ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SERGE DUBUC

Critères de convexité et inégalités intégrales

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 1 (1977), p. 135-165
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_1_135_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27,1 (1977), 135-165

CRITÈRES DE CONVEXITÉ ET INÉGALITÉS INTÉGRALES

par Serge DUBUC

1. Introduction.

C. Borell [3] a dégagé une classe très générale d'inégalités intégrales dans $\mathbf{R}^n$. Ces inégalités généralisent les inégalités de Brunn-Minkowski et de Lusternik. Elles permettent d'obtenir facilement des résultats dus à Zalgaller, à Leindler et à Prékopa. Nous nous proposons de considérer les inégalités de Borell et de nous demander quand ces inégalités sont des égalités. Le principal théorème dans cette ligne sera celui-ci.

THEOREME B_n. – *Soient $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ trois fonctions non-négatives intégrables au sens de Lebesque sur $\mathbf{R}^n$; on suppose de plus que*

$$\int f(x)\, dx = \int g(y)\, dy = 1$$

et que l'ensemble

$$\{(x\,,y) : (h(x+y))^{-1/n} > (f(x))^{-1/n} + (g(y))^{-1/n}\}$$

est de mesure nulle dans $\mathbf{R}^{2n}$, alors

$$\int h(z)\, dz \geqslant 1.$$

L'intégrale de $h(x)$ ne peut être égale à un que s'il existe une fonction convexe $\phi : \mathbf{R}^n \to (0\,,\infty]$ et une homothétie de $\mathbf{R}^n$, $x \to mx + b$, ($m \in (0\,,\infty)$, $b \in \mathbf{R}^n$) telles que $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ sont respectivement égales presque partout à $(\phi(x))^{-n}$, $m^n(\phi(mx+b))^{-n}$ et $(m+1)^n$ $(\phi((m+1)x+b))^{-n}$.

A l'inégalité $\int h(z)\,dz \geqslant 1$, nous donnerons le nom d'inégalité fondamentale de Borell pour $\mathbf{R}^n$. La démonstration de Borell de celle-ci ne permet pas de traiter du cas de l'égalité. Nous avancerons une démonstration de l'inégalité qui permettra d'analyser ce cas de l'égalité. Pour mener à bien cette analyse, il nous a paru utile de nous appuyer sur des résultats de convexité. Le point central de ce développement sera le critère suivant de convexité. Soient p et q deux nombres positifs dont la somme est un et soit h une fonction réelle définie sur un convexe C de $\mathbf{R}^n$ d'intérieur non vide ; on suppose que h est mesurable pour la tribu de Lebesgue et que

$$\{(x\,,y) : x \in C, y \in C, h(px+qy) + h(py+qx) < h(x) + h(y)\}$$

est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^{2n}$; alors h est égale presque partout sur C à une fonction concave. Dans la deuxième section, nous parlerons de modifications d'inégalités valides presque partout ; la troisième section portera sur des propriétés de convexité ; dans la quatrième et la cinquième section, nous établirons l'inégalité fondamentale de Borell et nous traiterons des inégalités générales de Borell. Nous déterminerons les conditions précises où les inégalités sont des égalités.

2. Modifications d'inégalités valides presque partout.

Nous devons voir comment dans certains cas, on peut modifier légèrement certaines fonctions pour que certaines inégalités valides presque partout deviennent des inégalités valides partout. Nous précisons que lorsque nous parlerons d'ensembles ou de fonctions mesurables sur $\mathbf{R}^n$, il s'agira toujours de mesurabilité par rapport à la tribu de Lebesgue de $\mathbf{R}^n$. Nous rappellons la définition de densité inférieure d'un ensemble mesurable de $\mathbf{R}^n$ telle que donnée par exemple par M.E. Munroe [12]. Si A appartient à la tribu de Lebesgue de $\mathbf{R}^n$, on désignera par $|A|$ la mesure de Lebesgue de A. On dira que P est un *pavé* de $\mathbf{R}^n$ si P est le produit cartésien de n intervalles compacts de longueur positive. Si A est une partie mesurable de $\mathbf{R}^n$, la densité inférieure de A au point x, notée $d_*(x\,;A)$, est l'infimum de la collection de nombres

$$\liminf_{k\to\infty} |A \cap P_k| / |P_k| \qquad \text{où} \qquad \{P_k\}$$

parcourt les suites de pavés contenant x de diamètre convergeant vers zéro. Nous désignerons par

$$A_* = \{x \in \mathbf{R}^n : d_*(x\,;A) = 1\}.$$

Il est établi que A_* est mesurable et diffère de A par un ensemble de mesure nulle. Rappelons que la somme de Minkowski $A + B$ de deux parties A et B de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble de vecteurs $a + b$ où a parcourt A et b parcourt B.

THEOREME 1. – *Soient* A, B *et* C *trois parties mesurables de* $\mathbf{R}^n$ *telles que la mesure dans* $\mathbf{R}^{2n}$ *de* $\{(x\,,y) : x \in A, y \in B, x + y \notin C\}$ *est nulle ; alors la somme de Minkowski de* A_* *avec* B_* *est un ouvert contenu dans* C_* *ainsi que dans* $A + B$, *la somme de Minkowski de* A *avec* B.

Démonstration. – Désignons par $1_A(x)$, $1_B(y)$ et $1_C(z)$ les fonctions indicatrices des ensembles A, B et C. Si $a \in A_*$ et $b \in B_*$, on veut d'abord montrer que $c = a + b \in C_*$. Soit $k \in (0\,,1)$, il existe alors un nombre δ tel que si P est un pavé de diamètre inférieur à δ recouvrant l'origine de $\mathbf{R}^n$, alors

$$\int_{a+P} 1_A(x)\,dx > k\,|P|$$

et

$$\int_{b+P} 1_B(y)\,dy > k\,|P|.$$

Soit Q un pavé de diamètre inférieur à δ recouvrant l'origine,

$$\int_{c+Q} 1_C(z)\,dz = \int_{a+Q}\int_{c-x+Q} 1_C(x+y)\,dy\,dx/|Q|.$$

Puisque $1_C(x+y) \geqslant 1_A(x)\,1_B(y)$ presque partout en $(x\,,y)$,

$$\begin{aligned}\int_{c+Q} 1_C(z)\,dz &\geqslant \int_{a+Q}\int_{c-x+Q} 1_A(x)\,1_B(y)\,dy\,dx/|Q|\\ &\geqslant k\int_{a+Q} 1_A(x)\,ds \geqslant k^2|Q|.\end{aligned}$$

Ceci montre que $d_*(c\,,C) = 1$.

Pour montrer que $A_* + B_*$ est un ouvert contenu dans $A + B$, montrons que

$$D = \{z : |(z - A) \cap B| > 0\} = A_* + B_*$$

et que D est un ouvert. Si $a \in A_*$ et $b \in B_*$, montrons d'abord que $c = a + b$ appartient à D. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a = b = c = 0$. Soit P un pavé recouvrant l'origine tel que

$$|A \cap -P| > \frac{1}{2}|P| \qquad \text{et} \qquad |B \cap P| > \frac{1}{2}|P|.$$

Alors

$$|(-A) \cap B| \geqslant |-(A \cap -P) \cap |B \cap P||$$

$$|(-A) \cap B| \geqslant |A \cap -P| + |B \cap P| - |(-A \cap P) \cup (B \cap P)|$$

$$> \frac{1}{2}|P| + \frac{1}{2}|P| - |P| = 0.$$

Montrons maintenant que $D \subseteq A_* + B_*$. Si $z \in D$, posons $E = C B \cap z - A)$. Il existe un u de $\mathbf{R}^n$ tel que $d_*(u\,; E) = 1$; ce qui montre que

$$d_*(u\,; B) = d_*(u\,; z - A) = 1$$

et ainsi $u \in B_*$ et $z - u \in A_*$. Puisque $z = u + (z - u)$, on a que $z \in A_* + B_*$. Montrons enfin que D est un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Si z_0 appartient à D, on peut trouver un compact K tel que

$$K \subseteq (z_0 - A) \cap B \qquad \text{et} \qquad |K| > 0,\ z_0 - K \subseteq A \qquad \text{et} \qquad K \subseteq B$$

et ainsi $|(z - A) \cap B| \geqslant |(z - z_0 + K) \cap K|$. Or la fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, $w \to |(w + K) \cap K|$, est continue et est positive en $w = 0$; ainsi on peut trouver un voisinage V de z_0 tel que $z \in D$ si $z \in V$. La démonstration est terminée.

Kurepa [8] et Kemperman [6] ont eu des préoccupations voisines à celles du théorème 1 lorsqu'ils se sont intéressés à l'équation fonctionnelle de Cauchy.

