Annales de l'institut Fourier

Joseph H. Sampson

Sous-groupes conjugués d'un groupe linéaire

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 2 (1976), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 2 (1976), 1-6.

SOUS-GROUPES CONJUGUÉS D'UN GROUPE LINÉAIRE [1]

par J. H. SAMPSON

1. Introduction.

Dans son article bien connu [3], M. A. Selberg a établi un lien étroit entre la rigidité de certains sous-groupes discrets de $SL_n\mathbf{R}$ et les déformations de ces groupes qui conservent les traces des matrices. Ici nous reprenons la question d'un homomorphisme $f\colon \Gamma \to GL(K)$ d'un sous-groupe

$$\Gamma \subset GL(K),$$

K étant un corps commutatif, tel que $\operatorname{tr}\gamma = \operatorname{tr} f(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$; et dans les n° 2, 3 nous établissons des conditions très simples qui entraînent que f soit une conjugaison. Il en résulte, par exemple, que pour tout sous-groupe discret Γ de $SL_2\mathbf{R}$ qui contient un élément hyperbolique, et pour tout homomorphisme $f\colon \Gamma \to SL_2\mathbf{R}$ qui conserve les traces des matrices, il existe une matrice réelle Q de déterminant ± 1 telle que $f(\gamma) = Q\gamma Q^{-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Dans le n° 4 on trouvera une extension de ces résultats à des sous-groupes semi-simples de $SL_n\mathbf{R}$. Nos méthodes sont entièrement élémentaires.

2. Conséquences de la conservation des traces.

Γ et Γ' désignant des groupes de matrices inversibles de degré n, à coefficients dans un corps commutatif K de

[1] Travail subventionné partiellement par le National Science Foundation Grant G.P. 25320, A 2.

caractéristique zéro, soit $f\colon \Gamma \to \Gamma'$ un homomorphisme tel que trace $\gamma =$ trace $f(\gamma)$ pour tout γ dans Γ.

Hypothèse I. — Γ *contient un élément* γ_0 *à valeurs propres distinctes* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *dans* K.

Dans la suite l'image $f(\gamma)$ d'un élément $\gamma = (a_{ij})$ dans Γ sera notée $\gamma' = (a'_{ij})$.

Or comme $\operatorname{tr} \gamma_0^m = \operatorname{tr} \gamma_0'^m$ pour $m = 0, 1, 2, \ldots,$ on déduit des formules de Newton, K étant de caractéristique zéro, que γ'_0 a les mêmes valeurs propres que γ_0. Tous les deux sont donc diagonalisables sur K. Appliquant des conjugaisons convenables, on peut supposer que

$$\gamma_1 = \gamma'_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{(matrice diagonale)};$$

et ces conjugaisons peuvent être effectuées par des matrices de déterminant $= 1$.

Pour tout $\gamma_1 = (a_{ij})$ dans Γ on a $\operatorname{tr}(\gamma_0^m \gamma_1) = \operatorname{tr}(\gamma_0'^m \gamma'_1)$, c'est-à-dire

$$\sum_j \lambda_j^m a_{jj} = \sum_j \lambda_j^m a'_{jj} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Les λ_j étant distincts, on en déduit

$$(1) \qquad a_{ii} = a'_{ii} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Pour $\gamma_1 = (a_{ij})$ et $\gamma_2 = (b_{ij})$ dans Γ on a la relation $\operatorname{tr}(\gamma_0^l \gamma_1 \gamma_0^m \gamma_2) = \operatorname{tr}(\gamma_0^l \gamma'_1 \gamma_0^m \gamma'_2)$, d'où

$$\sum_{i,j} \lambda_i^l a_{ij} \lambda_j^m b_{ji} = \sum_{i,j} \lambda_i^l a'_{ij} \lambda_j^m b'_{ji} \quad (l, m = 0, 1, 2, \ldots).$$

On démontre facilement le

Lemme. — *Si* $\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} \lambda_i^l \lambda_j^m = 0$ *pour* $l, m = 0, 1, 2, \ldots,$ *alors les* q_{ij} *sont tous nuls.*

Il en résulte la relation fondamentale

$$(2) \qquad a_{ij} b_{ji} = a'_{ij} b'_{ji}.$$

3. Deux hypothèses supplémentaires.

Il s'agit de montrer que l'homomorphisme f est une conjugaison. De simples exemples (matrices triangulaires) montrent que la seule hypothèse I ne suffit pas.

HYPOTHÈSE II. — *Pour tout* $k = 2, \ldots, n$ *il existe* $\gamma_1 = (a_{ij})$ *et* $\gamma_2 = (b_{ij})$ *dans* Γ *tels que* $a_{1k}b_{k1} \neq 0$.

