

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FERNANDO VARELA

Formes de Pfaff, classe et perturbations

Annales de l'institut Fourier, tome 26, n° 4 (1976), p. 239-271

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_4_239_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_4_239_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMES DE PFAFF, CLASSE ET PERTURBATIONS

par **Fernando VARELA**

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	239
ORGANIGRAMME	250
CHAPITRE 0. GÉNÉRALITÉS.	
1. — Quelques rappels	252
2. — Expression globale d'une forme de Pfaff	254
3. — C^0 -stabilité des conditions $d\omega \neq 0$ et $\omega \wedge d\omega \neq 0$ (ω forme de Pfaff)	255
CHAPITRE I. PHÉNOMÈNES DE C^0 -DENSITÉ.	
1. — Non stabilité des conditions : $[d\omega]^2 \neq 0$, $\omega \wedge [d\omega]^2 \neq 0$. etc....	256
2. — C^0 -densité des formes de Pfaff du type $f dg + dh$	257
CHAPITRE II. COMPORTEMENT DE LA CLASSE MINIMALE D'UNE FORME DE PFAFF PAR C^0 -PERTURBATIONS, EN DIMENSION TROIS	
	265
BIBLIOGRAPHIE	270

Introduction.

1. — Étant donné une p -forme extérieure Ω , sur une variété compacte M_n , la fonction qui, à chaque point $P \in M_n$, associe la classe de Ω au point P est semicontinue inférieurement, à valeurs entières et en général non constante.

Cependant, de façon naturelle, on peut associer à une q -forme extérieure Ω sur M_n les deux nombres entiers :

$\text{cl max } \Omega = \text{classe maximale de } \Omega \text{ sur } M_n$

$\text{cl min } \Omega = \text{classe minimale de } \Omega \text{ sur } M_n$.

Le fait que la classe maximale (resp. classe minimale) de Ω sur M_n soit égale à p , signifie alors qu'il existe un ouvert non vide (resp. un fermé non vide) dans lequel la classe de Ω est égale à p et dans le complémentaire duquel la classe de Ω est inférieure à p (resp. supérieure à p).

Le fait qu'une q -forme, admette une classe maximale (resp. classe minimale) donnée, exprime donc une propriété globale de cette q -forme.

2. — Dans ce travail, on étudie essentiellement le problème suivant :

Si ω est une forme de Pfaff sans zéros sur une variété compacte M_n , que peut-on dire de la classe maximale (resp. classe minimale) des formes de Pfaff qui sont dans un C^0 -voisinage de ω ?

On donne une réponse complète à ce problème dans le cas du comportement par C^0 -perturbations de la classe maximale d'une forme de Pfaff.

Sur le comportement par C^0 -perturbations de la classe minimale d'une forme de Pfaff, on donne une étude assez complète dans le cas d'une variété compacte de dimension trois.

3. — Si f est une application différentiable entre deux variétés $f: M_n \rightarrow M_p$, on peut associer à f les deux entiers :

rang maximal de f

rang minimal de f .

Plusieurs phénomènes font penser à une certaine analogie entre le rôle du rang dans la théorie des applications différentiables et celui de la classe dans la théorie des formes de Pfaff. Par exemple :

a) si ω est une forme de Pfaff de classe constante (resp. f une application de rang constant), le théorème de Darboux

(resp. le théorème du rang) donne un modèle local pour ω (resp. pour f).

b) Pour une forme de Pfaff (resp. application différentiable), il est évident que le fait d'avoir sa classe maximale (resp. rang maximal) supérieure à un entier p est C^1 -stable.

c) Si ω est une forme de contact sur une variété M_{2n+1} (resp. f est une application différentiable $f: M_n \rightarrow M_n$ de rang n partout) l'orientation définie par la $(2n+1)$ -forme $\omega \wedge [d\omega]^n$ (resp. le signe du jacobien de f) est C^1 stable.

d) Soit M_{2n} une variété compacte avec bord ∂M_{2n} et soit ω une forme de Pfaff sans zéros sur M_{2n} (resp. soit f une application différentiable $f: M_{2n} \rightarrow M_{2n}$) telle que $[d\omega]^n \not\equiv 0$ à l'intérieur de M_{2n} et $[d\omega]^n \equiv 0$ dans un voisinage du bord (resp. rang maximal de f égale à n à l'intérieur de M_n et rang de f plus petit que n dans un voisinage du bord). Le théorème de Stokes (resp. un argument sur le degré) montre que, en général, il n'existe pas de forme ω' sans zéros sur M_{2n} (resp. d'application $f': M_{2n} \rightarrow M_{2n}$) telle que $[d\omega']^n \equiv 0$ sur M_{2n} et $\omega' \equiv \omega$ dans un voisinage du bord (resp. rang $f' < n$ partout et $f' \equiv f$ dans un voisinage du bord).

e) Dans [10], J. Martinet montre, en particulier, la généricité de certaines propriétés relatives au comportement de la classe minimale des formes extérieures, faisant usage de la théorie de la transversalité.

4. — Les exemples antérieurs montrent des situations dans lesquelles le comportement de la classe d'une forme de Pfaff est analogue à celui du rang des applications différentiables, relativement aux C^1 -perturbations.

Il est alors naturel de faire une étude comparative du comportement par C^0 -perturbations :

1) De la classe d'une forme et du rang des applications.

2) Pour une forme de contact, de l'orientation de la $(2n+1)$ -forme $\omega \wedge [d\omega]^n$ et du signe du jacobien pour une application de rang constant maximum.

Soit f une application différentiable $f: I^n \rightarrow R^n$ (I^n

pavé de \mathbb{R}^n). Alors on montre facilement (voir remarque 4, chapitre 0) les deux propriétés suivantes :

a) La propriété que f soit de rang maximal plus grand qu'un entier p est C^0 -stable.

b) Le fait qu'il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset I^n$ dans lequel le jacobien de f est > 0 , est C^0 -stable.

Ainsi, en particulier, pour une application différentiable de rang constant maximum, le rang de f et le signe du jacobien de f sont C^0 -stables.

Conséquence : L'ensemble des applications $f: I^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour lesquelles on peut ni monter le rang minimal ni abaisser le rang maximal est C^0 -dense.

5. — Dans les chapitres 0 et II, on montre que :

1) Si Ω est une p -forme extérieure sur un ouvert de \mathbb{R}^n telle que $d\Omega \not\equiv 0$, toute p -forme Ω' , voisine de Ω au sens de la C^0 -topologie vérifie aussi $d\Omega' \not\equiv 0$.

En particulier pour une forme de Pfaff ω la propriété classe $\max \omega > 1$ est C^0 -stable.

2) Pour une forme de Pfaff ω sur un ouvert de \mathbb{R}^n , la propriété $\omega \wedge d\omega \not\equiv 0$ est C^0 -stable [voir 12].

3) Si ω est une forme de contact sur une variété de dimension trois, toute forme de contact suffisamment voisine de ω au sens de la C^0 -topologie, définit la même orientation que celle de ω .

Ainsi, les comportements par C^0 -perturbations des conditions classe $\max > 1$ ou 2 pour une forme de Pfaff ω , ou signe de $\omega \wedge d\omega$ pour une forme de contact, sont analogues à ceux du rang des applications ou du signe du jacobien de f , pour une application de rang constant.

La démonstration de (1) résulte de la C^0 -continuité de l'application $\Omega \rightarrow \int_{\Delta_{p+1}} d\Omega$ où Δ_{p+1} est un $(p+1)$ -simplexe (Formule de Stokes).

Pour la démonstration de (2), on ne peut pas utiliser le théorème de Stokes, parce que, au contraire l'application

$$\omega \rightarrow \int_{\Delta_3} \omega \wedge d\omega \quad \text{n'est pas } C^0\text{-continue.}$$

La démonstration de (3) résulte du fait (chapitre II) que si φ_t et ψ_t sont les groupes à un paramètre engendrés par les champs de vecteurs complets dans R^3

$$X = \partial_x + f \partial_z; \quad Y = \partial_y + g \partial_z$$

alors pour tout point $P \in R^3$, la condition $[X, Y] = H \partial_z$ avec $H > 0$ implique: $\psi_{-t} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_t \circ \varphi_t(P) = \lambda \cdot e_3$ avec $\lambda > 0$ quel que soit $t > 0$.

On remarquera que pour des t petits, ce fait est une conséquence connue de la définition du crochet $[X, Y]$.

On peut alors faire les remarques suivantes :

a) Si ω est une forme de Pfaff sans zéros telle que

$$\omega \wedge d\omega \not\equiv 0,$$

il y a un C^0 -voisinage de ω , sans formes complètement intégrables. D'autre part, on sait que sur une variété compacte toute forme de Pfaff sans zéros est homotope comme forme sans zéros à une forme intégrable.

b) Si ω est une forme de Pfaff sans zéros sur une variété compacte de dimension trois telle que (1) $\int_{M_3} \omega \wedge d\omega = 0$ et (2) $\omega \wedge d\omega \not\equiv 0$, il existe un C^0 -voisinage de ω sans formes de contact.

