

ANNE-MARIE CHOLLET

**Ensembles de zéros à la frontière de fonctions
analytiques dans des domaines strictement
pseudo-convexes**

Annales de l'institut Fourier, tome 26, n° 1 (1976), p. 51-80

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_1_51_0

© Annales de l'institut Fourier, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ENSEMBLES DE ZÉROS
A LA FRONTIÈRE DE FONCTIONS ANALYTIQUES
DANS DES DOMAINES
STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

par **Anne-Marie CHOLLET**

Soit D le disque unité du plan complexe et ∂D sa frontière, L. Carleson [1] a caractérisé les sous-ensembles fermés E de ∂D qui sont les ensembles de zéros d'une fonction de $A^m(D)$, la classe des fonctions analytiques dans D , continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m dans \bar{D} . B.A. Taylor et D.L. Williams [12], en adaptant la méthode de L. Carleson, et B.I. Korenbljum [10], avec une construction différente, ont montré que la condition donnée par L. Carleson était nécessaire et suffisante pour que s'annule sur E une fonction de $A^\infty(D)$ ainsi que toutes ses dérivées.

On s'intéresse ici aux ensembles de zéros à la frontière de fonctions de $A^\infty(D)$ lorsque D est un domaine borné strictement pseudo-convexe de C^n . On établit une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble fermé E de ∂D soit l'ensemble des zéros d'une fonction F de $A^\infty(D)$ et aussi l'ensemble des zéros communs à F et à toutes ses dérivées. Elle redonne le résultat de L. Carleson lorsque D est le disque unité du plan complexe. Dans le cas général, elle impose à E d'être plus ou moins mince selon les directions. Elle s'apparente donc à une condition suffisante donnée par A.M. Davie et B.K. Øksendal [6] dans leur étude des ensembles pics pour $A(D)$, la classe des fonctions analytiques dans D , continues dans \bar{D} . Pour cette classe, les notions d'ensembles pics et de zéros à la frontière sont équivalentes, ce qui n'est plus vrai pour $A^m(D)$, $m \geq 1$.

La première partie de ce travail est consacrée à l'amélioration d'un lemme de A.M. Davie et B.K. Øksendal à l'aide de techniques de G. Henkin. La construction faite dans la deuxième partie diffère de la leur ; au lieu de recouvrir l'ensemble E on utilise un recouvrement de Whitney du complémentaire de E par des boules associées à une pseudo-distance naturelle sur ∂D . On indique dans la troisième

partie comment la même méthode permet de construire des fonctions appartenant à des classes plus larges que $A^\infty(D)$, par exemple à $A(D)$, ou à des classes moins larges, celles que l'on obtient en imposant des conditions de croissance aux dérivées successives des fonctions. On généralise pour ces classes des résultats précédemment obtenus [3] dans le disque.

Ces résultats, dans le cas de la boule unité de C^n , ont fait l'objet d'une précédente note [4].

I

1. D est un domaine borné de C^n , $n \geq 1$, de classe C^2 , strictement pseudo-convexe. D est donc défini par la donnée d'une fonction ρ , à valeurs réelles, de classe C^2 dans un voisinage de \bar{D} , l'adhérence de D , telle que

$$(1.1) \quad D = \{z ; \rho(z) < 0\},$$

$$(1.2) \quad \text{grad } \rho \neq 0 \text{ sur } \partial D,$$

(1.3) ρ est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de ∂D , c'est-à-dire

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (z) w_j \bar{w}_k > 0,$$

pour tout $w \neq 0$ et pour tout z dans un voisinage de ∂D , la frontière de D .

On peut remarquer que, dans le cas $n = 1$, la condition (1.3) n'impose aucune contrainte supplémentaire à un domaine borné de classe C^2 , c'est-à-dire, à un domaine borné défini par une fonction ρ vérifiant les propriétés (1.1) et (1.2).

Si Ω est un ouvert de C^n , on note :

$\mathcal{H}(\Omega)$, l'espace des fonctions holomorphes dans Ω ,

$L^2(\Omega)$, l'espace des fonctions f de carré intégrable dans Ω pour la mesure de Lebesgue $d\lambda$ sur C^n , muni de la norme définie par

$$\|f\|_2^2 = \int_{\Omega} |f(z)|^2 d\lambda(z).$$

$\mathcal{H}^2(\Omega)$, le sous-espace de $L^2(\Omega)$ constitué des fonctions holomorphes dans Ω ,

$\mathcal{C}(\partial D, L^2(\Omega))$ [resp. $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}^2(\Omega))$], l'espace des fonctions continues sur ∂D , à valeurs dans $L^2(\Omega)$ [resp. $\mathcal{H}^2(\Omega)$].

