $\check{D}\mathcal{E}'_\Omega \cap \mathcal{E}'_K$ *est fermé dans* $\mathcal{E}'_\Omega$.

Soit E une solution élémentaire de D; si des $\mu_i \in \mathcal{E}'_\Omega$ sont tels que les $\check{D}\mu_i$ aient leurs supports dans K et convergent vers ν, comme on a $\mu_i = \check{E} * \check{D}\mu_i$, les μ_i tendent vers $\check{E} * \nu = \mu$ dans $\mathcal{D}'_{R^n}$; mais les μ_i ont leurs supports dans un compact fixe K' d'après l'hypothèse; donc, on a: $\underline{\mu} \subset K'$ et $\check{D}\mu = \nu$; par conséquent, ν est dans $\check{D}\mathcal{E}'_\Omega \cap \mathcal{E}'_K$.

d) 3° entraîne 2°. Montrons que l'on a : $D\mathcal{L}^0_\Omega \supset \mathcal{L}^0_\Omega$ (cela entraîne évidemment 2°).

Pour cela, considérons l'espace G formé des $f \in \mathcal{L}^0_\Omega$ qui vérifient $Df \in \mathcal{L}^0_\Omega$; munissons G de la topologie localement convexe la moins fine pour laquelle les applications $f \to f$ et $f \to Df$ sont continues de G dans $\mathcal{L}^0_\Omega$.

G est le sous-espace de $\mathcal{L}^0_\Omega \times \mathcal{L}^0_\Omega$ formé des couples (f, Df) ; ce sous-espace est fermé, donc G est un espace $(\mathcal{F})$ (il est même réflexif) ; toute forme linéaire continue sur G provient d'une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^0_\Omega \times \mathcal{L}^0_\Omega$, donc d'un couple (ν_1, ν_2), $\nu_1 \in \mathcal{K}^0_\Omega$, $\nu_2 \in \mathcal{K}^0_\Omega$. On a $\langle (f, Df), (\nu_1, \nu_2) \rangle = \langle f, \nu_1 \rangle + \langle Df, \nu_2 \rangle = \langle f, \nu_1 + \check{D}\nu_2 \rangle$ donc, le dual de G est formé des $\nu \in \mathcal{E}'_\Omega$ qui sont de la forme

$$\nu_1 + \check{D}\nu_2, \qquad \nu_1 \in \mathcal{K}^0_\Omega, \qquad \nu_2 \in \mathcal{K}_\Omega.$$

Montrons que D envoie G sur $\mathcal{L}^0_\Omega$; l'application transposée : $\check{D}$ $\mathcal{K}^0_\Omega \to G'$ est biunivoque ; si nous montrons que $\check{D}\mathcal{K}^0_\Omega$ est (faiblement) fermé dans G', d'après la théorie des espaces $(\mathcal{F})$, la proposition sera démontrée.

Nous avons vu en *c*) que $\check{D}\mathcal{E}'$ est fermé dans $\mathcal{E}'$; donc, tout $\nu \in \check{D}\mathcal{K}^0_\Omega$ s'écrit $\nu = \check{D}\mu$, $\mu \in \mathcal{E}'_\Omega$; d'autre part, $\nu = \nu_1 + \check{D}\nu_2$ avec ν_1 et $\nu_2 \in \mathcal{K}^0_\Omega$. Soit alors E une solution élémentaire de D, qui vérifie : $E * \mathcal{K}^0 \subset \mathcal{L}^0$; on aura $\check{E} * \nu = (\check{E} * \nu_1) + \nu_2 = \mu$. Par suite, $\mu \in \mathcal{K}^0_\Omega$, donc $\nu \in \check{D}\mathcal{K}^0_\Omega$ et $\check{D}\mathcal{K}^0_\Omega$ est bien fermé. Le théorème est ainsi complètement démontré.

Remarques :

1) De *d*), on déduit immédiatement :

3° *entraîne* $\qquad D\mathcal{L}^p_\Omega \supset \mathcal{L}^p_\Omega \qquad (p \gtrless 0)$

et $D\mathcal{E}^p_\Omega \supset \mathcal{E}^{p+\left[\frac{n}{2}\right]+1}_\Omega$ $(p \geqslant 0)$ (résultats en apparence plus forts que 2°).

2) Soit k l'ordre d'une solution élémentaire de D ; en raisonnant comme en *d*), on trouve que 3° entraîne $D\mathcal{E}^p_\Omega \supset \mathcal{E}^{p+k}_\Omega$ (ici, pour G, il faut prendre l'espace des couples (f, Df) dans $\mathcal{E}^p_\Omega \times \mathcal{E}^{p+k}_\Omega$).

3) On a vu en *c*) que 3° entraîne : $\check{D}\mathcal{E}'$ est fermé ; par le théorème du graphe fermé, il résulte alors que *l'application* $\check{D}\varphi \to \varphi$ *est un isomorphisme fort de* $\check{D}\mathcal{E}'$ *dans* $\mathcal{E}'$.

4) Si Ω est convexe, le théorème des supports montre que 3° est vérifié : on retrouve ainsi le théorème 3. Notons aussi que le théorème 4 peut se démontrer comme le théorème 3, par un procédé d'approximation « à la Mittag-Leffler » (voir, pour une généralisation, chapitre III, théorème 2).

§ 4. — Systèmes d'équations.

Soit Ω un ouvert $\subset R^n$, et soit D une matrice différentielle à coefficients constants de type (p, q); soit r le rang de D, et soit D′ une matrice de type (r, r) extraite de D, telle que $\Delta = \text{dét}\,(D') \not\equiv 0$.

Problème (1). — f étant donné dans $\overset{(p,1)}{\mathcal{E}_\Omega}$ (resp. $\overset{(p,1)}{\mathcal{D}'_\Omega}$, déterminer $g \in \overset{(q,1)}{\mathcal{E}_\Omega}$ (resp. $\overset{(q,1)}{\mathcal{D}'_\Omega}$) telle que $Dg = f$.

Pour que le problème (1) admette une solution, il est évidemment nécessaire que la condition de compatibilité suivante soit satisfaite :

(C) *Toute matrice de dérivation* P *à coefficients constants de type* $(1, p)$ *qui vérifie* $PD = 0$ *vérifie aussi* $Pf = 0$.

La résolution classique des équations linéaires montre ceci : soit $f' \in \overset{(p,1)}{\mathcal{E}_\Omega}$ (resp. $\overset{(p,1)}{\mathcal{D}'_\Omega}$) qui vérifie (C); il existe $g \in \overset{(q,1)}{\mathcal{E}_\Omega}$ (resp. $\overset{(q,1)}{\mathcal{D}'_\Omega}$) qui vérifie $Dg = \Delta f'$. La solution du problème (1) est donc conséquence de la solution du :

Problème (1′). — Étant donné $f \in \overset{(p,1)}{\mathcal{E}_\Omega}$ (resp. $\overset{(p,1)}{\mathcal{D}'_\Omega}$) qui vérifie (C) trouver $f' \in \overset{(p,1)}{\mathcal{E}_\Omega}$ (resp. $\overset{(p,1)}{\mathcal{D}'_\Omega}$) qui vérifie (C) et $\Delta f' = f$.

Proposition 5. — *a*) *Si* $p = r$, *et si l'on a* : $\Delta \mathcal{E}_\Omega = \mathcal{E}_\Omega$ (*resp.* $\Delta \mathcal{D}'_\Omega = \mathcal{D}'_\Omega$), *quel que soit* $f \in \overset{(p,1)}{\mathcal{E}_\Omega}$ (*resp.* $\overset{(p,1)}{\mathcal{D}'_\Omega}$) *le problème* (1) *admet une solution.*

b) *Si* f *est à support compact, et vérifie* (C), *le problème* (1) *admet toujours une solution* (dans R^n, donc dans tout ouvert).

a) En effet, dans ce cas, la condition (C) est vide, on peut donc résoudre (1′).

b) Soit E solution une élémentaire de Δ; $f' = f * E$ est une solution de (1′).

Une *solution élémentaire à droite* (resp. à gauche) de D est une $E \in \overset{(q,p)}{\mathcal{D}'}$ vérifiant :

$DE = \delta \overset{(p,p)}{I}$ (resp. $E * D\delta = \delta \overset{(q,q)}{I}$), $\overset{(p,p)}{I}$ désignant la matrice identité de type (p, p).

Une *solution élémentaire bilatère* est une solution élémentaire à gauche et à droite.

PROPOSITION 6. — *Pour que* D *admette une solution élémentaire à droite (resp. à gauche, resp. bilatère), il faut et il suffit que l'on ait:* $p = r$ *(resp.* $q = r$*, resp.* $p = q = r$*).*

a) Soit E une solution élémentaire à droite de D; pour toute matrice différentielle à coefficients constants $P \neq 0$ de type $(1, p)$, on a : $PDE = P$, donc $PD \neq 0$; donc $p = r$.

Même raisonnement « à gauche ».

b) Si $p = r$, il existe une solution élémentaire à droite d'après la proposition 5 (il suffit de la déterminer colonne par colonne). Si $q = r$, en transposant, on se ramène au cas précédent.

Enfin, si $p = q = r$, il existe une solution élémentaire bilatère; en effet, on a dans ce cas : $D' = D$, et $\Delta = \text{dét}\,(D) \neq 0$; soit Δ_{ji} le mineur de D_{ij} dans D; et soit F une solution élémentaire de Δ; $E = (\Delta_{ji}F)$ répond à la question.

Pour les équations homogènes, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 7. — *Si* $r = p$, *et si* Ω *est convexe, toute* $f \in \overset{(q,1)}{\mathcal{E}_\Omega}$ *(resp.* $\overset{(q,1)}{\mathcal{D}'_\Omega}$*) vérifiant* $Df = 0$ *est limite de combinaisons linéaires d'exponentielles-polynômes matricielles de type* $(q, 1)$ *vérifiant cette équation.*

Pour fixer les idées, supposons $\Delta = \text{dét.}\begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1p} \\ D_{p1} & \dots & D_{pp} \end{pmatrix} \neq 0$.

Soit $\nu \in \overset{(q,1)}{\mathcal{E}'_\Omega}$ orthogonale à toutes les exponentielles-polynômes matricielles qui vérifient l'équation envisagée; montrons que, si $f \in \overset{(q,1)}{\mathcal{E}_\Omega}$ vérifie $Df = 0$, on a $\langle \nu, f \rangle = 0$.

On sait (cf. préliminaires) qu'il existe des fonctions entières $F_1, \dots, F_p$ telles que

$$\mathcal{F}\nu_j = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{F}[(\check{D})_{ji}\delta]\,F_i.$$

Considérons les p premières de ces équations; en appelant M_{ij} le mineur de $\mathcal{F}[(\check{D})_{ji}\delta]$, on aura :

$$\mathcal{F}(\check{\Delta}\delta)F_i = \sum_{j=1}^{p} M_{ij}\mathcal{F}\nu_j.$$

Donc, $\mathcal{F}(\check{D}\delta)F_i$ est transformée de Fourier d'une distribution à support compact $\subset \Omega$; la proposition 2 et le théorème des

supports montrent qu'il existe $\mu \in \overset{(p,1)}{\mathcal{E}_\Omega}$ tel que $\mathcal{F}\mu_i = F_i$; alors : $\nu_j = \sum_i (\check{D})_{ji}\mu_i$, c'est-à-dire $\nu = \check{D}\mu$.
Par suite

$$\langle \nu, f\rangle = \langle \check{D}\mu, f\rangle = \langle \mu, Df\rangle = 0.$$

Pour f donné dans $\overset{(q,1)}{\mathcal{D}'_\Omega}$, on raisonne de la même manière.

CHAPITRE II

ÉQUATIONS DE CONVOLUTION

§ 1. — Fonctions entières de type exponentiel.

1. Dans ce numéro et le suivant sont démontrés les résultats sur les fonctions entières de type exponentiel dont nous aurons besoin dans la suite du chapitre; les calculs faits dans le numéro 1 sont dus à Lindelöf [16] (Lindelöf n'énonce le théorème 1 que pour les fonctions d'une variable; mais sa méthode permet en réalité de démontrer la proposition 3, qui est un résultat plus fort d'où l'on déduit immédiatement le théorème 1).

Lemme 1. — *Il existe une constante* K *telle que, pour tout nombre complexe* λ, *on ait* :

$$\begin{cases} |1-\lambda| \leqslant e^{K|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \\ |(1-\lambda)\, e^{\lambda}| \leqslant e^{K|\lambda|^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Immédiat.

Lemme 2. — *Soit* $f(\lambda)$ *une fonction entière d'une variable complexe, avec* $f(0) \neq 0$, *et* $|f(\lambda)| \leqslant |f(0)|\, e^{\tau(|\lambda|)}$; τ *étant une certaine fonction positive. Sur le cercle* $|\lambda| = r$, *les points qui vérifient* : $|f(\lambda) \leqslant |f(0)|\, e^{-\sigma\cdot\tau(r)}$ *forment un ensemble fermé de mesure* $m \leqslant \dfrac{2\pi r}{1+\sigma}$.

En effet, la formule de Jensen :

$$\log\left|\frac{r^p}{\zeta_1\ \ldots\ \zeta_p}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi - \log|f(0)|$$

(où $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ désignent les zéros de f de valeur absolue $\leqslant r$) montre que la fonction $F(r) = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi - 2\pi \log|f(0)|$ est une fonction croissante; $F(0) = 0$, donc $F(r) \geqslant 0$; par hypothèse, on a $0 \leqslant F(r) \leqslant -\frac{m}{r}\sigma\tau(r) + \left(2\pi - \frac{m}{r}\right)\tau(r)$, d'où $m \leqslant \frac{2\pi r}{1+\sigma}$.

Proposition 1. — *Soit $f(\lambda)$ une fonction entière d'une variable complexe, de type exponentiel, avec $f(0) \neq 0$; on pose :*

$$f(\lambda) = f(0)\, e^{a\lambda} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\zeta_i}} \qquad (|\zeta_{i+1}| \geqslant |\zeta_i|)$$

et l'on suppose :

$$|f(\lambda)| \leqslant A e^{B|\lambda|}$$

il existe alors des constantes C *et* D, *ne dépendant que de* A *et* B, *telles que :*

1° $\frac{n}{|\zeta_n|} \leqslant \frac{C}{|f(0)|}$, pour tout $n \geqslant 1$.

2° $\left|a + \sum_1^p \frac{1}{\lambda_i}\right| \leqslant \frac{D}{|f(0)|^2}$, pour tout $p \geqslant 0$.

Démonstration de 1° :

De la formule de Jensen, on déduit

$$\left|\frac{r^p}{\zeta_1 \ldots \zeta_p}\right| \leqslant \frac{A}{|f(0)|} e^{Br} \qquad (|\zeta_p| \leqslant r, \quad |\zeta_{p+1}| \geqslant r).$$

Pour tout n, on a donc

$$\frac{r^n}{|\zeta_n|^n} \leqslant \frac{r^n}{|\zeta_1 \ldots \zeta_n|} \leqslant \frac{r^p}{|\zeta_1 \ldots \zeta_p|} \leqslant \frac{A}{|f(0)|} e^{Br}.$$

Prenons $r = \frac{n}{B}$; il vient : $\frac{n}{B|\zeta_n|} \leqslant \frac{A^{\frac{1}{n}}}{|f(0)|^{\frac{1}{n}}} e$ et, comme $|f(0)| \leqslant A$, $\frac{n}{B|\zeta_n|} \leqslant \frac{A}{|f(0)|} e$.

Démonstration de 2° :

On pose

$$f(\lambda) = f(0)\, e^{\left(a + \sum_1^p \frac{1}{\zeta_i}\right)\lambda} \varphi_1(\lambda)\, \varphi_2(\lambda)$$

avec

$$\varphi_1(\lambda) = \prod_1^p \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta_i}\right)$$

et

$$\varphi_2(\lambda) = \prod_{p+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\zeta}}.$$

Majorons $|\varphi_1(\lambda)|$: en appliquant le lemme 1, on aura :

$$|\varphi_1(\lambda)| \leqslant e^{K|\lambda|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_1^p \frac{1}{|\zeta_i|^{\frac{1}{2}}}},$$

en appliquant 1°, on a

$$\sum_1^p \frac{1}{|\zeta_i|^{\frac{1}{2}}} \leqslant 2 \left|\frac{C}{f(0)}\right|^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$|\varphi_1(\lambda)| \leqslant e^{2K\left|\frac{C}{f(0)}\right|^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} |\lambda|^{\frac{1}{2}}}$$

On trouverait de même :

$$|\varphi_2(\lambda)| \leqslant e^{2K\left|\frac{C}{f(0)}\right|^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}} |\lambda|^{\frac{3}{2}}}.$$

Par suite, si $|\lambda| = p$, on aura :

$$|\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)| \leqslant e^{2K\left[\left|\frac{C}{f(0)}\right|^{\frac{1}{2}} + \left|\frac{C}{f(0)}\right|^{\frac{3}{2}}\right] p}$$

et, comme $|f(0)| \leqslant A$, cette dernière formule entraîne

$$|\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)| \leqslant e^{\frac{K'}{|f(0)|^2} p} \qquad (|\lambda| = p)$$

K' étant une constante ne dépendant que de A et B.

a) $p \geqslant 1$. On peut appliquer le lemme 2 à $\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$. On trouve que, si $|\lambda| = p$, l'inégalité $|\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)| \geqslant e^{\frac{-K'}{2|f(0)|^2} p}$ est vérifiée sur un ensemble fermé E_1 de mesure $m_1 \geqslant \frac{4\pi}{3} p$.

Posons d'autre part $a_p = a + \sum_1^p \frac{1}{\zeta_i}$; les points du cercle $|\lambda| = p$ qui vérifient

$$\mathfrak{R}(a_p \lambda) \geqslant \frac{1}{2} p |a_p| \qquad (\mathfrak{R} = \text{partie réelle})$$

forment un ensemble fermé E_2 de mesure $m_2 = \frac{2\pi}{3} p$ (évident géométriquement).

E_1 et E_2 ont donc un point commun λ_0; on a alors

$$f(0) e^{\frac{p|a_p|}{2} - \frac{K'p}{|f(0)|^2}} \leqslant |f(\lambda_0)| \leqslant A e^{Bp}$$

d'où

$$2 \log |f(0)| + p|a_p| - \frac{2K'p}{|f(0)|^2} \leqslant 2 \log A + 2Bp$$

et, comme $|f(0)| \leqslant A$, cette formule entraîne qu'il existe D′, ne dépendant que de A et B, tel que

$$|a_p| \leqslant \frac{D'}{|f(0)|^2}.$$

b) $p = 0$. On a

$$\left| a + \frac{1}{\lambda_1} \right| \leqslant \frac{D'}{|f(0)|^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{|\lambda_1|} \leqslant \frac{C}{|f(0)|} \leqslant \frac{AC}{|f(0)|^2}$$

d'où le résultat.

Proposition 2. — *Étant donnés des nombres complexes a et* ζ_i ($|\zeta_{i+1}| \geqslant |\zeta_i|$) *qui vérifient, pour tout n et tout p :*

$$\frac{n}{|\zeta_n|} \leqslant C \quad \textit{et} \quad \left| a + \sum_1^p \frac{1}{\zeta_i} \right| \leqslant D,$$

1° *Le produit (éventuellement infini)*

$$e^{a\lambda} \prod \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\zeta_i}}$$

représente une fonction entière $f(\lambda)$;

2° *On peut trouver des constantes* A *et* B, *ne dépendant que de* C *et* D, *telles que l'on ait* $|f(\lambda)| \leqslant A e^{B|\lambda|}$.

Démonstration :

1° Des hypothèses et du lemme 1, on déduit :

$$\left| \prod_p^q \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\zeta_i}} \right| \leqslant e^{K|\lambda|^{\frac{3}{2}} \sum_p^q \left|\frac{1}{\zeta_i}\right|^{\frac{3}{2}}} \leqslant e^{2K|\lambda|^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}} C^{\frac{3}{2}}}$$

Donc le produit infini $\prod \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\zeta_i}}$ est uniformément convergent sur tout compact, et $f(\lambda)$ est une fonction entière.

2° Il suffit évidemment de démontrer le résultat pour les valeurs entières de $|\lambda|$. Écrivons alors, comme dans la proposition 1 :

$$f(\lambda) = e^{\left(a + \sum_1^p \frac{1}{\zeta_i}\right)\lambda} \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$$

avec :

$$\varphi_1(\lambda) = \prod_1^p \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta_i}\right)$$

et

$$\varphi_2(\lambda) = \prod_{p+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\zeta_i}}.$$

Majorons $\varphi_1(\lambda)$ (en utilisant le lemme 1 et les hypothèses)

$$|\varphi_1(\lambda)| \leqslant e^{K|\lambda|^{\frac{1}{2}} \sum_1^p \left|\frac{1}{\zeta_i}\right|^{\frac{1}{2}}} \leqslant e^{2KC^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} |\lambda|^{\frac{1}{2}}}$$

on aura même

$$|\varphi_2(\lambda)| \leqslant e^{2KC^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}} |\lambda|^{\frac{3}{2}}}$$

et, pour $|\lambda| = p$, on aura :

$$|\varphi_1(\lambda)\,\varphi_2(\lambda)| \leqslant e^{2Kp\left[C^{\frac{1}{2}} + C^{\frac{3}{2}}\right]} \qquad \text{d'où} \qquad |f(\lambda)| \leqslant e^{\left[2K\left(C^{\frac{1}{2}} + C^{\frac{3}{2}}\right) + D\right]p}$$

C.Q.F.D.