Dans le chapitre I on montre que les formes de Pfaff vérifiant (1) et (2) sont C_0 -denses.

Cependant, on sait [6] que toute forme de Pfaff sans zéros en dimension trois est homotope comme forme sans zéros à une forme de contact d'orientation donnée.

Ainsi les homotopies de (a) et (b) ne peuvent pas être C^0 -petites.

6. — Dans le chapitre I, on montre que pour une forme de Pfaff sur un pavé de R^n , la condition « classe maximale de ω plus grande que trois » n'est pas C^0 -stable.

En particulier, étant donnée sur un pavé de R^{2n+1} une forme de contact ω , elle peut être approchée aussi près que l'on veut, par une forme de Pfaff ω' telle que $[d\omega']^2 \equiv 0$.

Ce fait contraste très fortement avec la C^0 -stabilité du rang pour une application différentiable de rang constant.

On obtient ainsi des formes ω' qui, non seulement vérifient la condition $[d\omega']^2 \equiv 0$, mais elles sont les plus simples qui peuvent la vérifier. En fait, elles peuvent s'écrire sous la forme $\omega = f dg + dh$ où f , g et h sont des fonctions globales sur le pavé.

7. — Dans le chapitre II, on montre que sur tout pavé de \mathbb{R}^{2n+1} avec $n \geq 2$, il y a des formes de contact ω qui peuvent être approchées au sens C^0 par des formes de contact ω' qui définissent une orientation opposée à celle de ω .

On a ainsi un comportement opposé d'une part à celui des formes de contact en dimension trois, et d'autre part à celui du signe du jacobien pour une application de rang constant. En particulier, l'ensemble des formes de contact sur un pavé de \mathbb{R}^{2n+1} ($n \geq 2$) qui définissent la même orientation n'est ni C^0 -ouvert ni C^0 -fermé.

8. — On sait (chapitre 0) que toute forme de Pfaff ω sur une variété compacte C^∞ (resp. C^ω) peut s'exprimer globalement sous la forme $\omega = \sum_{i=1}^N f_i dg_i$ (1) avec N suffisamment grand, où f_i et g_i sont des fonctions globales C^∞ (resp. C^ω).

Il est alors naturel de se demander s'il existe des formes de Pfaff sans zéros exprimables globalement sous la forme (1) avec un nombre de termes du type $f_i dg_i$ minimal.

Comme la variété est compacte, l'expression minimale du type (1) pour une forme sans zéros est $\omega = f_1 dg_1 + f_2 dg_2$.

En [12], G. Reeb pose le problème de savoir si l'existence sur une variété des formes de Pfaff sans zéros, implique déjà l'existence d'une forme de Pfaff complètement intégrable.

De façon analogue, peut se poser le problème de savoir si l'existence d'une forme de Pfaff sans zéros, implique l'existence d'une forme de Pfaff de classe maximale donnée.

En [5], R. Lutz montre que sur toute sphère S^{2p+1} il y a des formes de Pfaff sans zéros analytiques de classe maximale trois. Plus précisément, les formes trouvées sont globalement du type $f dg + dh$, où f , g , h sont des fonctions sur S^{2p+1} induites par des polynômes de \mathbb{R}^{2p+2} .

On sait [4] qu'il n'existe pas de formes analytiques sans zéros et complètement intégrables sur S^{2p+1} . La classe maximale trois est donc la plus basse qu'il est possible d'obtenir ainsi.

9. — Utilisant la réduction par C^0 -perturbations sur un pavé de R^N d'une forme de Pfaff du type

$$\omega = x_1 dx_2 + \cdots + x_{2p-1} dx_{2p}$$

à une autre forme de Pfaff ω' qui s'exprime globalement sur le pavé sous la forme $\omega' = f dg + dh$, et le fait que toute forme de Pfaff sans zéros peut s'exprimer globalement sous la forme $\omega = \sum f_i dg_i$, on montre dans le chapitre 1 que toute forme de Pfaff sans zéros sur une variété compacte C^∞ (resp. C^ω) peut être approchée C^0 aussi près que l'on veut par une forme de Pfaff C^∞ (resp. C^ω) qui s'exprime globalement sous la forme $\omega' = f dg + dh$.

De cette façon on montre non seulement l'existence sur toute variété compacte, avec $\chi(M_n) = 0$, de formes de Pfaff de classe maximale trois, mais aussi l'existence de formes sans zéros exprimables globalement de la façon la plus simple possible et que l'ensemble des formes de Pfaff de ce type est C^0 -dense dans l'espace des formes de Pfaff sans zéros.

Remarque. — A ma connaissance, il ne semble pas évident que, par des techniques élémentaires de topologie différentielle, on puisse construire explicitement sur une variété compacte M_n avec $\chi(M_n) = 0$, une forme de Pfaff sans zéros globalement exprimable sous la forme $\omega = f dg + dh$. Il est facile de voir, qu'il y a des formes de Pfaff sans zéros de classe maximale trois, qui ne peuvent pas se mettre globalement sous la forme $f dg + dh$.

D'autre part, on peut se convaincre que, étant donnée une forme de Pfaff sans zéros, on peut même par C^∞ -petites déformations monter la classe maximale de la forme (on a le même phénomène pour monter le rang maximal d'une application).

Remarque. — Il serait, peut-être intéressant d'étudier un problème relatif d'abaissement de la classe : on donne une forme de Pfaff sans zéros sur une variété M_n avec bord ∂M_n , vérifiant par exemple $\omega \wedge [d\omega]^2 \not\equiv 0$ à l'intérieur et $\omega \wedge [d\omega]^2 \equiv 0$ dans un voisinage de ∂M_n , on voudrait

construire une autre forme de Pfaff ω' sans zéros telle que $\omega' \wedge [d\omega']^2 \equiv 0$ partout et $\omega' \equiv \omega$ dans un voisinage du bord ∂M_n .

Il est évident (Théorème de Stokes) que par exemple la condition $[d\omega]^2 \equiv 0$ sur un voisinage de ∂M_n , n'est pas en général prolongeable à l'intérieur.

Les résultats antérieurs montrent donc que l'ensemble des formes de Pfaff sans zéros de classe maximale $p(p \geq 3)$ qui peuvent s'écrire globalement sous la forme

$$f_1 df_2 + \cdots + f_{2p-2} df_{2p-1} + df_{2p}$$

est C^0 -dense.

10. — La C^0 -densité des formes de Pfaff du type $f dg + dh$, met en évidence le curieux phénomène suivant. Soit ω une forme de Pfaff sur une variété compacte de dimension trois et supposons $\int_{M_3} \omega \wedge d\omega = 0$. Il est évident que l'on peut perturber ω , même par une C^∞ -petite déformation pour avoir $\int_{M_3} \omega' \wedge d\omega' \neq 0$.

Réciproquement, supposons que ω soit une forme de Pfaff telle que $\int_{M_3} \omega \wedge d\omega \neq 0$. D'après les résultats antérieurs, on peut approcher ω au sens C^0 , aussi près que l'on veut par une forme de Pfaff ω' telle que $\int_{M_3} \omega' \wedge d\omega' = 0$ avec $\omega' \wedge d\omega' \not\equiv 0$.

Remarque. — Les propriétés de la C^0 -stabilité du rang et du signe du jacobien pour les applications permettent de donner des exemples d'applications pour lesquelles on ne peut ni monter le rang minimal ni abaisser le rang maximal par C^0 -perturbations.

De façon analogue, en dimension trois, les propriétés précédentes permettent de montrer que l'ensemble des formes de Pfaff sans zéros dont on ne peut ni abaisser la classe maximale ni monter la classe minimale par C^0 -perturbations est C^0 -dense, dans l'espace des formes de Pfaff sans zéros sur la variété considérée.

D'après ce qui précède, l'abaissement de la classe maximale pour une forme de Pfaff sur une variété, se réduit à l'abaisse-

ment de la classe sur un pavé de R^N , d'une forme de Pfaff du type $\omega = x_1 dx_2 + \dots + x_{2p-1} dx_{2p}$.

La même méthode utilisée pour changer, par C^0 -perturbations, le signe d'une forme de contact sur une variété compacte (par exemple de dimension cinq) nous conduit à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} [dx_1 \wedge dx_2 + \dots + dx_{2p-1} \wedge dx_{2p} + d\omega_0]^2 \\ = - [dx_1 \wedge dx_2 + \dots + dx_{2p-1} \wedge dx_{2p}]^2. \end{aligned}$$

Mais ceci n'est pas possible, même ponctuellement (voir chapitre 1).

Ainsi, étant donnée une forme de Pfaff ω , quelconque, l'abaissement de la classe maximale à trois est équivalent à trouver des solutions aussi petites que l'on veut au sens C^0 pour l'équation :

$$[d\omega]^2 + 2 d\omega \wedge d\omega_0 + [d\omega_0]^2 \equiv 0.$$

Par contre, l'équation

$$(1 + \lambda^2)[d\omega]^2 + 2 d\omega \wedge d\omega_0 + [d\omega_0]^2 \equiv 0,$$

$\lambda \neq 0$ n'a pas de solutions même ponctuellement si $d\omega$ est de rang supérieur ou égal à six.