Le théorème 1 admet une interprétation fonctionnelle par le biais d'endographes. Un *endographe* de $\mathbf{R}^n$ est une partie A de $\mathbf{R}^{n+1}$ telle que si $(x, t) \in A$ alors que $x \in \mathbf{R}^n$ et $t \in \mathbf{R}$, alors $(x, u) \in A$ pour tous les u inférieurs à t. Une fonction numérique $f : \mathbf{R}^n \to [-\infty, \infty]$ permet de définir l'endographe

$$\{(x, t) : t \leqslant f(x)\}.$$

Si f est une fonction mesurable, l'endographe A qui lui est associé est mesurable. Les points de densité, A_*, donnent un endographe et permettent de définir une seconde fonction mesurable.

$$f_*(x) = \sup \{t : (x, t) \in A_*\}.$$

On sait que $\{x : f_*(x) \neq f(x)\}$ est un ensemble de mesure nulle. Rappelons aussi une autre définition que l'on rencontre principalement en analyse convexe (voir Moreau [11] par exemple). Soit $f(x)$ et $g(y)$ deux fonctions numériques de $\mathbf{R}^n$ dans $[-\infty, \infty]$, la sup-convolution de f avec g est la fonction $(f \Delta g)$ où

$$f \Delta g (z) = \sup \{f(x) \dot{+} g(y) : x + y = z\}$$

avec la convention que $t \dot{+} u = t + u$ si t et u sont deux nombres réels, $(-\infty) \dot{+} t = t \dot{+} (-\infty) = -\infty$ pour tout t et

$$\infty \dot{+} t = t \dot{+} \infty = \infty \qquad \text{si} \qquad t \neq -\infty.$$

THEOREME 1 bis. – *Soit $f(x)$, $g(y)$ et $h(z)$ trois fonctions mesurables sur $\mathbf{R}^n$ telles que la mesure dans $\mathbf{R}^{2n}$ de*

$$\{(x, y) : h(x + y) < f(x) \dot{+} g(y)\}$$

est nulle ; alors la sup-convolution de f_* avec g_* est une fonction semi-continue inférieurement qui minore la fonction h_*. De plus $f_* \Delta g_* \leqslant f \Delta g$.

3. Propriétés de convexité.

Commençons par un rappel de terminologie pour éviter toute confusion. Une fonction f définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $[-\infty, \infty]$ est dite concave si $\mathcal{D}$ est une partie convexe de $\mathbf{R}^n$ et si pour tout couple de points x et y de $\mathcal{D}$ et pour tout nombre t de $(0, 1)$.

$$f((1 - t)x + ty) \geqslant (1 - t) f(x) \dot{+} t f(y).$$

On peut toujours supposer que f est définie sur tout $\mathbf{R}^n$ quitte à poser $\bar{f}(x) = -\infty$ lorsque $x \notin \mathcal{D}$ et $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in \mathcal{D}$; $\bar{f}$ devient un prolongement de f et ce prolongement est concave. Nous recherchons des conditions sur une fonction f pour qu'elle soit égale presque partout à une fonction concave.

THEOREME 2. – *Soit* E *un espace vectoriel topologique sur* **R**, *soient* p *et* q *deux nombres réels positifs dont la somme est un et soit* Ω *un ouvert de* E *tel que* $p\Omega + q\,\Omega \subseteq \Omega$; *alors* Ω *est une partie convexe de* E.

Démonstration. – Considérons d'abord le cas où $E = \mathbf{R}$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une partie ouverte Ω de **R** tel que $p\Omega + q\Omega = \Omega$ alors que Ω ne serait pas un intervalle. Quitte à considérer l'intersection de Ω avec un intervalle ouvert fini suffisamment grand, on peut supposer que l'ouvert Ω est borné. On peut maintenant choisir deux composantes connexes distinctes I et J de l'ouvert Ω telles que toutes les autres composantes connexes de Ω situées entre I et J sont de longueur inférieure à chacune des longueurs de I et J. Or la

$$|pI + qJ| \geqslant \min |I|, |J| \qquad \text{et} \qquad pI + pJ \subseteq \Omega,$$

d'où $pI + qJ \supseteq I$ ou $pI + qJ \supseteq J$, ce qui est impossible.

Revenons au cas d'un espace vectoriel topologique arbitraire E. Si x et y sont deux points distincts de Ω, si Δ est la droite déterminée par ces deux points, $\Delta \cap \Omega$ est un ouvert de la droite Δ, c'est donc un intervalle de Δ, ce qui montre que le segment déterminé par x et y est situé dans Ω.

THEOREME 3. – *Soient* p *et* q *deux nombres positifs dont la somme est un, soit* K *une partie mesurable de* $\mathbf{R}^n$ *telle que la mesure de* $\{(x, y) : x \in K,\ y \in K \text{ et } px + qy \notin K\}$ *est nulle ; alors* K *diffère par un ensemble de mesure nulle d'un ouvert convexe de* $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. – Utilisons le théorème 1 avec $A = pK$, $B = qK$ et $C = K$. D'où $pK_* + qK_*$ est un ouvert contenu dans K_*. Comme $pK_* + qK_* \supset K_*$. K_* est donc un ouvert. Le théorème 2 nous assure que K_* est un ouvert convexe. On sait déjà que K_* diffère de K par un ensemble de mesure nulle.

THEOREME 3 bis. – *Soient* p *et* q *deux nombres positifs dont la somme est un, soit* f *une fonction mesurable de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $[-\infty, \infty]$ *telle que*

$$|\{x : f(x) \neq \pm \infty\}| > 0,$$

supposons que la mesure dans R^{2n} *de*

$$\{(x , y) : f(px + qy) < pf(x) + qf(y)\}$$

est nulle ; alors $\Omega = \{x : f_*(x) > -\infty\}$ *est un ouvert convexe, non vide de* R^n *et* f_* *est une fonction concave continue sur* Ω. *Autrement dit, quitte à modifier f à peu près nulle part, f est une fonction concave.*

Démonstration. — Si C est l'endographe associé à la fonction f, C_* est un ouvert convexe non vide de R^{n+1}. $\Omega = \{x : f_*(x) > -\infty\}$ est la projection sur R^n de C_*, il s'agit donc d'un ouvert convexe. Il existe un x_0 de Ω tel que $f_*(x_0) < \infty$. Puisque $(x_0, f_*(x_0)) \not\subset \mathrm{C}_*$, il existe une fonction linéaire sur R^n, $\mathrm{L}(x)$ et un nombre α, tels que pour tout (x , t) de C_*

$$\mathrm{L}(x) + \alpha t > \mathrm{L}(x_0) + \alpha f_*(x_0).$$

Puisqu'il existe un x_1 de Ω tel que $\mathrm{L}(x_1) < \mathrm{L}(x_0)$, on ne peut pas avoir $\alpha = 0$. D'autre part $(x_0, f_*(x_0) - 1) \in \mathrm{C}_*$; d'où $\alpha > 0$. D'où $f_*(x) \leqslant \mathrm{L}(x)/\alpha$ pour tout x de Ω. f_* est donc une fonction concave définie sur Ω.

M. Kuczma [7] a démontré en 1970 le cas du théorème 3 bis où $p = q = \dfrac{1}{2}$ et $n = 1$. Avant d'aborder un autre critère de convexité ou de concavité, il nous faut étudier une propriété de semi-continuité des fonctions mesurables. Si $x \in \mathrm{R}^n$ et si $r > 0$, $\mathrm{Q}_r(x)$ désignera le cube centré au point x dont toutes les arêtes sont parallèles aux axes et sont de longueur égale à r. Si f est une fonction mesurable de R^n dans $[-\infty , \infty]$, nous désignerons par $\mathrm{CI}(f ; \epsilon)$ et par $\mathrm{CS}(f ; \epsilon)$ les deux parties suivantes de R^n :

$$\{x : f(x) \neq \pm \infty, \lim_{r \downarrow 0} |\{y : f(y) < f(x) - \epsilon, y \in \mathrm{Q}_r(x)\}| r^{-n} = 0\}$$

$$\{x : f(x) \neq \pm \infty, \lim_{r \downarrow 0} |\{y : f(y) > f(x) + \epsilon, y \in \mathrm{Q}_r(x)\}| r^{-n} = 0\}.$$

LEMME 4. — *Soit f une fonction mesurable de* R^n *dans* $[-\infty , \infty]$; *alors pour tout* $\epsilon > 0$, $\mathrm{CI}(f ; \epsilon)$ *et* $\mathrm{CS}(f ; \epsilon)$ *diffèrent chacun par un ensemble de mesure nulle de* $\{x : f(x) \neq \pm \infty\}$.

Démonstration. – Soit A l'endographe de f :

$$A = \{(x\,,\,t)\,:\,t \leqslant f(x)\},$$

considérons un x tel que $f_*(x) = f(x) \neq \pm\infty$; pour tout $\epsilon > 0$, $\left(x\,,f_*(x) - \frac{\epsilon}{4}\right)$ est un point de densité de A. Si $\theta > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout pavé P de diamètre δ recouvrant $\left(x\,,\,f_*(x) - \frac{\epsilon}{4}\right)$ on a que

$$|\{(y\,,\,t)\,:\,(y\,,\,t) \in \mathrm{P}, f(y) \geqslant t\}| \geqslant (1-\theta)\,|\mathrm{P}|.$$

On peut supposer que $\delta < \frac{\epsilon}{4}$. A fortiori, on aura que pour tout $r \in (0\,,\,\delta)$,

$$|\{(y\,,\,t)\,:\,y \in \mathrm{Q}_r(x), f(y) \geqslant f_*(x) - \epsilon, \frac{\epsilon}{2} < f_*(x) - t < \epsilon\}|$$
$$\geqslant (1-\theta)\,r^n\,\epsilon/2.$$

Ceci suffit pour montrer que CI $(f\,;\,\epsilon)$ diffère de $\{x : f(x) \neq \pm\infty\}$ par un ensemble de mesure nulle. Un raisonnement analogue établit la même propriété pour CS $(f\,;\,\epsilon)$.