On définit de même $\mathcal{C}(\partial D, L^2_{0,1}(\Omega))$ et $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}^2_{0,1}(\Omega))$. $L^2_{0,1}(\Omega)$ désigne l'espace des $(0, 1)$ formes f à coefficients dans $L^2(\Omega)$ et $\mathcal{H}^2_{0,1}(\Omega)$ le sous-espace de $L^2_{0,1}(\Omega)$ des $(0, 1)$ formes telles que $\bar{\partial}f = 0$.

∂ et $\bar{\partial}$ sont les opérateurs différentiels qui associent à une forme f du type (p, q)

$$f = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

les formes,

$$\partial f = \sum_{I,J} \partial f_{I,J} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

$$\bar{\partial} f = \sum_{I,J} \bar{\partial} f_{I,J} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

I et J désignent ici des multi-indices.

Pour toute forme f de $L^2_{0,1}(\Omega)$, on a $\|f\|_2^2 = \sum_{|J|=1} \|f_J\|_2^2$.

utilisera également les notations $\mathcal{C}(\partial D, C^\infty(\Omega))$ et $\mathcal{C}(\partial D, C^\infty_{0,1}(\Omega))$.

2. LEMME. — Si f appartient à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}^2(\Omega))$ et si on pose, pour tout ξ de ∂D et tout z de Ω , $\tilde{f}(\xi, z) = f(\xi)(z)$, alors f appartient à $\mathcal{C}(\partial D \times \Omega)$.

On a en effet une injection continue de $\mathcal{H}^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ et $C(\partial D, C(\Omega))$ s'identifie à $C(\partial D \times \Omega)$.

3. LEMME. — Si f appartient à $\mathcal{C}(\partial D, C^\infty(\Omega))$, l'application $\partial_z f$ définie sur ∂D par $\partial_z f(\xi) = \partial_z \tilde{f}(\xi, z)$ appartient à $\mathcal{C}(\partial D, C^\infty_{1,0}(\Omega))$. De même $\bar{\partial}_z f$ appartient à $\mathcal{C}(\partial D, C^\infty_{0,1}(\Omega))$.

$\mathcal{C}(\partial D, C^\infty(\Omega))$ s'identifie en effet à l'espace des fonctions appartenant à $\mathcal{C}(\partial D \times \Omega)$ dont les dérivées partielles de tous ordres par rapport aux coordonnées réelles sous-jacentes de Ω existent et sont continues.

4. Dans la suite, on emploiera le même symbole pour représenter l'élément de f de $\mathcal{C}(\partial D, L^2(\Omega))$ et la fonction \tilde{f} définie sur $\partial D \times \Omega$. On fera le même abus de notation pour les éléments de $\mathcal{C}(\partial D, L^2_{0,1}(\Omega))$.

5. LEMME. — *Il existe un opérateur linéaire borné E de $\mathcal{H}^2_{0,1}(\Omega)$ dans l'orthogonal de $\mathcal{H}^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ tel que, si f appartient à $\mathcal{H}^2_{0,1}(\Omega)$, l'on ait $\bar{\partial} E f = f$.*

Ce lemme [7], est un corollaire des estimations L^2 de L. Hormander pour l'opérateur $\bar{\partial}$.

6. Pour tout réel positif δ , on note $D_\delta = \{z ; \rho(z) < \delta\}$.

7. PROPOSITION. — *Il existe des constantes M, m et δ strictement positives et une fonction G telle que :*

a) G appartient à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}(D_\delta))$

b) Pour tout (ζ, z) de $\partial D \times \bar{D}$

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) \leq -m |\zeta - z|^2$$

c) Pour tout (ζ, z) de $\partial D \times \partial D$

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) \geq -M |\zeta - z|^2$$

d) Pour tout ζ de ∂D

$$\operatorname{grad}_z [\operatorname{Re} G(\zeta, \zeta)] = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \rho(\zeta).$$

Remarque. — Lorsque D est la boule unité de \mathbb{C}^n , $n \geq 1$, on a

$$\rho(z) = |z|^2 - 1$$

et la fonction G définie par $G(\zeta, z) = \langle \bar{\zeta}, z \rangle - 1$ vérifie la proposition.