Remarque. — On remarquera que la méthode utilisée dans le chapitre II pour inverser le signe de la forme de contact $\omega = x_1 dx_2 + \dots + x_{2p-1} dx_{2p} + dx_{2p+1}$ est applicable à toute forme de contact sur un compact de R^{2p+1} qui puisse s'exprimer globalement sous la forme

$$\omega = f_1 df_2 + \dots + f_{2p-1} df_{2p} + df_{2p+1} \quad (1).$$

Il serait intéressant de trouver des formes de contact sur le pavé de R^{2p+1} qu'on ne puisse pas exprimer globalement sous la forme (1).

Une telle forme fournirait peut-être un exemple d'une forme de contact ω pour laquelle l'orientation de la $(2p+1)$ -forme $\omega \wedge [d\omega]^p$ est C^0 -stable.

11. — Le fait, pour une fonction holomorphe, d'être C^0 -petite implique : f est C^∞ -petite (Théorème de Cauchy),

d'où la stabilité de la classe d'une forme de Pfaff holomorphe par C^0 -perturbations holomorphes.

On peut généraliser les résultats antérieurs aux systèmes de Pfaff de rang r , définis globalement pour r -formes de Pfaff indépendantes et aux p -formes extérieures ($p > 1$).

Dans la même optique qu'en [I], il est naturel de se demander si l'existence d'un système de Pfaff, défini par r -formes de Pfaff indépendantes implique déjà l'existence d'un système de Pfaff de rang r qui puisse s'exprimer globalement le plus simplement possible.

En fait, on montre qu'un tel système de Pfaff peut être approché aussi près que l'on veut au sens C^0 par un système du type :

$$\omega_i = f_i dg + dh_i; \quad i = 1, 2 \dots r$$

Il est évident qu'un système de Pfaff de rang r , ne peut pas s'écrire avec un nombre plus petit de différentielles de fonctions.

Dans le cas des q -formes, en raison de la C^0 -stabilité du rang, on ne peut pas avoir C^0 -densité des q -formes qui s'expriment globalement sous la forme

$$f df_1 \wedge \dots \wedge df_q + dg_1 \wedge \dots \wedge dg_q.$$

On peut montrer cependant que les q -formes du type :

$$f df_1 \wedge \dots \wedge df_q + d\omega_1, \quad \omega_1 = (q-1)\text{-forme}$$

sont C^0 -denses dans l'espace des q -formes sans zéros.

Ainsi, toute q -forme Ω peut être C^0 -approchée aussi près que l'on veut par une q -forme Ω' telle que :

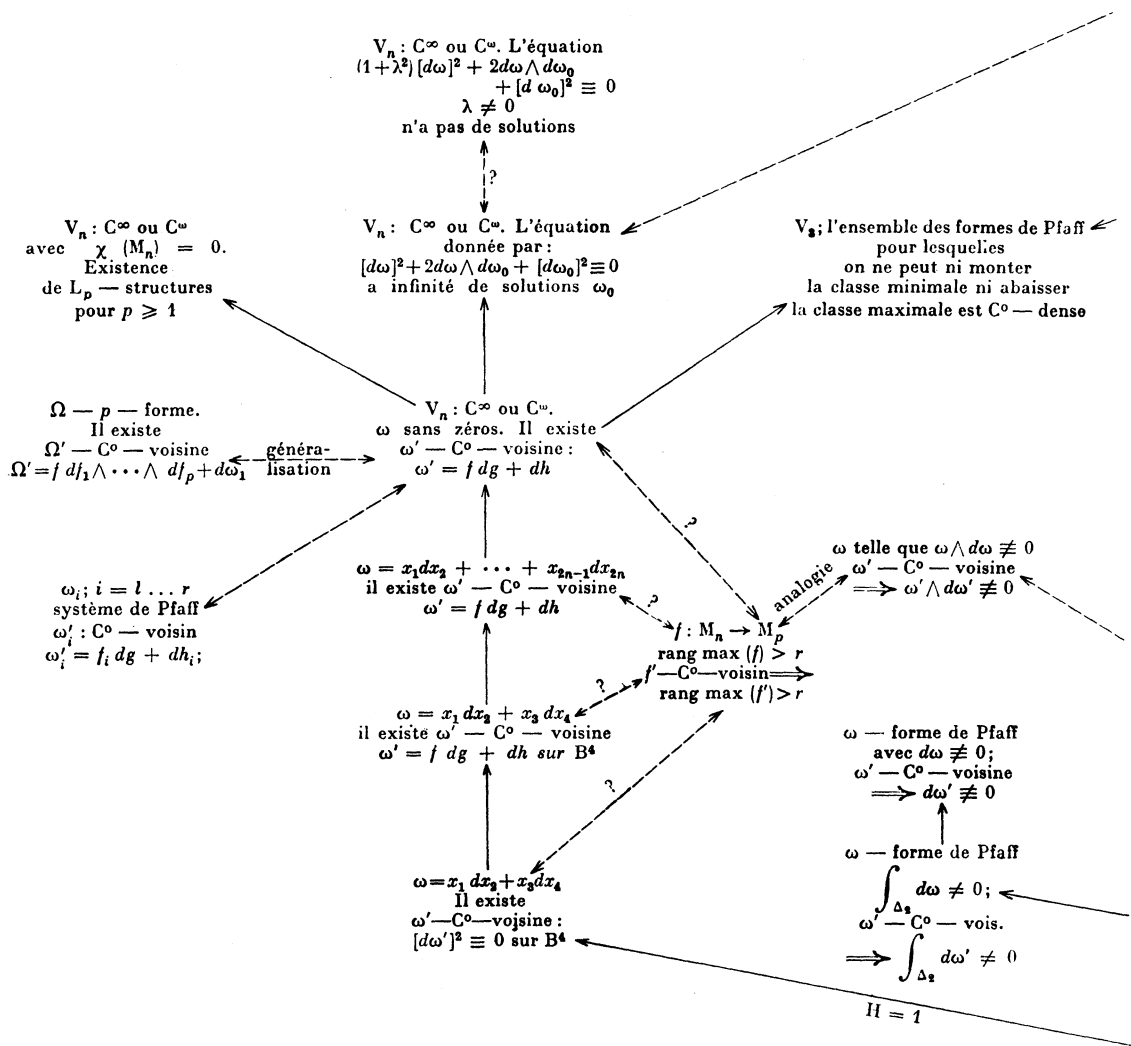
$$d\Omega' = df \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_q,$$

où f, f_1, \dots, f_q sont des fonctions globales.

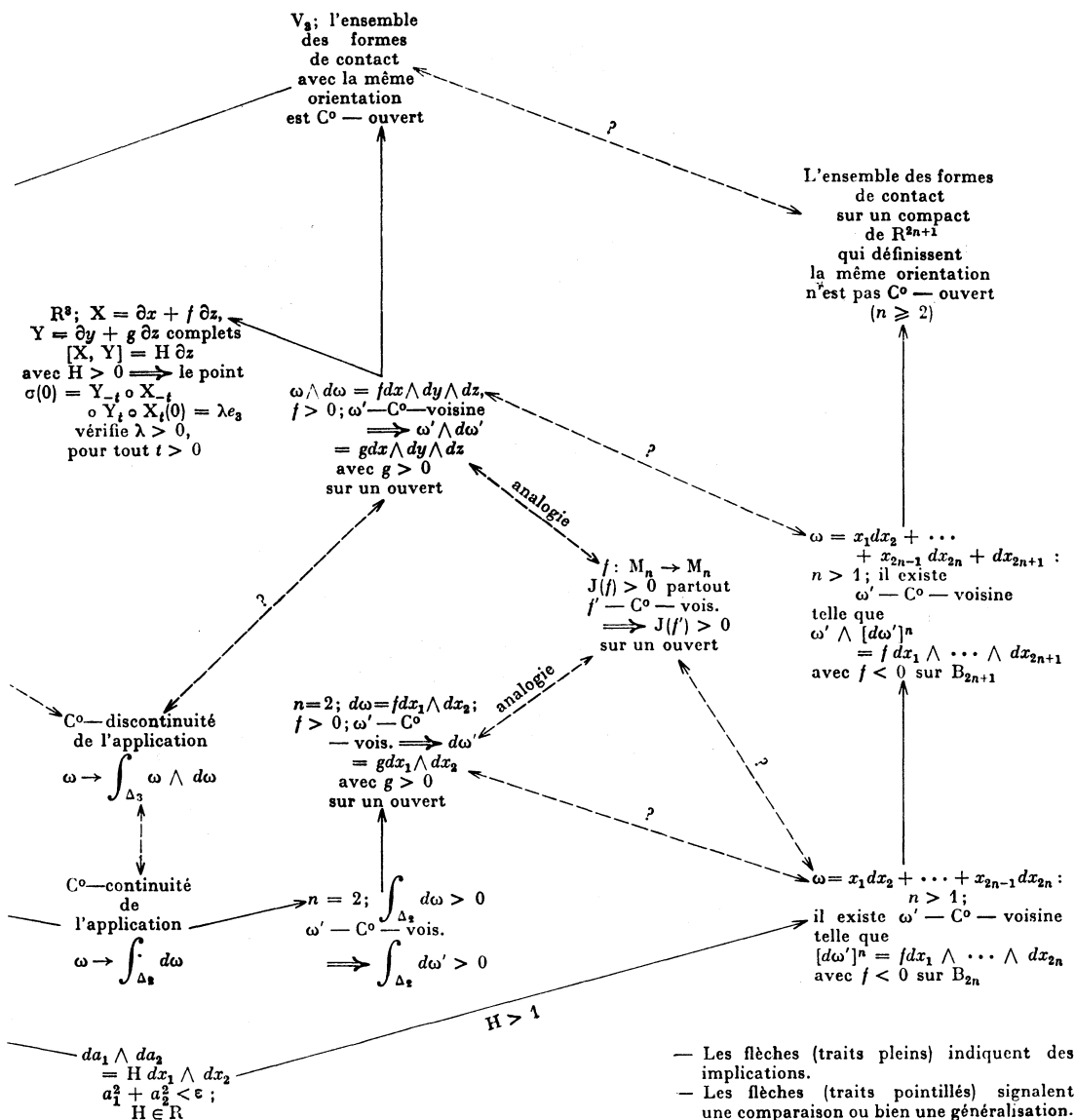
12. — Les phénomènes qu'on vient d'expliciter mettent en évidence un comportement, à notre avis curieux, de la différentielle extérieure d'une forme de Pfaff ω et plus particulièrement des formes extérieures du type $[d\omega]^2, \omega \wedge [d\omega]^2, \dots$ etc. relativement aux C^0 -perturbations. La liberté que l'on peut attendre d'une C^0 -déformation relativement aux propriétés