THEOREME 5. – *Soient p et q deux nombres positifs dont la somme est un, si $h : \mathbf{R}^n \to [-\infty\,,\,\infty]$ alors que la mesure dans $\mathbf{R}^{2n}$ de*

$$\{(x\,,\,y)\,:\,h(px+qy) \dot{+} h(py+qx) < h(x) \dot{+} h(x)\}$$

est nulle, alors h est égale presque partout à une fonction concave.

Démonstration. – Soit $\mathrm{C} = \{x : h(x) > -\infty]$, le thórème 3 donne que C diffère d'un convexe par un ensemble de mesure nulle. Si $h(x) = \pm\infty$ presque partout sur $\mathbf{R}^n$, on aura que $h(x) = \pm\infty$ presque partout sur C. Pour la suite, on peut donc supposer que la mesure de $\{x : h(x) \neq \pm\infty\}$ n'est pas nulle. Le cas $p = q = \frac{1}{2}$ est déjà considéré par le théorème 3 bis. Traitons maintenant du cas $\frac{1}{2} < p < 1$. Nous allons montrer que la mesure de

$$\left\{ (x, y) : 2h\left(\frac{x+y}{2}\right) < h(x) + h(y) \right\}$$

est nulle. Utilisons les ensembles CI $(h ; \epsilon)$ et CS $(f ; \epsilon)$ tels que définis précédemment pour $\epsilon > 0$. Pour $x \in$ CI $(h ; \epsilon)$, $y \in$ CI $(h ; \epsilon)$ et

$$z = \frac{x+y}{2} \in \mathrm{CS}\,(h ; \epsilon),$$

nous allons voir que $h(x) + h(y) \leqslant 2h(z) + 4\epsilon$. Posons

$$\rho = 2p - 1, p_k = \frac{1}{2} + \rho^k,$$

$q_k = \frac{1}{2} - \rho^k$, $z_k = p_k x + q_k y$. Pour $\delta > 0$, on pose

$$\mathrm{A}_\delta = \{x' \in \mathrm{Q}_\delta(x) : h(x') \geqslant h(x) - \epsilon\}$$

$$\mathrm{B}_\delta = \{y' \in \mathrm{Q}_\delta(y) : h(y') \geqslant h(y) - \epsilon\}$$

$$\mathrm{H}_\delta = \{z' \in \mathrm{Q}_\delta(z) : h(z') \leqslant h(z) + \epsilon\}.$$

Nous cherchons une majoration pour les quantités

$$\mu_k(\delta) = |\{(x', y') : x' \in \mathrm{A}, y' \in \mathrm{B}, h(p_k x' + q_k y') > h(z) + \epsilon\}|.$$

Or la mesure des points de $\mathrm{Q}_\delta(z)$ qui n'appartiennent pas à $\mathrm{Q}_\delta(z_k)$, $|\mathrm{Q}_\delta(z) \cap \mathrm{Q}'_\delta(z_k)|$ ne dépasse pas $\frac{1}{2}\mathrm{B}\,\delta^{n-1}\rho^k$ où

$$\mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

lorsque $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Si

$$\mathrm{H}_{\delta,k} = \mathrm{H}_\delta \cap \mathrm{Q}_\delta(z_k),$$

$$|\mathrm{H}_{\delta,k}| \geqslant |\mathrm{H}_\delta| - |\mathrm{Q}_\delta(z) \cap \mathrm{Q}'_\delta(z_k)|$$

$$|\mathrm{H}_{\delta,k}| \geqslant |\mathrm{H}_\delta| - \frac{1}{2}\mathrm{B}\,\delta^{n-1}\rho^k.$$

D'autre part

$$| \{(x', y') : p_k x' + q_k y' \notin H_\delta, x' \in Q_\delta(x), y' \in Q_\delta(y)\} |$$
$$\leqslant | Q_\delta(z_k) \cap H'_{\delta,k} | \, 2^n \delta^n,$$

car l'application $(x', y') \to (p_k x' + q_k y', x' - y')$ conserve la mesure de Lebesque de $\mathbf{R}^n$ et envoie $Q_\delta(x) \times Q_\delta(y)$ dans le pavé

$$Q_\delta(z_k) \times Q_{2\delta}(x-y).$$

D'où

$$\mu_k(\delta) \leqslant 2^n \delta^n \left(\delta^n - | H_\delta | + \frac{1}{2} B \, \delta^{n-1} \rho^k\right).$$

Si l'on choisit δ suffisamment petit, on aura que

$$| A_\delta | \geqslant \frac{3}{4} \delta^n, \ | B_\delta | \geqslant \frac{3}{4} \delta^n$$

et

$$2^n (\delta^n - | H_\delta |) \leqslant \frac{1}{8} \delta^n.$$

En choisissant k suffisamment grand ($k \geqslant N_\delta$), on aura que

$$2^n \delta^{-1} \rho^k B \leqslant \frac{1}{8}.$$

D'où si $k \geqslant N_\delta$ alors que δ est suffisamment petit, $\mu_k(\delta) \leqslant \delta^{2n}/4$. Un raisonnement semblable donne que la mesure de

$$\{(x', y') : x' \in A_\delta, y' \in B_\delta, h(p_k y' + q_k x') > h(z) + \epsilon\}$$

est inférieure à $\delta^{2n}/4$.

Remarquons maintenant que pour presque tous les x' et y' de $\mathbf{R}^n$, la suite

$$h(p_k x' + q_k y') + h(p_k y' + q_k x')$$

est non-décroissante. D'où il existe un $x' \in A_\delta$ et un $y' \in B_\delta$ et un entier k tels que

$$h(x') \geqslant h(x) - \epsilon, \ h(y') \geqslant h(y) - \epsilon$$

$$h(p_k x' + q_k y') \leqslant h(z) + \epsilon, \ h(p_k y' + q_k x') \leqslant h(z) + \epsilon$$

et

$$h(x') + h(y') \leqslant h(p_k x' + q_k y') + \mathrm{h}(p_k y' + q_k x').$$

Ainsi

$$h(x) + h(y) \leqslant 2h(z) + \epsilon.$$

$$\bigcap_{\epsilon>0} \mathrm{CI}(h\,;\epsilon) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{\epsilon>0} \mathrm{CS}(h\,;\epsilon)$$

diffèrent par des ensembles de mesure nulle de $\{x : h(x) \neq \pm\infty\}$.

$$\left\{ (x\,,y) : h\ (x) + h(y) > 2h\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\}$$

est donc de mesure nulle. Le théorème 3 bis donne que h est égale presque partout à une fonction concave.

C.Q.F.D.

THEOREME 6. — *Soient p et q deux nombres positifs dont la somme est un, soient* A *et* B *deux parties mesurables de* $\mathbf{R}^n$ *telles que la mesure de*

$$\{(x\,,y) : x \in \mathrm{A}, y \in \mathrm{B} \quad \text{et} \quad px + qy \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\}$$

est nulle ; alors A *et* B *diffèrent par des ensembles de mesure nulle d'un même ouvert convexe de* $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. — Par le théorème 1, on a que

$$p\mathrm{A}_* + q\mathrm{B}_* \subseteq \mathrm{A}_* \cap \mathrm{B}_*.$$

Posons

$$\Omega = \mathrm{A}_* \cap \mathrm{B}_*. \qquad \text{On a que} \qquad p\Omega + q\,\Omega = \Omega.$$

Il est facile de vérifier que $\Omega_* = \Omega$. Une seconde utilisation du théorème 1 donne que $p\Omega + q\,\Omega = \Omega$ est un ouvert. Le théorème 2 donne qu'Ω est convexe. Montrons maintenant que $\mathrm{A}_* \subset \overline{\Omega}$ par une réduction à l'absurde. Si $x_0 \in \mathrm{A}_*$ alors que $x_0 \notin \overline{\Omega}$, il existe une fonction affine $\mathrm{L}(x)$ telle que $\mathrm{L}(x_0) = 1$ et $\sup\{\mathrm{L}(w) : w \in \Omega\} = 0$. Soit un w_0 de Ω tel que $\mathrm{L}(w_0) > -p/q$. D'où $\mathrm{L}(px_0 + q\,w_0) > 0$, $x_0 \in \mathrm{A}_*$ et $w_0 \in \mathrm{B}_*$ et $px_0 + qw_0 \notin \Omega$, ce qui est contradictoire. A diffère donc de l'ensemble Ω par un ensemble de mesure nulle. Il en est de même pour B.