Des propositions 1 et 2, on déduit immédiatement :

Proposition 3. — *Si f et g sont des fonctions entières d'une variable complexe λ, avec* $f(0) = g(0) = 1$, $|f(\lambda)| \leqslant Ae^{B|\lambda|}$, $|g(\lambda)| \leqslant A'e^{B'|\lambda|}$ *et si* $h(\lambda) = \dfrac{f(\lambda)}{g(\lambda)}$ *est une fonction entière, il existe* A″ *et* B″ *ne dépendant que de* A, A′, B, B′, *tels que l'on ait :* $|h(\lambda)| \leqslant A''e^{B'|\lambda|}$.

Soient maintenant $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ deux fonctions entières de type exponentiel telles que $h = \dfrac{f}{g}$ soit une fonction entière; montrons que h est de type exponentiel.

Nous pouvons supposer (en faisant au besoin une translation, et en multipliant f et g par des constantes convenables) que l'on a $f(0, \ldots, 0) = g(0, \ldots, 0) = 1$.

Par hypothèse, il existe A, A′, B, B′ tels que l'on ait

$$|f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| \leqslant Ae^{B(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|)}$$

et $|g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| \leqslant A'e^{B'(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|)}$.

Pour $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ fixé, avec $|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| = 1$, posons :

$h_\Lambda(\zeta) = h(\zeta\lambda_1, \ldots, \zeta\lambda_n)$; d'après la proposition 3, quel que soit Λ, on aura

$$|h_\Lambda(\zeta)| \leqslant A'' e^{B|\zeta|}.$$

Par suite, quels que soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$|h(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| \leqslant A'' e^{B'(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|)}.$$

Énonçons le résultat :

THÉORÈME 1. — *Si le quotient de deux fonctions entières de type exponentiel est une fonction entière, cette dernière fonction est de type exponentiel.*

2. Transformées de Fourier de distributions à support compact. Nous allons ici généraliser un résultat qui, dans le cas d'une variable, est à la base de la théorie des fonctions moyenne-périodiques [27] et [15]; rappelons que $\mathcal{a}\mathcal{S}'_n$ désigne l'espace des transformées de Fourier des distributions $\in \mathcal{E}'_{R^n}$, et que $\mathcal{a}\mathcal{S}_n$ désigne l'espace des transformées de Fourier des fonctions $\in \mathcal{D}_{R^n}$.

PROPOSITION 4. — *Sous les hypothèses suivantes :*
$Q \in \mathcal{a}\mathcal{S}'_m$, $P \in \mathcal{a}\mathcal{S}_n (m \geqslant n)$, *et* $R = \dfrac{Q}{P}\dfrac{\partial P}{\partial \lambda_1}$ *est une fonction entière, on a :* $S(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = P^2(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. $R(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathcal{a}\mathcal{S}'_m$.

DÉMONSTRATION. — R et S sont (d'après le théorème 1) des fonctions de type exponentiel; pour montrer que $S \in \mathcal{a}\mathcal{S}'_m$, il suffit donc (théorème de Paley-Wiener) de montrer que S est à croissance lente pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ réels. Nous supposerons $P(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq 0$ (sinon, la proposition est évidente); remarquons d'abord que, quel que soit le point *réel* $(\lambda'_2, \ldots, \lambda'_m) = \Lambda'$, P vérifie une inégalité de la forme : $|P(\lambda_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n)| \leqslant A e^{B|\lambda_1|}$, A et B ne dépendant pas de Λ' (en effet, P est transformée de Fourier d'une fonction indéfiniment dérivable à support compact).

Prenons un tel point réel Λ', et considérons la fonction d'une variable $f(\lambda_1) = P(\lambda_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n)$; nous supposons Λ' choisi de manière que $f(0) \neq 0$. Soient ζ_i les zéros de f, rangés par valeur absolue croissante. D'après la théorie des fonctions entières :

$$\frac{f'(\lambda_1)}{f(\lambda_1)} = a + \sum\left(\frac{1}{\lambda_1 - \zeta_i} + \frac{1}{\zeta_i}\right)$$

ou encore
$$\frac{f'(\lambda_1)}{f(\lambda_1)} = a - \lambda_1 \Sigma \frac{1}{\zeta_i^2} + \lambda_1^2 \Sigma \frac{1}{(\lambda_1 - \zeta_i)\zeta_i^2}$$

et, par suite :

$$\begin{aligned} &S(\lambda_1, \Lambda') \\ &= af^2(0)Q(\lambda_1, \Lambda') - \lambda_1 f^2(0)Q(\lambda_1, \Lambda')\Sigma \frac{1}{\zeta_i^2} + \lambda_i^2 f^2(0)\Sigma \frac{Q(\lambda_1, \Lambda')}{\zeta_i^2(\lambda_1 - \zeta_i)}. \end{aligned}$$

Majorons les trois termes du second membre quand λ_1 est réel.

1° Il existe C′ et D′ ne dépendant que de A et B, tels que :

$$|af^2(0)| \leqslant D' \,; \qquad \left| f^2(0)\Sigma \frac{1}{\zeta_i^2} \right| \leqslant C' \qquad \text{(Prop. 1)}$$

2° Dans la dernière somme :

a) Les termes pour lesquels $|\lambda_1 - \zeta_i| \geqslant 1$ sont majorés par :

$$|\lambda_1|^2 . |f(0)|^2 \frac{1}{|\zeta_i|^2} |Q(\lambda_1, \Lambda')|.$$

b) D'après le principe du module maximum, les termes pour lesquels $|\lambda_1 - \zeta_i| < 1$ sont majorés par :

$$|\lambda_1|^2 |f(0)|^2 \frac{1}{|\zeta_i|^2} \operatorname*{Max}_{|\mu - \zeta_i| \leqslant 1} |Q(\mu, \Lambda')|$$

et, *a fortiori*, par :

$$|\lambda_1|^2 |f(0)|^2 \frac{1}{|\zeta_i|^2} \operatorname*{Max}_{|\mu - \lambda_1| \leqslant 2} |Q(\mu, \Lambda')|$$

La dernière somme est donc majorée par :

$$|\lambda_1|^2 |f(0)|^2 \left(\Sigma \frac{1}{|\zeta_i|^2} \right) \operatorname*{Max}_{|\mu - \lambda_1| \leqslant 2} |Q(\mu, \Lambda') \leqslant C' |\lambda_1|^2 \operatorname*{Max}_{|\mu - \lambda_1| \leqslant 2} |Q(\mu, \Lambda')|.$$

En ajoutant, nous obtenons finalement :

$$|S(\lambda_1, \Lambda')| \leqslant (D' + C'|\lambda_1|^2 + C'|\lambda_1|) \operatorname*{Max}_{|\mu - \lambda_1| \leqslant 2} |Q(\mu, \Lambda')|.$$

Cette formule est valable pour tout Λ' réel, tel que $P(0, \Lambda') \neq 0$; par continuité, elle est valable pour tout Λ' réel. Elle entraîne que S est à croissance lente pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ réels (parce que $\max\limits_{|\mu - \lambda_1| \leqslant 2} |Q(\mu, \Lambda')|$ est à croissance lente).

Remarque. — La proposition est évidemment encore vraie si l'on remplace $P(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ par $P(b, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, b étant un nombre réel quelconque.

§ 2. — Équations de convolution homogènes.

1° Soit μ une distribution à support compact ($\mu \in \mathcal{E}'_{R^n}$), $\mu \neq 0$; rappelons que $V(\mu)$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires des exponentielles-polynômes P qui vérifient $\mu * P = 0$ et que $[V(\check{\mu})]^{\perp}$ est formée des $\nu \in \mathcal{E}'_{R^n}$ telles que $\dfrac{\mathcal{F}\nu}{\mathcal{F}\mu}$ soit entière (préliminaires).

Définition. — *Soit* $\sigma \in \mathcal{E}'_{R^n}$, $\sigma \neq 0$; *on désigne par* $H(\mu)$ *l'idéal de* $\mathcal{E}'_{R^n}$ (*idéal, au sens de l'opération* $*$) *formé des* τ *qui vérifient :*

$$\tau * \nu \in \mu * \mathcal{E}' \qquad \textit{pour tout} \qquad \nu \in [V(\check{\mu})]^{\perp}.$$

On désigne par $H(\mu, \sigma)$ ($\sigma \in \mathcal{E}'_{R^n}$) *l'ensemble des* $\tau \in \mathcal{E}'_{R^n}$ *qui vérifient :* $\tau * \sigma \in H(\mu)$.

Nous donnerons au § 3 une caractérisation de $H(\mu)$ fondée sur l'étude des équations avec second membre; donnons maintenant sa principale propriété :

Théorème 2. — *Quel que soit* $\mu \in \mathcal{E}'$, $\mu \neq 0$, $H(\mu)$ *est dense dans* $\mathcal{E}'$.

Soit $p \leqslant n$. Nous dirons que $H(\mu, \sigma)$ possède la propriété (δ_p) (ou : $\in (\delta_p)$) si l'on peut trouver des distributions à support compact $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathcal{E}'_{R^n}$ telles que :

a) $$\sigma_1 * \cdots * \sigma_r \in H(\mu, \sigma).$$

b) Pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant r$, la transformée de Fourier S_k de σ_k ne dépend que de p variables; considérée comme fonction de p variables, S_k est dans $\mathfrak{A}\mathcal{G}_p$. Nous désignerons ces p variables par $\lambda_{i_k^1}, \ldots, \lambda_{i_k^p}$.

Lemme. — *Soit* T *une fonction entière* $\neq 0$ *des variables* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$ $(p \geqslant 0) \in \mathfrak{A}\mathcal{G}_{p+1}$; *et soit* $\tau \in \mathcal{E}'_{R^n}$ *tel que* $T = \mathcal{F}\tau$. *Si* $H(\mu, \sigma * \tau)$ *possède la propriété* (δ_p), $H(\mu, \sigma * x_1 \tau)$ *possède aussi la propriété* (δ_p).

Par hypothèse, on peut trouver $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ vérifiant *b*) et telles que, pour tout $\nu \in [V(\check{\mu})]^{\perp}$, on ait : $\tau * \sigma_1 * \cdots * \sigma_r * \sigma * \nu \in \mu * \mathcal{E}'$. Par transformation de Fourier, il vient

$$T . S_1 \ldots S_r \mathcal{F}\sigma \frac{\mathcal{F}\nu}{\mathcal{F}\mu} \in \mathfrak{A}\mathcal{G}'_n.$$

Appliquons maintenant la proposition 4 à $P = T$ et

$$Q = TS_1 \ldots S_r \mathcal{F}\sigma \frac{\mathcal{F}\nu}{\mathcal{F}\mu}.$$

Quel que soit a réel, on aura

$$T^2(a, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}) \frac{\partial T}{\partial \lambda_1} S_1 \ldots S_r \mathcal{F}\sigma \frac{\mathcal{F}\nu}{\mathcal{F}\mu} \in \mathfrak{a}\mathcal{S}'_n.$$

On peut toujours trouver a tel que $T(a, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}) \neq 0$, puisque $T \neq 0$; l'on a $T(a, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}) \in \mathfrak{a}\mathcal{S}_p$; enfin, comme T est à décroissance rapide pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$ réels, $\frac{\partial T}{\partial \lambda_1}$ ne peut être identiquement nul.

Cela étant, la dernière formule montre que $H(\mu, \sigma * x_1\tau)$ possède la propriété (δ_p) pour les fonctions S_k et $T^2(a, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1})$ d'où le lemme.

Nous allons maintenant montrer, par récurrence sur p : *si l'idéal* $H(\mu, \sigma)$ *possède la propriété* (δ_p), *il est dense dans* $\mathcal{E}'$.

Ce résultat est évident si $p = 0$, car alors les S_k sont constantes, donc $\delta \in H(\mu, \sigma)$ et, comme $H(\mu, \sigma)$ est un idéal, il est égal à $\mathcal{E}'$.

Supposons-le démontré pour p, et démontrons-le pour $p + 1$. Si $H(\mu, \sigma)$ possède la propriété (δ_{p+1}) pour les distributions $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, on a $H(\mu, \sigma * \sigma_1 \cdots * \sigma_r) = \mathcal{E}'$, donc $H(\mu, \sigma * \sigma_1 * \cdots * \sigma_r)$ possède la propriété (δ_p) ; d'après le lemme :

$$H(\mu, \sigma * \sigma_1 * \cdots * \sigma_{r-1} * x_{i_r}\sigma_r) \in (\delta_p).$$

En itérant : quels que soient les monômes $M_1, \ldots, M_r$, avec M_k dépendant seulement des variables x_{i_k}, on a :

$$H(\mu, \sigma * M_1\sigma_1 * \cdots * M_r\sigma_r) \in (\delta_p)$$

d'après l'hypothèse de récurrence, il existe des

$$\tau_i \in H(\mu, \sigma * M_1\sigma_1 * \cdots * M_r\sigma_r)$$

qui tendent vers δ.

On a : $\tau_i * M_1\sigma_1 * \cdots * M_r\sigma_r \in H(\mu, \sigma)$; donc, en passant à la limite :

$$M_1\sigma_1 * \cdots * M_r\sigma_r \in \overline{H(\mu, \sigma)}$$

en ajoutant : quels que soient les polynômes $P_1, \ldots, P_r$, avec P_k dépendant seulement des variables $x_{i^l_k}$:

$$P_1\sigma_1 * \cdots * P_r\sigma_r \in \overline{H(\mu, \sigma)}.$$

Pour tout k, il est possible (voir [27], p. 894) de trouver une suite P^j_k de polynômes en $x_{i^l_k}$, et un point $b_k \in R^n$ tels que :

$$\lim_{j \to +\infty} P^j_k \sigma_k = \delta(b_k) \quad (\delta(b_k) \text{ désigne la masse } + 1 \text{ au point } b_k).$$

Par suite

$$\delta(b_1 + \cdots + b_r) \in \overline{H(\mu, \sigma)}$$

et, comme $H(\mu, \sigma)$ est un idéal : $\overline{H(\mu, \sigma)} = \mathcal{E}'$.

Pour démontrer le théorème 2, il suffit maintenant de remarquer que tout $H(\mu)$ possède la propriété (δ_n) : il suffit de prendre $r = 1$, $\sigma = \delta$, et $\sigma_1 = \mu * \alpha$ (α quelconque dans $\mathcal{D}(R^n)$).

Corollaire. — *Pour que* $\nu \in \mathcal{E}'$ *soit dans* $\overline{\mu * \mathcal{E}'}$, *il faut et il suffit que* $\dfrac{\mathcal{F}\nu}{\mathcal{F}\mu}$ *soit une fonction entière* (i.e. : $\nu \in [V(\check{\mu})]^{\perp}$).

La nécessité est évidente; réciproquement, si $\dfrac{\mathcal{F}\nu}{\mathcal{F}\mu}$ est entière, on pourra trouver des $\tau_i \to \delta$ tels que $\tau_i * \nu \in \mu * \mathcal{E}'$, d'où le résultat en passant à la limite.

2° Nous pouvons maintenant généraliser (au moins partiellement) le théorème d'approximation des solutions d'une équation aux dérivées partielles homogène à coefficients constants.

Théorème 3. — *Soit* $\mu \in \mathcal{E}'_{R_n}$, $\mu \neq 0$; *toute solution dans* $\mathcal{E}$ (*resp.* $\mathcal{D}'$ *resp.* $\mathcal{E}^m$, *resp.* $\mathcal{D}'^m$) *de l'équation* $\mu * f = 0$ *est adhérente à* $V(\mu)$ *dans* $\mathcal{E}$ (*resp.* $\mathcal{D}'$, *resp.* $\mathcal{E}^m$, *resp.* $\mathcal{D}'^m$ *faible*).

Montrons d'abord ce résultat pour $\mathcal{E}$. Soit $f \in \mathcal{E}$ tel que $\mu * f = 0$; raisonnons par dualité : si $\nu \in \mathcal{E}'$ est orthogonal à $V(\mu)$, on pourra trouver des σ_i tels que $\nu = \lim \check{\mu} * \sigma_i$; alors :

$$\langle \nu, f \rangle = \lim \langle \check{\mu} * \sigma_i, f \rangle = \lim \langle \sigma_i, \mu * f \rangle = 0.$$

Si $f \in \mathcal{D}'$ vérifie $\mu * f = 0$, les régularisées $\alpha * f$ de f ($\alpha \in \mathcal{D}$) vérifieront encore cette équation; d'après ce qui précède, elles sont adhérentes dans $\mathcal{E}$, donc dans $\mathcal{D}'$, à $V(\mu)$; il existe une suite α_i qui tend vers δ dans $\mathcal{E}'$, donc $f = \lim \alpha_i * f \in \overline{V(\mu)}$. Même raisonnement pour $\mathcal{E}^m$ et $\mathcal{D}'^m$ faible. C.Q.F.D.

On peut se demander si le théorème suivant est vrai : *tout sous-espace fermé de $\mathcal{E}$, invariant par translation, est engendré par les exponentielles-polynômes qu'il contient.* (Autrement dit : la « synthèse spectrale » est-elle possible dans $\mathcal{E}$?)

Nous venons de le démontrer pour les sous-espaces définis par une équation; on peut évidemment aller un peu plus loin : si $V_1, \ldots, V_m$ sont définis chacun par une équation (de convolution), et si $\tau_1, \ldots, \tau_m$ sont dans $\mathcal{E}'$, le sous-espace $V = \overline{\tau_1 * V_1 + \cdots + \tau_m * V_m}$ sera, lui aussi, engendré par les exponentielles-polynômes qu'il contient.

Pour $n > 1$, cette généralisation est plus ou moins illusoire, tant qu'on n'a pas de caractérisation simple de ces sous-espaces (de toute manière, on ne peut espérer obtenir ainsi *tous* les sous-espaces fermés invariants par translation de $\mathcal{E}$, car les $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ qui vérifient : $e^{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n} \in V$ forment une variété de dimension complexe $n - 1$).

Par contre, pour $n = 1$, il est facile de voir que l'on obtient par ce procédé tous les sous-espaces fermés de $\mathcal{E}$, invariants par translation et engendrés par une seule fonction f (5).

Posons en effet, suivant [7] : $f = f^+ + f^-$, avec $f^+ \in \mathcal{E}$, $f^- \in \mathcal{E}$, f^+ limité à gauche, et f^- limité à droite; soit $\mu \in \mathcal{E}'$, $\mu \neq 0$ tel que $\mu * f = 0$; comme $\mu * f^+$ a son support limité à gauche et $\mu * f^-$ a son support limité à droite, on a : $\mu * f^+ = -\mu * f^- = \tau \in \mathcal{E}'$.

Désignons enfin par W le sous-espace de $\mathcal{E}$ formé des g qui vérifient : $\mu * g = 0$; *je dis que* $\overline{\tau * W}$ *est exactement le sous-espace fermé* $\tau(f)$ *engendré par* f *et ses translatées.*

a) Si $h = \tau * g$, avec $\mu * g = 0$, on peut encore poser : $g = g^+ + g^-$, et l'on aura : $\mu * g^+ = -\mu * g = \sigma \in \mathcal{E}'$

$$h = (\tau * g^+) + (\tau * g^-) = (\mu * f^+ * g^+) - (\mu * f^- * g^-) = \sigma * f;$$

donc $\tau * W \subset \tau(f)$.

b) Si $\nu \in \mathcal{E}'$ est orthogonal $\tau * W$, cela signifie que l'on a : $\check{\nu} * \tau * g = 0$ pour tout g vérifiant : $\mu * g = 0$ et, par suite : $\check{\nu} * \tau \in \overline{\mu * \mathcal{E}'}$.

D'après le théorème 2, il existe des $\theta_i \in \mathcal{E}'$, $\theta_i \to \delta$ tels que

$$\theta_i * \check{\nu} * \tau = \mu * \chi_i, \qquad \chi_i \in \mathcal{E}'.$$

(5) Il en résultera que la synthèse spectrale est possible dans $\mathcal{E}'_{R_1}$; de là résulte [27] que *tout* sous-espace fermé invariant par translation de $\mathcal{E}$ est engendré par une seule fonction.

Alors : $\theta_i * \check{\nu} * \mu * f^+ = -\theta_i * \check{\nu} * \mu * f^- = \mu * \chi_i$
d'où : $\theta_i * \check{\nu} * f^+ = -\theta_i * \check{\nu} * f^- = \chi_i$

donc $\theta_i * \check{\nu} * f = 0$, et, en passant à la limite :

$$\check{\nu} * f = 0, \qquad \text{donc} \qquad \langle \nu, f \rangle = 0.$$

Par suite, on a : $\tau(f) \subset \overline{\tau * W}$, c. q. f. d.
Cela montre (d'ailleurs, par la même méthode que [15]) que la synthèse spectrale est possible dans $\mathcal{E}'_{R^1}$.

§ 3. — Remarques sur les équations avec second membre.

Contrairement au cas où $\mu \in \mathcal{E}'$ est un opérateur différentiel, on n'a pas, en général : $\mu * \mathcal{D}'^F = \mathcal{D}'^F$.