faisant intervenir la différentielle extérieure semble restreinte bien au-delà des conséquences directes de la formule de Stokes et en même temps plus grande que ne le laissent espérer les résultats connus de topologie différentielle (théorie des points critiques par exemple).

Cet article constitue l'essentiel du travail que j'ai présenté comme thèse de doctorat au Centre Universitaire de Mulhouse. Je remercie très vivement, Messieurs G. Reeb et R. Lutz que m'ont suggéré cette étude. Sans leur aide et leur intérêt constants, ce travail n'aurait pas été possible. La critique constructive de M. Martinet m'a été d'une aide précieuse. Je le remercie d'avoir bien voulu participer au jury. Je remercie, vivement, Messieurs G. Ancochea et A. Lichnérowicz, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour leur participation au jury.



ω — forme
de Pfaff
holomorphe
stabilité
de la classe



CHAPITRE O

GÉNÉRALITÉS

1. Quelques rappels.

Si Ω est une p -forme sur une variété compacte M_n , on appelle espace associé à Ω en un point $P \in M_n$, le sous-espace

$$A_{\Omega_p} = \{X \in T_p | \underline{X} | \Omega_p = 0\}.$$

La classe de Ω au point P est par définition la dimension du sous-espace de T_p^* orthogonal à $A_{\Omega_p} \cap A_{d\Omega_p}$, où $d\Omega_p$ est la différentielle extérieure de Ω au point P .

Ainsi la classe de Ω en P est égale à la dimension du plus petit sous-espace S_c de T_p^* qui vérifie à la fois :

$$\Omega_p \in \bigwedge^p S_c \quad \text{et} \quad d\Omega_p \in \bigwedge^{p+1} S_c.$$

L'espace S_c s'appelle le système caractéristique de Ω au point P . En particulier, pour les formes de Pfaff sans zéros, il existe un algorithme pour calculer la classe

$$\begin{aligned} \text{cl } \omega_p = 2s &\iff [d\omega_p]^s \neq 0 & \text{et} & \omega_p \wedge [d\omega_p]^s = 0 (*) \\ \text{cl } \omega_p = 2s + 1 &\iff \omega_p \wedge [d\omega_p]^s \neq 0 & \text{et} & [d\omega_p]^{s+1} = 0. \end{aligned}$$

(*) *Remarque 1.* — Comme la forme ω vérifie $\omega_p \neq 0$, les deux conditions $[d\omega_p]^s \neq 0$ et $\omega_p \wedge [d\omega_p]^s = 0$ impliquent $[d\omega_p]^{s+1} = 0$.

Pour une forme de Pfaff sans zéros, la situation la plus agréable est celle où la classe de ω est une fonction constante; dans ce cas, le théorème de Darboux donne un modèle local pour ω .

$$\begin{aligned} \omega &= dx_1 + x_2 dx_3 + \dots + x_{2r} dx_{2r+1} \\ \text{ou} \quad \omega &= (1 + x_1) dx_2 + \dots + x_{2r-1} dx_{2r}. \end{aligned}$$

Lorsque la classe de ω n'est pas constante, elle est encadrée par ses extrêmes sur M_n :

la classe maximale (notée $\text{cl max } \omega$)

la classe minimale (notée $\text{cl min } \omega$).

Par définition :

$$\begin{aligned} \text{cl max } \omega = 2s &\iff [d\omega]^s \not\equiv 0 & \text{et } \omega \wedge [d\omega]^s &\equiv 0 \\ \text{cl max } \omega = 2s + 1 &\iff \omega \wedge [d\omega]^s \not\equiv 0 & \text{et } [d\omega]^{s+1} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{cl max } \omega = 1 \iff \omega \neq 0, \quad d\omega \equiv 0$$

c'est-à-dire ω est fermée.

$$\text{cl max } \omega = 2 \iff \omega \neq 0, \quad d\omega \not\equiv 0, \quad \omega \wedge d\omega \equiv 0,$$

c'est-à-dire ω est complètement intégrable et non fermée.

$$\begin{aligned} \text{cl max } \omega = 3 &\iff \omega \neq 0, \quad d\omega \not\equiv 0, \quad \omega \wedge d\omega \not\equiv 0 \\ \text{et} & \quad [d\omega]^2 \equiv 0. \end{aligned}$$

La condition $\text{cl max } \omega \leq r$ est donc une généralisation de la condition d'intégralité complète.

Par exemple, si $\omega = \sum_{i=1}^r f_i dg_i$, on a $\text{cl max } \omega \leq 2r$; en particulier une forme de Pfaff sans zéros du type :

$$\omega = f dg + dh$$

est de classe maximale ≤ 3 .

Remarque 2. — L'égalité $f\omega \wedge [d(f\omega)]^s = f^{s+1}\omega \wedge [d\omega]^s$ montre en particulier que la propriété pour une forme de Pfaff d'être de classe maximale $2s + 1$, exprime non seulement une propriété globale de ω , mais encore une propriété du champ de plans défini par ω . De façon analogue :

$$\begin{aligned} \text{cl min } \omega = 2s &\iff \omega \neq 0, \dots, \omega \wedge [d\omega]^{s-1} \neq 0, \\ & \quad [d\omega]^s \neq 0 \text{ et } \omega \wedge [d\omega]^s \text{ a des zéros.} \\ \text{cl min } \omega = 2s + 1 &\iff \omega \neq 0, \quad \omega \wedge [d\omega]^s \neq 0 \\ \text{et} & \quad [d\omega]^{s+1} \text{ a des zéros.} \end{aligned}$$

2. Expression globale d'une forme de Pfaff.

Localement, une forme de Pfaff s'écrit

$$\omega = \sum a_i(x_1, \dots, x_n) dx_i.$$

On s'intéresse ici à une expression globale de ω du type $\omega = \sum f_i dg_i$ où le nombre de paires (f_i, g_i) est en général plus grand que la dimension de la variété.

PROPOSITION. — Soit ω une forme de Pfaff sur une variété compacte C^∞ (resp. C^ω). Alors ω peut s'exprimer globalement sous la forme :

$$\omega = \sum_{i=1}^N f_i dg_i$$

où f_i et g_i sont des fonctions différentiables globales C^∞ (resp. C^ω).

La démonstration de cette proposition utilise dans le cas C^∞ une partition de l'unité.

Dans le cas C^ω , la proposition est une simple conséquence du fait suivant : Si M_n est une sous-variété analytique réelle de \mathbb{R}^N et F est un faisceau cohérent sur M_n , alors

$$H^k(M_n; F) = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

(H. Cartan, *Bull. Soc. Math. France*, 1957).

Remarque 3. — Dans les chapitres suivants, on va considérer sur l'espace des p -formes extérieures la C^0 -topologie, c'est-à-dire la topologie de la convergence compacte des sections du fibré $\bigwedge_p T^*M$.

Remarque 4. — La C^0 -stabilité du rang d'une application et du signe du jacobien résulte du fait suivant :

Si f est une application différentiable : $f: S^n \rightarrow S^n$ de degré > 0 , toute prolongation de f à la boule B^n , a des points dans \mathring{B}^n de jacobien > 0 .