THEOREME 7. — *Soient p et q deux nombres positifs dont la somme est un et soient f et g deux fonctions mesurables de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $[-\infty, \infty]$ *telles que*

$$\{x : f(x) \neq \pm\infty \quad \text{et} \quad g(x) \neq \pm\infty\}$$

n'est pas de mesure nulle et telles que

$$\{(x, y) : f(x) \dot{+} g(y) > f(px + qy) \dot{+} g(px + qy)\}$$

est de mesure nulle dans $\mathbf{R}^{2n}$*, alors il existe un ouvert convexe non vide Ω de* $\mathbf{R}^n$*, une fonction concave partout finie $\phi : \Omega \to \mathbf{R}$ et une constante b tels que*

a) *presque partout hors de Ω, $f(x)$ et $g(x)$ valent $-\infty$,*

b) *presque partout sur Ω, $f(x) = \phi(x)$ et $g(x) = \dfrac{q}{p}\phi(x) + b$.*

Démonstration. — Posons

$$\text{et} \quad \begin{cases} A = \{x : f(x) \neq -\infty\} \\ B = \{y : g(y) \neq -\infty\} \end{cases}$$

Vu le théorème 6, A et B diffèrent par des ensembles de mesure nulle d'un ouvert convexe Ω. Posons $h(x) = f(x) \dot{+} g(x)$. Presque partout dans $\mathbf{R}^{2n}$, on a

$$f(x) \dot{+} g(y) \leqslant f(px + qy) \dot{+} g(px + qy)$$

$$f(y) \dot{+} g(x) \leqslant f(py + qx) \dot{+} g(py + qx).$$

Par addition de ces inégalités, on a

$$h(x) \dot{+} h(y) \leqslant h(px + qy) \dot{+} h(py + qx).$$

$h(x)$ est donc égale presque partout à une fonction concave par le théorème 5. L'hypothèse que la mesure de $\{x : f(x) \neq \infty, g(x) \neq \infty\}$ est différente de 0 entraîne que $\{x : h(x) = \infty\}$ est de mesure nulle. Montrons maintenant que f est égale presque partout à une fonction concave finie sur Ω. Il existe une famille de fonctions linéaires $\{L_x\}_{x \in \Omega}$ telle que presque partout sur $\Omega \times \Omega$

$$h(x) + L_x(y - x) \geqslant h(py + qx) \geqslant f(y) + g(x).$$

D'où presque partout sur $\Omega \times \Omega$

$$f(x) + \mathrm{L}_x (y - x) \geqslant f(y) \qquad \text{car} \qquad h(x) = f(x) + g(x).$$

Si x_1 et x_2 sont deux points de Ω, on aura que presque partout en x_1 et en x_2

$$f\left((x_1 + x_2)/2\right) + \frac{1}{2} \mathrm{L}_{12} (x_2 - x_1) \geqslant f(x_2)$$

$$f\left((x_1 + x_2)/2\right) + \frac{1}{2} \mathrm{L}_{12} (x_1 - x_2) \geqslant f(x_1).$$

Presque partout $f(x_1) + f(x_2) \leqslant 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$. f est donc égale presque partout à une fonction concave finie sur Ω. Il en est de même pour g. Soit $\phi(x)$ et $\psi(x)$ les fonctions concaves associées à $f(x)$ et $g(x)$. On a que

$$\phi(x) + \psi(y) \geqslant \phi(px + qy) + \psi(px + qy).$$

Si $w \in \Omega$, si β est une direction de $\mathbf{R}^n$ telle que la dérivée directionnelle de ϕ et ψ existe au point w selon la direction β, on a que

$$q \mathrm{D}_\beta \phi(w) = p \mathrm{D}_\beta \psi(w) :$$

en effet la fonction $t \to \phi(w + tq\beta) + \psi(w - tp\beta)$ est une fonction qui admet un minimum local en $t = 0$. D'où $q\,\phi(x) - p\,\psi(x)$ est une fonction constante sur Ω.

C.Q.F.D.

Il est bon de donner une interprétation géométrique restreinte au dernier théorème. Si A est l'endographe dans $\mathbf{R}^{n+1}$ d'une fonction partout finie f dont le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est situé dans $\mathbf{R}^n$, si B est l'endographe d'une fonction partout finie g définie sur $\mathcal{D}_g$ et si $p\mathrm{A} + q\mathrm{B}$ est l'endographe de la fonction $pf + qg$ définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, alors f et g sont égales presque partout à des fonctions concaves.

Avant de tirer une conséquence du dernier théorème, nous présentons quelques définitions. Une fonction $\phi : \mathbf{R}^n \to [-\infty, \infty]$ est quasiconcave si pour tout $c \in \mathbf{R}$, $\{x : \phi(x) \geqslant c\}$ est une partie convexe de $\mathbf{R}^n$. On dit que ϕ est quasiconvexe si $-\phi$ est quasiconcave. Nous introduisons la notion de sup-quasiconvolution de deux fonctions ϕ et ψ définies sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans la droite achevée : c'est la fonction dont la valeur au point z est

$$\sup \{\min (\phi(x), \phi(y)) : x + y = z\}.$$

D'autre part, l'inf-quasiconvolution de ϕ avec ψ est

$$\inf \{\max (\phi(x), \psi(y)) : x + y = z\}.$$

Nous dirons que deux fonctions ϕ et ψ, dont les domaines de définition $\mathcal{D}_\phi$ et $\mathcal{D}_\psi$ sont dans $\mathbf{R}^n$, sont semblables s'il existe une homothétie de $\mathbf{R}^n : x \to mx + b$ avec $b \in \mathbf{R}^n$, $m \in (0, \infty)$, qui envoie $\mathcal{D}_\phi$ sur $\mathcal{D}_\psi$ et telle que $\psi(mx + b) = \phi(x)$. Le nombre m est appelé un facteur de similitude. Si ϕ est une fonction quasiconcave, on dira qu'une valeur réelle c est un mode de ϕ si $\phi(c+)$, $\phi(c)$ ou $\phi(c-)$ est égal au sup $\{\phi(x) : x \in \mathbf{R}\}$. Nous désignerons par M_ϕ l'ensemble des modes de la fonction ϕ, il s'agit d'un intervalle de la droite réelle. L'après-mode de ϕ est

$$\{x : x \notin M_\phi \quad \text{et} \quad \exists y \in M_\phi, y < x\}$$

et l'avant-mode de ϕ est $\{x : x \notin M_\phi$ et $\exists y \in M_\phi, x < y\}$.

THEOREME 8. – *Soient* $\phi(x)$ *et* $\psi(x)$ *deux fonctions quasi-concaves définies sur* $\mathbf{R}$, *bornées supérieurement ; on suppose que les modes de* ϕ *et de* ψ *sont compacts et non-vides. Si la sup-quasi-convolution* θ *de* ϕ *avec* ψ *coïncide avec la sup-convolution de* $p\phi$ *avec* $q\psi$ *où* $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$, *alors* ϕ, ψ *et* θ *sont concaves, les suprema de* ϕ, *de* ψ *et de* θ *sont les mêmes,* $M_\theta = M_\phi + M_\psi$, *la fonction* ψ *restreinte à l'après-mode de* ψ *est semblable à la restriction de la fonction* ϕ *à l'après-mode de* ϕ *le facteur de similitude étant* $\dfrac{q}{p}$ *et la fonction* θ *restreinte à l'après-mode de* θ *est semblable à la restriction de la fonction* ϕ *à l'après-mode de* ϕ *le facteur de similitude étant* $1/p$.

Démonstration. – a) Soient S_ϕ, S_ψ et S_θ les suprema sur $\mathbf{R}$ des fonctions, ϕ, ψ, θ. Puisque $\theta(z) = \sup \{\min (\phi(x), \psi(x)) : x + y = z\}$ on a que $S_\theta = \min (S_\phi, S_\psi)$. D'autre part

$$\theta(z) = \sup \{p\phi(x) + q\psi(y) : x + y = z\}$$

d'où $S_\theta = pS_\phi + qS_\psi$. Ainsi $S_\phi = S_\psi = S_\theta$, c'est-à-dire que les suprema de ϕ, ψ et de θ sont les mêmes, que nous noterons par S.

b) Montrons que $M_\theta = M_\phi + M_\psi$. Si $x \in M_\phi$, $y \in M_\psi$, soit $z = x + y$, $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$ sont donnés, on peut trouver un x' et y' tels que

$$|x' - x| < \delta, \ |y' - y| < \delta, \ \phi(x') > S - \epsilon, \ \psi(y') > S - \epsilon \ ;$$

d'où $\theta(x' + y') > S - \epsilon$ et ainsi $z \in M_\theta$; c'est-à-dire que

$$M_\phi + M_\psi \subseteq M_\theta .$$

Maintenant si $z \in M_\theta$, il existe une suite z_n qui converge vers z et telle que $\theta(z_n)$ converge vers S ; d'où il existe deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ telles que $z_n = x_n + y_n$, $\phi(x_n)$ et $\psi(y_n)$ convergent vers S : les suites $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ étant bornées, il existe un point d accumulation (x, y) à la suite $\{x_n, y_n\}$; d'où $z = x + y$ alors que $x \in M_\phi$ et $y \in M_\psi$. Nous avons donc vérifié que $M_\theta = M_\phi + M_\psi$.

c) Pour $t \in (-\infty, S)$ désignons par $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ respectivement les intervalles $\{x : \phi(x) > t\}$, $\{y : \psi(y) > t\}$ et $\{z : \theta(z) > t\}$. On a que $C(t) = A(t) + B(t)$. Désignons par $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$ les extrémités droites des intervalles $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$. D'où

$$h(t) = f(t) + g(t).$$

Soient u et v deux nombres inférieurs à S, on peut trouver deux nombres x et y tels que $\phi(x) > u$, $\psi(y) > v$.

$$\begin{aligned} \theta(x + y) &= \sup \{p\,\phi(x') + q\,\psi(y') : x' + y' = x + y\} \\ &> pu + qv. \end{aligned}$$

D'où $x \leqslant f(u)$, $y \leqslant g(v)$ et $x + y \leqslant h(pu + qv)$. Faisons tendre x vers $f(u)$ et y vers $g(v)$, on aura que $f(u) + g(v) \leqslant h(pu + qv)$ ou $f(u) + g(v) \leqslant f(pu + qv) + g(pu + gv)$. On aura alors que

$$f(t) \neq \infty \qquad \text{et} \qquad g(t) \neq \infty$$

si t est suffisamment voisin de S. Remarquons aussi que $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions non-décroissantes bornées inférieurement.