Par exemple, si μ est indéfiniment différentiable, pour tout $f \in \mathcal{D}'$ $\mu * f$ sera indéfiniment différentiable donc on ne pourra pas avoir : $\mu * \mathcal{D}'^F = \mathcal{D}'^F$. Nous allons voir que, dans ce cas, on ne peut avoir non plus : $\mu * \mathcal{E} = \mathcal{E}$ (prop. 5', corol. 1).

Les propositions que nous allons donner permettent de retrouver en partie le théorème 3 du chapitre 1, une fois établie l'existence d'une solution élémentaire, et ses propriétés (je n'en connais guère d'autre application; peut-être est-il néanmoins intéressant de les donner avec toute leur généralité).

1. Équations avec second membre dans $\mathcal{E}$.

Proposition 5. — *Soient* $\mu \in \mathcal{E}'$, $\nu \in \mathcal{E}'$, *avec* $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

1° $\mu * \mathcal{E} \supset \nu * \mathcal{E}$.

2° *L'application* $\mu * \tau \to \nu * \tau$ *est continue de* $\mu * \mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}'$.

3° $\nu \in H(\mu)$.

Démonstration :

1° *entraîne* 2°. Appelons i l'injection de $\nu * \mathcal{E}$ dans $\mu * \mathcal{E}$. Des isomorphismes algébriques :

$$\mathcal{E}/_{\mu *^{-1}(0)} \approx \mu * \mathcal{E}; \qquad \mathcal{E}/_{\nu *^{-1}(0)} \approx \nu * \mathcal{E}$$

on déduit que i définit canoniquement une application $\tilde{i}$ de $\mathcal{E}/_{\nu *^{-1}(0)}$ dans $\mathcal{E}/_{\mu *^{-1}(0)}$; $\tilde{i}$ est continue d'après le théorème du graphe fermé (cf. préliminaires).

La transposée $\tilde{i}'$ de $\tilde{i}$ est une application continue : $\overline{\check{\mu}*\mathcal{E}'} \to \overline{\check{\nu}*\mathcal{E}'}$; montrons que $\tilde{i}'$ prolonge l'application : $\check{\mu}*\tau \to \check{\nu}*\tau$.

On a : $\langle \tilde{i}'(\check{\mu}*\tau),\ \tilde{g}\rangle = \langle \check{\mu}*\tau,\ \tilde{i}(\tilde{g})\rangle$ pour tout $\tau\in\mathcal{E}'$ et tout $\tilde{g}\in\mathcal{E}'/_{\nu*^{-1}(0)}$. Soit g un représentant dans $\mathcal{E}$ de $\tilde{g}$, et h un représentant de $\tilde{i}(\tilde{g})$; la dernière formule s'écrit aussi :

$$\langle \tilde{i}'(\check{\mu}*\tau),\ g\rangle = \langle \check{\mu}*\tau,\ h\rangle = \langle \tau,\ \mu*h\rangle$$

et comme $\mu*h=\nu*g$ on obtient : $\langle \tilde{i}'(\check{\mu}*\nu),\ g\rangle = \langle \check{\nu}*\tau,\ g\rangle$ et finalement : $\tilde{i}'(\check{\mu}*\tau) = \check{\nu}*\tau$. L'application $\check{\mu}*\tau\to\check{\nu}*\tau$ est donc continue, et 2° s'en déduit immédiatement.

2° *entraîne* 1° Si $\mu*\tau\to\nu*\tau$ est une application continue, $\check{\mu}*\tau\to\check{\nu}*\tau$ le sera aussi; cela étant, cherchons $f\in\mathcal{E}$ solution de $\mu*f=\nu*g\,(g\in\mathcal{E})$; pour tout $\tau\in\mathcal{E}'$, on devra avoir

$$\langle \mu*f,\ \tau\rangle = \langle \nu*g,\ \tau\rangle \qquad \text{ou :} \qquad \langle f,\ \check{\mu}*\tau\rangle = \langle g,\ \check{\nu}*\tau\rangle.$$

Cette dernière formule définit une forme linéaire sur $\check{\mu}*\mathcal{E}'$; par hypothèse, cette forme linéaire est continue; on peut donc la prolonger en un $f\in\mathcal{E}$. Et f vérifiera bien : $\mu*f=\nu*g$.

(Les raisonnements précédents peuvent se mettre sous une forme plus générale : soient u et v deux applications continues de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$; pour que l'on ait $u(\mathcal{E})\supset v(\mathcal{E})$, il faut et il suffit que ${}^t u(\varphi)=0$ entraîne ${}^t v(\varphi)=0$ $(\varphi\in\mathcal{E}')$ et que l'application ${}^t u(\varphi)\to{}^t v(\varphi)$ soit continue de ${}^t u(\mathcal{E}')$ dans ${}^t v(\mathcal{E}')$. Même résultat en considérant des espaces de Fréchet-Schwartz [11], E et F, et deux applications continues u et v de E dans F.)

Enfin, 3° *est équivalent à* 2°. Si l'application $\mu*\tau\to\nu*\tau$ est continue de $\mu*\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}'$, elle se prolonge en une application continue w : $\overline{\mu*\mathcal{E}'}\to\mathcal{E}'$; pour tout $\sigma\in\overline{\mu*\mathcal{E}'}$, on a, par continuité $\nu*\sigma=\mu*w(\sigma)$. D'après le corollaire du théorème 2, cela entraîne : $\nu\in\mathrm{H}(\mu)$. Réciproquement, si l'on a $\nu\in\mathrm{H}(\mu)$, pour tout $\sigma\in\overline{\mu*\mathcal{E}'}$, il existera $w(\sigma)\in\mathcal{E}'$ vérifiant $\nu*\sigma=\mu*w(\sigma)$; $w(\sigma)$ est unique, donc w définit une application linéaire $\overline{\mu*\mathcal{E}'}\to\mathcal{E}'$; cette application est continue, parce que son graphe est fermé; donc l'application $\mu*\tau\to\nu*\tau$ (qui est la restriction de w à $\mu*\mathcal{E}'$) est bien continue.

Proposition 5′. — *Les propriétés* 1°, 2°, 3° *de la proposition* 5 *sont entraînées par :*

4° *Il existe* $f\in\mathcal{D}'$ *tel que* $\mu*f=\nu$.

Les propriétés 1°, 2°, 3° *entraînent:*

5° *Pour tout ouvert relativement compact* $\mathcal{O}$, *il existe* f *tel que, dans* $\mathcal{O}$, *on ait* $\mu * f = \nu$.

Lemme. — *Soit* $g \in \mathcal{D}'$, *et soit* V *le sous-espace de* $\mathcal{E}'$ *formé des* σ *qui vérifient* $\sigma * g \in \mathcal{E}'$. V *est fermé, et l'application* $\sigma \to \sigma * g$ *est continue de* V *dans* $\mathcal{E}'$.

D'après le théorème du graphe fermé tout revient à démontrer que V est fermé. S'il est vide, c'est trivial; sinon soit $\sigma_0 \in V$, et $\tau_0 = \sigma_0 * g$. Soit B un sous-ensemble faiblement compact quelconque de $\mathcal{E}'$; montrons que $V \cap B$ est faiblement fermé (cela entraînera bien que V est fermé, cf. préliminaires). Considérons des $\sigma_i \in V \cap B$, tendant faiblement vers σ; les σ_i ont leurs supports dans un compact fixe K; les $\tau_i = \sigma_i * g$ sont dans $\mathcal{E}'$, et ils ont leurs supports dans un compact fixe K′ en vertu du théorème des supports et de la formule $\tau_i * \sigma_0 = \tau_0 * \sigma_i$; en passant à la limite, on aura donc $\overline{\sigma * g} \subset K'$, en particulier $\sigma * g \in \mathcal{E}'$, donc $\sigma \in V$; comme, d'autre part, σ est dans B, on a $\sigma \in V \cap B$, d'où le lemme.

Démontrons maintenant que 4° entraîne 2°. Soit $f \in \mathcal{D}'$ vérifiant $\mu * f = \nu$. Appliquons le lemme avec $g = f$: $\mu * \mathcal{E}'$ est évidemment dans V; et la restriction à $\mu * \mathcal{E}'$ de l'application $\sigma \to \sigma * f$ est l'application $\mu * \tau \to \nu * \tau$; elle est donc continue d'après le lemme.

Montrons enfin que 2° entraîne 5°. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert relativement compact; montrons d'abord que l'application $\check{\mu} * \varphi \to \check{\nu} * \varphi$ ($\varphi \in \mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}}$) est continue de $\mu * \mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}}$ (muni de la topologie induite par $\mathcal{D}_{R^n}$) dans $\mathcal{D}_{R^n}$.

Pour cela, considérons l'ensemble B des $\varphi \in \mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}}$ qui vérifient $|\check{\mu} * \varphi| \leqslant 1$; $\check{\mu} * B$ est borné dans $\mathcal{E}'_{R^n}$; d'après l'hypothèse $\check{\nu} * B$ est aussi borné dans $\mathcal{E}'_{R^n}$; donc, $\check{\nu} * B$ est contenu dans un $\mathcal{E}'^{m}_{R^n}$, et y est borné.

Donc: si $\check{\mu} * \varphi (\varphi \in \mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}})$ est majoré en valeur absolue, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à un certain ordre, m', $\check{\nu} * \varphi$ est majoré en valeur absolue; et si $\mu * \varphi$ est majoré en valeur absolue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $k + m'$, $\check{\mu} * \varphi$ est majoré en valeur absolue ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant k$; cela prouve que l'application considérée est continue.

Il en résulte que l'application $\check{\mu} * \varphi \to (\check{\nu} * \varphi)(0) = \langle \nu, \varphi \rangle$ est une forme linéaire continue sur $\check{\mu} * \mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}}$; d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe donc $f \in \mathcal{D}'_{R^n}$ qui prolonge cette forme linéaire; et l'on a bien $\mu * f = \nu$ dans $\mathcal{O}$, ce qui démontre la proposition.

Corollaire 1. — *Si* μ *est dans* $\mathcal{D}$, *on a toujours* $\mu * \mathcal{E} \neq \mathcal{E}$. En effet, pour tout $f \in \mathcal{D}'$, $\mu * f$ est indéfiniment différentiable; donc, on ne peut pas avoir $\mu * f = \delta$ dans un ouvert contenant l'origine.

Corollaire 2. — *S'il existe* $f \in \mathcal{D}'$ *vérifiant* $\mu * f = \delta$, *on a:* $\mu * \mathcal{E} = \mathcal{E}$.

Remarque. — Dans ce cas, on a même un peu plus : s'il existe, pour tout ouvert $\mathcal{O}$ relativement compact, une $f \in \mathcal{D}'$ vérifiant, dans $\mathcal{O}$: $\mu * f = \delta$, on a : $\mu * \mathcal{E} = \mathcal{E}$ (autrement dit : si $\nu = \delta$, 5° est équivalent à 1°, 2°, 3°; j'ignore si ce résultat subsiste pour ν quelconque dans $\mathcal{E}'$). Il suffit pour cela de montrer que $\check{\mu} * \mathcal{E}'$ est fermé dans $\mathcal{E}'$.

Pour le voir, considérons un sous-ensemble B faiblement compact quelconque de $\mathcal{E}'$; il suffira de montrer que $B \cap (\check{\mu} * \mathcal{E}')$ est faiblement fermé.

Considérons des $\sigma_i \in B \cap (\check{\mu} * \mathcal{E}')$, tendant faiblement vers σ; posons $\sigma_i = \check{\mu} * \tau_i$; les σ_i ont leurs supports dans un compact K, donc (théorème des supports), les τ_i ont leurs supports dans un compact K'; soit $\mathcal{O}$ un ouvert relativement compact, contenant l'origine, et tel que $K' + \complement \mathcal{O}$ ne rencontre pas un voisinage $\mathcal{O}'$ de K', et soit $f \in \mathcal{D}'$ vérifiant $\check{\mu} * f = \delta$ dans $\mathcal{O}$; dans $\mathcal{O}'$, on a $\sigma_i * f = \tau_i$; donc, les τ_i convergent faiblement dans $\mathcal{E}'_{\mathcal{O}}$ vers τ; on a $\sigma = \check{\mu} * \tau$, donc $\sigma \in \check{\mu} * \mathcal{E}'$.

Comme, d'autre part, σ est dans B, on a : $\sigma \in B \cap (\check{\mu} * \mathcal{E}')$; et $B \cap (\check{\mu} * \mathcal{E}')$ est bien faiblement fermé, d'où le résultat.

2. Équations avec second membre dans $\mathcal{D}'^F$.

Rappelons que $\mathcal{D}'^F$ (espace des distributions d'ordre fini) désigne l'espace $\bigcup_{m=1}^{+\infty} \mathcal{D}'^m$.

Nous aurons besoin d'un résultat préliminaire sur les espaces $(\mathcal{LF})$.

Proposition 6. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{LF})$, E_p *une suite de définition de* E, *et* M *un convexe contenant zéro, tel que les*

$M_p = M \cap E_p$ *soient compacts*; *tout* $V \subset M$ *convexe contenant zéro et tel que, pour tout* p, $V \cap M_p$ *soit ouvert dans* M_p *est un voisinage de zéro dans* M.

Lemme. — *Soit* W_p *un voisinage convexe ouvert de zéro dans* E, *tel que l'on ait :* $W_p \cap M_p \subset V \cap M_p$; *pour tout* ε_p, $0 < \varepsilon_p < 1$, *il existe* W_{p+1} *voisinage convexe ouvert de zéro dans* E, *qui vérifie* :

1° $$W_{p+1} \cap M_{p+1} \subset V \cap M_{p+1},$$
2° $$W_{p+1} \cap E_p \supset [(1-\varepsilon_p) W_p] \cap E_p.$$

Soient U_i tous les voisinages convexes ouverts de zéro qui vérifient 2°; supposons qu'aucun U_i ne vérifie 1°.

Les $\overline{U}_i \cap M_{p+1} \cap \complement V$ sont des compacts dont toute intersection finie est non vide; ils ont donc un point commun x.

D'une part, on a : $x \in E_p$, car tout voisinage convexe de $W_p \cap E_p$ dans E contient x.

D'autre part, on a : $x \in (1-\varepsilon_p)\overline{W_p}$, car $(1-\varepsilon_p)W_p$ est un U_i. Par suite :

$$x \in (1-\varepsilon_p)\overline{W}_p \cap M_p \subset W_p \cap M_p \subset V \cap M_p,$$

donc, $x \in V$ ce qui est absurde $\left(\text{puisque } x \in \complement V\right)$.

Le lemme étant démontré, il suffit de choisir les ε_p de manière que $\prod_1^\infty (1-\varepsilon_p) > 0$ et de construire les W_p par récurrence. $W = \cap W_p$ est un voisinage de zéro dans E et l'on a : $W \cap M \subset V \cap M$, d'où la proposition.

Proposition 7. — Soient $\mu \in \mathcal{E}'$, $\nu \in \mathcal{E}'$, $\nu \neq 0$; *pour que l'on ait :* $\mu * \mathcal{D}'^F \supset \nu * \mathcal{D}'^F$, *il faut et il suffit qu'il existe* $f \in \mathcal{D}'^F$ *qui vérifie :* $\mu * f = \nu$.

La nécessité est évidente.

Réciproquement, supposons qu'il existe $f \in \mathcal{D}'^k$ vérifiant : $\mu * f = \nu$; soit $\mathcal{O}$ un ouvert convexe de $\mathcal{D}^0$ contenant zéro.

Lemme 1. — *Pour tout compact* K *de* R^n, *il existe un ouvert convexe* $\mathcal{O}_K$ *de* $\mathcal{D}^k_K$ *contenant zéro, et qui vérifie :* $f * [\overline{(\mu * \mathcal{E}')} \cap \mathcal{O}_K] \subset \mathcal{O}$.

Cela revient à dire : si des $\varphi_i \in \overline{\mu * \mathcal{E}'}$ sont dans $\mathcal{D}^k_K$ et y convergent vers zéro, les $f * \varphi_i$ sont dans $\mathfrak{D}^0$ et y convergent vers zéro; or, les $f * \varphi_i$ sont à support compact (prop. 5'. lemme); de la formule : $\mu * (f * \varphi_i) = \nu * \varphi_i$ et du théorème des supports on déduit que les $f * \varphi_i$ ont leurs supports dans un compact fixe; enfin, les $f * \varphi_i$ sont continues et tendent vers zéro uniformément sur tout compact, d'où le lemme.

Lemme 2. — *Il existe un voisinage convexe de zéro $\mathcal{O}' \subset \mathfrak{D}^{k+1}$ qui vérifie : $f * [\overline{(\mu * \mathcal{E}')} \cap \mathcal{O}'] \subset \mathcal{O}$.*

Soit L l'ensemble des fonctions ψ dont les dérivées d'ordre $\leqslant k + 1$ (au sens des distributions) sont des fonctions à support compact, mesurables et $\leqslant 1$ en valeur absolue; $L \cap \mathfrak{D}^{k+1}$ est un voisinage de zéro dans $\mathfrak{D}^{k+1}$.

Si ψ est dans L, ses dérivées d'ordre k sont continues (donc $L \subset \mathcal{E}^k$); en outre, elles vérifient une condition de Lipchitz d'ordre 1; donc $L \cap \mathfrak{D}^k_K$ est compact dans $\mathfrak{D}^k$.

Posons $M = L \cap \overline{\mu * \mathcal{E}'}$; on a $M \subset \mathcal{E}^k \cap \mathcal{E}' = \mathfrak{D}^k$; et soit $\mathcal{O}''$ l'enveloppe convexe des $M \cap \mathcal{O}_K$.

a) On a évidemment $f * \mathcal{O}'' \subset \mathcal{O}$.

b) $\mathcal{O}''$ est un voisinage de zéro dans M pour la topologie induite sur M par $\mathfrak{D}^k$: cela résulte de la proposition 6 appliquée à $E = \mathfrak{D}^k$, M et $V = \mathcal{O}''$; *a fortiori*, $\mathcal{O}'' \cap \mathfrak{D}^{k+1}$ est un voisinage de zéro dans $M \cap \mathfrak{D}^{k+1} = L \cap \mathfrak{D}^{k+1} \cap \overline{\mu * \mathcal{E}'}$, pour la topologie induite par $\mathfrak{D}^{k+1}$. Comme $L \cap \mathfrak{D}^{k+1}$ est un voisinage de zéro dans $\mathfrak{D}^{k+1}$, $\mathcal{O}'' \cap \mathfrak{D}^{k+1}$ est un voisinage de zéro dans $\overline{\mu * \mathcal{E}'} \cap \mathfrak{D}^{k+1}$ pour la topologie induite par $\mathfrak{D}^{k+1}$. Alors, $\mathcal{O}'' \cap \mathfrak{D}^{k+1}$ est la trace sur $\overline{\mu * \mathcal{E}'} \cap \mathfrak{D}^{k+1}$ d'un $\mathcal{O}'$ qui répond à la question, d'où le lemme.

Le lemme 2 entraîne immédiatement : *si des $\varphi_i \in \mathfrak{D}$ sont telles que les $\check{\mu} * \varphi_i$ tendent vers zéro dans $\mathfrak{D}^{k+1}$, les $\check{\nu} * \varphi_i = (\check{\mu} * \varphi_i) * \check{f}$ tendent vers zéro dans $\mathfrak{D}^0$.*

Soit maintenant g donné dans $\mathfrak{D}'^0$; montrons qu'il existe $h \in \mathfrak{D}'^{k+1}$ qui vérifie $\mu * h = \nu * g$.

Pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}$, on devra avoir $\langle \mu * h, \varphi \rangle = \langle \nu * g, \varphi \rangle$ ou $\langle h, \check{\mu} * \varphi \rangle = \langle g, \check{\nu} * \varphi \rangle$. Cette formule définit une forme linéaire sur $\check{\mu} * \mathfrak{D}$; cette forme linéaire est continue pour la topologie induite sur $\check{\mu} * \mathfrak{D}$ par $\mathfrak{D}^{k+1}$; elle se prolonge donc en $h \in \mathfrak{D}'^{k+1}$; et h vérifie bien : $\mu * h = \nu * g$. On a donc : $\mu * \mathfrak{D}'^{k+1} \supset \nu * \mathfrak{D}'^0$, d'où immédiatement : $\mu * \mathfrak{D}'^F \supset \nu * \mathfrak{D}'^F$.

Corollaire. — *S'il existe* $f \in \mathcal{D}'^F$ *tel que* $\mu * f = \delta$, *on a* $\mu * \mathcal{D}'^F = \mathcal{D}'^F$.

Exemples. — 1° Si D est un opérateur différentiel à coefficients constants, en prenant $\mu = D\delta$, le théorème 1 du chapitre I montre que l'on a $D\mathcal{E} = \mathcal{E}$ et $D\mathcal{D}'^F = \mathcal{D}'^F$; on retrouve ainsi une partie du théorème 3 du chapitre I.

2° Soit $\mu \in \mathcal{E}'$ tel que l'enveloppe convexe de μ ne contienne pas 0; la distribution $\delta + \mu$ admet la solution élémentaire :

$$f = \delta - \mu + \mu * \mu + \cdots + (-1)^n \mu^{*n} + \cdots$$

(cette série est bien convergente, puisque le support du terme général s'éloigne à l'infini); le corollaire 1 de la proposition 5′ montre que l'on a : $(\delta + \mu) * \mathcal{E} = \mathcal{E}$.