($\langle \bar{\zeta}, z \rangle$ désigne le produit hermitien sur \mathbb{C}^n de ζ et z).

La démonstration nécessite quelques étapes.

1^{ère} étape. — On se propose d'établir le résultat suivant :

Il existe des constantes M_1, m_1, δ_1 et ϵ_1 , strictement positives, et il existe une fonction F qui vérifie les propriétés P_1 à P_4 ,

$P_1(\delta_1)$ F appartient à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}(D_{\delta_1}))$,

$P_2(\epsilon_1, m_1)$ quel que soit (ζ, z) de $\partial D \times \bar{D}$ tel que $|\zeta - z| < \epsilon_1$,
 $\operatorname{Re} F(\zeta, z) \leq -m_1 |\zeta - z|^2$,

$P_3(\epsilon_1, M_1)$ quel que soit (ζ, z) de $\partial D \times \partial D$ tel que $|\zeta - z| < \epsilon_1$,
 $\operatorname{Re} F(\zeta, z) \geq -M_1 |\zeta - z|^2$,

P_4 pour tout ζ de ∂D ,

$$\operatorname{grad}_z [\operatorname{Re} F(\zeta, \zeta)] = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \rho(\zeta).$$

On pose

$$F(\zeta, z) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial z_i}(\zeta) \cdot (z_i - \zeta_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho(\zeta)}{\partial z_i \partial z_j} (z_i - \zeta_i)(z_j - \zeta_j). \tag{7.1}$$

On note

$$\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial z_i}, \quad \rho_{ij} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial z_j}, \quad \rho_{i,\bar{j}} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}.$$

Soit ξ un point de ∂D , le développement de Taylor de ρ en ξ s'écrit

$$\begin{aligned} \rho(z) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^n \rho_i(\xi) \cdot (z_i - \xi_i) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \rho_{i,j}(\xi) \cdot (z_i - \xi_i)(z_j - \xi_j) \right] + \\ + \sum_{i,j=1}^n \rho_{i,\bar{j}}(\xi) \cdot (z_i - \xi_i)(\bar{z}_j - \bar{\xi}_j) \end{aligned} \tag{7.2}$$

où ξ est un point du segment joignant z à ζ .

Soit $V_\delta = \{z ; |\rho(z)| < \delta\}$.

Puisque ρ est strictement plurisousharmonique et de classe C^2 dans un voisinage de ∂D , il existe δ_1 et il existe m tels que, pour tout ξ dans V_{δ_1} et tout ω dans C^n , on ait

$$\sum_{i,j=1}^n \rho_{i,\bar{j}}(\xi) \cdot \omega_i \bar{\omega}_j \geq m |\omega|^2.$$

La régularité de ρ implique également qu'il existe ϵ_1 tel que, pour tout ξ et tout z dans V_{δ_1} tels que $|\xi - z| < \epsilon_1$, on ait

$$|\rho_{i,j}(\xi) - \rho_{i,j}(z)| \leq \frac{m}{2n}.$$

De là, pour tout (ζ, z) de $\partial D \times D_{\delta_1}$ tel que $|\zeta - z| < \epsilon_1$, on a

$$\rho(z) - 2 \operatorname{Re} F(\zeta, z) \geq \frac{m}{2} |\zeta - z|^2; \quad (7.3)$$

de même, d'après (7.1) et (7.2), il existe une constante M telle que, si $(\zeta, z) \in \partial D \times D_{\delta_1}$ on ait

$$\rho(z) - 2 \operatorname{Re} F(\zeta, z) \leq M |\zeta - z|^2. \quad (7.4)$$

Il existe donc des constantes M_1, m_1, ϵ_1 et δ_1 strictement positives, telles que F vérifie $P_2(\epsilon_1, m_1)$ et $P_3(\epsilon_1, M_1)$. $P_1(\delta_1)$ est une conséquence de la définition de F et de la régularité de ρ et P_4 se déduit de (7.3).