Notation. — Pour des raisons de commodité, on notera $\omega \not\equiv 0$ pour $\exists x | \omega \neq 0$.

3. C⁰-Stabilité des conditions $d\omega \not\equiv 0$ et $\omega \wedge d\omega \not\equiv 0$ (ω forme de Pfaff).

La C⁰-stabilité de la condition $d\omega = 0$ est une conséquence immédiate du théorème de Stokes.

Pour la condition $\omega \wedge d\omega \not\equiv 0$, la C⁰-stabilité repose sur les deux remarques suivantes :

1) Si ω est une forme complètement intégrable dans R^3 , transverse à une droite r , les courbes intégrales de ω placées sur tout cylindre assez petit, axé sur cette droite sont des courbes fermées.

2) Si ω est une forme de Pfaff, non complètement intégrable dans R^3 , il existe une droite r , transverse à ω , telle que les courbes intégrales de la forme ω , placés sur tout cylindre assez petit, axé sur r , sont des courbes ouvertes.

CHAPITRE PREMIER

PHÉNOMÈNES DE C⁰-DENSITÉ

Dans ce chapitre sont étudiées des conditions C¹-stables qui ne sont pas C⁰-stables et sont exposés plusieurs phénomènes de C⁰-densité.

1. Non stabilité des conditions:

$$[d\omega]^2 \not\equiv 0, \omega \wedge [d\omega]^2 \not\equiv 0, \dots \text{etc.}$$

PROPOSITION 1.1. — *On considère dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n le pavé $H = \{(x_1, \dots, x_n) \mid -c \leq x_i \leq +c\}$ et la forme $\omega = x_1 dx_2 + \dots + x_{2p-1} dx_{2p}$ ($p \geq 2$). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une forme de Pfaff ω_0 analytique sur un voisinage de H telle que :*

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \|\omega_0\| < \varepsilon. \\ \text{(ii)} \quad & [d(\omega + \omega_0)]^2 \equiv 0, \end{aligned}$$

(iii) $\omega' = \omega + \omega_0$ s'écrit globalement $f_1 df_2 + df_3$; les f_i étant des fonctions analytiques sur un voisinage de H .

Ce lemme se démontre par récurrence sur p .

$$1) \quad \omega = x_1 dx_2 + x_3 dx_4.$$

Soient h et k deux réels non nuls tels que

$$0 < \eta^2 < 2hx_1 + k < \varepsilon^2; \quad -c \leq x_1 \leq +0$$

voir figure (1).

Posons :

$$a_1(x_1, x_2) = \sqrt{2hx_1 + k} \cos \frac{x_2}{h}$$

$$a_2(x_1, x_2) = \sqrt{2hx_1 + k} \sin \frac{x_2}{h}$$

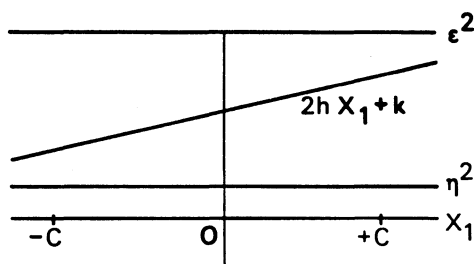


FIG. 1.

La forme $\omega_0 = a_1(x_1, x_2) dx_3 + a_2(x_1, x_2) dx_4$ vérifie (i) et $da_1 \wedge da_2 = dx_1 \wedge dx_2$. Alors

$$d(\omega + \omega_0) = d(a_1 - x_4) \wedge d(a_2 + x_3).$$

Soit : $f_1 = a_1 - x_4$ et $f_2 = a_2 + x_3$; on a

$$d(\omega + \omega_0) = df_1 \wedge df_2.$$

Il existe donc f_3 telle que $\omega + \omega_0 = f_1 df_2 + df_3$ sur H , les f_i étant analytiques au voisinage de H .

Si $\omega = x_1 dx_2 + \dots + x_{2p-3} dx_{2p-2} + x_{2p-1} dx_{2p}$ se réduit à $g_1 dg_2 + dg_3 + x_{2p-1} dx_{2p}$ on utilise les fonctions

$$a_1(x_{2p-1}, x_{2p}) \quad \text{et} \quad a_2(x_{2p-1}, x_{2p})$$

pour conclure comme précédemment.

Remarque 1. — Comme $[d\omega']^2 \equiv 0$, la non C^0 -stabilité des conditions $\omega \wedge [d\omega]^2 \not\equiv 0$, $[d\omega]^3 \not\equiv 0 \dots$ etc... est maintenant évidente.

2. C^0 -Densité des formes de Pfaff du type $f dg + dh$.

On étudie ici en utilisant les résultats précédents le problème de l'existence sur une variété compacte de formes sans zéros de classe maximale ≥ 3 .

Remarquons d'abord que, étant donnée sur une variété compacte M_n , une forme de Pfaff sans zéros, de classe maximale r , ($r < n$), il est évident qu'on peut par une C^∞ -perturbation aussi petite que l'on veut, obtenir une autre forme de Pfaff sans zéros de classe maximale $> r$.

Cela réduit le problème de trouver des formes de Pfaff sans zéros d'une certaine classe maximale à celui de trouver des

formes de Pfaff sans zéros de classe maximale le plus petit possible.

On connaît l'existence de formes de Pfaff sans zéros de classe maximale le plus petit possible dans les cas suivants :

1) Sur S^1 , toute forme de Pfaff analytique sans zéros est de classe maximale 1.

Remarquons que si $\omega = x_1 dx_2 - x_2 dx_1$, la forme $i^*(\omega)$ est du type $f dg + dh$.

2) Sur S^{2p+1} , il n'y a pas de formes sans zéros de classe maximale 1.

3) Sur S^{2p+1} , il y a des formes de Pfaff C^∞ , sans zéros de classe maximale deux, qui d'après (2) est la classe maximale la plus petite possible pour une forme de Pfaff sans zéros [14].

4) Sur S^{2p+1} ($p \geq 1$), il n'y a pas des formes de Pfaff sans zéros analytiques sans singularités de classe maximale égale à deux [4].

5) Sur S^{2p+1} il y a des formes ω analytiques telles que $cl m\omega = 3$ [5].

PROPOSITION 2.1. — Soit M_n une variété compacte C^∞ (resp. C^ω) avec caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M_n) = 0$. Étant donnée une forme de Pfaff ω sans zéros sur M_n , C^∞ (resp. C^ω) dans tout C^0 -voisinage de ω , il existe une 1-forme ω' sans zéros C^∞ (resp. C^ω) qui peut s'écrire globalement sous la forme :

$$\omega' = f dg + dh$$

où f, g et h sont des fonctions C^∞ (resp. C^ω) sur la variété M_n .

COROLLAIRE 1. — Étant donnée une forme de Pfaff sans zéros sur une variété compacte M_n et deux nombres réels $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, il y a une forme de Pfaff sans zéros du type

$$f dg + dh$$

qui vérifie :

$$1) \quad |\omega - (f dg + dh)| < \varepsilon.$$

$$2) \quad f^2 + g^2 < \eta \text{ partout.}$$

Pour le démontrer, il suffit de constater que la forme

$$\omega = x_1 dx_2 + dx_3$$

peut s'écrire sur un pavé de \mathbb{R}^3 sous la forme $a_1 da_2 + df_3$ avec $a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon$ sur le pavé et ensuite faire l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : M_n &\rightarrow \mathbb{R}^3; & x_1 &= f \\ & & x_2 &= g \\ & & x_3 &= h. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2. — *Sur toute variété compacte C^∞ (resp. C^ω) telle que $\chi(M_n) = 0$ il y a des formes de Pfaff sans zéros C^∞ (resp. C^ω) de classe maximale égale à trois.*

En effet, étant donnée une forme de Pfaff sans zéros, non complètement intégrable sur M_n , la proposition ci-dessus, permet de la perturber en une forme de Pfaff ω' sans zéros du type $f dg + dh$. On a donc $[d\omega']^2 \equiv 0$ et d'après le chapitre 1, $\omega' \wedge d\omega' \not\equiv 0$.

En particulier donc, les formes de classe maximale égale à trois sont denses dans l'espace des formes de Pfaff sans zéros muni de la C^0 -topologie.

Remarque 2. — On sait que toute forme de Pfaff sans zéros peut s'écrire globalement sous la forme $\omega = \sum_{i=1}^{2n} f_i dg_i$.

Il est alors naturel de chercher des formes de Pfaff sans zéros, exprimables globalement avec le nombre minimum de termes du type $f_i dg_i$.

Si $\chi(M_n) = 0$, on peut donc définir un nombre $\lambda(M_n)$ égal au plus petit entier r tel qu'il existe r -couples de fonctions (f_i, g_i) avec $\sum_{i=1}^r f_i dg_i$ sans zéros sur M_n . On a clairement, si M_n est compacte, $\lambda(M_n) \geq 2$ et si M_n et M'_n sont difféomorphes, $\lambda(M_n) = \lambda(M'_n)$.