De plus, si μ est une mesure, f sera aussi une mesure, donc

$$(\delta + \mu) * \mathcal{D}'^F = \mathcal{D}'^F.$$

Ce résultat s'applique en particulier *aux équations aux différences finies à coefficients constants* (que l'on peut toujours ramener à la forme précédente par une translation); j'ignore si, pour une équation différentielle aux différences finies à coefficients constants, on a toujours des résultats analogues [6].

3° Si μ et ν, distributions $\in \mathcal{E}'$. admettent toutes deux une solution élémentaire $\in \mathcal{D}'^F$, $\mu * \nu$ admettra aussi une solution élémentaire $\in \mathcal{D}'^F$; en effet

$$(\mu * \nu) * \mathcal{D}'^F = \mu * (\nu * \mathcal{D}'^F) = \mu * \mathcal{D}'^F = \mathcal{D}'^F.$$

J'ignore si le résultat subsiste quand on remplace $\mathcal{D}'^F$ par $\mathcal{D}'$.

§ 4. — Systèmes d'équations.

Le théorème 3 et la prop. 7 du chapitre I se généralisent ainsi :

Proposition 8. — *Soit* $\mu \in \overset{(p,\,q)}{\mathcal{E}'_{R^n}}$, *de rang* $r = p$; *toute* $f \in \overset{(q,\,1)}{\mathcal{E}_{R^n}}$ *qui vérifie* $\mu * f = 0$ *est limite de combinaisons linéaires de matrices exponentielles-polynômes de type* $(q, 1)$ *qui vérifient cette équation.*

[6] Cette question a été résolue par M. L. Ehrenpreis [37].

Pour fixer les idées, supposons :

$$\Delta = \text{dét}\begin{pmatrix} \mu_{11} & \dots & \mu_{1p} \\ \vdots & & \\ \mu_{p1} & \dots & \mu_{pp} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Soit $\nu \in \overset{(q,1)}{\mathcal{E}'}$ orthogonal aux exponentielles-polynômes matricielles Q qui vérifient l'équation $\mu * Q = 0$; montrons que l'on a : $\langle \nu, f \rangle = 0$. On sait qu'il existe des fonctions entières $F_1, \dots, F_p$ qui vérifient $\mathcal{F}\nu_j = \sum_i F_i \mathcal{F}(\check{\mu}_{ij})$.

Considérons les p premières équations; soit M_{ij} le mineur de $(\mathcal{F}\check{\mu}_{ij})$; on a

$$\mathcal{F}(\check{\Delta}).F_i = \sum_{j=1}^{p} M_{ij}\mathcal{F}\nu_j \in \mathfrak{A}\mathcal{S}'_n.$$

Donc : pour tout $\sigma \in H(\check{\Delta})$, il existe $\tau \in \overset{(p,1)}{\mathcal{E}'}$ qui vérifie : $\mathcal{F}\sigma . F_i = \mathcal{F}\tau_i$. Pour tout i, on aura donc

$$\sigma * \nu_j = \sum_i \check{\mu}_{ij} * \tau_i \qquad \text{ou} \qquad \sigma * \nu = \check{\mu} * \tau$$

par suite :

$$\langle \sigma * \nu,\ f \rangle = \langle \check{\mu} * \tau,\ f \rangle = \langle \tau,\ \mu * f \rangle = 0.$$

D'après le théorème 2, on peut trouver des σ tendant vers δ; en passant à la limite : $\langle \nu,\ f \rangle = 0$. C.Q.F.D.

Naturellement, on obtient le même résultat en remplaçant $\mathcal{E}$ par $\mathcal{D}'$ (ou par divers autres espaces fonctionnels, comme au théorème 2 du chapitre I).

Remarque. — On peut se demander si la restriction « $r = p$ » est nécessaire; sinon, cela entraînerait, en particulier, que le sous-espace de $\mathcal{E}$ formé des f qui vérifient $\mu_1 * f = \dots = \mu_p * f = 0$ ($\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathcal{E}'$) est engendré par les exponentielles-polynômes qu'il contient, résultat que je ne sais pas démontrer si $n > 1$, $p > 1$.

Pour les équations avec second membre, on généralise sans difficulté les propositions 5, 5′ et 7 (en supposant toujours μ de rang p); par exemple, on aura :

Soit $\mu \in \overset{(p,q)}{\mathcal{E}'}$, *possédant une solution élémentaire à droite* $E \in \overset{(q,p)}{\mathcal{D}'}$ (*resp.* $\overset{(q,p)}{\mathcal{D}'^F}$); *pour tout* $g \in \overset{(p,1)}{\mathcal{E}}$ (*resp.* $\overset{(p,1)}{\mathcal{D}'^F}$), *il existe* $f \in \overset{(q,1)}{\mathcal{E}}$ (*resp.* $\overset{(q,1)}{\mathcal{D}'^F}$) *et vérifiant* $\mu * f = g$.

§ 5. — Équations de convolution sur les fonctions analytiques complexes.

1. Soit $\mathscr{H}$ l'espace des fonctions analytiques de n variables complexes. $\mathscr{H}$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact; c'est un sous-espace fermé de $\mathscr{E}_{R^{2n}}$, donc un espace $(\mathscr{F})$ réflexif; on désigne par $\mathscr{H}'$ le dual de $\mathscr{H}$.

Pour $\mu \in \mathscr{H}'$, on définit la « transformée de Fourier-Borel » de μ par la formule :

$$\mathscr{F}\mu(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \langle \mu, e^{-2\pi i(\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n)} \rangle.$$

Rappelons d'abord les propriétés classiques de cette transformation; d'après le théorème de Hahn-Banach, μ est prolongeable en une forme linéaire continue sur $\mathscr{E}'_{R^{2n}}$, soit T_μ; on a donc, en particulier :

$$\mathscr{F}\mu = \langle T_\mu, e^{-2\pi i(\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n)} \rangle;$$

donc, $\mathscr{F}\mu$ est une fonction entière de type exponentiel.

Réciproquement, soit $M(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une fonction entière de type exponentiel; il existe A, $B_1, \ldots, B_n$ tels que :

$$|M(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| \leqslant A e^{B_1|\lambda_1| + \cdots + B_n|\lambda_n|}.$$

Soit $\sum a_{i_1 \ldots i_n} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}$ le développement de Taylor de M à l'origine; la formule de Cauchy donne immédiatement :

$$|a_{i_1 \ldots i_n}| \leqslant \frac{A}{r_1^{i_1} \ldots r_n^{i_n}} e^{B_1 r_1 + \cdots + B_n r_n},$$

quels que soient les $r_k > 0$; prenons $r_k = \dfrac{i_k}{B_k}$ si $i_k \neq 0$, sinon $r_k = 1$; il vient :

$$|a_{i_1 \ldots i_n}| \leqslant C \prod_{\substack{k \\ (i_k \neq 0)}} \left(\frac{B_k e}{i_k} \right)^{i_k}.$$

A toute fonction analytique au voisinage de l'origine :

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum b_{i_1 \ldots i_n} z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n},$$

faisons correspondre la série :

$$\sum \frac{i_1! \ldots i_n!}{(-2\pi i)^{i_1 + \cdots + i_n}} a_{i_1 \ldots i_n} b_{i_1 \ldots i_n}.$$

Il résulte des inégalités précédentes que cette série est

convergente dès que f est holomorphe dans un voisinage du polydisque
$|z_1| \leqslant \frac{B_1}{2\pi}, \ldots, |z_n| \leqslant \frac{B_n}{2\pi}$, et que la somme de cette série tend vers zéro si f tend uniformément vers zéro dans un voisinage de ce polydisque; en particulier, cette somme définit une forme linéaire continue μ sur $\mathcal{H}$; et l'on a immédiatement : $\mathcal{F}\mu = M(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Par conséquent : *la transformation de Fourier-Borel établit une correspondance biunivoque entre $\mathcal{H}'$ et l'espace des fonctions entières de type exponentiel.*

Soit $\mu \in \mathcal{H}'$ et soit T_μ une distribution $\in \mathcal{E}'$ qui prolonge μ; pour $f \in \mathcal{H}$, $T_\mu * f$ est une fonction analytique complexe qui dépend de f et de μ, et ne dépend pas de T_μ; on la désigne par $\mu * f$; pour $\nu \in \mathcal{H}'$, $T_\mu * T_\nu$ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$, qui ne dépend que de μ et ν et que l'on désigne par $\mu * \nu$.

Si l'on désigne par $\check{\mu}$ la symétrique de μ par rapport à l'origine, on a la propriété suivante : *les applications $f \to \mu * f$ et $\nu \to \check{\mu} * \nu$ sont continues respectivement de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{H}'$ dans $\mathcal{H}'$; elles sont transposées l'une de l'autre.*

Enfin, $\mathcal{F}(\mu * \nu) = \mathcal{F}_\mu . \mathcal{F}_\nu$.

2. Équations de convolution dans $\mathcal{H}$.

Soit $\mu \in \mathcal{H}'$; on désigne ici par $V(\mu)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des exponentielles-polynômes complexes,

$$Q(z_1, \ldots, z_n) = P(z_1, \ldots, z_n) e^{\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n}$$

(où P est un polynôme) qui vérifient l'équation : $\mu * Q = 0$.

On démontre, comme dans le cas réel (préliminaires) : *soient μ et ν dans $\mathcal{H}'$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$; pour que $\frac{\mathcal{F}\nu}{\mathcal{F}\mu}$ soit une fonction entière, il faut et il suffit que l'on ait* $V(\mu) \subset V(\nu)$ (*autrement dit, que* $\nu \in [V(\check{\mu})]^\perp$).

Proposition 9. — $\check{\mu} * \mathcal{H}' = [V(\mu)]^\perp$. *En particulier, $\mu * \mathcal{H}'$ est fermé.*

Si $\sigma \in \mathcal{H}'$ est de la forme $\check{\mu} * \tau$, $\tau \in \mathcal{H}'$, quel que soit l'exponentielle-polynôme Q vérifiant $\mu * Q = 0$, on aura :

$$\langle \sigma, Q \rangle = \langle \tau, \mu * Q \rangle = 0,$$

donc :

$$\check{\mu} * \mathcal{H}' \subset [V(\mu)]^\perp.$$

Réciproquement, soit σ donné dans $[V(\mu)]^{\perp}$; la fonction $\frac{\mathcal{F}\sigma}{\mathcal{F}\check{\mu}}$ est alors entière; d'après le théorème 1, elle est de type exponentiel; donc elle est transformée de Fourier-Borel d'un $\tau \in \mathcal{H}$, et l'on a $\sigma = \check{\mu} * \tau$.

Voici maintenant l'analogue du théorème 3 :

THÉORÈME 4. — *Toute solution f de l'équation $\mu * f = 0$ ($\mu \in \mathcal{H}'$ donné $\neq 0$; $f \in \mathcal{H}$) est adhérente à* $V(\mu)$.

L'orthogonal de $\check{\mu} * \mathcal{H}'$ est évidemment l'espace des $f \in \mathcal{H}$ qui vérifient : $\mu * f = 0$.

D'autre part, l'orthogonal de $[V(\mu)]^{\perp}$ est l'adhérence $\overline{V(\mu)}$ de $V(\mu)$; et il résulte de la proposition 9 que ces espaces sont identiques. C.Q.F.D.

Comme dans le cas réel, on peut se demander si tout sous-espace fermé invariant par translation de $\mathcal{H}$ est engendré par les exponentielles-polynômes qu'il contient; pour $n = 1$, la réponse est affirmative (Valiron, [32]; Voir aussi [27]). (7).

Pour les équations avec second membre, on obtient le résultat très simple :

THÉORÈME 5. — *Pour $\mu \in \mathcal{H}'$, $\mu \neq 0$, on a toujours : $\mu * \mathcal{H} = \mathcal{H}$.*

D'après les propriétés des espaces $(\mathcal{F})$, il suffit de vérifier :

a) que l'application $\nu \to \check{\mu} * \nu$ est biunivoque : c'est évident par transformation de Fourier-Borel.

b) que $\check{\mu} * \mathcal{H}'$ est faiblement fermé; c'est bien le cas, d'après la proposition 9.

Exemple. — Si μ est défini par un opérateur différentiel à coefficients constants, ou plus généralement un opérateur différentiel aux différences finies à coefficients constants, ce théorème montre : dans $\mathcal{H}$, on peut toujours trouver une solution d'une équation différentielle aux différences finies à coefficients constants, avec second membre $\in \mathcal{H}$.

Pour $n = 1$, le théorème 5 est dû à Muggli [23].

Les théorèmes 4 et 5 se généralisent sans difficulté aux

(7) Signalons (sans entrer dans les détails) que l'on peut en donner une démonstration analogue à celle qui a été faite au § 2, n° 2.

systèmes d'équations (avec des restrictions analogues à celles du paragraphe 4 et du chapitre I, § 4) :

Soit $\mu \in \overset{(p,\,q)}{\mathcal{H}'}$ (notation évidente); *on suppose* μ *de rang* p;

a) Toute $f \in \overset{(q,\,1)}{\mathcal{H}}$ *qui vérifie* $\mu * f = 0$ *est limite de combinaisons linéaires d'exponentielles-polynômes matricielles qui vérifient cette équation.*

b) Quel que soit $g \in \overset{(p,\,1)}{\mathcal{H}}$, *il existe* $f \in \overset{(q,\,1)}{\mathcal{H}}$ *et vérifiant* $\mu * f = g$.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS ELLIPTIQUES

§ 1. — Opérateurs différentiels.

1. *Dans tout ce chapitre,* Ω *désignera une variété indéfiniment différentiable, connexe, dénombrable à l'infini; sa dimension sera désignée par* n.

Pour simplifier, Ω *sera supposée orientable et orientée* (cf. remarque à la fin du § 3).

Un « *espace fibré à fibre vectorielle sur* Ω », V, est un espace fibré indéfiniment différentiable de base Ω, de fibre-type C^p, de groupe structural le groupe linéaire complexe $GL_p(C)$ (les changements de carte sont donc définis dans la fibre par des matrices M_{ij} à coefficients indéfiniment différentiables).

Si Ω est une variété analytique-réelle, on définit de la même manière un « espace fibré analytique-réel à fibre vectorielle sur Ω » (dans ce cas, les M_{ij} doivent être analytiques-réels).

(On peut aussi prendre pour fibre R^p au lieu de C^p, et pour groupe structural le groupe linéaire réel $GL_p(R)$; suivant le cas, les M_{ij} doivent être indéfiniment différentiables ou analytiques-réels; les résultats que nous établirons seraient aussi valables dans ce cas, que nous appellerons « cas réel »).

Soit V un espace fibré à fibre vectorielle sur Ω; on sait (cf. [25], [31]) que l'on peut définir les « courants de degré m ($m \leqslant n$) sur Ω à valeurs dans V » (il serait plus exact de dire : « courants sur Ω à valeurs dans le faisceau défini par V »). Pour simplifier les énoncés, nous préférons n'utiliser que les courants de degré zéro, ce qui ne change évidemment rien à la généralité des résultats. Nous adopterons donc pour la notion d'*espace fibré dual* de V (noté V′) la définition suivante, légèrement différente de celle de [31] :

Soit V'' l'espace fibré à fibre vectorielle de base Ω, de fibre C^p, tel que $GL_p(C)$ opère dans V'' par la représentation contragrédiente de celle par quoi il opère dans V; et soit $\overset{n}{\bigwedge}\Gamma$ l'espace des n-covecteurs tangents à V; on pose $V' = V'' \underset{\Omega}{\otimes} \overset{n}{\bigwedge}\Gamma$.

Explicitement: si θ_i et θ_j sont deux cartes locales de Ω, de coordonnées locales respectivement $x_1, \ldots, x_n$, et $y_1, \ldots, y_n$ telles qu'au-dessus de θ_i (resp. θ_j), V soit identifié à $\theta_i \times C^p$ (resp. $\theta_j \times C^p$), et si le changement de carte dans $\theta_i \cap \theta_j$ est défini par $M_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$, le changement de cartes dans V' au-dessus de $\theta_i \cap \theta_j$ est défini par $M'_{ij} = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}\, {}^t M_{ij}^{-1}$.

On note p_V la projection de V sur Ω. La dualité entre V et V' s'effectue de la manière suivante: si $a \in V$ et $a' \in V'$ ont même projection, il correspond canoniquement au couple (a, a') un n-covecteur en $p_V(a)$ sur Ω; désignons-le par $d(a, a')$; à une section continue f de V, et une section continue f' de V', il correspond donc une n-forme différentielle $d(f, f')$ sur Ω. Supposons, par exemple, f à support compact; on définit alors un produit scalaire entre l'espace des sections continues à support compact de V et l'espace des sections continues de V' par la formule : $\langle f, f' \rangle = \int d(f, f')$.

Plus généralement, le dual d'un espace de fonctions différentiables sur V' peut être interprété comme un espace de distributions sur V (démonstration analogue à celles de [31]). Nous ne nous étendrons pas sur les détails.

Voici les espaces que nous utiliserons :

$\mathcal{E}(V)$ (8), espace des sections indéfiniment différentiables de V.

$\mathcal{D}(V)$, espace des sections indéfiniment différentiables à support compact de V.

$\mathcal{E}'(V)$, dual de $\mathcal{E}(V')$, qui sera appelé « espace des distributions à support compact dans Ω, à valeurs dans V ».

$\mathcal{D}'(V)$, dual de $\mathcal{D}(V')$ qui sera appelé « espace des distributions sur Ω, à valeurs dans V ».

(8) Remarquons que cette notation est en contradiction avec une notation usitée dans laquelle $\mathcal{E}(V)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur V. Il ne peut en résulter aucune confusion dans ce travail, (où, par exemple, ce dernier espace serait noté $\mathcal{E}_V(V \times C)$, ou, plus simplement, $\mathcal{E}_V$). La même remarque vaut pour les notations qui suivent.

On vérifie sans peine que les inclusions habituelles ont lieu; on munit ces espaces des topologies habituelles; ils sont réflexifs, les inclusions sont continues; enfin, $\mathcal{E}(V)$ est un espace $(\mathcal{F})$ réflexif.

Nous utiliserons aussi l'espace $\mathcal{K}^m(V)$ $(m \geqslant 0)$ des sections à support compact de V qui sont « de carré sommable ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m » (cela signifie que, sur tout compact d'une carte locale, une telle section est de carré sommable ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre m), et l'espace $\mathcal{L}^m(V)$ des sections de V qui sont localement de carré sommable ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$. On munit $\mathcal{L}^m(V)$ de la topologie de la convergence dans $\overset{(p,1)}{\mathcal{L}^m_{R^n}}$ au-dessus de toute carte locale de Ω; la topologie de $\mathcal{K}^m(V)$ est alors définie par une limite inductive (suivant le procédé déjà employé dans les préliminaires).

On désigne par $\mathcal{L}^{-m}(V)$, (resp. $\mathcal{K}^{-m}(V)$) le dual de l'espace $\mathcal{K}^m(V')$ (resp. $\mathcal{L}^m(V')$) (il est immédiat que, pour $m = 0$, ces notations sont cohérentes avec les précédentes). $\mathcal{L}^{-m}(V)$ est l'espace des distributions sur V qui, au-dessus de toute carte locale de Ω sont sommes de dérivées d'ordre $\leqslant m$ de fonctions localement de carré sommable; et $\mathcal{K}^{-m}(V)$ est le sous-espace de $\mathcal{L}^{-m}(V)$ formé des distributions à support compact $\subset \mathcal{L}^{-m}(V)$. Pour $m \gtrless 0$, $\mathcal{L}^m(V)$ est un espace $(\mathcal{F})$ réflexif.

$$\text{On pose enfin } \mathcal{D}'^F(V) = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \mathcal{L}^{-m}(V).$$

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert $\subset \Omega$, on désigne par $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V)$ l'espace $\mathcal{E}[p_V^{-1}(\mathcal{O})]$; de même pour $\mathcal{D}_{\mathcal{O}}(V)$ etc...

Si K est un compact contenu dans Ω, on désigne par $\mathcal{D}_K(V)$, $\mathcal{E}'_K(V)$, $\mathcal{K}^m_K(V)$ l'espace des distributions à support compact $\subset$ K, à valeurs dans V, et contenues respectivement dans $\mathcal{D}(V)$, $\mathcal{E}'(V)$, $\mathcal{K}^m(V)$.

$\mathcal{K}^m_K(V)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1. — *Soit* K *un compact* $\subset \Omega$; *pour tout entier* m, *l'injection de* $\mathcal{K}^m_K(V)$ *dans* $\mathcal{K}^{m-1}_K(V)$ *est complètement continue.*

Supposons d'abord $m > 0$. Par une partition de l'unité, on se ramène au cas où V est de la forme $\mathcal{O} \times C^p$, $\mathcal{O}$ étant un ouvert $\subset R^n$; le résultat découle alors d'une variante du théorème d'Ascoli (voir, par exemple [34], p. 53).

Supposons maintenant $m \leqslant 0$; soit $\mathcal{O}'$ un ouvert relativement compact contenu dans Ω, avec $K \subset \mathcal{O}'$; de ce qui précède résulte par dualité que l'application $(\mathcal{K}_{\overline{\mathcal{O}'}}^{-m}(V'))' \to (\mathcal{K}_{\overline{\mathcal{O}'}}^{-m+1}(V'))'$ transposée de l'injection $\mathcal{K}_{\overline{\mathcal{O}'}}^{-m+1}(V') \to \mathcal{K}_{\overline{\mathcal{O}'}}^{-m}(V')$ est complètement continue; mais $\mathcal{K}_K^m(V)$ est canoniquement isomorphe à un sous-espace fermé de $(\mathcal{K}_{\overline{\mathcal{O}'}}^{-m}(V'))'$, et la restriction de l'application précédente à $\mathcal{K}_K^m(V)$ est l'injection $\mathcal{K}_K^m(V) \to \mathcal{K}_K^{m-1}(V)$: cette dernière est donc aussi complètement continue.