Pour chaque k fixons une telle paire de matrices (γ_1 et γ_2 pouvant coïncider). D'après (2), on a $a'_{1k}b'_{k1} \neq 0$.

Soit P_k la matrice diagonale dont les éléments sur la diagonale sont

$$\alpha_k, 1, \ldots, 1, \beta_k, 1, \ldots, 1,$$

les α_k, β_k à déterminer, et β_k étant le k-ième élément. La conjugaison de Γ' par P_k transforme (a'_{ij}) en (a''_{ij}) et (b'_{ij}) en (b''_{ij}), où $a''_{1j} = a'_{1j}$ et $b''_{j1} = b'_{j1}$ pour $j \neq k$, tandis que

$$a''_{1k} = (\alpha_k/\beta_k) \,.\, a'_{1k} \qquad \text{et} \qquad b''_{k1} = (\beta_k/\alpha_k)b'_{k1}.$$

Choisissons α_k, β_k de sorte que $a'_{1k} = a_{1k}$. En vertu de (2) on a $a_{1k}b_{k1} = a''_{1k}b''_{k1}$, et donc on aura $b''_{k1} = b_{k1}$.

Pour une matrice (c_{ij}) quelconque dans Γ et son image (c''_{ij}), après la conjugaison par P_k, (2) donne

$$a_{1k}c_{k1} = a''_{1k}c''_{k1} = a_{1k}c''_{k1}$$

et

$$c_{1k}b_{k1} = c''_{1k}b''_{k1} = c''_{1k}b_{k1},$$

d'où

$$c_{1k} = c''_{1k} \quad \text{et} \quad c_{k1} = c''_{k1}.$$

On peut en outre prendre α_k, β_k de sorte que dét $P_k = \pm 1$.

Supposant les conjugaisons indiquées déjà faites pour $k = 2, \ldots, n$, nous pouvons enfin écrire

$$(3) \qquad a_{1k} = a'_{k1} \qquad \text{et} \qquad a_{k1} = a'_{k1} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

pour toute matrice (a_{ij}) dans Γ.

HYPOTHÈSE III. — *Parmi les premières colonnes des matrices de* Γ, *il y en a* n *qui sont linéairement indépendantes.*

Considérons alors un produit $(c) = (a)(b)$ dans Γ. On a

$$c_{1k} = \Sigma a_{1j} b_{jk} \quad \text{et} \quad c'_{1k} = \Sigma a'_{1j} b'_{jk}.$$

De (3) on tire

$$\sum_j a_{1j}(b_{jk} - b'_{jk}) = 0;$$

et en faisant varier (a_{ij}), on trouve $b_{jk} = b'_{jk}$, en vertu de l'hypothèse III. Autrement dit, on a $\gamma = \gamma'$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, ce que montre que f est une conjugaison.

Théorème 1. — *f: $\Gamma \to \Gamma'$ étant comme au* n° 2 *un homomorphisme qui conserve les traces des matrices, sous les hypothèses* I, II, III *il existe une matrice* Q *à coefficients dans* K *et de déterminant* $\pm$ 1 *telle que* f *coïncide avec la conjugaison par* Q *(sur* Γ).

Comme application immédiate, on a le

Théorème 2. — *Si* Γ *est un sous-groupe discret de* $G = SL_n\mathbf{R}$ *tel que* $\Gamma \backslash G$ *est de mesure finie, alors tout homomorphisme* $f\colon \Gamma \to G$ *tel que* $\operatorname{tr}\gamma = \operatorname{tr} f(\gamma)$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$ *coïncide avec l'automorphisme intérieur défini par une matrice réelle* Q *de déterminant* $= \pm 1$.

Ici on est dans la situation étudiée par A. Selberg dans [3], dont le lemme 4 est à comparer avec l'énoncé précédent. Par ailleurs, on voit sans peine dans notre démonstration que si l'homomorphisme f dépend continûment d'un paramètre, alors on peut toujours choisir la matrice Q de façon à varier continûment. Le fait que nos hypothèses I, II, III soient vérifiées résulte aussitôt du lemme 3 de [3] et du paragraphe suivant le lemme 5.

Théorème 3. — *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* $SL_2\mathbf{R}$ *qui contient un élément hyperbolique. Alors tout homomorphisme* $f\colon \Gamma \to SL_2\mathbf{R}$ *qui conserve les traces coïncide avec la conjugaison par une matrice réelle de déterminant* $\pm$ 1.