La Proposition 2.1 implique $\lambda(M_n) = 2$ pour toute variété compacte.

Démonstration de la proposition. — Soit ω une forme de Pfaff sans zéros sur M_n . Elle s'écrit :

$$\omega = \sum_{i=1}^{2n} f_i dg_i$$

Soit ψ l'application différentiable de M_n dans R^{4n} définie par

$$\psi: M_n \rightarrow R^{4n} \quad \begin{cases} x_i \circ \psi = f_i & i = 1, 2, \dots, 2n \\ y_i \circ \psi = g_i \end{cases}$$

Alors $\psi^*(\Sigma x_i dy_i) = \omega$.

M_n étant compacte, son image par ψ est contenue dans un pavé $[-c, +c]^{4n} = H$. D'après la Proposition 1.1, il y a une forme de Pfaff ω_0 dans H telle que :

- a) $\|\omega_0\| < \varepsilon$ (où ε est un réel > 0 arbitraire),
- b) $[d(\Sigma x_i dy_i + \omega_0)]^2 \equiv 0$,
- c) $\Sigma x_i dy_i + \omega_0 = f_1 df_2 + df_3$, où f_1, f_2, f_3 sont des fonctions analytiques sur H .

Pour ε assez petit, $\psi^*(\omega_0) + \omega$ est sans zéros sur M_n et la forme

$$\omega' = \psi^*(\Sigma x_i dy_i + \omega_0) = \psi^*(f_1) d\psi^*(f_2) + d\psi^*(f_3)$$

vérifie les propriétés voulues.

COROLLAIRE 3. — Soit M_{2n+1} une variété compacte de dimension $2n + 1$. L'ensemble des formes de Pfaff vérifiant 1) $\omega \wedge [d\omega]^n \neq 0$; 2) $\int_{M_{2n+1}} \omega \wedge [d\omega]^n = 0$ est C^0 -dense.

En effet, en considérant la forme $f dg + dh$ sans zéros, il est facile d'ajouter des termes C^∞ -petits du type $f_i dg_i$ de façon que :

$$df \wedge dg \wedge dh \wedge df_1 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge df_{n-1} \wedge dg_{n-1} \neq 0.$$

Les propriétés 1) et 2) en résultent.

Remarque 3. — Soit M_3 une variété de dimension trois et soit ω une forme de Pfaff sur M_3 telle que $\int_{M_3} \omega \wedge d\omega = 0$. Il est évident que par une petite C^∞ -perturbation de ω , on peut obtenir une forme de Pfaff ω' telle que

$$\int_{M_3} \omega' \wedge d\omega' \neq 0.$$

Le corollaire précédent, en donne une sorte de réciproque en C^0 -topologie. Si ω est une forme de Pfaff telle que :

$$\int_{M_3} \omega \wedge d\omega \neq 0$$

il existe ω' aussi près que l'on veut de ω au sens C^0 telle que :

$$\int_{M_3} \omega' \wedge d\omega' = 0 \quad \text{avec} \quad \omega' \wedge d\omega' \not\equiv 0.$$

COROLLAIRE 4. — *L'ensemble des formes de contact sur une variété compact de dimension $2n + 1$, n'est pas C^0 -ouvert. (Il est évident que cet ensemble est ouvert pour la C_1 -topologie.)*

COROLLAIRE 5. — *Étant donné un système de Pfaff de rang deux, défini globalement par deux formes de Pfaff indépendantes, on peut par une C^0 -perturbation obtenir un système de rang deux et de classe maximale ≤ 6 .*

Remarque 4. — On a vu en [I] que si une forme de Pfaff ω vérifie $\omega \wedge d\omega \not\equiv 0$, toute C^0 -déformation ω' de ω aussi $\omega' \wedge d\omega' \not\equiv 0$.

La Proposition 2.1 montre que si ω est sans zéros et vérifie, par exemple $\omega \wedge [d\omega]^2 \not\equiv 0$, alors ω peut s'approcher en C^0 -topologie par ω' telle que $[d\omega']^2 \equiv 0$.

Il se pourrait que la condition $\omega \wedge [d\omega]^2 \not\equiv 0$ soit C^0 -stable, si l'on se restreint aux formes ω' , C^0 -voisines de ω telles que $[d\omega']^2 \not\equiv 0$. Ce n'est pas le cas. En effet, soit ω une forme de Pfaff telle que :

$$\omega \wedge [d\omega]^2 \not\equiv 0.$$

Soit ω' proche au sens C^0 de ω du type :

$$\omega' = f dg + dh.$$

Considérons la forme :

$$\omega'' = f dg + dh + \varepsilon h dg'.$$

Ainsi

$$[d\omega'']^2 = 2 \varepsilon df \wedge dg \wedge dh \wedge dg' \quad \text{et} \quad \omega'' \wedge [d\omega'']^2 \equiv 0.$$

Alors, il suffit de choisir g' de façon que :

$$df \wedge dg \wedge dh \wedge dg' \not\equiv 0.$$

pour avoir un contre-exemple.

Remarque 5. — Le problème d'abaissement de la classe maximale d'une forme de Pfaff à trois est équivalent à considérer sur la variété, l'équation :

$$[d\omega]^2 + 2 d\omega \wedge d\omega_0 + [d\omega_0]^2 \equiv 0 \quad (1)$$

où l'inconnue est la forme de Pfaff ω_0 .

Les théorèmes précédents montrent que l'équation (1) a des solutions ω_0 globales sur la variété, si petites comme l'on veut au sens de la C^0 -topologie.

C'est un fait curieux que si l'on considère l'équation

$$(1 + \lambda^2)[d\omega]^2 + 2 d\omega \wedge d\omega_0 + [d\omega_0]^2 \equiv 0 \quad \text{avec } \lambda \neq 0 \quad (2)$$

avec ω une forme de Pfaff donnée sur la variété telle que $[d\omega]^3 \neq 0$ et ω_0 inconnue, il y a en général, aucune solution à l'équation (2). Cette affirmation repose sur la

PROPOSITION 3.1. — *Il n'y a pas un 2-forme η telle que vérifie :*

$$\eta^2 = -[e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6]^2;$$

e_i base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^6 .

Remarque 6. — Il est évident, que par contre, en dimension 4, la forme $-[e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4]^2$ est un carré.

Démonstration. — L'expression précédente peut s'écrire sous la forme :

$$[\eta - i(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6)] \wedge [\eta + i(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6)] = 0 \quad (*).$$

Il est clair que s'il existe une 2-forme η vérifiant (*), elle doit être de rang six.

Posons

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta - i(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6) \\ \eta_2 &= \eta + i(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6). \end{aligned}$$

Supposons que η_1 et η_2 soient de rang 4, alors :

$$\begin{aligned} \eta_1^3 &= 0 \\ \eta_2^3 &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\eta_1^3 &= \eta^3 - 3i\eta^2 \wedge [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6] \\ &\quad - 3\eta \wedge [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6]^2 = 0 \\ \eta_2^3 &= \eta^3 + 3i\eta^2 \wedge [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6] \\ &\quad - 3\eta \wedge [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6]^3 = 0\end{aligned}$$

d'où :

$$2\eta^3 - 6\eta \wedge [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6]^2 = 0$$

et d'après (*)

$$8\eta^3 = 0 \Rightarrow \eta \text{ est de rang } 4, \text{ en contradiction.}$$

Ainsi, dans l'expression (*), ou bien η_1 , ou bien η_2 est de rang six. D'après un théorème de Lepage, ou $\eta_1 = 0$ ou $\eta_2 = 0$, c'est-à-dire, les seules solutions de l'équation (*) sont

$$\begin{aligned}\eta_1 &= i(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6) \\ \eta_2 &= -i(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6).\end{aligned}$$

Remarque 7. — Si ω est une forme de Pfaff sans zéros sur une variété compacte qui vérifie

$$\omega \wedge [d\omega]^p \not\equiv 0 \quad \text{et} \quad \omega \wedge [d\omega]^{p+1} \equiv 0$$

on dit [9] que ω définit sur M_n une L_p -structure. Ainsi, donner sur M_n une L_0 -structure est équivalent à donner une 1-forme sans zéros complètement intégrable.

Les résultats de ce chapitre permettent de construire des L_p -structures pour tout $p > 0$, sur toute variété compacte avec caractéristique d'Euler-Poincaré égale à zéro.

Soit ω une L_p -structure sur M_n et soit X un champ de vecteurs tel que $\underline{X}\omega = 1$. On a

$$[d\omega]^{p+1} = (p+1) \cdot \omega \wedge [d\omega]^p \wedge \underline{X} d\omega.$$

Posons $\lambda = (p+1)\underline{X} d\omega$.

On montre [11] que la forme $\lambda \wedge [d\lambda]^{2p+1}$ est fermée et que la classe de cohomologie, seulement dépend du champ de plans défini par ω .

Cette classe de cohomologie I est donc un invariant de la L_p -structure défini par ω .

Il est facile de voir que si une forme de Pfaff sans zéros s'écrit globalement sous la forme :

$$\omega = f_1 df_2 + f_3 df_4$$

l'invariant I est zéro.