2^{ème} étape. — On va maintenant montrer qu'il existe des constantes M_2, m_2, δ_2 et ϵ_2 , strictement positives, et une fonction H qui vérifie les propriétés $P_1(\delta_2), P_2(\epsilon_2, m_2), P_3(\epsilon_2, M_2), P_4$ et aussi la propriété P_5 ainsi définie :

P_5 : H ne s'annule dans $\partial D \times \bar{D}$ qu'aux points (ζ, z) tels que $\zeta = z$. Ceci sera réalisé en imposant à δ_2 et ϵ_2 des contraintes et, dans un premier temps, $0 < \delta_2 < \delta_1, 0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ et $\delta_2 < \frac{m\epsilon_2^2}{8}$. Ainsi, d'après

(7.3), on a, pour tout (ζ, z) de $\partial D \times D_{\delta_2}$ tel que $\frac{\epsilon_2}{2} < |\zeta - z| < \epsilon_2$,

$$2 \operatorname{Re} F(\zeta, z) < \delta_2 - \frac{m\epsilon_2^2}{8} < 0. \quad (7.5)$$

Soit $\chi(t)$ une fonction de variable réelle de classe C^∞ dans \mathbf{R}^+ telle que

$$\chi(t) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \epsilon_2/2$$

$$\chi(t) = 1 \quad \text{si} \quad t \geq 2\epsilon_2/3.$$

On pose $K_{\epsilon, \delta} = \{(\zeta, z) \in \partial D \times D_\delta ; |\zeta - z| < \epsilon\}$ et on définit dans $\partial D \times D_{\delta_2}$

$$B(\zeta, z) = \begin{cases} \bar{\partial}_z \left[\frac{\text{Log } F(\zeta, z)}{(F(\zeta, z))^2} \chi(|\zeta - z|) \right] & \text{sur } K_{\epsilon_2, \delta_2} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

D'après (7.5), $\text{Re } F(\zeta, z)$ est négative sur $K_{\epsilon_2, \delta_2} \setminus K_{\epsilon_2/2, \delta_2}$; donc $\text{Log } F(\zeta, z)$ admet une détermination sur cet ensemble.

D'après le lemme 3, B appartient à $\mathcal{C}(\partial D, C_{0,1}^\infty(D_{\delta_2}))$, donc à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}_{0,1}^2(D_{\delta_2}))$ car $\bar{\partial}_z B = 0$.

On peut donc, d'après le lemme 5, résoudre $\bar{\partial}_z C = B$, avec C appartenant à $\mathcal{C}(\partial D, L^2(D_{\delta_2}))$, puisque l'opérateur E intervenant dans le lemme 5 est un opérateur linéaire borné.

On a, de plus, sur $K_{\epsilon_2/2, \delta_2} \cup CK_{\epsilon_2, \delta_2}$, $\bar{\partial}_z C = 0$; donc C appartient à $\mathcal{C}(\partial D, L^2(D_{\delta_2}))$ et est holomorphe en z dans

$$K_{\epsilon_2, \delta_2} \cup CK_{2\epsilon_2/3, \delta_2}.$$

Ainsi, si on pose pour (ζ, z) dans K_{ϵ_2, δ_2} ,

$$\varphi(\zeta, z) = C(\zeta, z) - \frac{\text{Log } F(\zeta, z)}{[F(\zeta, z)]^2} \chi(|\zeta - z|),$$

φ appartient à $\mathcal{C}(\partial D, L^2(D_{\delta_2}))$ et est holomorphe en z dans K_{ϵ_2, δ_2} .

Sur $K_{\epsilon_2, \delta_2} \setminus K_{2\epsilon_2/3, \delta_2}$, on a

$$\varphi = C - \frac{\text{Log } F}{F^2},$$

donc $F = \exp F^2(C - \varphi)$.

On définit dans $\partial D \times D_{\delta_2}$ une fonction H par

$$H = \begin{cases} F \exp F^2 \varphi & \text{sur } K_{\epsilon_2, \delta_2} \\ \exp F^2 C & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (7.6)$$

Ces deux définitions coïncident sur $K_{\epsilon_2, \delta_2} \setminus K_{2\epsilon_2/3, \delta_2}$. H appartient donc à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}(D_{\delta_2}))$; H n'a pas de zéros sur $CK_{\epsilon_2, \delta_2}$ et ne s'annule sur K_{ϵ_2, δ_2} qu'aux points où F s'annule. Comme, d'après $P_2(\epsilon_1, m_1)$ et (7.1), sur $K_{\epsilon_2, \delta_2} \cap (\partial D \times \bar{D})$ la fonction F s'annule seulement aux points (ζ, z) tels que $\zeta = z$, la propriété P_5 est établie pour H .