Le théorème 7 montre que $g(t) = \dfrac{q}{p} f(t) + b$. Posons

$$\alpha = f(S -), \ \beta = \lim_{t \to -\infty} f(t). \ \gamma = g(S -), \ \delta = \lim_{t \to -\infty} g(t).$$

Comme l'extrémité droite du mode de ϕ est l'extrémité droite de $\bigcap_{t<S} A(t)$, α est l'extrémité du mode de ϕ. L'application $x \to \frac{q}{p}x + b$ envoie l'intervalle (α, β) sur (γ, δ) et l'on a

$$\psi\left(\frac{q}{p}\ x + b\right) = \phi(x) \qquad \text{si} \qquad x \in (\alpha, \beta).$$

On montre aisément que $\phi(\beta+) = \psi(\delta+) = -\infty$. D'autre part, si $\alpha \neq \beta$, $\phi(\alpha+)$ ne saurait être inférieur à S, car ceci entraînerait que $f(t)$ vaudrait α sur un intervalle $(S - \delta, S)$, ce qui donnerait que $\beta = \alpha$. Enfin $h(t) = f(t) + g(t) = \left(\frac{q}{p} + 1\right) f(t) + b$ et ainsi la restriction de θ à l'après-mode de θ est semblable à ψ selon le facteur $1/p$.

4. Inégalité fondamentale de Borell sur R.

Nous allons démontrer l'inégalité fondamentale de Borell pour un triplet de fonctions intégrables sur **R** et nous traiterons du cas de l'égalité grâce au théorème 8.

THEOREME 9. – *Soient $\phi(x)$, $\psi(x)$ et $\theta(x)$ trois fonctions non-négatives intégrables sur* **R** *telles que la mesure plane de*

$$\{(x, y) : \theta(x+y) < \min(\phi(x), \psi(y))\}$$

est nulle et que le supremum essentiel de ϕ coïncide avec le supremum essentiel de ψ, alors $\int \theta(z)\, dz \geqslant \int \phi(x)\, dx + \int \psi(y)\, dy$. L'égalité entre les deux membres ne peut être réalisée que si ϕ_* et ψ_* sont quasiconcaves et si θ_* est la sup-quasiconvolution de ϕ_* avec ψ_*.

Démonstration. – Pour $t > 0$, posons

$$A(t) = \{x : \phi(x) \geqslant t\},\ B(t) = \{x : \psi(t) \geqslant t\}$$

et $C(t) = \{x : \theta(x) \geqslant t\}$ et désignons par $F(t)$, $G(t)$ et $H(t)$ les mesures de Lebesgue respectives de $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$. On a que

$$\int \phi(x)\, dx = \int_0^a F(t)\, dt, \int \psi(x)\, dx = \int_0^a G(t)\, dt \text{ et}$$

$$\int \theta(x)\, dx \geqslant \int_0^a H(t)\, dt$$

où a est le supremum essentiel de ϕ. Le théorème 1 nous assure que $A_*(t) + B_*(t) \subseteq C_*(t)$. L'inégalité de Lusternik [10] pour la somme de Minkowski de deux parties de **R** donne que

$$F(t) + G(t) \leqslant H(t).$$

D'où l'inégalité $\int \theta(z)\, dz \geqslant \int \phi(x)\, dx + \int \psi(y)\, dy$.

On aura l'égalité entre les deux membres que si

$$H(t) = F(t) + G(t)$$

pour tout $t > 0$. Lusternik [10] (Henstock et Macbeath [5] sont plus explicites dans la justification du raisonnement de Lusternik) a montré que $H(t) = F(t) + G(t)$ que si $A_*(t)$ et $B_*(t)$ sont des intervalles et si $C_*(t) = A_*(t) + B_*(t)$. ϕ_* et ψ_* sont des fonctions quasiconcaves et θ_* est la sup-quasiconvolution de ϕ_* avec ψ_*.

C.Q.F.D.

THEOREME B_1^+. – *Soient $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ trois fonctions non-négatives mesurables définies sur* **R**, *on suppose que f et g appartiennent à $L_1 \cap L_\infty$, $\|f\|_\infty > 0$, $\|g\|_\infty > 0$ et que la mesure plane de*

$$\{(x, y) : (h(x+y))^{-1} > (f(x))^{-1} + (g(y))^{-1}\}$$

est nulle, alors

$$\int h(z)\, dz \geqslant p \int f(x)\, dx + q \int g(y)\, dy$$

où $p = \|g\|_\infty / (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)$ et $q = 1 - p$. Si l'égalité entre les deux membres a lieu, alors on peut tirer les conséquences suivantes $1/f_*$, $1/g_*$ et $1/h_*$ sont de fonctions convexes. Le mode de h_* est la somme de Minkowski du mode de f_* avec celui de g_*. La fonction $g_*/\|g\|_\infty$ (respectivement $h_*/\|h\|_\infty$) restreinte à l'après-mode de g_* (resp. de h_*) est semblable à la restriction de $f_*/\|f\|_\infty$ à l'après-mode de f_*, le facteur de similitude étant q/p (respectivement $1/p$).

Démonstration. – Posons

$$\phi(x) = \|g\|_\infty f_*(x), \ \psi(x) = \|f\|_\infty g_*(x)$$

et $\theta(x) = (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)\, h_*(x)$. Le théorème 1 bis donne que

$$\frac{1}{\theta(x+y)} \leqslant \frac{p}{\phi(x)} + \frac{q}{\psi(y)}$$

et ainsi $\theta(x+y) \geqslant \min(\phi(x), \psi(y))$. Le théorème 9 donne alors l'inégalité de Borell :

$$\int h(z)\,dz \geqslant p \int f(x)\,dx + q \int g(y)\,dy.$$

Lorsque la dernière inégalité est une égalité, θ est alors la sup-quasiconvolution de ϕ avec ψ. Posons

$$\phi_1(x) = 1/\phi(x),\ \psi_1(x) = 1/\psi(x),\ \theta_1(x) = 1/\theta(x).$$

θ_1 est l'inf-quasiconvolution de ϕ_1 avec ψ_1. D'autre part

$$\theta_1(x+y) \leqslant p\,\phi(x) + q\,\psi_1(y)$$

θ_1 minore aussi l'inf-convolution de ϕ_1 avec ψ_1. Ainsi l'inf-quasiconvolution coïncide avec l'inf-convolution de ϕ_1 avec ψ_1. Le théorème 8 donne alors les autres conclusions espérées.

THEOREME 10. – *Soient $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ trois fonctions non-négatives mesurables au sens de Lebesque sur* $\mathbf{R}$ *telles que*

a) $\{x : f(x) < +\infty\}$ *n'est pas de mesure nulle et* $\|f\|_\infty = \infty$

b) $\int g(y)\,dy$ *est un nombre fini positif.*

c) *la mesure plane de* $\{(x,y) : h(x+y)^{-1} > f(x)^{-1} + g(y)^{-1}\}$ *est nulle. Alors*

$$\int h(z)\,dz > \int g(y)\,dy.$$

Démonstration. – On peut supposer que $f = f_*, g = g_*$ et $h = h_*$ et que l'inégalité $h(x+y)^{-1} \leqslant f(x)^{-1} + g(y)^{-1}$ a lieu partout (Théorème 1 bis). Soit x_n une suite de nombres tels que $f(x_n) \geqslant n$, on a que $\liminf_{n\to\infty} h(x_n+y) \geqslant g(y)$. Le lemme de Fatou permet de montrer que la suite x_n est bornée étant donné que $\int_{-c}^{c} g(y)\,dy > 0$ si c est suffisamment grand et que $\lim_{x\to\pm\infty} \int_{-c}^{c} h(x+y)\,dy = 0$ lorsque $h \in L_1$. On peut maintenant supposer que x_n est une suite qui converge vers un nombre a. La semi-continuité inférieure de la sup-convolution de $1/f$ avec $1/g$ montre alors que $h(a+y) \geqslant g(y)$.

D'où $\int h(z)\,dz \geqslant \int g(y)\,dy$. Montrons maintenant qu'il est impossible que $\int h(z)\,dz = \int g(y)\,dy$. Si cette égalité avait lieu on aurait que $h(a+y) = h_*(a+y) = g_*(y) = g(y)$. Pour tout x, on aurait l'inégalité

$$g(y+x-a)^{-1} \leqslant f(x)^{-1} + g(y)^{-1}.$$

Or vu que la mesure de $\{x : f(x) < \infty\} \neq 0$ et que $\int g(y)\,dy < \infty$, il existe un x et un y tels que $f(x) \in (0\,,\infty)$ et

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(y+k(x-a)) < \infty.$$

Par récurrence sur k, on montre que

$$g(y+k(x-a)) \geqslant (g(y)^{-1} + kf(x)^{-1})^{-1}.$$

La divergence de la série harmonique amène une contradiction.

C.Q.F.D.