2. *Opérateurs différentiels.* Soient V_1 et V_2 deux espaces fibrés à fibre vectorielle sur Ω, de fibres-type respectivement C^q et C^p.

DÉFINITION 1. — *Un « (V_1, V_2) opérateur différentiel » d'ordre $\leqslant m$ est une application linéaire continue* $D : \mathcal{D}'(V_1) \to \mathcal{D}'(V_2)$ *qui possède les propriétés suivantes :*

1° *Pour tout $f \in \mathcal{D}'(V_1)$ et tout ouvert $\mathcal{O} \subset \Omega$, les valeurs de* Df *au-dessus de $\mathcal{O}$ ne dépendent que des valeurs de f au-dessus de $\mathcal{O}$.*

2° *Tout point $x \in \Omega$ possède un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ vérifiant les conditions suivantes: $p_{V_1}^{-1}(\mathcal{O})$ peut être identifié à $\tilde{\mathcal{O}} \times C^q$ et $p_{V_2}^{-1}(\mathcal{O})$ à $\tilde{\mathcal{O}} \times C^p$ $(\tilde{\mathcal{O}} \subset R^n)$; alors, au-dessus de $\mathcal{O}$, f peut être identifié à une distribution $\tilde{f} \in \overset{(q,1)}{\mathcal{D}'_{\tilde{\mathcal{O}}}}$, et l'on a :*

$$\tilde{Df} = \sum_{j_1 + \cdots + j_n \leqslant m} a_{j_1 \ldots j_n} \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_n}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}} \tilde{f}$$

avec $a_{j_1 \ldots j_n} \in \overset{(p,q)}{\mathcal{E}_{\tilde{\mathcal{O}}}}$.

Si Ω est analytique-réel, et si V_1 et V_2 sont des espaces fibrés analytiques-réels, on définit de même les « (V_1, V_2) opérateurs différentiels à coefficients analytiques » (les $a_{j_1 \ldots j_n}$ devront être analytiques quand les applications $p_{V_1}^{-1}(\mathcal{O}) \to \tilde{\mathcal{O}} \times C^q$ et $p_{V_1}^{-1}(\mathcal{O}) \to \tilde{\mathcal{O}} \times C^p$ sont analytiques).

Nous désignerons dans toute la suite par D' le transposé de D. D' est un opérateur $\mathcal{D}(V_2') \to \mathcal{D}(V_1')$; il se prolonge en un (V_2', V_1') opérateur différentiel, qui sera aussi noté D'.

Nous allons chercher à généraliser les théorèmes 2 et 4 du chapitre 1 (ou, du moins, une partie des résultats qui y sont contenus); nous aurons besoin pour cela de quelques nouvelles notions.

DÉFINITION 2. — *Soit* K *un compact* $\subset \Omega$, *et* D *un* (V_1, V_2) *opérateur différentiel sur* Ω; *nous appellerons* « D'*-enveloppe réciproque de* K » *et nous noterons* $\hat{\hat{K}}_{D'}$ *le plus petit ensemble fermé* $\subset \Omega$ *qui possède les propriétés suivantes :*

$$K \subset \hat{\hat{K}}_{D'}; \quad et \quad \mu \in \mathcal{E}'(V'_2), \qquad \underline{D'\mu} \subset K \quad entraînent \quad \underline{\mu} \subset \hat{\hat{K}}_{D'}.$$

Nous dirons que D' *vérifie la propriété* (C) *si la* D'*-enveloppe réciproque de tout compact est compacte et si* D' *est biunivoque.*

Nous dirons que D' *vérifie la propriété* (B) *si, quel que soit* K *compact* $\subset \Omega$, $D'\mathcal{E}'_K(V'_2)$ *est fermé dans* $\mathcal{E}'_K(V'_1)$.

La propriété (B) est équivalente à la suivante : D' est un homomorphisme $\mathcal{E}'_K(V'_2) \to \mathcal{E}'_K(V'_1)$ (cf. préliminaires).

THÉORÈME 1. — *Si* D' *possède les propriétés* (C) *et* (B), *quel que soit l'ouvert relativement compact* $\mathcal{O} \subset \Omega$, *il existe un ouvert relativement compact* $\mathcal{O}' \subset \Omega$, $\mathcal{O}' \supset \mathcal{O}$ *qui possède la propriété suivante :*

Toute $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}'}(V_1)$ *et vérifiant* $Df = 0$ *est limite, dans* $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$, *de fonctions* $g \in \mathcal{E}_{\Omega}(V_1)$ *vérifiant* $Dg = 0$.

De plus, on peut prendre pour $\mathcal{O}'$ *n'importe quel ouvert contenant* $\left(\hat{\hat{\mathcal{O}}}\right)_{D'}$.

DÉMONSTRATION. — Soit $\mathcal{O}'$ un ouvert relativement compact contenant $\left(\hat{\hat{\mathcal{O}}}\right)_{D'}$ (puisque (C) est vérifié, un tel ouvert existe), et soit $\mathcal{O}_1$ un ouvert relativement compact contenant $\mathcal{O}'$.

LEMME. — *Toute* $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}'}(V_1)$ *vérifiant* $Df = 0$ *est limite dans* $\mathcal{O}$ *de fonctions* $g \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}_1}(V_1)$ *vérifiant* $Dg = 0$.

Soit en effet ν une distribution $\in \mathcal{E}'_{\mathcal{O}}(V'_1)$ orthogonale à toutes les fonctions $g \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}_1}(V_1)$ qui vérifient $Dg = 0$; ν est dans l'adhérence de $D'\mathcal{E}'_{\mathcal{O}_1}(V'_2)$ (dans $\mathcal{E}'_{\mathcal{O}_1}(V'_1)$); puisque (B) est vérifié, il existe $\mu \in \mathcal{E}'_{\overline{\mathcal{O}}_1}(V_2)$ tel que $\nu = D'\mu$; mais alors, d'après la définition de $\left(\hat{\hat{\mathcal{O}}}\right)_{D'}$, on a $\underline{\mu} \subset \mathcal{O}'$, et par suite $\langle f, \nu\rangle = \langle f, D'\mu\rangle = \langle Df, \mu\rangle = 0$ d'où le lemme.

Considérons maintenant une suite d'ouverts relativement compacts, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \cdots \subset \Omega$ telle que $\cup\, \mathcal{O}_i = \Omega$; et déterminons par récurrence une suite d'ouverts relativements compacts $\mathcal{O}'_i$ tels que l'on ait : $\overline{\mathcal{O}}'_{i-1} \subset \mathcal{O}'_i$ et $\left(\hat{\hat{\mathcal{O}}}_i\right)_{D'} \subset \mathcal{O}'_i$. D'après le lemme qui précède, toute fonction $f_i \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}'_i}(V_1)$ vérifiant $Df_i = 0$ est limite dans $\mathcal{O}_i$ de fonctions $f_{i+1} \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}'_{i+1}}(V_1)$ vérifiant $Df_{i+1} = 0$.

Par conséquent, si nous nous donnons une fonction $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}'}(V_1)$ vérifiant $Df = 0$ et un voisinage fermé W de f dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$, nous pouvons déterminer par récurrence une suite de fonctions $f_i \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}'_i}(V_1)$ vérifiant $Df_i = 0$, dont les restrictions à $\mathcal{O}$ sont dans W, et qui sur tout compact, convergent uniformément ainsi que toutes leurs dérivées vers une limite (pour cela, on peut procéder, par exemple, comme au chapitre I, théorème 3); leur limite est une fonction $g \in \mathcal{E}_{\Omega}(V_1)$ qui vérifiera $Dg = 0$, et dont la restriction à $\mathcal{O}$ est dans W, d'où le théorème.

Remarque. — L'hypothèse (C) n'est pas intervenue entièrement (en particulier le fait que D′ est biunivoque de $\mathcal{E}'(V'_2)$ dans $\mathcal{E}'(V'_1)$); il suffit en fait de faire l'hypothèse suivante: quel que soit K compact $\subset \Omega$, il existe K′ compact contenu dans Ω tel que les propriétés $\nu \in D'\mathcal{E}'(V'_2)$ et $\nu \in K$ entraînent l'existence de $\mu \in \mathcal{E}'_{K'}(V'_2)$ vérifiant $D'\mu = \nu$. Cette remarque est peut-être utile au cas où D′ n'est pas biunivoque.

THÉORÈME 2. — *Si* D′ *vérifie les propriétés* (B) *et* (C), *on a:* $D\mathcal{E}(V_1) = \mathcal{E}(V_1)$.

Nous allons donner deux démonstrations de ce résultat; la première généralise celle du théorème 3 du chapitre I, l'autre celle du théorème 4 du chapitre I.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION. — $\mathcal{E}'_K(V'_1)$ et $\mathcal{E}'_K(V'_2)$ étant, pour tout compact $K \subset \Omega$, des duals d'espaces $(\mathcal{F})$, les hypothèses entraînent que l'application D': $\mathcal{E}'_K(V'_2) \to \mathcal{E}'_K(V'_2)$ a pour transposée un homomorphisme sur. En appliquant ce résultat à $K = \overline{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ un ouvert relativement compact $\subset \Omega$, on trouve: pour tout $f \in \mathcal{E}(V_2)$, il existe $g \in \mathcal{E}(V_1)$ qui vérifie, dans $\mathcal{O}$, l'équation $Dg = f$.

Considérons maintenant une fonction $f \in \mathcal{E}(V_2)$, et montrons qu'il existe $g \in \mathcal{E}(V_1)$ vérifiant $Dg = f$. Pour cela, considérons une suite d'ouverts relativement compacts $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \cdots$, $\bigcup \mathcal{O}_i = \Omega$ et, pour chaque $\mathcal{O}_i$, déterminons un $\mathcal{O}'_i$ correspondant, comme au théorème 1. Soit g_i vérifiant $Dg_i = f$ dans $\mathcal{O}'_i$; dans $\mathcal{O}'_i$, on a $D(g_{i+1} - g_i) = 0$; on peut donc trouver, d'après le théorème 1, une fonction $h_i \in \mathcal{E}(V_1)$, vérifiant $Dh_i = 0$, et approchant $g_{i+1} - g_i$ dans $\mathcal{O}_i$ autant qu'on veut; par récurrence, on peut déterminer des h_i tels que la série $g = g_1 + \sum_{1}^{+\infty} (g_{i+1} - g_i - h_i)$ converge dans $\mathcal{E}(V_1)$; l'on a $Dg = f$, d'où le résultat.

Deuxième démonstration. — Il suffit de prouver :

a) que $D' : \mathcal{E}'(V_2') \to \mathcal{E}'(V_1')$ est biunivoque; or c'est vrai par hypothèse.

b) que $D'\mathcal{E}'(V_2')$ est fermé dans $\mathcal{E}'(V_1')$; soit B un ensemble faiblement compact quelconque dans $\mathcal{E}'(V_1')$; montrons que $B \cap D'\mathcal{E}'(V_2')$ est fermé, ce qui entraînera le résultat.

Toutes les distributions $\mu \in B$ ont leurs supports dans un compact fixe K; on a donc, d'après la définition de $\hat{\hat{K}}_{D'}$:

$B \cap D'\mathcal{E}'(V_2') = B \cap D'\mathcal{E}'_{\hat{\hat{K}}_{D'}}(V_2')$ et $B \cap D'\mathcal{E}'_{\hat{\hat{K}}_{D'}}(V_2')$ est fermé, puisque $\hat{\hat{K}}_{D'}$ est compact, d'où le résultat.

Remarque. — La biunivocité de D' et la propriété (B) sont évidemment conséquence de la propriété suivante : D' a, dans tout ouvert relativement compact $\mathcal{O}$ un noyau élémentaire à gauche semi-régulier à droite, c'est-à-dire qu'il existe une application continue $E' : \mathcal{E}'_{\mathcal{O}}(V_1') \to \mathcal{D}'_{\mathcal{O}}(V_2')$ vérifiant $E'D\mu = \mu$ pour tout $\mu \in \mathcal{E}'_{\mathcal{O}}(V_2')$.

Par exemple, si D est un système différentiel à coefficients constants vérifiant $p = r$ (notations du chapitre I, paragraphe 4), D' sera biunivoque et possèdera la propriété (B).

Les théorèmes 1 et 2 peuvent sans difficulté être étendus à d'autres espaces que l'espace $\mathcal{E}$. Voici par exemple un résultat que nous aurons à utiliser :

Théorème 2'. — *Soient k et k' deux entiers $\gtrless 0$; si D' vérifie* (C) *et si, pour tout compact $K \subset \Omega$, $D'\mathcal{K}^k_K(V_2')$ est contenu dans $\mathcal{K}^{k'}(V_1')$ et y est fermé, on a: $D\mathcal{L}^{-k'}(V_1) = \mathcal{L}^{-k}(V_2)$.*

(Comme plus haut, tout revient à démontrer que $D'\mathcal{K}^k(V_2')$ est fermé; ou encore que, pour tout B faiblement compact $\subset \mathcal{K}^{k'}(V_1')$, $B \cap D'\mathcal{K}^k(V_2')$ est fermé; d'après (C) il existe un compact K' tel que $B \cap D'\mathcal{K}^k(V_2') = B \cap D'\mathcal{K}^k_{K'}(V_2')$ d'où le résultat).

§ 2. Équations elliptiques.

1. Définition 3. — *Un* (V_1, V_2) *opérateur différentiel* D *est dit elliptique (resp. analytique-elliptique) si $f \in \mathcal{D}'(V_1)$ est une section indéfiniment différentiable de V_1 au-dessus de tout ouvert*

où $\mathrm{D}f$ *est une section indéfiniment différentiable de* V_2 *(resp. si* D *est à coefficients analytiques, et si* f *est une section analytique de* V_1 *au-dessus de tout ouvert où* $\mathrm{D}f$ *est une section analytique de* V_2*).*

Si D est elliptique, les distributions solutions de $\mathrm{D}f = 0$ sont toutes des sections indéfiniment différentiables; désignons par H_{D} l'espace formé par ces fonctions.

Proposition 2. — $\mathcal{D}'(\mathrm{V}_1)$ *et* $\mathcal{E}(\mathrm{V}_1)$ *induisent la même topologie sur* H_{D}.

Considérons un ouvert relativement compact $\mathcal{O} \subset \Omega$; le dual de l'espace $\mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}}(\mathrm{V}'_1)$ (resp. $\mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}}(\mathrm{V}'_2)$) est un quotient de $\mathcal{D}'(\mathrm{V}_1)$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathrm{V}_2)$) que nous noterons F_1 (resp. F_2); la transposée de l'application $\mathrm{D}' : \mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}}(\mathrm{V}_2) \to \mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}}(\mathrm{V}'_1)$ est une application D'': $\mathrm{F}_1 \to \mathrm{F}_2$; soit N son noyau.

Il existe une application canonique i': $\mathrm{F}_1 \to \mathcal{D}'_{\mathcal{O}}(\mathrm{V}_1)$ (c'est la transposée de l'injection i: $\mathcal{D}_{\mathcal{O}}(\mathrm{V}'_1) \to \mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}}(\mathrm{V}'_1)$); elle envoie N dans l'espace des $f \in \mathcal{D}'_{\mathcal{O}}(\mathrm{V}_1)$ qui vérifient $\mathrm{D}f = 0$, donc dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\mathrm{V}_1)$ d'après l'ellipticité.

Montrons que l'application i': $\mathrm{N} \to \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\mathrm{V}_1)$ est continue: comme $\mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}}(\mathrm{V}'_1)$ est un espace $(\mathcal{F})$ de Schwartz [11], N, muni de la topologie induite par F_1, est le dual fort de $\mathcal{D}_{\overline{\mathcal{O}}}(\mathrm{V}'_1)/\mathrm{N}^{\perp}$, lequel est un espace $(\mathcal{F})$ réflexif; d'autre part, $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\mathrm{V}_1)$ est un espace $(\mathcal{F})$; comme l'application i': $\mathrm{N} \to \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\mathrm{V}_1)$ a son graphe fermé (évident), il résulte du théorème du graphe fermé qu'elle est continue.

Démontrons maintenant la proposition 2: considérons des $f_i \in \mathrm{H}_{\mathrm{D}}$ qui convergent vers zéro dans $\mathcal{D}'(\mathrm{V}_1)$; les images $\tilde{f}_i$ des f_i dans F_1 sont dans N et y convergent vers zéro; d'après ce qui précède, les $i'(\tilde{f}_i)$ tendront donc vers zéro dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\mathrm{V}_1)$; et comme $i'(\tilde{f}_i)$ est égal à la restriction de f_i à $\mathcal{O}$, les f_i tendront vers zéro dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\mathrm{V}_1)$; comme cela a lieu pour tout ouvert relativement compact $\subset \Omega$, il s'ensuit que les f_i tendent vers zéro dans $\mathcal{E}(\mathrm{V}_1)$, d'où la proposition.

Nous voyons donc que, lorsque nous étudions les propriétés d'approximation des solutions d'une équation elliptique homogène, il n'y a pas lieu de distinguer entre l'approximation dans $\mathcal{D}'$ et l'approximation dans $\mathcal{E}$.

Pour les équations avec second membre, on pourra souvent aussi déduire les théorèmes d'existence de solutions dans $\mathcal{D}'$

des théorèmes d'existence de solutions dans $\mathcal{E}$, grâce au théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit* D *un* (V_1, V_2) *opérateur différentiel elliptique*; *désignons par* $\mathrm{loc}[D\mathcal{E}(V_1)]$ (resp. $\mathrm{loc.}[D\mathcal{D}'(V_1)]$) *le sous-espace de* $\mathcal{E}(V_2)$ (resp. $\mathcal{D}'(V_2)$) *formé des* f *qui vérifient la condition suivante :*

Pour tout point $x \in \Omega$, *il existe* $g \in \mathcal{E}(V_1)$ (resp. $\mathcal{D}'(V_1)$) *tel que* $Dg = f$ *dans un voisinage de* x.

On a l'isomorphisme algébrique :

$$\mathrm{loc}[D\mathcal{E}(V_1)]/D\mathcal{E}(V_1) \approx \mathrm{loc}[D\mathcal{D}'(V_1)]/D\mathcal{D}'(V_1).$$

DÉMONSTRATION. — Tout d'abord, si $f \in \mathrm{loc}[D\mathcal{D}'(V_1)]$ est indéfiniment différentiable, tout g vérifiant $Dg = f$ est indéfiniment différentiable, puisque D est elliptique; donc l'application $r : \mathrm{loc}\, D\mathcal{E}(V_1)/D\mathcal{E}(V_1) \to \mathrm{loc}\, D[\mathcal{D}'(V_1)]/D\mathcal{D}'(V_1)$, quotient de l'injection $\mathrm{loc}[D\mathcal{E}(V_1)] \to \mathrm{loc}[D\mathcal{D}'(V_1)]$, est biunivoque.

Montrons que r est une application *sur*, ce qui démontrera le théorème. Soit $f \in \mathrm{loc}[D\mathcal{D}'(V_1)]$; il existe un recouvrement localement fini $\{\mathcal{O}_i\}$ de Ω par des ouverts $\mathcal{O}_i$ relativement compacts et des $g_i \in \mathcal{D}'(V_1)$ qui vérifient $Dg_i = f$ dans $\mathcal{O}_i$; soit $\{\alpha_i\}$ une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée à $\{\mathcal{O}_i\}$, et soit $h = \sum \alpha_i g_i$.

$f - Dh$ est indéfiniment différentiable et est de plus dans $\mathrm{loc}[D\mathcal{E}(V_1)]$: car, dans $\mathcal{O}_i$, on a

$$f - Dh = Dg_i - Dh = D[\sum \alpha_j (g_i - g_j)]$$

et $g_i - g_j$ est indéfiniment différentiable dans $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$, puisqu'il y vérifie $D(g_i - g_j) = 0$.

Donc, f est dans $\mathrm{loc}[D\mathcal{E}(V_1)] + D\mathcal{D}'(V_2)$, d'où le théorème.

COROLLAIRE 1. — *Si* D *est elliptique, et vérifie* $D\mathcal{E}(V_1) = \mathcal{E}(V_2)$ *et si l'on a* : $\mathrm{loc}\, D\mathcal{D}'(V_1) = \mathcal{D}'(V_2)$, *alors* $D\mathcal{D}'(V_1) = \mathcal{D}'(V_2)$.

COROLLAIRE 2. — *Si* D *est elliptique et vérifie* $D\mathcal{D}'^F(V_1) = \mathcal{D}'^F(V_2)$, *on a* $D\mathcal{E}(V_1) = \mathcal{E}(V_2)$ *et* $D\mathcal{D}'(V_1) = \mathcal{D}'(V_2)$.