Il reste à prouver que, pour un choix convenable de constantes, H vérifie les propriétés P_2 à P_4 .

Pour cela, il suffit d'établir le résultat suivant :

quitte à réduire ϵ_2 et δ_2 , il existe une constante m_0 telle que, l'on ait, pour tout (ζ, z) de K_{ϵ_2, δ_2} ,

$$|\operatorname{Re} H(\zeta, z) - \operatorname{Re} F(\zeta, z)| \leq m_0 |\zeta - z|^3. \quad (7.7)$$

En effet, puisque ρ est de classe C^2 au voisinage de \bar{D} et que φ , d'après le lemme 2, est continue sur K_{ϵ_2, δ_2} quitte à réduire ϵ_2 et δ_2 , il existe une constante $M_0 > 0$, telle que, pour tout (ζ, z) de K_{ϵ_2, δ_2} , on ait

$$|F(\zeta, z)| \leq M_0 |\zeta - z|,$$

$$|\varphi(\zeta, z)| \leq M_0,$$

et donc, d'après la définition (7.6) de H , il existe m_0 telle que l'on ait

$$|H(\zeta, z) - F(\zeta, z)| \leq m_0 |\zeta - z|^3, \quad \text{sur } K_{\epsilon_2, \delta_2}, \quad (7.8)$$

ce qui établit (7.7).

De là on obtient, puisque F vérifie $P_2(\epsilon_1, m_1)$ et $P_3(\epsilon_1, M_1)$, qu'il existe des constantes strictement positives m_2 et M_2 telles que H vérifie $P_2(\epsilon_2, m_2)$ et $P_3(\epsilon_2, M_2)$.

D'après (7.7), puisque F vérifie la condition P_4 , H la vérifie également.

Remarque. — On prouve à l'aide de (7.7) et (7.3) que, quitte à réduire à nouveau ϵ_2 et δ_2 , il existe une constante m_0 telle que, pour tout (ζ, z) de K_{ϵ_2, δ_2} , on ait,

$$2 \operatorname{Re} H(\zeta, z) \leq \rho(z) - m_0 |\zeta - z|^2. \quad (7.9)$$

Dans la suite ϵ_2 et δ_2 seront tels que cette propriété soit vérifiée.

3^{ème} étape. — On va établir qu'il existe des constantes $\epsilon_3, \delta_3, m_3, M_3$ strictement positives et une fonction G vérifiant les propriétés $P_1(\delta_3), P_2(\epsilon_3, m_3), P_3(\epsilon_3, M_3)$ et P_4 , et telle que, de plus, pour tout (ζ, z) de $\partial D \times \bar{D}$, on ait

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) < 0 \quad \text{si} \quad \zeta \neq z \quad (7.10)$$

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) = 0 \quad \text{si} \quad \zeta = z. \quad (7.11)$$

Ceci achèvera la démonstration de la proposition 7, car la continuité de $\frac{\operatorname{Re} G(\zeta, z)}{|\zeta - z|^2}$ sur $\{(\zeta, z) \in \partial D \times \bar{D}; |\zeta - z| \geq \epsilon_3\}$ permettra alors, puisque l'on a (7.10) et (7.11), de conclure qu'il existe des constantes m et M , strictement positives, telles que

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) \leq -m |\zeta - z|^2 \quad \text{si} \quad (\zeta, z) \in \partial D \times \bar{D}$$

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) \geq -M |\zeta - z|^2 \quad \text{si} \quad (\zeta, z) \in \partial D \times \partial D.$$

On choisit ϵ_3 tel que $0 < \epsilon_3 < \epsilon_2$ et on pose

$$3k = \inf \{ |H(\zeta, z)|; (\zeta, z) \in \partial D \times \bar{D}, |\zeta - z| \geq \epsilon_3 \},$$

k est différent de zéro puisque H vérifie P_5 .