Le théorème B_1^+ et le théorème 10 permettent de vérifier la validité du théorème B_1 cité dans l'introduction. En effet, si f, g et h sont trois fonctions non-négatives chacune étant d'intégrale égale à un et si $1/h(x+y) \leqslant 1/f(x) + 1/g(y)$ presque partout en x et en y, on aura que f et g seront essentiellement bornées (théorème 10). Soient $p = \|g\|_\infty/(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)$ et $q = 1-p$, si $[\alpha\,,\beta]$ est le mode de f_* et si $[\gamma\,,\delta]$ est le mode de g_*, on a que

$$g_*\left(\frac{q}{p}(x-\beta)+\delta\right) = \frac{p}{q} f_*(x) \quad x > \beta$$

$$g_*\left(\frac{q}{p}(x-\alpha)+\gamma\right) = \frac{p}{q} f_*(x) \quad x < \alpha.$$

D'où

$$\int_\delta^\infty g_*(x)\,dx = \int_\beta^\infty f_*(x)\,dx$$

et

$$\int_{-\infty}^\gamma g_*(x)\,dx = \int_{-\infty}^\alpha f_*(x)\,dx$$

D'où

$$\int_\gamma^\delta g_*(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f_*(x)\,dx.$$

C'est-à-dire que $(\gamma - \delta) \| g \|_\infty = (\beta - \alpha) \| f \|_\infty$ ou

$$(\gamma - \delta) = \frac{q}{p}(\beta - \alpha)$$

et ainsi pour tout x

$$g_*\Big(\frac{q}{p}(x - \beta) + \delta\Big) = \frac{p}{q} f_*(x).$$

Une vérification semblable montre aussi que

$$h_*\Big(\frac{1}{p}(x - \beta) + \epsilon\Big) = p\, f_*(x)$$

si ϵ est l'extrémité droite du mode de h

5. Inégalité fondamentale de Borell sur $\mathbf{R}^n$.

Nous démontrons les théorèmes B_n $(n = 2, 3, \ldots)$ par récurrence sur la dimension n. Supposons que l'inégalité fondamentale de Borell ait été établie pour la dimension n, c'est-à-dire que l'inégalité $\int h_1(z)\, dz \geqslant 1$ a lieu chaque fois que $\int f_1(x)\, dx = \int g_1(y)\, dy = 1$, et que

$$h_1(x + y)^{-\frac{1}{n}} \leqslant f_1(x))^{-\frac{1}{n}} + (g_1(y))^{-\frac{1}{n}}$$

presque partout sur $\mathbf{R}^{2n}$. Nous présentons un résultat préliminaire après avoir introduit une classe de fonctions. Nous désignerons par H_2^+ la totalité des fonctions p définies sur le premier quadrant du plan cartésien, $[0, \infty) \times [0, \infty)$, qui sont non-négatives et qui sont homogènes de degré un. Si $p \in \mathrm{H}_2^+$, nous désignerons par $p_n(u, v)$ l'infimum de $\{p(ut^{-n}, v(1-t)^{-n}) : t \in (0, 1)\}$.

THEOREME 11. — *Si l'inégalité fondamentale de Borell est établie dans* $\mathbf{R}^n$, *si* f, g *et* h *sont trois fonctions intégrables, non-négatives définies sur* $\mathbf{R}^n$ *telles que* $h(x + y) \geqslant p(f(x), g(y))$ *presque partout en* (x, y) *pour une fonction* p *de* H_2^+, alors

$$\int h(z)\, dz \geqslant p_n\Big(\int f(x)\, dx, \int g(y)\, dy\Big).$$

Démonstration. – Posons

$$A = \int f(x)\, dx,\ B = \int g(y)\, dy,\ C = p_n(A\ ,\ B),$$

$f_1 = f/A$, $g_1 = g/B$ et $h_1 = h/C$. Il suffit de vérifier que

$$h_1(x+y)^{-1/n} \leqslant (f_1(x))^{-1/n} + (g_1(y))^{-1/n}$$

presque partout. Si $f(x) > 0$, $g(y) > 0$, posons

$$t = (A/f(x))^{1/n}\, ((A/f(x))^{1/n} + (B/g(y))^{1/n})^{-1}.$$

$$p_n(A\ ,\ B) \leqslant p\,(At^{-n},\ B(1-t)^{-n})$$

$$p_n\ (A\ ,\ B) \leqslant [(A/f(x))^{1/n} + (B/g(y))^{1/n}]^n\, p\,(f(x), g(y))$$

$$C \leqslant [(A/f(x))^{1/n} + (B/g(y))^{1/n}]^n\, h\,(x+y)$$

presque partout. L'inégalité fondamentale de Borell donne l'inégalité désirée.

Démontrons l'inégalité fondamentale de Borell dans $\mathbf{R}^{n+1}$ en supposant par récurrence qu'elle est établie pour $\mathbf{R}^n$. Soient f, g, et h trois fonctions non-négatives intégrables sur $\mathbf{R}^{n+1}$ telles que

$$h\,(x+y)^{-1/(n+1)} \leqslant f(x)^{-1/(n+1)} + g(y)^{-1/(n+1)}\ p.p.$$

alors que $\int f(x)\, dx = \int g(y)\, dy = 1$. Pour $x_1 \in \mathbf{R}$ posons

$$F(x_1) = \int\int \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_{n+1}.$$

De façon analogue, on définit $G(y_1)$ et $H(z_1)$. Comme F, G et H sont les résultats d'intégration dans $\mathbf{R}^n$ lorsque $z_1 = x_1 + y_1$, on peut utiliser le théorème 11 avec la fonction homogène

$$p\,(u\ ,\ v) = (u^{-1/(n+1)} + v^{-1/n+1)})^{-(n+1)}.$$

Dans ce cas, $p_n(u\ ,\ v) = \left(\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v}\right)^{-1}$. D'où

$$(H(x_1+y_1))^{-1} \leqslant (F(x_1))^{-1} + (G(y_1))^{-1}$$

presque partout en $(x_1\ ,y_1)$. D'autre part,

$$\int F(x_1)\, dx_1 = \int G(y_1)\, dy_1 = 1.$$

L'inégalité fondamentale de Borell sur $\mathbf{R}$ donne que

$$\int h(z)\, dz = \int \mathrm{H}(z_1)\, dz_1 \geqslant 1.$$

Nous entamons maintenant la démonstration de la deuxième partie du théorème B_n ; c'est l'analyse du cas de l'égalité dans l'inégalité de Borell. Soient f, g et h trois fonctions non-négatives intégrables sur $\mathbf{R}^n$ telles que $\int f(x)\, dx = \int g(y)\, dy = \int h(z)\, dz = 1$ alors que $(h(x+y))^{-1/n} \leqslant (f(x))^{-1/n} + (g(y))^{-1/n}$ presque partout en (x, y). Désignons par σ_f, σ_g et σ_h les points de densité des ensembles $\{x : f(x) > 0\}$, $\{y : g(y) > 0\}$ et $\{z : h(z) > 0\}$. Faisons l'hypothèse supplémentaire que σ_f et σ_g sont des parties bornées de $\mathbf{R}^n$. Dans un premier temps, nous établirons que σ_f, σ_g et σ_h sont trois convexes homothétiques.

Associons à f, g et h trois autres fonctions f_1, g_1 et h_1. f_1 est une fonction non-négative telle que pour tout

$$t \in [0, \infty),\ \{x : f_1(x) > t\}$$

est un cube centré à l'origine de $\mathbf{R}^n$ dont le volume est précisement égal à la mesure de $\{x : f(x) > t\}$. g_1 et h_1 sont définies de façon analogue. On a que $\int f_1(x)\, dx = \int g_1(y)\, dy = \int h_1(z)\, dz = 1$. Si $\mathrm{A}(u)$, $\mathrm{B}(v)$ et $\mathrm{C}(w)$ sont respectivement les ensembles

$$\{x : f(x) > u\},\ \{y : g(y) > v\} \qquad \text{et} \qquad \{z : h(z) > w\},$$

on a par le théorème 1 que $\mathrm{A}_*(u) + \mathrm{B}_*(v) \subset \mathrm{C}_*((u^{-1/n} + v^{-1/n})^{-n})$. L'inégalité de Lusternik [10] pour la somme de Minkowski de parties de $\mathbf{R}^n$ donne que

$$|\mathrm{A}_*(u)|^{1/n} + |\mathrm{B}_*(v)|^{1/n} \leqslant |\mathrm{C}_*((u^{-1/n} + v^{-1/n})|^{1/n}.$$

Si $x \in \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, posons $\|x\|_\infty = \max |x_i|$. Soient x et y deux points de $\mathbf{R}^n$ tels que $\|x\|_\infty = r$, $\|y\|_\infty = s$, $f_1(x) = u$ et $g_1(y) = v$, établissons l'inégalité

$$w^{-1/n} \leqslant u^{-1/n} + v^{-1/n} \qquad \text{si} \qquad w = h_1(x+y).$$

Posons $w_1 = (u^{-1/n} + v^{-1/n})^{-n}$; on voit que

$$|\mathrm{A}(u)| = (2r)^n,\ |\mathrm{B}(v)| = (2s)^n.$$

Par l'inégalité de Lusternik, $|\mathrm{C}(w_1)| \geqslant (2(r+s))^n$. $\{z : h_1(z) > w_1\}$ est donc un cube dont l'arête a une longueur au moins égale à $2(r+s)$. Or $\|x+y\|_\infty \leqslant (r+s)$, d'où $w \geqslant w_1$. On a montré que $w^{-1/n} \leqslant u^{-1/n} + v^{-1/n}$. Soit $\mathrm{M} = |\sigma_f|^{1/n} + |\sigma_g|^{1/n}$, on pose

$$h_2(z) = \begin{cases} h_1(z) & \text{si} \quad \|z\|_\infty \leqslant M/2 \\ 0 & \text{si} \quad \|z\|_\infty > M/2. \end{cases}$$