En effet, dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} [d\omega]^2 &= df_1 \wedge df_2 \wedge df_3 \wedge df_4 \\ &= (f_1 df_2 + f_3 df_4) \wedge (df_1 \wedge df_2 + df_3 \wedge df_4) \wedge \lambda. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda = - \frac{f_1 df_1 + f_3 df_3}{f_1^2 + f_3^2} \quad \text{d'où} \quad d\lambda = 0 \quad \text{et} \quad I = 0.$$

Des théorèmes précédents, on déduit que :

L'ensemble des formes de Pfaff sans zéros avec invariant nul est C^0 -dense.

Remarquons qu'une forme sans zéros, peut avoir un invariant nul et ne pas être de la forme $f_1 df_2 + f_3 df_4$.

Par exemple, une forme de classe constante trois sur $S^3 \times S^4$ obtenue à partir d'une forme de contact sur S^3 .

Remarque 8. — De la proposition précédente, se déduit que l'invariant I ne fait pas de différence entre les formes de Pfaff sans zéros qui s'expriment globalement sous la forme :

$$\omega = f_1 df_2 + f_3 df_4.$$

Ainsi, pour la classification des formes de Pfaff qui s'expriment sous la forme $f_1 df_2 + f_3 df_4$, il faut avoir des invariants plus fins. L'exemple suivant, montre l'existence de formes de Pfaff qui s'expriment sous la forme $f dg + dh$ et ne sont pas équivalents par difféomorphisme.

On considère sur le tore T^3 la forme $d\theta_1$. Elle est bien du type $f dg + dh$.

Soit ω une forme de Pfaff non fermée sur T^3 et soit ω' une C^0 -approximation de ω du type $f dg + dh$.

D'après 3 - chapitre — 0 —, ω' n'est pas fermée et alors n'est pas équivalente à $d\theta_1$.

CHAPITRE II

COMPOTEMENT DE LA CLASSE MINIMALE D'UNE FORME DE PFAFF, PAR C^0 -PERTURBATIONS, EN DIMENSION TROIS

Dans ce chapitre, on expose un résultat relatif au comportement par C^0 -perturbations de la classe minimale d'une forme de Pfaff sans zéros sur une variété compacte de dimension trois.

1. — Soit ω une forme de Pfaff sans zéros sur une variété compacte M_{2n+1} , sur laquelle il y a des formes de contact et soit Ω une forme de volume. Supposons que l'ensemble ouvert $S = \{x \in M_{2n+1} \mid \omega_x \wedge [d\omega_x]^n \neq 0\}$ ait au moins deux composantes connexes S_1 et S_2 telles que :

a) Pour tout $x \in S_1$, la $(2n+1)$ -forme $\omega_x \wedge [d\omega_x]^n$ définisse la même orientation que Ω_x .

b) Pour tout $x \in S_2$, la $(2n+1)$ -forme $\omega_x \wedge [d\omega_x]^n$ définisse l'orientation opposée à celle de Ω .

Remarque 1. — D'après les théorèmes du chapitre I, l'ensemble des formes de Pfaff sans zéros, pour lesquelles l'ensemble S vérifie cette propriété est C^0 -dense.

Il est évident qu'à partir d'une telle forme de Pfaff, on ne peut pas obtenir une forme de contact par perturbations C^1 -petites. Il est alors naturel de chercher si dans tout C^0 -voisinage d'une telle forme de Pfaff il y a une forme de contact.

2. — L'étude de ce problème pose la question suivante :

Soit ω une forme de contact sur un compact de R^{2n+1} . Existe-t-il ω' aussi voisine que l'on veut de ω , au sens C^0 et vérifiant :

$$\omega' \wedge [d\omega']^n = -\lambda^2 \omega \wedge [d\omega]^n$$

où λ est une fonction sans zéros partout?

Il est évident qu'une réponse négative à cette question implique, en particulier, l'existence d'un C^0 -voisinage de ω , sans formes de contact. En fait, on montre que si $n \geq 2$, il y a des formes de contact ω telles que dans tout C^0 -voisinage il y a des formes de Pfaff ω' vérifiant :

$$\omega' \wedge [d\omega']^n = -\lambda^2 \omega \wedge [d\omega]^n.$$

Par contre, si $n = 1$, la réponse à la question ci-dessus est négative.

PROPOSITION 1.2. — *On considère dans R^{2n+1} le pavé $H = \{(x_1, \dots, x_n) \mid -c \leq x_i \leq +c \text{ } c \text{ nombre réel donné}\}$ et la forme de contact*

$$\omega = x_1 dx_2 + \dots + x_{2n-1} dx_{2n} + dx_{2n+1}; \quad n \geq 2.$$

Alors, dans tout C^0 -voisinage de ω , il existe une forme de contact ω' , définie sur H et vérifiant :

- a) ω' est analytique sur H ;
- b) $\omega' \wedge [d\omega']^n = -\lambda^2 \omega \wedge [d\omega]^n$; λ nombre réel donné.

Il suffit de prendre :

$$\omega' = x_1 dx_2 + \dots + x_{2n-1} dx_{2n} + dx_{2n+1} + a_1(x_{2n-3}, x_{2n-2}) dx_{2n-1} + a_2(x_{2n-3}, x_{2n-2}) dx_{2n}$$

où a_1 et a_2 sont des fonctions analytiques sur H , vérifiant :

- a) $a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon$;
- b) $da_1 \wedge da_2 = \lambda^2 dx_{2n-3} \wedge dx_{2n-2}$.

Remarque 2. — L'égalité (b) peut être satisfaite pour un choix, de fonctions a_1 et a_2 petites ou sans C^0 , analogue à celui du chapitre I.

On a :

$$[d\omega']^n = n! (1 - \lambda^2) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2n}$$

et alors

$$\omega' \wedge [d\omega']^n = n! (1 - \lambda^2) \omega \wedge [d\omega]^n.$$

C.Q.F.D.

Remarque 3. — Dans la construction du contre-exemple ci-dessus, on a utilisé la propriété suivante.

Étant donné la forme de Pfaff,

$$\omega = x_1 dx_2 + \dots + x_{2n-1} dx_{2n}; \quad n \geq 2$$

sur le pavé de \mathbb{R}^{2n} , il existe une forme de Pfaff ω' aussi proche que l'on veut de ω , au sens C^0 , et telle que

$$[d\omega']^n = -\lambda^2 [d\omega]^n.$$

Le théorème de Stokes montre que l'hypothèse $n \geq 2$ est essentielle; ainsi, étant donné la forme de Pfaff $\omega = x_1 dx_2$ sur un pavé de \mathbb{R}^2 , on ne peut pas avoir ω' proche C^0 de ω et vérifiant :

$$d\omega' = -\lambda^2 d\omega \quad \text{avec} \quad \lambda \neq 0.$$

Remarque 4. — On a montré (voir chapitre 1) qu'en général l'équation :

$$[d\omega + d\omega_0]^2 = -\lambda^2 [d\omega]^2 \quad \lambda \neq 0$$

n'a pas des solutions même ponctuellement.

D'ailleurs, la Proposition 1.2, montre que par exemple la forme de Pfaff $\omega = x_1 dx_2 + x_3 dx_4 + x_5 dx_6 + dx_7$ peut s'approcher C^0 — par ω' telle que

$$[d\omega']^3 = -\lambda^2 [d\omega]^3 \quad (1).$$

Ceci montre qu'il est essentiel de prendre dans (1) l'exposant égal trois.

COROLLAIRE 1. — *L'ensemble des formes de contact qui définissent la même orientation sur un pavé de \mathbb{R}^{2n+1} n'est pas C^0 -ouvert pour $n \geq 2$.*

Pour $n = 1$, nous avons en particulier la

PROPOSITION 2.2. — *Si ω est une forme de contact sur une variété de dimension trois, toute forme de contact suffisamment voisine de ω au sens de la C^0 -topologie, définit la même orientation que celle de ω .*

Remarque 5. — On sait cependant [6] qu'en dimension trois, toute forme de Pfaff sans zéros est *homotope* comme forme sans zéros à une forme de contact d'orientation arbitraire.

La proposition antérieure montre que cette homotopie ne peut pas être C^0 -petite. La Proposition 2.2 est une conséquence de la

PROPOSITION 3.2. — *On considère dans le cube I^3 de R^3 , la forme de contact $\omega = x dy + dz$. Alors si ω' est aussi de contact et suffisamment C^0 -voisine de ω , on a :*

$$\omega' \wedge d\omega' = f dx \wedge dy \wedge dz \quad \text{avec} \quad f > 0.$$

Remarque 6. — On peut supposer

$$\omega' = a_1 dx + (x + a_2) dy + dz$$

où a_1 et a_2 sont « petits ».