En effet, si γ_0 est un élément hyperbolique, nous pouvons supposer que $\gamma_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, où $|\lambda| \neq 1$. Si notre hypothèse III n'est pas vérifiée, alors toutes les matrices de Γ ont la forme $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. La conjugaison par γ_0^k transforme γ en

$$\begin{pmatrix} a & \lambda^{2k} b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

En faisant tendre k vers $\pm\infty$ selon que $|\lambda| \lessgtr 1$, on voit que Γ n'est pas discret s'il contient une matrice γ avec $b \neq 0$. Donc ou bien Γ est cyclique, cas sans intérêt, ou bien l'hypothèse III est vérifiée, et du même coup l'hypothèse II.

4. Groupes semi-simples.

Les considérations précédentes peuvent être étendues à des groupes linéaires plus généraux.

Soient alors $G \subset GL_n\mathbf{R}$ un sous-groupe de Lie semi-simple et connexe, et $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret tel que la mesure de Haar de $\Gamma\backslash G$ soit finie. (G étant fermé dans $GL_n\mathbf{R}$, Γ est aussi discret dans ce dernier). On supposera que le G-module $\mathbf{R}^n$ est irréductible.

Soit $V \subset \mathbf{R}^n$ le sous-espace vectoriel engendré par les premières colonnes des matrices $A \in G$. Si v est la première colonne de $B \in G$, alors Av est la première colonne de AB, ce qui montre que V est stable par G. Comme $V \neq (0)$, on a $V = \mathbf{R}^n$. On peut raisonner pareillement avec la j-ième colonne, et il est facile d'en conclure que nos hypothèses II et III sont vérifiées, en appliquant le lemme 1 de [3] et le théorème de densité de M. A. Borel (voir [2, ch. V]).

Quant à l'hypothèse I, vraisemblablement il faut la maintenir indépendamment. En effet, G contient quantité de matrices diagonalisables à valeurs propres réelles (voir [1, § 11], [2, ch. XIII]); mais il n'est point évident qu'on puisse en trouver à valeurs propres distinctes (auquel cas tous les poids de la représentation de G sur $\mathbf{R}^n \otimes \mathbf{C} = \mathbf{C}^n$ sont de multiplicité 1). Si G contient une matrice du type voulu, alors comme dans [3], lemme 5, on voit que notre hypothèse I est vérifiée. Pour nos besoins, il n'est même pas nécessaire de supposer que les valeurs propres d'une bonne matrice soient réelles. Par ailleurs, notre hypothèse I peut être remplacée par la condition suivante, d'apparence moins exigeante : Γ *contient un sous-groupe abélien* Γ_0 *de matrices diagonalisables sur* K *tel que (sous forme diagonale) parmi les diagonales des matrices de* Γ_0 *il y en a* n *qui sont linéairement indépendantes.*

De ce qu'on vient de voir, on peut énoncer le

THÉORÈME 3. — *Soit* $f : \Gamma \rightarrow GL_n\mathbf{R}$ *un homomorphisme tel que* $\operatorname{tr} \gamma\, f(\gamma)$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$. *Si les hypothèses précédentes sont vérifiées, ainsi que l'hypothèse* 1 *du* n° 2, *alors il existe une matrice réelle* Q *de degré* n *et de déterminant* ± 1 *telle que* $f(\gamma) = Q\gamma Q^{-1}$. *Si* $f(\Gamma) \subset G$ *et si* Γ *n'est pas contenu dans un sous-groupe fermé* $H \neq G$ *tel que* $H\backslash G$ *soit compact, alors l'automorphisme* $A \rightarrow QAQ^{-1}$ *de* $GL_n\mathbf{R}$ *applique* G *sur* G.

Pour ce dernier point, $\Gamma' = f(\Gamma)$ est contenu dans $G \cap QGQ^{-1}$, et donc $\Gamma \subset H = G \cap Q^{-1}GQ$. D'après l'hypothèse du théorème, si $H \neq G$, alors $H\backslash G$ n'est pas compact, ce qui est en contradiction avec $\operatorname{mes}(\Gamma\backslash G) < \infty$.

Remarquons enfin que, si l'automorphisme de G ainsi défini par Q est homotope à l'identité, alors on peut supposer $Q \in G$, en raison de la semi-simplicité de G.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. D. MOSTOW, Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces, *Annals of Mathematics Study*, Princeton, 78 (1973).

[2] M. S. RAGHUNATHAN, Discrete Subgroups of Lie groups, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer gunzgebiet*, Berlin, Bd 68 (1972).

[3] A. SELBERG, On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces, Contributions to function theorie, Tata Institute, Bombay (1960).

Manuscrit reçu le 16 juillet 1975
Proposé par J. L. Koszul.

J. H. SAMPSON,

Laboratoire de Mathématiques Pures
de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
et The Johns Hopkins University
Baltimore, Maryland (U.S.A.).