Tout d'abord, pour tout $f \in \mathcal{E}(V_2)$, il existe $g \in \mathcal{D}'^F(V_1)$ qui vérifie $Dg = f$; alors g est indéfiniment différentiable d'où la formule $D\mathcal{E}(V_1) = \mathcal{E}(V_2)$. D'autre part, toute $f \in \mathcal{D}'(V_2)$ est localement dans $\mathcal{D}'^F(V_2)$; on a donc $\mathrm{loc}\, D\mathcal{D}'(V_1) = \mathcal{D}'(V_2)$, et il suffit d'appliquer le corollaire 1.

2. Équations analytiques elliptiques. — Si D' est analytique-elliptique, la théorie faite au § 2, se simplifie, du fait que la condition (C) est toujours vérifiée comme nous allons le voir. Pour commencer, donnons encore une définition :

Définition 4. — Soit Ω une variété *qui, dans tout ce numéro sera supposée non compacte* et soit A un sous-ensemble de Ω ; décomposons $\complement A$ en ses composantes connexes ; les unes, B_i, sont relativement compactes, les autres B'_j ne le sont pas. On appellera « *enveloppe de* A *dans* Ω » et l'on désignera par $\hat{A}$ l'ensemble : $A \cup \left(\bigcup_i B_i\right)$ (9).

Lemme 1. — *Si* A *est fermé (resp. compact),* $\hat{A}$ *est fermé (resp. compact).*

Si A est fermé, les B_i et les B'_j sont des ouverts ; le complémentaire de $\hat{A}$ est $\bigcup_j B'_j$, qui est ouvert, donc $\hat{A}$ est fermé.

Supposons A compact, et soit V un voisinage compact de A ; F désigne la frontière de V. Les B_i forment un recouvrement ouvert du compact $F \cap \hat{A}$; donc $F \cap \hat{A}$ est recouvert par un nombre fini d'entre eux, soient $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$; si $i \neq i_1, \ldots, i_k$, B_i, qui est disjoint des B_{i_j}, ne peut rencontrer F ; comme B_i est connexe et adhérent à A, on a : $B_i \subset V$.

Finalement, $\hat{A} \subset V \cup B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_k}$, et $\hat{A}$ est compact.

Lemme 2. — *Si* A *est ouvert,* $\hat{A}$ *est ouvert, et c'est la réunion de* A *et des sous-ensembles de* $\complement A$, *à la fois ouverts et compacts dans* $\complement A$.

Compactifions Ω en lui ajoutant un point à l'infini, noté ∞. $\complement A \cup \{\infty\}$ est compact ; dans $\complement A \cup \{\infty\}$, la composante connexe de ∞ est $\complement \hat{A} \cup \{\infty\}$; or on sait que, dans un espace compact, la composante connexe d'un point est compacte, et que c'est l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés qui contiennent ce point ; d'où le résultat.

Définition 5. — *Un opérateur différentiel* D *est dit posséder la propriété* (A) *si la condition suivante est vérifiée :*

(9) Les « enveloppes » qui sont définies ici ont été considérées par Grothendieck [10], afn précisément de trouver des propriétés d'approximation des solutions des equations elliptiques homogènes.

(A) *pour tout ouvert connexe* $\mathcal{O} \subset \Omega$, *les hypothèses :*

1° $f \in \mathcal{D}'_{\mathcal{O}}(V_1)$ *est nul sur un ouvert* $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.

2° $Df = 0$

entraînent $f = 0$.

Un opérateur elliptique vérifiant la propriété (A) *est dit* « A-*elliptique* ».

Il est évident qu'un opérateur analytique-elliptique vérifie (A); et qu'un opérateur elliptique et analytique-elliptique est A-elliptique.

Si D′ vérifie (A), il est évident que l'on a, pour tout compact $K \subset \Omega$: $\hat{\hat{K}}_{D'} \subset \hat{K}$ et qu'en outre Ω étant non compacte, D′ est biunivoque $\mathcal{E}'(V'_2) \to \mathcal{E}'(V'_1)$.

Par conséquent, en appliquant le lemme 1 :

Proposition 3. — *Si* D′ *vérifie* (A), D′ *vérifie* (C).

Proposition 4. — *Si* D′ *vérifie* (A) *et* (B), *et si* $\mathcal{O}$ *est un ouvert* $\subset \Omega$ *égal à son enveloppe* $\hat{\mathcal{O}}$, *toute* $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$ *vérifiant* $Df = 0$ *est limite de* $g_i \in \mathcal{E}_{\Omega}(V_1)$ *vérifiant* $Dg_i = 0$.

Il suffit de démontrer que, pour tout ouvert relativement compact $\mathcal{O}_1$, $\overline{\mathcal{O}}_1 \subset \mathcal{O}$, f est limite, dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}_1}(V_1)$, de $g_i \in \mathcal{E}_{\Omega}(V_1)$ qui vérifient $Dg_i = 0$; or, cela résulte du théorème 1 et de la formule :

$$\left(\hat{\hat{\mathcal{O}}}_1\right)_{D'} \subset \mathcal{O}.$$

La proposition qui suit va nous permettre d'établir une réciproque de la proposition 4.

Proposition 5. — *Si* D *est elliptique et s'il opère biunivoquement de* $\mathcal{D}(V_1)$ *dans* $\mathcal{D}(V_2)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$ *et* $\mathcal{E}_{\mathfrak{I}}(V_1)$ *induisent la même topologie sur le sous-espace de* $\mathcal{E}_{\mathfrak{I}}(V_1)$ *formé des solutions de l'équation* $Df = 0$.

Sinon, il existerait une suite de fonctions $f_i \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$, $Df_i = 0$ qui tendraient vers zéro dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$, mais non dans $\mathcal{E}_{\mathfrak{I}}(V_1)$; soit K un compact $\subset \hat{\mathcal{O}} \cap \complement\mathcal{O}$, ouvert dans $\complement\mathcal{O}$, tel que les f_i ne tendent pas vers zéro dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}\cup K}(V_1)$; d'après la proposition 2, les f_i ne tendent pas vers zéro dans $\mathcal{L}^0_{\mathcal{O}\cup K}(V_1)$; en multipliant au besoin les f_i par des constantes, on peut supposer la suite f_i bornée dans $\mathcal{L}^0_{\mathcal{O}\cup K}(V_1)$; elle sera alors (prop. 2) bornée dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}\cup K}(V_1)$, donc relativement compacte dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}\cup K}(V_1)$ (théorème d'Ascoli); elle a donc un point adhérent $\neq 0$ dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O} \cup K}(V_1)$ soit f: et l'on a : $f \in \mathcal{D}_K(V_1)$, $Df = 0$, $f \neq 0$, ce qui est absurde.

COROLLAIRE. — *Dans les hypothèses de la proposition* 5, *pour que la fonction* $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$ *vérifiant* $Df = 0$ *soit limite dans* $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$ *de fonctions* $\in H_D$, *il est nécessaire que f se prolonge en une fonction* $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\hat{\mathcal{O}}}(V_1)$ *vérifiant* $D\hat{f} = 0$ (ce prolongement est d'ailleurs unique, s'il existe).

Dans certains cas, (nous en verrons des exemples dans le numéro 3 de ce §, et dans le § 3), on pourra montrer que, si $\mathcal{O} \neq \hat{\mathcal{O}}$, il existe toujours une solution dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$ de l'équation $Df = 0$ qui ne peut pas être prolongée de cette manière; nous aurons ainsi obtenu une généralisation du théorème de Runge, et du théorème d'approximation des fonctions harmoniques : la condition nécessaire et suffisante pour que toute solution de l'équation $Df = 0$ dans un ouvert $\mathcal{O}$ soit limite de fonctions $\in H_D$, est que l'on ait $\mathcal{O} = \hat{\mathcal{O}}$.

3. Cas des équations à coefficients constants.

i) *Cas d'une équation* ($p = q = 1$).

Soit D un opérateur différentiel à coefficients constants (sur R^n) et E une solution élémentaire de D; en dehors de l'origine, on a : $DE = 0$; donc, si D est elliptique (resp. analytique-elliptique), E sera une fonction indéfiniment différentiable en dehors de l'origine (resp. analytique en dehors de l'origine). Réciproquement, si D possède une solution élémentaire indéfiniment différentiable (resp. analytique) en dehors de l'origine, on sait (voir p. ex. [29]) que D est elliptique (resp. analytique-elliptique); donc :

PROPOSITION 6. — *Soit* D *un opérateur différentiel à coefficients constants. Pour que* D *soit elliptique (resp. analytique-elliptique)*; *il faut et il suffit que* D *possède une solution élémentaire indéfiniment différentiable (resp. analytique) en dehors de l'origine.*

En particulier, « D *analytique-elliptique* » *entraîne* « D *elliptique* ».

Ce dernier résultat est bien connu (mais à l'aide de considérations beaucoup plus difficiles que celles faites ici). Un théorème de Petrowsky [24] affirme en effet que les opérateurs analytiques-elliptiques d'ordre m à coefficients constants sont ceux qui peuvent s'écrire :

$$D = \sum a_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial^m}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} + \text{termes d'ordre} < m$$

avec la condition : $\sum a_{i_1 \ldots i_n} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n} = 0$, ξ_i réels, entraînent $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$. Et l'on sait [14] que de tels opérateurs ont une solution élémentaire indéfiniment différentiable en dehors de l'origine (au moins locale, ce qui suffit pour montrer qu'ils sont elliptiques).

Pour les équations elliptiques, une caractérisation analogue au théorème de Petrowsky a été obtenue récemment par Hörmander dans sa thèse [41].

Le théorème 4 du chapitre I admet, pour les équations elliptiques, les compléments suivants :

Proposition 7.

a) Si D *est elliptique, les propriétés* 1°, 2°, 3° *du théorème* 4, *chapitre* I *sont équivalentes à la suivante* :

$$D\mathcal{D}'_\Omega = \mathcal{D}'_\Omega.$$

b) Si D *est analytique-elliptique, les propriétés précédentes sont vérifiées pour tout ouvert* $\Omega \subset R^n$.

a) est une conséquence immédiate du théorème 3, corollaire 2.

b) Si D est analytique-elliptique, $D'(= \check{D}$ dans la notation du chapitre 1) est aussi analytique-elliptique ; donc D' vérifie la condition (C) et (C) est équivalent à la propriété 3°).

Proposition 8. — *Soit* Ω *un ouvert* $\subset R^n$, *et* $\mathcal{O}$ *un ouvert* $\subset \Omega$; *soit* D *un opérateur différentiel à coefficients constants analytique-elliptique de degré* $\geqslant 1$. *Pour que tout* $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ *vérifiant* $Df = 0$ *soit limite de* $g_i \in \mathcal{E}_\Omega$ *vérifiant* $Dg_i = 0$, *il faut et il suffit que l'enveloppe de* $\mathcal{O}$ *dans* Ω *soit égale à* $\mathcal{O}$.

La propriété est suffisante, d'après la proposition 4 (la condition (B) est vérifiée, puisque D' possède une solution élémentaire). La propriété est nécessaire : supposons en effet $\mathcal{O} \neq \hat{\mathcal{O}}$, soit x un point $\in \hat{\mathcal{O}} \cap \complement \mathcal{O}$, et soit f une solution (dans R^n) de l'équation $Df = \delta_x$ (f est la translatée d'une solution élémentaire de D) ; la restriction f_1 de f à $\mathcal{O}$ est indéfiniment différentiable, et vérifie $Df_1 = 0$; mais, elle ne peut pas être approchée par des solutions dans $\mathcal{E}_\Omega$ de l'équation (sinon, d'après le corollaire de la proposition 5, il existerait un prolongement $\hat{f}_1$ de f_1 à $\hat{\mathcal{O}}$ vérifiant $\mathrm{D}\hat{f}_1 = 0$; si l'on désigne par K un compact contenant x, contenu dans $\hat{\mathcal{O}} \cap \complement\mathcal{O}$, et ouvert dans $\complement\mathcal{O}$, la restriction de $f - \hat{f}_1$ à un voisinage de K contenu dans $\mathcal{O} \cup \mathrm{K}$, est une distribution $g \in \mathcal{E}'_\mathrm{K}$, et vérifiant $\mathrm{D}g = \delta_x$, ce qui est impossible parce que D est de degré $\geqslant 1$, comme on le voit immédiatement par transformation de Fourier).

ii) *Cas d'un système pour lequel $p = q$.*

Si D est une matrice différentielle à coefficients constants de type (p, p), pour que D soit elliptique, (ou analytique-elliptique) il est nécessaire que l'on ait $r = p$; sinon, il existerait une matrice différentielle $\mathrm{P} \neq 0$ du type, $(p, 1)$ vérifiant $\mathrm{DP} = 0$.

Il existe donc une solution élémentaire bilatère E (chapitre 1, proposition 6); comme c'est une solution élémentaire à droite, elle est indéfiniment différentiable en dehors de l'origine (resp. analytique en dehors de l'origine); et alors D′ est elliptique (resp. analytique-elliptique) en même temps que D, car $\check{\mathrm{E}}$ est une solution élémentaire à gauche de D′.

On généralise alors sans difficulté les propositions 6, 7, 8. (Dans la proposition 6, il faut remplacer « solution élémentaire » par « solution élémentaire à droite ou à gauche ».)

iii) *Cas d'un système pour lequel $p \neq q$.*

Si D est elliptique (resp. analytique-elliptique), on a nécessairement $q = r$ (même raisonnement qu'en ii), donc D possède nécessairement une solution élémentaire à gauche; il serait intéressant de savoir s'il possède nécessairement une solution élémentaire à gauche indéfiniment différentiable (resp. analytique) en dehors de l'origine. Donc : *si* D′ *est analytique-elliptique, il vérifie* (B) *et* (A) *pour tout ouvert* $\Omega \subset \mathrm{R}^n$; *on aura donc* : $\mathrm{D}\overset{(q,1)}{\mathcal{E}_\Omega} = \overset{(p,1)}{\mathcal{E}_\Omega}$; *et aussi*, (comme on le vérifie aisément) : $\mathrm{D}\overset{(q,1)}{\mathcal{D}'^{\mathrm{F}}_\Omega} = \overset{(p,1)}{\mathcal{D}'^{\mathrm{F}}_\Omega}$; *si, en outre,* D′ *possède une solution élémentaire à gauche* $\check{\mathrm{E}}$ *analytique en dehors de l'origine,* D *possèdera une solution élémentaire à droite analytique en dehors de l'origine,* E, *et l'on aura aussi* :

$$\mathrm{D}\overset{(q,1)}{\mathcal{D}'_\Omega} = \overset{(p,1)}{\mathcal{D}'_\Omega}$$

(Ce dernier résultat se prouve à l'aide d'une variante du théorème 3 : soit $\{\mathcal{O}_i\}$ un recouvrement localement fini de Ω par des ouverts $\mathcal{O}_i$ relativement compacts dans Ω, soit $\{\alpha_i\}$ une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée à ce recouvrement, et soit, pour tout i, β_i fonction $\in\mathcal{D}_\Omega$, égale à 1 sur $\mathcal{O}_i$; ceci posé, soit f une distribution $\in \overset{(p,1)}{\mathcal{D}'_\Omega}$, et soit $g_i =$ restriction à Ω de $E*\beta_i f$; dans $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$, on a $g_i - g_j = E*(\beta_i f - \beta_j f)$, et comme $\beta_i f - \beta_j f$ est nul dans $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$, $(g_i - g_j)$ sera indéfiniment différentiable dans $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$; alors, si l'on pose $h = \sum \alpha_i g_i$, $f - Dh$ sera indéfiniment différentiable, d'où le résultat.)

§ 3. Équations de Petrowsky.

1. Nous garderons dans tout ce paragraphe les notations de la définition 1; en particulier, D désigne un (V_1, V_2) opérateur différentiel, V_1 (resp. V_2) étant un espace fibré à fibre vectorielle de base Ω, et de fibre C^q (resp. C^p). On désigne par m l'ordre *strict* de D.

Définition 6 :

a) D *sera dit «opérateur de Petrowsky» (ou : du type* (P)) *si* $p = q$ *et si, au-dessus de toute carte locale,* $\tilde{\mathcal{O}}$, *les* $a_{j_1 \dots j_n}$ *vérifient la condition suivante :* (P) *Pour tout point* $(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{\mathcal{O}}$, *et tout système de nombres réels non tous nuls* $\xi_1, \dots, \xi_n$, *la matrice*

$$\left(\sum_{j_1 + \dots + j_n = m} a_{j_1 \dots j_n}(x_1, \dots, x_n)\, \xi_1^{j_1} \dots \xi_n^{j_n}\right)$$

est de rang égal à p $(= q)$

b) D *sera dit du type* (PA) *s'il vérifie les conditions* (P) *et* (A). (En particulier, un opérateur du type (P) analytique-elliptique est du type (PA)).

« D du type (P) » équivaut à « D′ du type (P) » (évident).

Les résultats qui suivent sont plus ou moins classiques (voir notamment [8^{bis}]). Une démonstration courte et élégante en a été donné récemment par Lax [15^{bis}].

Proposition 9. — *Soit* D *un* (V_1, V_2)-*opérateur différentiel d'ordre* m *du type* (P), *et soit* k *un entier* $(\geqslant 0)$; *tout point de* Ω *possède un voisinage* $\mathcal{O}$ *tel que l'application* D: $\mathcal{K}^{m+k}_{\mathcal{O}}(V_1) \to \mathcal{K}^{k}_{\mathcal{O}}(V_2)$ *soit un isomorphisme (dans).*

THÉORÈME 4. — *Soit* D *un* (V_1, V_2)*-opérateur différentiel d'ordre m du type* (P). *Pour que* $Df(f \in \mathcal{D}'(V_1))$ *soit dans* $\mathcal{L}^k(V_2)$, *il faut et il suffit que f soit dans* $\mathcal{L}^{m+k}(V_1)$.

En particulier, D *est elliptique.*

COROLLAIRE. — *Un* (V_1, V_2)*-opérateur différentiel à coefficients analytiques du type* (P) *est analytique-elliptique* (*et, en particulier, est du type* (PA)).

Il résulte en effet d'un théorème classique de Petrowsky [24] que, toute solution $g \in \mathcal{D}'(V_1)$ de l'équation $Dg = f$ est analytique au-dessus de tout ouvert $\in \Omega$ où f est analytique et g assez différentiable; or, d'après le théorème 4, si f est analytique, g est indéfiniment différentiable.

Remarque. — Il serait intéressant de savoir si la condition (P) entraîne toujours la condition (A), même si l'on ne suppose pas les coefficients analytiques; pour $n = 2$, $p = 2$, $m = 1$ une réponse positive partielle a été donnée par Carleman [6] (elle est à la base de la théorie des fonctions « pseudo-analytiques »; voir à ce sujet Vekoua [33], et l'article de Bers dans [35]). Des résultats plus généraux ont été annoncés récemment par Aronszajn [1].

Il serait aussi intéressant de savoir si, au cas où $p = 1$, « D analytique-elliptique » entraîne « D du type (P) »; pour les équations à coefficients constants, la réponse est positive, comme on sait (Petrowsky [24] (10)).

La proposition suivante joue un rôle fondamental dans le reste de ce chapitre; sa démonstration est inspirée d'un raisonnement employé par Gårding dans l'étude du problème de Dirichlet [9].

PROPOSITION 10. — *Soit* D *un* (V_1, V_2)*-opérateur différentiel d'ordre m du type* (P); *pour tout entier* $k (\gtrless 0)$ *et tout compact*

(10) Voici, pour $p \neq 1$, un contre-exemple immédiat : prenons

$$\Omega = R^n, \qquad V_1 = V_2 = \text{l'espace des } r\text{-covecteurs tangents à } R^n$$

($\mathcal{E}(V_1)$, par exemple, est alors l'espace des formes différentielles de degré r sur R^n à coefficients indéfiniment différentiables) ; munissons R^n d'une métrique riemanienne par exemple Σdx_i^2, et prenons pour D l'opérateur $\delta d + c$, c une constante $\neq 0$; si $r \neq 0$, D n'est pas du type (P) (δd n'est même pas elliptique, puisque d ne l'est pas); mais D est analytique-elliptique puisque $(d\delta + c)(\delta d + c) = c\Delta + c^2$ est analytique-elliptique !

$K \subset \Omega$, D *est un homomorphisme de* $\mathcal{H}_K^{m+k}(V_1)$ *dans* $\mathcal{H}_K^k(V_2)$, *et le noyau de cet homomorphisme est de dimension finie.*

Soit en effet $\{\mathcal{O}_i\}$ un recouvrement localement fini de Ω par des ouverts relativement compacts $\mathcal{O}_i$ qui vérifient les conclusions de la proposition 9, et soit $\{\alpha_i\}$ une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée à ce recouvrement. Les $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{O}}_i}^k(V_2)$ sont des espaces de Hilbert, soient $(,)_{\mathcal{O}_i}$ des produits scalaires hilbertiens correspondants; il est évident que, sur $\mathcal{H}_K^m(V_2)$, qui est un espace de Hilbert, on peut prendre comme produit scalaire hilbertien :

$$(f,\ g)_k = \sum(\alpha_i f,\ \alpha_i g)_{\mathcal{O}_i}.$$

(Puisque K est compact, tous les termes de cette somme sont nuls, sauf un nombre fini).