On a que $h_2(x+y)^{-1/n} \leqslant f_1(x)^{-1/n} + g_1(y)^{-1/n}$, l'inégalité fondamentale de Borell fait voir que $\int h_2(z)\,dz \geqslant 1$. D'où $h_1(z) = h_2(z)$ presque partout, c'est-à-dire que la mesure de $\{z : h_1(z) > 0\}$ est inférieure où égale à M^n ;

$$|\sigma_h| \leqslant M^n, \; |\sigma_h|^{1/n} \leqslant |\sigma_f|^{1/n} + |\sigma_g|^{1/n}.$$

D'autre part $\sigma_h \supseteq \sigma_f + \sigma_g$, l'inégalité de Lusternik donne encore que

$$|\sigma_h|^{1/n} \geqslant |\sigma_f|^{1/n} + |\sigma_g|^{1/n}.$$

On a donc établi que $|\sigma_h|^{1/n} = |\sigma_f|^{1/n} + |\sigma_g|^{1/n}$. Henstock et Macbeath [5] ont montré que cette dernière égalité ne pouvait avoir lieu que si σ_f, σ_g et σ_h étaient trois convexes en homothétie. Notons par m le facteur d'homothétie de σ_g par rapport à σ_f ; $(m+1)$ sera le facteur d'homothétie de σ_h par rapport à σ_f.

Dans un deuxième temps, nous allons montrer que

$$m^n g_*(mx+b) = f_*(x) \qquad \text{et} \qquad (m+1)^n h_*((m+1)x+b) = f_*(x)$$

où b est l'intégrale vectorielle $\int y\, g(y)\,dy - m\int x\, f(x)\,dx$. Quitte à changer les variables x, y et z en posant $x' = x - \bar{x}$, $y' = y - \bar{y}$ et $z' = z - \bar{x} - \bar{y}$, on peut supposer sans perte de généralité que

$$\bar{x} = \int x\, f(x)\,dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \bar{y} = \int y\, g(y)\,dx = 0.$$

Désignons par $F(x_1)$, $G(y_1)$ et $H(z_1)$ les intégrales de f, g et h sur les hyperplans admettant le premier axe des coordonnées de $\mathbf{R}^n$ comme normale et passant respectivement par les points $(x_1, 0, \ldots, 0)$, $(y_1, 0, \ldots, 0)$ et $(z_1, 0, \ldots, 0)$. On a déjà vu que

$$(H(x_1+y_1))^{-1} \leqslant F(x_1)^{-1} + (G(y_1))^{-1}$$

presque partout en (x_1, y_1) et l'on sait que

$$\int F(x_1)\,dx_1 = \int G(y_1)\,dy_1 = \int H(z_1)\,dz_1 = 1.$$

Le théorème B_1 affirme que l'on peut trouver des nombres p, q et τ tels que

$$G\left(\frac{q}{p}x_1 + \tau\right) = \frac{p}{q} F(x_1)\ p.p.$$

$$H\left(\frac{1}{p}x_1 + \tau\right) = p\ F(x)\ p.p.$$

Or le fait que $\int x_1 f(x)\, dx = \int y_1 g(y)\, dy = 0$, donne que

$$\int x_1 F(x_1)\, dx_1 = \int y_1 G(y_1)\, dy_1 = 0\ ;$$

ce qui permet de tirer que $\tau = 0$. L'application $x_1 \to \frac{q}{p} x_1$ envoie le support de la fonction F sur le support de la fonction G. Ces supports sont les projections respectives de convexes σ_f et σ_g sur le premier axe de coordonnées. D'où $\frac{q}{p} = m$. Ainsi

$$mG(mx_1) = F(x_1)\ p.p. \qquad \text{et} \qquad (m+1)\, H(mx_1) = F(x_1).$$

Rappelons ici la définition de transformée de Radon. Si f est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^n$, si H est un hyperplan de $\mathbf{R}^n$, si dx_H est la mesure de Lebesgue de dimension $n-1$ portée par H, proprement normalisée, la transformée de Radon de f est

$$\int_H f(x)\, dx_H = \hat{f}(H).$$

Les deux dernières identités reliant F, G et H donnent que les transformées de Radon des fonctions

$$m^n g(mx) - f(x) \qquad \text{et} \qquad (m+1)^n h((m+1)x) - f(x)$$

sont nulles presque partout, lorsque l'on fait varier le système des axes des coordonnées par des transformations orthogonales. Il est connu que ceci entraîne que les deux fonctions originales

$$m^n (mx) - f(x)) \qquad \text{et} \qquad (m+1)^n (h((m+1)x) - f(x))$$

sont nulles presque partout. En effet, si la transformée de Radon d'une fonction intégrable $\phi(x)$ est nulle presque partout, puisque la transformée de Fourier de ϕ est déterminée par la transformée de Radon, on aura que la transformée de Fourier de ϕ sera nulle et alors ϕ sera nulle presque partout. D'autre part le théorème 1 bis joint à nos hypothèses donne que

$$(h_* (x_1 + mx_2))^{-1/n} \leqslant f_* (x_1)^{-1/n} + g_* (mx_2)^{-1/n}$$

ou

$$\left[f_* \left(\frac{x_1 + mx_2}{1 + m} \right) \right]^{-1/n} \leqslant \frac{(f_* (x_1))^{-1/n} + m (f_* (x_2))^{-1/n}}{1 + m}.$$

Ce qui indique que la fonction $(f_* (x))^{-1/n}$ est convexe. Nous avons complété la démonstration du théorème B_n, lorsque f et g sont à support borné. Dans un troisième temps, nous levons maintenant cette supposition sur σ_f et σ_g. Soit $r > 0$, désignons par $H_1 (r)$ le demi-espace $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \leqslant r\}$, déterminons un nombre s tel que

$$\int_{H_1 (r)} f (x) \, dx = \int_{H_1 (s)} g (y) \, dy.$$

Si

$$f_1 (x) = \begin{cases} f (x) & \text{si} \quad x \in H_1 (r) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin H_1 (r) \end{cases}$$

$$g_1 (y) = \begin{cases} g (y) & y \in H_1 (s) \\ 0 & y \notin H_1 (s) \end{cases}$$

$$h_1 (z) = \begin{cases} h (z) & z \in H_1 (r + s) \\ 0 & z \notin H_1 (r + s) \end{cases}$$

on vérifie aisément que

$$\int f_1 (x) \, dx = \int g_1 (y) \, dy = \int h_1 (z) \, dz$$

alors que

$$(h_1 (x + y))^{-1/n} \leqslant (f_1 (x))^{-1/n} + (g_1 (y))^{-1/n}$$

presque partout en (x, y). En servant de $2n$ coupes par des demi-espaces du type $x_i \leqslant r$ ou $x_i \geqslant r'$ $i = 1, 2, \ldots, n$ on obtient que pour tout pavé P de $\mathbf{R}^n$, il existe un pavé Q de $\mathbf{R}^n$ tels que les fonctions $f_P (x)$, $g_Q (y)$ et $h_R (z)$ $(R = P + Q)$ remplissent les conditions suivantes :

$$f_P(x) = \begin{cases} f(x) & x \in P \\ 0 & x \notin P \end{cases} \qquad g_Q(y) = \begin{cases} g(u) & u \in Q \\ 0 & u \notin Q \end{cases}$$

et

$$h_R(z) = \begin{cases} h(z) & z \in R \\ 0 & z \notin R \end{cases}$$

$$\int f_P(x)\,dx = \int g_Q(y)\,dy = \int h_R(z)\,dz$$

$(h_R(x+y)^{-1/n} \leqslant (f_P(x))^{-1/n} + (g_Q(y))^{-1/n}$ presque partout en (x, y). D'où il existe un nombre $m_P > 0$ et un vecteur $\mathbf{R}^n$, b_P tels que $m_P^n g_Q(m_P x + b_P) = f_P(x)$ presque partout. Soit P_k une suite croissante de pavés de $\mathbf{R}^n$ dont la réunion donne tout $\mathbf{R}^n$, considérons la suite correspondante de pavés Q_k qui sera croissante et dont la réunion sera $\mathbf{R}^n$; on est assuré de l'existence d'une suite de nombres m_k et de vecteurs b_k tels que

$$m_k^n g(m_k x + b_k) = f(x)$$

presque partout. Comme $0 < \int f(x)\,dx < \infty$ et $0 < \int g(y)\,dy < \infty$ on se convainc qu'il existe un nombre $m \in (0, \infty)$ et un vecteur b tels que (m, b) est un point d'accumulation de la suite (m_k, b_k). D'où $m^n g(mx + b) = f(x)$ presque partout en x. La démonstration du théorème B_n se termine facilement.

Revenons un instant au théorème 11, un examen de la démonstration révèle les conditions d'égalité pour l'inégalité citée.