Remarque 7. — Soit ω une forme de Pfaff, et soient X, Y, Z des champs de vecteurs globaux et indépendants tels que $\omega(X) = \omega(Y) = 0, \omega(Z) = 1$. Alors on a

$$\omega \wedge d\omega(X, Y, Z) = -\omega([X, Y]).$$

Si on applique cette remarque à la forme ω' et aux champs de vecteurs

$$X = \partial_x - a_1 \partial_z, \quad Y = \partial_y - (x + a_2) \partial_z, \quad Z = \partial_z$$

On obtient :

$$\omega' \wedge d\omega'(X, Y, Z) = -f \partial_z$$

où f est donnée par $[X, Y] = f \partial_z$.

Remarque 8. — Soient φ_t et ψ_t les groupes à un paramètre engendrés respectivement par $\partial_x, \partial_y - x \partial_z$. On a alors pour $t = 1$

$$\psi_{-1} \circ \varphi_{-1} \circ \psi_{+1} \circ \varphi_{+1}(0, 0, 0) = (0, 0, -1).$$

La Proposition 3.2 résulte maintenant du

LEMME. — *Soient $X = \partial_x + f_1 \partial_z$ et $Y = \partial_y + g_1 \partial_z$ des champs de vecteurs complets dans l'espace R^3 et soient φ_t et ψ_t les groupes à un paramètre engendrés par X et Y respectivement.*

Alors la condition $[X, Y] = f \partial_z$ avec $f > 0$ implique, que pour tout $t > 0$, $\sigma_t(0) = \psi_{-t} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_t \circ \varphi_t(0, 0, 0) = \lambda.e_3$ avec $\lambda > 0$.

Remarque 9. — Soient g et g' les fonctions à valeurs réelles définies sur le carré $0 \leq t, t' \leq 1$ par :

$$\begin{aligned} g(t, t') &= \psi_t \circ \varphi_t(0, 0, 0) \cdot e_3 \\ g'(t, t') &= \psi_{-t} \circ \varphi_{-t}(P_1) \cdot e_3 \quad \text{où } P_1 = \psi_{+1} \circ \varphi_{+1}(0, 0, 0) \end{aligned}$$

et soient a, b, c les nombres :

$$\begin{aligned} a &= \min g(t, t') \\ b &= \max g'(t, t') \\ -c &\leq a, b \leq +C. \end{aligned}$$

Soit H le compact

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3(0 \leq x, y \leq 1 : |z| \leq C)\}.$$

De l'hypothèse $[X, Y] = f \partial_z$ avec $f > 0$, on déduit qu'il existe un nombre rationnel h suffisamment petit, tel que pour tout point $P \in H$, on ait :

$$\sigma_h(P) - P = \psi_{-h} \circ \varphi_{-h} \circ \psi_h \circ \varphi_h(P) = \lambda' e_3 \quad \text{avec } \lambda' > 0.$$

Démonstration du Lemme. — Il suffit de le montrer pour $t = 1$.

Soit K un entier tel que $Kh = 1$ et considérons le point $\sigma_{Kh}(0)$. Nous procédons par induction sur K . Pour $K = 1$, le résultat est trivial. Pour $K = 2$, la proposition signifiée $\sigma_{2h}(0) - (0) = \lambda \cdot e_3$ avec $h > 0$. Pour le montrer, nous effectuons la construction suivante :

Soit $P_1 = \psi_h \circ \varphi_h(0)$; d'après le choix de h , le point $P_2 = \varphi_{-h} \circ \psi_h \circ \varphi_h \circ \psi_{-h}(P_1)$ est tel que $P_2 - P_1 = \lambda_1 e_3$ avec $\lambda_1 > 0$; comme les courbes intégrales du champ X qui passent par P_1 et P_2 sont dans un même plan vertical, le point $P_3 = \psi_{-h} \circ \varphi_{-h}(P_2)$ vérifie $P_3 - \sigma_h(0) = \lambda_2 e_3$ avec $\lambda_2 > 0$. Ainsi, on a :

$$P_3 - (0) = (P_3 - \sigma_h(0)) + (\sigma_h(0) - (0)) = (\lambda + \lambda_2)e_3.$$

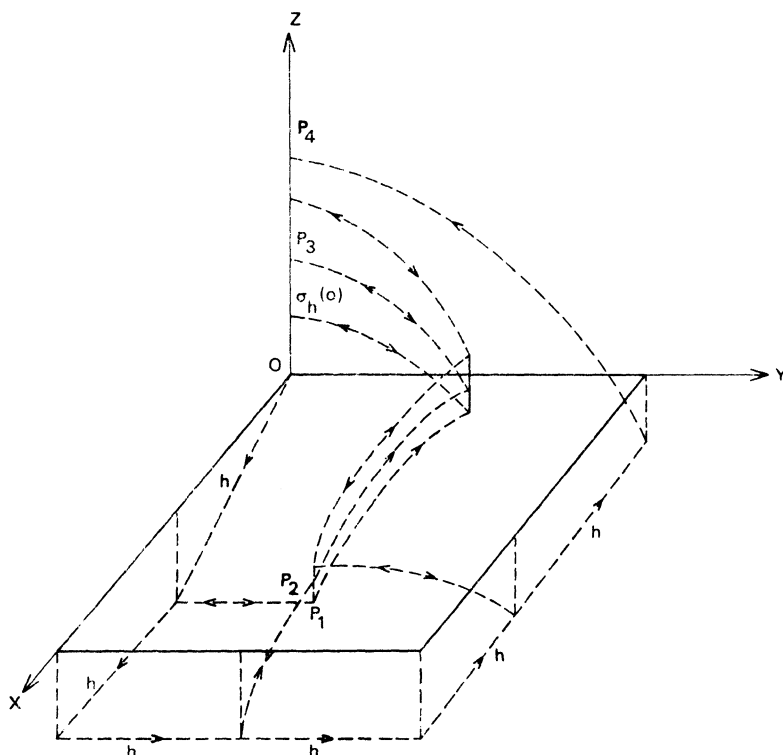
Le même raisonnement permet de voir que le point :

$$P_4 = \psi_{-h} \circ \psi_{-h} \circ \varphi_{-h} \circ \varphi_{-h} \circ \psi_h \circ \varphi_h \circ \varphi_h \circ \psi_h(P_3)$$

vérifie (voir figure) :

$$P_4 - P_3 = \lambda_4 \cdot e_3 \quad \text{avec } \lambda_4 > 0$$

d'où $P_4 - (0) = (P_4 - P_3) + (P_3 - (0)) = (\lambda + \lambda_2 + \lambda_4)e_3$.
 Les relations antérieures montrent que $P_4 = \sigma_{2h}(0)$.



On obtient le Lemme en appliquant la construction antérieure au point $\sigma_{(K-1)h}(0)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. M. BOOTHBY, On the integral curves of a linear differential form of maximum rank, *Math. Annalen*, 177 (1968), 101-104.
- [2] S. S. CHERN, The geometry of C-structures, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 167-219.
- [3] C. GODBILLON, Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris, 1969.
- [4] A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, *Comment. Math. Helv.*, 32 (1958), 248-329.
- [5] R. LUTZ, Sur la classe maximale des formes de Pfaff sans singularités sur la sphère S^{2p+1} , *C.R. Acad. Sc., Paris*, 264 (1967), 1137-1138 et 349-350.

- [6] R. LUTZ, Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension trois, Thèse, Strasbourg, 1971.
- [7] R. LUTZ et F. VARELA, Sur la C^0 -densité de certains ensembles de formes de Pfaff, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 276 (1973), 697-698.
- [8] R. LUTZ et F. VARELA, Sur l'abaissement de la classe d'une forme de Pfaff, *Publicazione dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica*, Symposia Mathematica, 1973.
- [9] R. LUTZ et F. VARELA, Quelques propriétés des formes de Pfaff en liaison avec la C^0 -topologie, « Journées différentielles de Dijon », Juin 1974.
- [10] J. MARTINET, Sur les singularités des formes différentielles, Thèse, Grenoble, 1969.
- [11] J. MARTINET et G. REEB, Sur une généralisation des structures feuilletées de codimension un, *Proceedings of a symposium held at the university of Bahia Salvador*, Brasil (1971).
- [12] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, *Act. Sci. Ind.* N° 1183, Paris, 1952.
- [13] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, Bruxelles, *Mémoires, Acad. Sc.*, 27 (1952).
- [14] I. TAMURA, Every odd dimensional homotopy sphere has a foliation of codimension one, *Comm. Math. Helv.*, 47 (1972), 73-79.
- [15] F. VARELA, Sur une propriété de C^0 -stabilité des formes de contact en dimension trois, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 280 (1975), 1225-1227.
- [16] F. VARELA, Disminucion de la classe de p -formas por C^0 -perturbaciones, Tesis, Madrid, 1974.

Manuscrit reçu le 11 août 1975

Proposé par G. Reeb.

Fernando VARELA,

Institut des Sciences exactes et appliquées

C.U.H.R.

4, rue des Frères-Lumière

68093 Mulhouse Cedex

et

Institut de Recherche Mathématique Avancée

Laboratoire associé au C.N.R.S.

Université Louis-Pasteur

7, rue René-Descartes

67084 Strasbourg Cedex.