D'autre part, étant donné la manière dont ont été choisi les $\mathcal{O}_i$, on peut prendre comme produit scalaire hilbertien sur $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{O}}}^{m+k}(V_1)$ l'expression $(Df,\ Dg)_{\mathcal{O}_i}$ et sur $\mathcal{H}_K^{m+k}(V_1)$:

$$(f,\ g)_{m+k} = \sum(D(\alpha_i f),\ D(\alpha_i g))_{\mathcal{O}_i}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}(Df,\ Dg)_k &= \sum(\alpha_i Df,\ \alpha_i Dg)_{\mathcal{O}_i}\\ &= (f,\ g)_{m+k} + \sum(\alpha_i Df - D(\alpha_i f),\ \alpha_i Dg)_{\mathcal{O}_i}\\ &\qquad\qquad + \sum(D(\alpha_i f),\ \alpha_i Dg - D(\alpha_i g))_{\mathcal{O}_i}.\end{aligned}$$

Les opérateurs différentiels

$$f \to \alpha_i Df - D(\alpha_i f) \qquad \text{et} \qquad g \to \alpha_i Dg - D(\alpha_i g)$$

sont d'ordre $\leqslant m$; d'après la proposition 1, ils sont donc complètement continus de $\mathcal{H}_K^{m+k}(V_1)$ dans $\mathcal{H}_K^k(V_2)$; par suite, on a :

$$(Df,\ Dg)_k = (f,\ g)_{m+k} + \sum(K_i f,\ L_i g)_k + \sum(L_i' f,\ K_i' g)_k$$

les K_i et les K_i' (resp. les L_i et les L_i') étant complètement continus (resp. continus) de $\mathcal{H}_K^{m+k}(V_1)$ dans $\mathcal{H}_K^k(V_2)$. Le résultat découle alors du

LEMME. — *Soient* H_1 *et* H_2 *deux espaces de Hilbert, de produit scalaire respectivement* $(\ ,\ )_1$ *et* $(\ ,\ )_2$; *soient* D, L_i, L_i' (*resp.* K_i, K_i') *des applications linéaires continues (resp. complètement continues) de* H_1 *dans* H_2, *qui vérifient la formule :*

$$(Df,\ Dg)_2 = (f,\ g)_1 + \sum(K_i f,\ L_i g)_2 + \sum(L_i' f,\ K_i' g)_2.$$

Alors, D *est un homomorphisme de* H_1 *dans* H_2 *et son noyau est de codimension finie.*

Soient D^*, L_i^*, $K_i'^*$ respectivement les opérateurs $H_2 \to H_1$ adjoints de D, L_i, K_i'. L'opérateur $H_1 \to H_1$:

$$D^*D - \sum L_i^* K_i - \sum K_i' L_i'^*$$

est l'application identique I, car

$$(D^*Df - \sum L_i^* K_i f - \sum K_i'^* L_i' f, g)_1 = (f, g)_1.$$

Comme $\mathfrak{g} = \sum L_i^* K_i + \sum K_i'^* L_i$ est complètement continu, $D^*D = I + \mathfrak{g}$ a pour image un sous-espace fermé W de codimension finie de H_1; en vertu des inclusions $W \subset D^*H_2 \subset H_1$, D^*H_2 sera aussi fermé et de codimension finie, d'où le lemme en transposant.

2. Cas des variétés non compactes.

Théorème 5. — *Si* D *est un* (V_1, V_2) *opérateur différentiel d'ordre m et si* D′ *est du type* (PA), *on a*;

$$D\mathfrak{L}^k(V_1) = \mathfrak{L}^{k-m}(V_2); \qquad D\mathcal{E}(V_1) = \mathcal{E}(V_2); \qquad D\mathfrak{D}'(V_1) = \mathfrak{D}'(V_2).$$

En effet D′ vérifie (C) d'après la proposition 3; le théorème 2′ et la proposition 10 montrent alors que l'on a;

$$D\mathfrak{L}^k(V_1) = \mathfrak{L}^{k-m}(V_2)$$

d'où

$$D\mathfrak{D}'^F(V_1) = \mathfrak{D}'^F(V_2)$$

D, étant du type (P), est elliptique (théorème 4); d'après le corollaire 2 du théorème 3, on a donc: $D\mathcal{E}(V_1) = \mathcal{E}(V_2)$ et $D\mathfrak{D}'(V_1) = \mathfrak{D}'(V_2)$.

Théorème 6. — *Si* D *est un* (V_1, V_2)*-opérateur différentiel, et si* D′ *est du type* (PA), *pour tout ouvert* $\mathcal{O} \subset \Omega$ *égal à son enveloppe, tout* $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$ *vérifiant* $Df = 0$ *est limite de* $g_i \in \mathcal{E}(V_1)$ *vérifiant* $Dg_i = 0$ (i.e. $g_i \in H_D$).

Si, en outre D *vérifie aussi* (A), *est d'ordre* $\geqslant 1$, *et si* $\mathcal{O} \subset \Omega$ *est un ouvert différent de son enveloppe, il existe une fonction* $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$ *vérifiant* $Df = 0$ *qui n'est pas limite de* $g_i \in H_D$.

En effet, de $D\mathcal{E}(V_1) = \mathcal{E}(V_2)$, on déduit (préliminaires) que $D'\mathcal{E}'(V_2')$ est fermé, donc que (B) est vérifié. La première assertion résulte alors de la proposition 4.

Pour démontrer la deuxième, il suffit, d'après la proposition 5 [11], de trouver une fonction $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(V_1)$ vérifiant $Df = 0$, et qui ne peut pas être prolongée en une fonction $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\hat{\mathcal{O}}}(V_1)$ vérifiant $D\hat{f} = 0$.

Soit b un point $\in \hat{\mathcal{O}} \cap \complement \mathcal{O}$, soit δ_b une mesure $\in \mathcal{E}'(V_2)$ dont le support se réduit à b, soit $f_1 \in \mathcal{D}'(V_1)$ une solution de l'équation $Df_1 = \delta_b$, et soit f la restriction de f_1 à $\mathcal{O}$; f vérifie bien $Df = 0$; mais elle ne peut pas être prolongée en une fonction $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\hat{\mathcal{O}}}(V_1)$ vérifiant $D\hat{f} = 0$. Supposons en effet le contraire : soit K un compact $\subset \hat{\mathcal{O}} \cap \complement \mathcal{O}$, ouvert dans $\hat{\mathcal{O}}$, $b \in K$; et soit $\mathcal{O}_1 \subset K \cup \mathcal{O}$ un voisinage de K; la restriction de $\hat{f} - f_1$ à $\mathcal{O}_1$ est une distribution h à support compact dans K; comme elle vérifie $Dh = -\delta_b$, et que D vérifie (A), le support de h est réduit à b; mais alors, Dh ne peut être somme de dérivées d'ordre $\leqslant m$ de mesures dont le support se réduit à b (comme le montre un raisonnement élémentaire); donc, puisque $m \geqslant 1$, on ne peut avoir $Dh = \delta_b$, ce qui démontre le théorème.

3. Cas des variétés compactes.

Si D est du type (P) et si Ω est compacte, D sera, par exemple, un homomorphisme $\mathcal{K}^m(V_1) \to \mathcal{K}^0(V_2)$, et son noyau N sera de dimension finie, r; d'après l'ellipticité de D, N sera aussi le noyau des applications $D : \mathcal{D}(V_1) \to \mathcal{D}(V_2)$ et $D : \mathcal{D}'(V_1) \to \mathcal{D}'(V_2)$. Montrons que ce sont des homomorphismes; soit N′, de dimension r' le noyau de D′, et soit $W = D\mathcal{K}^m(V_1)$; D applique $\mathcal{D}(V_1)$ sur $\mathcal{D}(V_2) \cap W$, qui est fermé dans $\mathcal{D}(V_2)$, donc cette application est un homomorphisme; $\mathcal{D}(V_2) \cap W$ est de codimension r', car son orthogonal est N′.

De même, D′ est un homomorphisme $\mathcal{D}(V_2') \to \mathcal{D}(V_1')$ (de noyau N′); en transposant : D est un homomorphisme $\mathcal{D}'(V_1) \to \mathcal{D}'(V_2)$ (faible, donc fort d'après le théorème du graphe fermé), et $D\mathcal{D}'(V_2)$ a pour orthogonal N′; finalement :

Proposition 11. — *Si Ω est compacte, et si* D *est du type* (P), *l'application* $D : \mathcal{D}(V_1) \to \mathcal{D}(V_2)$ *est un homomorphisme, le noyau étant de dimension finie* r, *et l'image (fermée) de codi-*

[11] Puisque D vérifie (A), D est biunivoque de $\mathcal{D}(V_1) \to \mathcal{D}(V_2)$: la proposition 5 s'applique donc.

mension finie r'. Même résultat (avec les mêmes r et r') pour l'application $D : \mathcal{D}'(V_1) \to \mathcal{D}'(V_2)$ (12).

Souvent, D est un (V_1, V_1') opérateur différentiel; dans ce cas, D' est aussi un (V_1, V_1') opérateur différentiel; si $D = D'$, on aura donc $r = r'$.

Si D est un (V_1, V_1') opérateur différentiel, si l'on est dans le « cas réel », et si D est défini-positif c'est-à-dire, si, pour tout $f \in \mathcal{D}(V_1)$, $f \neq 0$, on a $\langle Df, f \rangle > 0$, on aura $r = r' = 0$. Pour l'étude des (V_1, V_1') opérateurs différentiels sur une variété, (compacte ou non) et des problèmes aux limites liés à ces opérateurs, nous renvoyons à [18].

Remarque : Variétés non orientables.

Si Ω est une variété non orientable, on peut aussi définir des espaces fibrés à fibre vectorielle sur Ω, et des (V_1, V_2) opérateurs différentiels sur Ω. Leur théorie se ramène immédiatement à la théorie analogue, faite sur le revêtement orientable d'ordre 2 de Ω.

On peut aussi procéder directement : il faudra pour cela modifier un peu la définition de l'espace fibré dual d'un espace fibré V, de manière qu'à une section de V et une section de V' corresponde une n-forme différentielle d'*espèce impaire* [25], que l'on pourra intégrer sur Ω; et tous les raisonnements faits ensuite sont encore valables, sans changement.

§ 4. — Exemples et applications.

Seules seront données ici quelques applications immédiates; des résultats plus complets sur les variétés analytiques-réelles seront publiés ultérieurement.

1. Surfaces de Riemann.

Une surface de Riemann Ω est une variété analytique complexe connexe à une dimension complexe; on sait qu'une

(12) Comme me l'a signalé M. Schwartz, la proposition 10 peut se démontrer sous les seules hypothèses : D est elliptique, loc $D\mathcal{D}'(V_1) = \mathcal{D}'(V_2)$. En effet :

a) N est de dimension finie : car, les topologies définies sur N par $\mathcal{E}(V_1)$ et $\mathcal{D}'(V_1)$ coïncident, donc l'application identique $N \to N$ est complètement continue (i. e. tout voisinage de zéro est relativement compact).

b) De la formule $\mathcal{D}' = \mathcal{E} + D\mathcal{D}'$ (théorème 3) il résulte que l'application $I + D$: $\mathcal{E} \oplus \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ est sur; on applique alors un théorème de complète continuité analogue à [30], corollaire du théorème 2, et l'on trouve que $D\mathcal{D}'(V_1)$ est fermé et de codimension finie.

telle surface est dénombrable à l'infini (théorème de Rado).

On prendra ici $V_1 = \Omega \times C$; si f est une fonction indéfiniment différentiable sur Ω (ce qui équivaut à : $f \in \mathcal{E}(V_1)$), sa différentielle df se décompose en une forme $d'f$ de type $(1, 0)$ et une forme $d''f$ de type $(0, 1)$ (localement : $d'f = \frac{\partial f}{\partial z} dz$, $d''f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \overline{dz}$; voir par exemple [4], [31]).

L'espace des formes de type $(0, 1)$ sur Ω à coefficients indéfiniment différentiables est évidemment l'espace des sections d'un espace fibré V_2 à fibre vectorielle sur Ω; l'opérateur d'' est un (V_1, V_2) opérateur différentiel; on sait qu'il est du type (PA), ainsi que son transposé; d'autre part, les solutions de $d''f = 0$ sont exactement les fonctions holomorphes sur Ω; en appliquant le théorème 6, on retrouve donc le résultat suivant, dû à Behnke et Stein [1 *bis*] :

Théorème 7. — *Soit Ω une surface de Riemann connexe non compacte, et $\mathcal{O}$ un ouvert $\subset \Omega$; pour que toute fonction f holomorphe sur $\mathcal{O}$ puisse être approchée par des fonctions holomorphes sur Ω, il faut et il suffit que $\mathcal{O}$ coïncide avec son enveloppe* (i.e. que $\complement \mathcal{O}$ n'ait pas de composantes connexes compactes).

Rappelons les principales conséquences de ce résultat :

1° *Sur toute surface de Riemann connexe non compacte, il existe une fonction holomorphe non constante* (« conjecture de Carathéodory »). Il suffit, par exemple d'appliquer le théorème 7 à $\mathcal{O}$ = un petit disque, et f = une coordonnée locale sur $\mathcal{O}$.

2° *Toute surface de Riemann connexe, non compacte est une variété de Stein.*

Il suffit de montrer ([4], [5]) :

a) que, étant donnés deux points x et y de Ω, il existe une fonction holomorphe qui vérifie $g(x) \neq g(y)$; pour le voir, il suffit d'appliquer le théorème 7 à $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_1$ = petit disque contenant x, $\mathcal{O}_2$ = petit disque contenant y, $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$, et f égal à 0 sur $\mathcal{O}_1$ et à 1 sur $\mathcal{O}_2$.

b) que, pour tout point $x \in \Omega$, il existe une fonction holomorphe sur Ω qui soit une coordonnée locale en x; pour le voir, il suffit d'appliquer le théorème 7 à $\mathcal{O}$ = un petit disque contenant x, et f = une coordonnée locale sur $\mathcal{O}$.

c) que, pour tout K compact contenu dans Ω, l'ensemble K' des points $x \in \Omega$ qui vérifient, pour tout f holomorphe sur Ω

$$|f(x)| \leqslant \sup_{y \in K} |f(y)|$$

est compact; or, il résulte aussitôt du théorème 7 que K′ est contenu dans l'enveloppe de tout ouvert relativement compact contenant K, donc est compact (et même égal à $\hat{K}$).

2. Variétés analytiques-réelles.

Plaçons-nous dans le cas où Ω est une variété analytique-réelle, non compacte. *Supposons que Ω soit munie d'un ds^2 compatible avec sa structure analytique-réelle.*

Soit Φ^p l'espace des formes différentielles de degré p à coefficients indéfiniment différentiables; si V^p est l'espace des p-covecteurs tangents à Ω, on a : $\Phi^p = \mathcal{E}(V^p)$.

On considère sur Ω les opérateurs habituels d, $\eth$, $\Delta = d\eth + \eth d$ [25] (13); quelque soit p, Δ est un opérateur $\Phi^p \to \Phi^p$ du type (PA); donc si l'on appelle « harmoniques » les formes différentielles α qui vérifient $\Delta\alpha = 0$, on aura, en appliquant les théorèmes 5 et 6 :

THÉORÈME 8. — *Soit Ω une variété analytique-réelle non compacte munie d'un ds^2 analytique.*

a) Quel que soit p, on a : $\Delta\Phi^p = \Phi^p$ Même résultat en remplaçant Φ^p par l'espace des formes différentielles de degré p à coefficients distributions (i.e. par l'espace des courants de degré p).

b) Soit $\mathcal{O}$ un ouvert $\subset$ A; pour que toute p-forme harmonique sur $\mathcal{O}$ soit limite de p-formes harmoniques sur Ω, il faut et il suffit que $\mathcal{O}$ coïncide avec son enveloppe.

De a) résulte, en particulier, que toute forme $\alpha \in \Phi^p$ peut s'écrire sous la forme $d\beta + \eth\gamma$, $\beta \in \Phi^{p-1}$, $\gamma \in \Phi^{p+1}$. Toujours dans les mêmes hypothèses, soit $Z^p(\Omega)$ l'espace des p-formes α, à coefficients analytiques qui sont d-fermées (c'est-à-dire vérifient $d\alpha = 0$); et soit $B^p(\Omega)$ l'espace des p-formes qui sont des d-bords analytiques, c'est-à-dire qui peuvent s'écrire sous la forme $d\beta$, β étant une $(p$-1)-forme à coefficients analytiques.

(13) L'opérateur noté δ dans cet ouvrage est ici noté $\eth$.

Proposition 12. — *Dans les hypothèses du théorème* 8 $Z^p(\Omega)/B^p(\Omega)$ *est canoniquement isomorphe à* $H^p(\Omega, C)$, *p-ième espace vectoriel de cohomologie de* Ω *à coefficients complexes.*

Grâce au théorème de de Rham, il suffit de montrer :

a) Que toute p-forme d-fermée à coefficients indéfiniment différentiables est d-homologue à une p-forme d-fermée à coefficients analytiques.

b) Que toute p-forme à coefficients analytiques qui est d-bord d'une forme à coefficients indéfiniment différentiables est d-bord d'une forme à coefficients analytiques.

a) Soit $\alpha \in \Phi^p$ vérifiant $d\alpha = 0$; d'après le théorème 4, il existe $\beta \in \Phi^{p-1}$ et $\gamma \in \Phi^{p+1}$ tels que $\alpha = d\beta + \delta\gamma$ donc $\alpha \overset{d}{\sim} \delta\gamma = \alpha'$.

Montrons que α' est à coefficients analytiques :

$$d\alpha' = d\alpha = 0; \qquad \delta\alpha' = \delta\delta\gamma = 0$$

donc $\Delta\alpha' = 0$, et α' est harmonique, donc analytique.

b) Soit $\alpha \in \Phi^p$, à coefficients analytiques, vérifiant $\alpha = d\beta$, $\beta \in \Phi^{p-1}$; on peut écrire $\beta = d\gamma + \delta\gamma'$. Alors, $\alpha = d\delta\gamma'$ ou, si l'on pose $\beta' = \delta\gamma'$, $\alpha = d\beta'$. Montrons que β' est à coefficients analytiques :

$$\Delta\beta' = d\delta\beta' + \delta d\beta' = d\delta\delta\gamma' + \delta\alpha = \delta\alpha$$

et comme $\delta\alpha$ est analytique, β' est aussi analytique.

On démontrerait de la même manière le résultat suivant: soit Φ'^p l'expace des formes différentielles $\subset \Phi^p$ qui sont harmoniques et sont δ-bords; soit Z'^p le sous-espace de Φ'^p des formes qui sont d-fermées, et soit $B'^p = d\Phi^{p-1}$; alors, on a : $H^p(\Omega, C) = Z'^p/B'^p$.

Remarque. — Si Ω est une variété analytique complexe non compacte munie d'une métrique kahlérienne analytique-réelle, si l'on désigne par $\Phi^{p,q}$ l'espace des formes différentielles de type (p, q), on sait que Δ opère de $\Phi^{p,q}$ dans $\Phi^{p,q}$, et que, d'autre part, $\frac{1}{2}\Delta = d''\delta'' + \delta''d''$; d'après le théorème 8, on aura alors : $\Delta\Phi^{p,q} = \Phi^{p,q}$; en raisonnant ensuite comme dans la proposition 12, on trouvera que la d''-cohomologie peut se calculer avec les formes différentielles à coefficients analytiques réels, ou avec les formes différentielles harmoniques et δ''-bords.

§ 5. — Noyaux élémentaires.

Tous les espaces vectoriels topologiques considérés ici seront supposés *complets*. Rappelons d'abord rapidement quelques notions sur les produits tensoriels topologiques et sur les noyaux-distributions [10], [12], [13], [29].

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques localement convexes; on peut définir sur $E \otimes F$ une topologie d'espace localement convexe et une seule qui possède la propriété suivante : quel que soit l'espace localement convexe G, il existe une correspondance biunivoque entre les applications linéaires de $E \otimes F$ (muni de cette topologie) dans G et les applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G; le complété de $E \otimes F$ pour cette topologie est noté $E \hat{\otimes} F$.

Deux applications continues étant données $u_1 : E_1 \to F_1$ et $u_2 : E_2 \to F_2$, on en déduit une application continue $u_1 \otimes u_2 : E_1 \hat{\otimes} E_2 \to F_1 \hat{\otimes} F_2$ qui prolonge l'application $u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$. Lorsque les applications u_1 et u_2 sont *sur* et que E_1, E_2, F_1, F_2 sont des espaces $(\mathfrak{F})$, $u_1 \otimes u_2$ est une application de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ sur $F_1 \hat{\otimes} F_2$.

Soit V un espace fibré à fibre vectorielle ([14]), de base Ω, de fibre type C^p et soit F un espace vectoriel topologique localement convexe; l'espace $[\mathcal{E}(V)] \hat{\otimes} F$ coïncide avec l'espace des sections indéfiniment différentiables de l'espace fibré $V \underset{\Omega}{\otimes} (\Omega \times F)$ (c'est-à-dire de l'espace fibré de base Ω, de fibre $C^p \otimes F$, les changements de cartes opérant trivialement sur F et de la manière ordinaire sur C^p) : l'espace $[\mathfrak{D}'(V)] \hat{\otimes} F$ coïncide avec l'espace $\mathfrak{L}[\mathfrak{D}(V'), F]$ des applications continues de $\mathfrak{D}(V')$ dans F, et aussi, par transposition, avec l'espace $\mathfrak{L}[F'_C, \mathfrak{D}'(V)]$, où F'_C désigne le dual de F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de F.