THEOREME 12. – *Soit $p(u, v)$ une fonction homogène de H_2^+. Si f, g et h sont trois fonctions intégrables d'intégrales positives sur $\mathbf{R}^n$ telles que $h(x+y) \geqslant p(f(x), g(y))$ presque partout en (x, y) et si $\int h(z)\,dz = p_n(\int f(x)\,dx, \int g(y)\,dy)$, alors il existe une fonction $\phi(x)$, un nombre m de $(0, \infty)$ et un vecteur b de $\mathbf{R}^n$ tels que*

$$f(x) = \left(\int f(t)\,dt\right) \phi(x) \ p.p.,$$

$$m^n g(mx + b) = \left(\int g(t)\,dt\right) \phi(x) \ p.p.,$$

$$(m+1)^n h((m+1)x + b) = \left(\int h(t)\,dt\right) \phi(x) \text{ p.p.}$$

et

$$(m+1)^{-n} (\int h(t)\,dt)\, \phi\left(\frac{x_1+mx_2}{1+m}\right) \geqslant p\,((\int f(t)\,dt)\, \phi(x_1),$$

$$(\int g(t)\,dt)\, m^{-n}\, \phi(x_2)).$$

Le théorème 11 a déjà été formulé par Borell [3] pour les fonctions homogènes de degré un, $p(u, v)$, qui de plus sont continues et croissantes selon chacune des variables. Borell pouvait alors obtenir la dérivation de certains résultats de Prékopa [13] et de Leindler [9] en choisissant comme fonction homogène $p(u, v) = u^p v^{1-p}$. Dans le même esprit, citons deux applications du théorème 12.

Considérons une fonction non-négative intégrable sur $\mathbf{R}^n$, $\psi(x)$, qui est logconcave, on suppose par exemple que

$$\psi^2\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \psi(x)\,\psi(y).$$

Si $p(u, v) = \sqrt{uv}$, on peut poser

$$f(x) = \psi(x+c),\ g(x) = \psi(x-c) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Le théorème 11 donnera que pour tout convexe K de $\mathbf{R}^n$,

$$\left(\int_K \psi(x)\,dx\right)^2 \geqslant \int_{c+K} \psi(x)\,dx \int_{-c+K} \psi(x)\,dx\ ;$$

autrement dit la fonction $c \to \int_{c+K} \psi(x)\,dx$ est logconcave. Si

$$A = \int_{c+K} \psi(x)\,dx, \quad B = \int_{-c+K} \psi(x) \text{ et } C = \int_K \psi(x)\,dx,$$

utilisons le théorème 12 pour déterminer les cas où $C^2 = AB$. Si l'on pose $\psi(x) = \psi(x+c)/A$, on devra avoir

$$(m+1)^{-n}\, 2^n\, C\, \phi\left(\frac{x_1+mx_2}{1+m}\right) \geqslant m^{-n/2} \sqrt{AB}\, \phi^{\frac{1}{2}}(x_1)\, \phi^{\frac{1}{2}}(x_2).$$

Supposons que $A > 0$ et $B > 0$. Choisissons un x tel que $\psi(x) \neq 0$, posant $x_1 = x_2 = x$ dans la dernière inégalité, on obtient

$$\frac{2}{m+1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

D'où $m = 1$. Quelques calculs simples montrent que l'égalité $C^2 = AB$ avec $A > 0$, $B > 0$ ne peut être réalisée que s'il existe un vecteur b tel que $b + K_* = K_*$ et si pour tout x de K_*

$$\psi(x) = \sqrt{\psi(x+\theta)\,\psi(x-\theta)}$$

$$A\,\psi(x+\theta) = B\,\psi(x-\theta) \qquad \text{où} \qquad \theta = \frac{b}{2} - c.$$

On peut tirer de cette étude un résultat dû à Zalgaller [15]. Si $Q(x)$ est une forme quadrative non positive sur $\mathbf{R}^n$, si K est un convexe d'intérieur non-vide et si $K \neq \mathbf{R}^n$, alors la fonction

$$x \to \int_{x+K} e^{-Q(x)}\, dx$$

est strictement logconcave aux endroits où elle est finie.

Procédons de façon semblable avec la fonction homogène $p(u, v) = 2^n (u^{-1/n} + v^{-1/n})^{-n}$ et une fonction $\psi(x)$ définie sur $\mathbf{R}^n$, intégrable telle que $\psi^{-1/n}$ est une fonction convexe ; posons

$$f(x) = \psi(x+c),\ g(x) = \psi(x-c) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Posons

$$A = \int_K f(x)\, dx, \quad B = \int_K g(y)\, dy, \quad C = \int_K h(z)\, dz$$

où K est une partie convexe de $\mathbf{R}^n$. On vérifie que

$$p_n(u, v) = 2^n \min(u, v).$$

Le théorème 11 assure que $C \geqslant 2^n \min(A, B)$. La fonction

$$c \to \int_{c+K} \psi(x)\, dx$$

est donc quasiconcave. Si $C = 2^n \min(A, B)$, alors il existe un nombre m de $(0, \infty)$, un vecteur b de $\mathbf{R}^n$ et une fonction $\phi(x)$ tels que

$$f_*(x) = A\,\phi(x),\ m^n g_*(mx+b) = B\,\phi(x)$$

$$(m+1)^n h_*((m+1)x+b) = C\,\phi(x)$$

$$(m+1)^{-n}\, C\,\phi\left(\frac{x_1 + m x_2}{1+m}\right) \geqslant 2^n ((A\,\phi(x_1))^{-1/n} + (Bm^{-n}\phi(x_2))^{-1/n})^{-n}.$$

Si

$$\int_{K} \psi(x)\,dx = \min\left(\int_{c+K} \psi(x)\,dx, \int_{-c+K} \psi(x)\,dx\right)$$

et que $A > 0$, $B > 0$, on peut trouver un x tel que

$$\phi(x) > 0 \ (x \in c + K);$$

dans la dernière inégalité posons $x_1 = x_2 = x$ et l'on sait que $C = 2^n \min(A, B)$. D'où

$$(m+1)^{-n} \min(A, B) \geqslant (A^{-1/n} + mB^{-1/n})^{-n}$$

$$\min(A, B) \geqslant \left(\frac{A^{-1/n} + mB^{-1/n}}{1+m}\right)^{-n}$$

Ceci entraîne que $A = B$ et l'on aura que

$$m^n \psi_*(mx + b - c) = \psi_*(x + c) \quad x \in K$$

$$(m+1)^n \psi_*\left(\frac{(m+1)x + b}{2}\right) = 2^n \psi_*(x + c) \quad x \in K$$

alors que l'application $x \to mx + b$ applique K dans K. Si des informations additionnelles sont fournies, on peut obtenir d'autres spécifications. Par exemple si K est compact on a nécessairement que $m = 1$ et $b = 0$ et l'on obtiendra que

$$\psi_*(x) = \psi_*(x - c) = \psi_*(x + c) \ x \in K.$$

Pour terminer, citons quelques auteurs dont les travaux ont été d'un support essentiel à notre étude. Le théorème 7 a été inspiré par l'inégalité de Bonnesen [1] au sujet des aires d'une série linéaire de figures convexes planes A et B de même largeur :

$$\left|\frac{A+B}{2}\right| \geqslant (|A| + |B|)/2$$

La démonstration que nous avons donnée de l'inégalité de Borell dans $\mathbf{R}^n$ reprend en partie l'argumentation de Bonnesen et de Fenchel [2] pour établir l'inégalité de Brunn-Minkowski. La méthode de coupe de Hadwiger et Ohman [4] nous a servi pour l'analyse du cas d'égalité dans l'inégalité de Borell pour des fonction f et g dont le support n'est pas borné. C'est la thèse de doctorat de Monsieur Gilles Deslauriers qui nous a amené au théorème B_n.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. BONNESEN, Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes, Gauthier-Villars, Paris (1929).

[2] T. BONNESEN et W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper ; Springer, Berlin (1934).

[3] C. BORELL, Convex set functions in d-space, *Period. Math. Hungar.*, Vol. 6 (1975), 111-136.

[4] H. HADWIGER et D. OHMANN, Brunn-Minkoswkischer Satz und Isoperimetrie *Math. Z.*, Bd 66 (1956), 1-8.

[5] R. HENSTOCK et A.M. MACBEATH, On the mesure of sum-sets. (I) The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 3 (1953), 182-194.

[6] J.H.B. KEMPERMAN, A general functional equation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 86 (1957), 28-56.

[7] M.E. KUCZMA, Almost convex functions, *Colloq. Math.*, 21 (1970), 279-284.

[8] S. KUREPA, Note on the difference set of two-measurable sets in E^n, *Glasnik Mat. Fiz. Astr.*, II 15 (1960), 99-105.

[9] L. LEINDLER, On a certain converse of Hölder's inequality II, *Acta Sci. Math.*, 33 (1972), 215-223.

[10] L. LUSTERNIK, Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige messbare Mengen, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sc. U.R.S.S.*, (1935) 3 (8) No. 2 (62), 55-58.

[11] J.J. MOREAU, Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, 1966-67.

[12] M.E. MUNROE, Measure and Integration Addison-Wesley Reading Mass. (1971).

[13] A. PREKOPA, On logarithmic concave measure and functions, *Acta Sci. Math.*, 34 (1972), 336-343.

[14] J. RADON, Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Wiss.* Leipzig, Math. -Nat. K1., 69 (1917), 262-277.

[15] V.A. ZALGALLER, Mixed volumes and the probability of hitting in convex domains for a multidimensional normal distribution, *Mat. Zametki.*, Vol. 2, No. 1 (1967), 97-104.

Manuscrit reçu le 7 janvier 1976
Proposé par J.P. Kahane.

Serge DUBUC,
Centre de Recherches Mathématiques
Université de Montréal
C.P. 6128
Montréal P.Q. (Canada).