Certains espaces vectoriels topologiques, nommés par A. Grothendieck « espaces nucléaires » possèdent des propriétés particulières importantes relativement aux produits tensoriels topologiques; il nous suffira ici de savoir :

([14]) Les résultats qui vont suivre ne sont donnés dans les ouvrages cités que pour $\Omega = R^n$, il n'y a aucune difficulté à les étendre au cas général.

1° Que $\mathcal{E}(V)$, $\mathcal{E}'(V)$, $\mathcal{D}(V)$, $\mathcal{D}'(V)$ et leurs sous-espaces munis de la topologie induite sont nucléaires.

2° Que, si E_1 et F_1 sont nucléaires, si E_2 et F_2 sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes, et si u_1 et u_2 sont respectivement des applications continues biunivoques $E_1 \to F_1$ et $E_2 \to F_2$, $u_1 \otimes u_2$ est une application biunivoque $E_1 \hat{\otimes} E_2 \to F_1 \hat{\otimes} F_2$.

3° Que, si E est un espace nucléaire et F un espace localement convexe, on a : $E \hat{\otimes} F = \mathcal{L}(F'_C, E) = \mathcal{L}(E'_C, F)$ ([12], chapitre II, § 2, théorème 6; et § 3, théorème 13, exemple 1, qui sera l'exemple utilisé ici).

Soient V_1 et V_2 deux espaces fibrés à fibre vectorielle de base Ω, de fibres-type respectivement C^q et C^p. L'espace $\mathcal{L}[\mathcal{D}(V_2), \mathcal{D}'(V_1)] = \mathcal{D}'(V'_2) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(V_1)$ sera appelé *espaces des* (V_2, V_1)-*noyaux :* il coïncide avec l'espace des distributions à valeurs dans l'espace fibré de base $\Omega \times \Omega$, de fibre $C^p \otimes C^q$, où les changements de cartes sont définis par le produit tensoriel des matrices qui définissent les changements de cartes dans V'_2 et V_1 ([15]).

Un tel noyau est dit ***régulier*** s'il se prolonge en une application $\in \mathcal{L}[\mathcal{E}'(V_2), \mathcal{D}'(V_1)]$, et s'il applique $\mathcal{D}(V_2)$ continuement dans $\mathcal{E}(V_1)$; autrement dit s'il est à la fois dans $\mathcal{E}(V'_2) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(V_1)$ et dans $\mathcal{D}'(V'_2) \hat{\otimes} \mathcal{E}(V_1)$ (remarquons que, d'après les propriétés 1° et 2°, ces deux espaces sont des sous-espaces de $\mathcal{D}'(V'_2) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(V_1)$ et sont munis de topologies plus fines que ce dernier). Il est dit ***très régulier***, s'il est régulier et si, en outre, la distribution qu'il définit sur $\Omega \times \Omega$ est indéfiniment différentiable au-dessus de tout point de $\Omega \times \Omega$ qui n'appartient pas à la diagonale.

Soit D un (V_1, V_2) opérateur différentiel; un (V_2, V_1) noyau $E \in \mathcal{L}[\mathcal{D}(V_2), \mathcal{D}'(V_1)]$ est dit « *noyau élémentaire à gauche* (*resp. à droite*) *de* D *si, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(V_1)$, *on a* : $E(D\varphi) = \varphi$ (*resp., pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(V_2)$, *on a :* $DE\varphi = \varphi$).

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert $\subset \Omega$; un « (V_2, V_1)-noyau défini sur $\mathcal{O}$ » sera par définition un (W_2, W_1)-noyau, avec $W_1 = p_{V_1}^{-1}(\mathcal{O})$, $W_2 = p_{V_2}^{-1}(\mathcal{O})$.

Proposition 13. — *Si* D *est un* (V_1, V_2) *opérateur différentiel elliptique, vérifiant* $D\mathcal{E}(V_1) = \mathcal{E}(V_2)$, *et possédant, au-dessus de tout ouvert relativement compact d'un recouvrement de* Ω *un*

([15]) Cela constitue le « théorème des noyaux » de L. Schwartz. Notons aussi que l'espace $\mathcal{E}(V'_2) \hat{\otimes} \mathcal{E}(V_1)$ coïncide avec l'espace des sections indéfiniment différentiables du fibré précédent.

noyau élémentaire à droite régulier, et si F *est un espace* ($\mathcal{F}$), *on a* :

$$(D \otimes I)[\mathcal{E}(V_1) \hat{\otimes} F] = \mathcal{E}(V_2) \hat{\otimes} F$$
$$(D \otimes I)[\mathcal{D}'(V_1) \hat{\otimes} F] = \mathcal{D}'(V_2) \hat{\otimes} F \quad (I = \text{application identique } F \to F)$$

La première assertion résulte de ce que D et I sont sur, et que $\mathcal{E}(V_1)$, $\mathcal{E}(V_2)$, et F sont des espaces ($\mathcal{F}$).

A partir de là, nous allons démontrer la deuxième par le même raisonnement qui nous a servi au théorème 3. Soit $\{\mathcal{O}_i\}$ le recouvrement considéré dans l'énoncé, que nous pouvons supposer localement fini; soit $\{\mathcal{O}'_i\}$ un recouvrement plus fin, avec, pour tout i, $\overline{\mathcal{O}'_i} \subset \mathcal{O}_i$; soit $\{\alpha_i\}$ une partition de l'unité subordonnée à ce dernier recouvrement, et soit, pour tout i, β_i une fonction $\in \mathcal{D}_{\mathcal{O}_i}$ égale à un sur $\mathcal{O}'_i$; soit E_i le noyau à droite relatif à $\mathcal{O}_i$. L'application β_i : $g \to \beta_i g$ de $\mathcal{D}'(V_2)$ dans $\mathcal{E}'_{\mathcal{O}_i}(V_2)$ définit une application $\beta_i \otimes I$: $[\mathcal{D}'(V_2)] \hat{\otimes} F \to \mathcal{E}'_{\mathcal{O}_i}(V_2) \hat{\otimes} F$; et E_i définit une application $(E_i \otimes I)$: $\mathcal{E}'_{\mathcal{O}}(V_2) \hat{\otimes} F \to \mathcal{D}'_{\mathcal{O}}(V_1) \hat{\otimes} F$ vérifiant; $(D \otimes I)(E_i \otimes I)\vec{\varphi} = \vec{\varphi}$ pour tout $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}'_{\mathcal{O}_i}(V_2) \hat{\otimes} F$.

Ceci posé, soit $\vec{f} \in [\mathcal{D}'(V_2)] \hat{\otimes} F$, donné; on considère $\vec{g}_i = (E_i \otimes I)(\beta_i \otimes I)\vec{f}$; dans $\mathcal{O}'_i \cap \mathcal{O}'_j = \mathcal{O}_{ij}$, $\vec{g}_i - \vec{g}_j$ est dans $\mathcal{D}'_{\mathcal{O}'_{ij}}(V_1) \hat{\otimes} F$ et y vérifie $(D \otimes I)[\vec{g}_i - \vec{g}_j] = 0$, donc, en tant qu'élément de $\mathcal{L}[F'_c, \mathcal{D}'_{\mathcal{O}'_{ij}}(V_1)]$ est dans $\mathcal{L}[F'_c, H_D(\mathcal{O}'_{ij})] = H_D(\mathcal{O}'_{ij}) \hat{\otimes} F$, ($H_D(\mathcal{O}'_{ij})$ désignant l'espace des solutions dans $\mathcal{O}'_{ij}$ de $Dg = 0$); en particulier, dans $\mathcal{O}'_{ij}$, $\vec{g}_i - \vec{g}_j$ est dans $\mathcal{E}_{\mathcal{O}'_{ij}}(V_1) \hat{\otimes} F$.

On considère alors la somme $\vec{h} = \sum \alpha_i g_j$; $\vec{f} - (D \otimes I)\,\vec{h}$ est indéfiniment différentiable car dans $\mathcal{O}'_i$:

$$\vec{f} - (D \otimes I)\vec{h} = (D \otimes I) \sum \alpha_j (\vec{g}_i - \vec{g}_j).$$

Donc, il existe $\vec{h}_1 \in [\mathcal{E}(V_1)] \otimes F$ vérifiant $(D \otimes I)\vec{h}_1 = \vec{f} - (D \otimes I)\vec{h}$ d'où le résultat.

Théorème 9.

a) Dans les mêmes hypothèses qu'à la proposition 13, D *possède un noyau élémentaire à droite très régulier.*

b) Si, en outre, D' *vérifie les mêmes hypothèses,* D *possède un noyau élémentaire bilatère très régulier.*

Démonstration.

a) Appliquons la proposition 13, avec $F = \mathcal{E}(V'_2)$: il vient $(D \otimes I)\mathcal{D}'(V_1) \hat{\otimes} \mathcal{E}(V'_2) = \mathcal{D}'(V_2) \hat{\otimes} \mathcal{E}(V'_2)$.

On sait que le noyau I_{V_2} ([16]) est dans $\mathcal{D}'(V_2) \hat{\otimes} \mathcal{E}(V'_2)$, donc il existe un noyau $E \in \mathcal{D}'(V_1) \hat{\otimes} \mathcal{E}(V'_2)$ vérifiant $(D \otimes I)\, E = I_{V_2}$; E est un noyau élémentaire à droite de D. Mais, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(V_2)$, E considéré comme $\in \mathcal{L}[\mathcal{D}(V_2), \mathcal{D}'(V_1)]$ vérifie $\varphi = D(E\varphi) \in \mathcal{D}(V_1)$; comme D est elliptique, cela entraîne: $E\varphi \in \mathcal{E}(V_1)$; il résulte alors du théorème du graphe fermé que E est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}(V_2)$ dans $\mathcal{E}(V_1)$, donc est dans $\mathcal{E}(V_1) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(V'_2)$; E est donc régulier.

Soient enfin $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux ouverts $\subset \Omega$, dont l'intersection est vide; au-dessus de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, la restriction de E est dans $\mathcal{D}'_{\mathcal{O}_1}(V_1) \hat{\otimes} \mathcal{E}_{\mathcal{O}_2}(V'_2) = \mathcal{L}[\mathcal{E}'_{\mathcal{O}_2}(V_2), \mathcal{D}'_{\mathcal{O}_1}(V_1)]$, et vérifie $(D \otimes I)\, E = 0$; on voit alors comme ci-dessus que E, au-dessus de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, est dans $\mathcal{L}[\mathcal{E}'_{\mathcal{O}_2}(V_2), \mathcal{E}_{\mathcal{O}_1}(V_1)] = \mathcal{E}_{\mathcal{O}_1}(V_1) \hat{\otimes} \mathcal{E}_{\mathcal{O}_2}(V'_2)$; cela montre que la distribution définie sur $\Omega \times \Omega$ par E est indéfiniment différentiable au-dessus de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$; donc E est très régulier (cf. note ([15])).

b) Lemme : *Si* D *et* D′ *sont elliptiques, tout noyau élémentaire bilatère de* D, *s'il en existe, est nécessairement très régulier.*

En effet, l'équation $(D \otimes I_{V_2})\, E = I_{V_2}$ montre, comme précédemment que E est dans $\mathcal{E}(V_1) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(V'_2)$.

L'équation $(I_{V_1} \otimes D')\, E = I_{V_1}$ montre que E est dans $\mathcal{D}'(V_1) \hat{\otimes} \mathcal{E}(V'_2)$. Enfin, au-dessus de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ étant deux ouverts $\subset \Omega$ d'intersection vide, $E \in \mathcal{D}'_{\mathcal{O}_1}(V_1) \hat{\otimes} \mathcal{E}_{\mathcal{O}_2}(V'_2)$ vérifie $(D \otimes I)\, E = 0$, donc appartient à $\mathcal{E}_{\mathcal{O}_1}(V_1) \hat{\otimes} \mathcal{E}_{\mathcal{O}_2}(V'_2)$ d'où le lemme.

Ceci posé, il nous suffira de démontrer que D possède un noyau élémentaire bilatère; soit E_1 un noyau élémentaire à droite; *montrons qu'il existe* $E' \in \mathcal{D}'(V_1) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(V'_2)$ *qui vérifie*:

$$(D \otimes I_{V_1})\, E' = 0$$
$$(I_{V_1} \otimes D')\, E' = I_{V_1} - (I_{V_1} \otimes D')\, E_1.$$

Le second membre de la deuxième équation vérifie :

$$(D \otimes I_{V_2})\, [I_{V_1} - (I_{V_1} \otimes D')\, E_1] = 0$$

(en effet cela s'écrit aussi $(D \otimes I_{V_2})\, I_{V_1} - (I_{V_1} \otimes D')\, I_{V_2} = 0$, formule qui est équivalente à la définition de D′). Donc, $I_{V_1} - (I_{V_1} \otimes D')\, E \in H_D \hat{\otimes} \mathcal{D}'(V'_2)$; comme H_D est un espace $(\mathcal{F})$, il

([16]) C'est-à-dire l'application identique $\mathcal{D}(V_2) \to \mathcal{D}(V_2)$.

existe, d'après la proposition 13 un $E' \in H_D \widehat{\otimes} \mathcal{D}'(V_2')$ vérifiant $(I \otimes D') = I_{V_1} - (I_{V_1} \otimes D') E_1$, d'où le résultat.

Alors $E' + E_1 = E$ vérifie $(D \otimes I_{V_2})E = I_{V_2}$ et $(I_{V_1} \otimes D') E = I_V$ donc est un noyau élémentaire bilatère, d'où le théorème.

Corollaire. — *Lorsque* Ω *n'est pas compacte, si* D' *est du type* (PA), D *possède un noyau élémentaire à droite très régulier.*

Si D *est aussi du type* (PA), D *possède un noyau élémentaire bilatère très régulier.*

D'après les théorèmes 5 et 9, il suffit de démontrer : tout point $x \in \Omega$ possède un voisinage $\mathcal{O}$ sur lequel D possède un noyau élémentaire à droite très régulier; cette proposition étant locale, nous pouvons supposer que V_1 et V_2 sont identiques à $R^n \times C^p$; la proposition 9 montre que tout point $x \in \Omega$ possèdera un voisinage $\mathcal{O}$ tel que l'application $\overline{D'}$: $\mathcal{K}^m_{\overline{\mathcal{O}}} \to \mathcal{K}^0_{\overline{\mathcal{O}}}$ soit un isomorphisme.

Alors, l'application $D\overline{D'}$: $\mathcal{K}^m_{\overline{\mathcal{O}}} \to (\mathcal{K}^m_{\overline{\mathcal{O}}})'$ est un isomorphisme sur; soit $\tilde{E}_{\mathcal{O}}$ l'application inverse; la restriction de $\tilde{E}_{\mathcal{O}}$ à $\mathcal{K}_{\overline{\mathcal{O}}}^{-m}$ est un noyau élémentaire bilatère de $D\overline{D'}$ au-dessus de $\mathcal{O}$, soit $E_{\mathcal{O}}$; le lemme précédent montre qu'alors $E_{\mathcal{O}}$ est très régulier, donc que $\overline{D'}E_{\mathcal{O}}$ est un noyau élémentaire à droite de D très régulier.

Remarque. — Si D est du type (P) à coefficients analytiques, D et D' seront du type (PA); donc D possède un noyau élémentaire bilatère, E; au-dessus d'un voisinage de tout point de $\Omega \times \Omega$ n'appartenant pas à la diagonale, E vérifiera une équation du type (P) à coefficients analytiques sans second membre, donc sera analytique; par conséquent :

Tout opérateur différentiel de Petrowsky à coefficients analytiques sur une variété non compacte connexe possède un noyau élémentaire bilatère très régulier, analytique en dehors de la diagonale.

Ce résultat s'appliquera notamment à l'opérateur Δ sur un espace de Riemann à ds^2 analytique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Aronszajn. Sur l'unicité du prolongement des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques du 2e ordre, *C. R. Acad. Sc.* 242 (1956), p. 723-725.

[1 bis] H. Behnke und K. Stein, Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen, *Math. Annalen*, 120 (1948), p. 430-461.

[2] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Chap. i et ii, Hermann, Paris, 1953.

[3] H. Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bull. Soc. Math. de France*, 78 (1950), p. 28-64.

[4] H. Cartan, Séminaire E. N. S., 1951-1952, (polycopié).

[5] H. Cartan, Variétés analytiques complexes et cohomologie, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 1953, p. 41-55.

[6] T. Carleman, Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables, *C. R. Acad. Sc.* 197 (1953), p. 471-474.

[7] J. Delsarte, Les fonctions moyenne-périodiques. *Journal Math. pures et appl.*, série 9, t. 14 (1935), p. 403-453.

[8] J. Dieudonné et L. Schwartz, La dualité dans les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{LF}$), *Ann. Inst. Fourier* (1949). p. 61-101.

[8 bis] K. O. Friedrichs, Differentiability of solutions of linear elliptic equations, *Comm. Pures & Appl. Math.* (1953), p. 299-326.

[9] L. Gårding, Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, 1 (1953), p. 55-72.

[10] A. Grothendieck, Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles, *Journal Anal. Math.*, Jérusalem (1952-1953), p. 243-280.

[11] A. Grothendieck, Sur les espaces ($\mathcal{F}$) et (D$\mathcal{F}$), *Summa Brasiliensis Math.*, 3, 6(1954), p. 57-121.

[12] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*

[13] A. Grothendieck, Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, *Ann. Inst. Fourier* (1952), p. 73-112.

[14] F. John, General properties of solutions of linear elliptic partial differentials equations, *Symposium on spectral theory and differentials problems*, Oklahoma (1951), p. 113-175.

[15] J. P. Kahane, Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, *Ann. Inst, Fourier* (1953-1954), p. 39-130.

[15bis] P. D. Lax, On Cauchy problem for hyperbolic équations, and the differentiability of solutions of elliptic equations, *Comm. Pures & Appl. Math.* (1955), p. 615-631.

[16] E. LINDELÖF, Sur les fonctions entières d'ordre entier, *Ann. E. N. S.*, 22 (1905), p. 369-395.

[17] J.-L. LIONS, Supports dans la transformation de Laplace, *Journal Anal. Math.*, Jérusalem (1952-1953), p. 369-380.

[18] J.-L. LIONS et L. SCHWARTZ, Problèmes aux limites sur certains espaces fibrés, *Acta. Math.*, 94 (1955), p. 155-159.

[19] B. MALGRANGE, Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. Solution élémentaire, *C. R. Acad. Sc.*, 237 (1953), p. 1620-1622.

[20] B. MALGRANGE, Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. 2 : Equations avec second membre, *C. R. Acad. Sc.*, 238 (1954), p. 196-198.

[21] B. MALGRANGE, Sur quelques propriétés des équations de convolution, *C. R. Acad. Sc.*, 238 (1954), p. 2219-2221.

[22] B. MALGRANGE, Formes harmoniques sur des espaces de Riemann à ds^2 analytique, *C. R. Acad.Sc.*, 240 (1955), p. 1958-1960.

[23] H. MUGGLI, Differentialgleichungen unendlichhöher Ordnung mit konstanten Koeffizienten, *Comm. math. Helvetici*, 11 (1938-1939), p. 151-179.

[24] I. G. PETROWSKY, Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles, *Mat. Sbornik*, 5 (1938), p. 3-68.

[25] G. de RHAM, Variétés différentiables, Hermann, Paris 1955.

[26] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, t. 1 et 2, Hermann, Paris 1950-1951.

[27] L. SCHWARTZ, Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques, *Ann. of. Math.*, 48 (1947), p. 857-929.

[28] L. SCHWARTZ, Séminaire 1953-1954 (polycopié).

[29] L. SCHWARTZ, Séminaire 1954-1955 (polycopié).

[30] L. SCHWARTZ, Homomorphismes et applications complètement continues, *C. R. Acad. Sc.*, 236 (1953), p. 2472-2473.

L. SCHWARTZ et J. DIEUDONNÉ, Voir J. Dieudonné et L. Schwartz.

L. SCHWARTZ et J. L. LIONS, Voir J. L. Lions et L. Schwartz.

[31] J. P. SERRE, Un théorème de dualité, *Comm. Math. Helvet.*, 29 (1955), p. 9-26.

K. STEIN und H. BEHNKE, Voir H. Behnke und K. Stein.

[32] G. VALIRON, Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants, *Ann. E. N. S.*, 46 (1929), p. 25-53.

[33] I. N. VEKOUA, Sistemy differentsial'nykh ouravnenii, *Mat. Sbornik*, 31 (73) (1952), p. 217-314.

[34] A. WEIL, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris 1940.

[35] Contributions to the theory of partial differential equations, Princeton 1954.

[36] L. EHRENPREIS, Solution of some problems of division I, *Amer. Journal of Math.*, 76 (1954), p. 883-903.

[37] L. EHRENPREIS, Solution of some problems of division II, *Amer. Journal of Math.*, 77 (1955), p. 286-292.

[38] L. Ehrenpreis, Mean periodic functions I, *Amer. Journal of Math.*, 77 (1955), p. 293-327.

[39] L. Ehrenpreis, The division problem for distribution, *Proc. Nat. Acad Sc.* 41-10 (1955), p. 756-758.

[40] L. Ehrenpreis, Completely inversible operators, *Proc. Nat. Acad. Sc.* 41-11 (1955), p. 945-946.

[41] L. Hörmander. On the theory of general partial differential operators, *Acta. Math.*, 94 (1955) p. 160-248.

TABLE DES MATIÈRES