Si l'on impose à δ_3 de vérifier

$$0 < \delta_3 < \delta_2 \quad \text{et} \quad \delta_3 < k,$$

on a, d'après (7.9), sur K_{ϵ_3, δ_3}

$$\operatorname{Re} H(\zeta, z) < k,$$

donc,

$$H(\zeta, z) \neq k.$$

Ainsi, la fonction G définie sur $\partial D \times D_{\delta_3}$ par

$$G(\zeta, z) = \frac{H(\zeta, z)}{1 - \frac{1}{k} H(\zeta, z)} \quad (7.12)$$

appartient à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}(D_{\delta_3}))$.

On étudie le signe de $\operatorname{Re} G(\zeta, z)$ selon les valeurs de (ζ, z) .

Si $(\zeta, z) \in \partial D \times \bar{D}$ et $|\zeta - z| < \epsilon_3, \zeta \neq z$, on a, puisque H vérifie $P_2(\epsilon_2, M_2)$, $\operatorname{Re} H(\zeta, z) < 0$, donc $\operatorname{Re} G(\zeta, z) < 0$.

Si $(\zeta, z) \in \partial D \times \bar{D}$ et $|\zeta - z| \geq \epsilon_3$, alors, par définition de k , on a $|H(\zeta, z)| \geq 3k$ et, d'après (7.12), $\operatorname{Re} G(\zeta, z) < 0$.

Ceci établit (7.10) ; par ailleurs (7.11) se déduit de (7.12) puisque H vérifie P_5 .

On va maintenant imposer à ϵ_3 et δ_3 des contraintes suffisantes pour que, pour un bon choix de M_3 et m_3 , \mathcal{H} vérifie $P_2(\epsilon_3, m_3)$ et $P_3(\epsilon_3, M_3)$. En particulier, on réduira ϵ_3 et δ_3 pour qu'il existe C_1 et C_2 tels que, sur K_{ϵ_3, δ_3} , on ait

$$|H(\zeta, z)| \leq C_1 |\zeta - z| \quad (7.13)$$

et

$$\left| G(\zeta, z) - H(\zeta, z) \left[1 + \frac{1}{k} H(\zeta, z) \right] \right| \leq C_2 |\zeta - z|^3. \quad (7.14)$$

Ceci implique, d'une part,

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) - \operatorname{Re} H(\zeta, z) + \frac{1}{k} [\operatorname{Im} H(\zeta, z)]^2 \geq -C_2 |\zeta - z|^3 \quad (7.15)$$

et d'autre part,

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) - \operatorname{Re} H(\zeta, z) - \frac{1}{k} [\operatorname{Re} H(\zeta, z)]^2 \leq C_2 |\zeta - z|^3. \quad (7.16)$$

On obtient de là, quitte à réduire à nouveau ϵ_3 et δ_3 , qu'il existe une constante $C_3 > 0$, telle que, pour tout (ζ, z) de K_{ϵ_3, δ_3} , on ait, d'après (7.15),

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) - \operatorname{Re} H(\zeta, z) \geq -C_3 |\zeta - z|^2,$$

et, d'après (7.16),

$$\operatorname{Re} G(\zeta, z) - \operatorname{Re} H(\zeta, z) \leq C_3 |\zeta - z|^3.$$

De là, puisque H vérifie $P_2(\epsilon_2, m_2)$, $P_3(\epsilon_2, M_2)$ et P_4 , il existe ϵ_3 , M_3 et m_3 telles que G vérifie $P_2(\epsilon_3, m_3)$, $P_3(\epsilon_3, M_3)$ et P_4 .

Ceci achève la démonstration de la proposition 7.

8. On représente par le même symbole z le vecteur de \mathbb{C}^n , (z_1, z_2, \dots, z_n) , et le vecteur de \mathbb{R}^{2n} , $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, si $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \dots, n$.

On pose

$$\langle z, z' \rangle = \sum_{i=1}^n z_i z'_i \tag{8.1}$$

$$(z, z') = \sum_{i=1}^n (x_i x'_i + y_i y'_i). \tag{8.2}$$

On a alors

$$(z, z') = \operatorname{Re} \langle z, \bar{z}' \rangle = \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^n z_i \bar{z}'_i \right).$$

En tout point ζ de ∂D on note ν_ζ le vecteur unitaire de la normale en ζ orientée vers l'extérieur et T_ζ l'espace tangent réel en ζ .

Si on désigne par N_ζ le sous-espace vectoriel complexe engendré par ν_ζ et par L_ζ le sous-espace vectoriel réel engendré par $(i\nu_\zeta)$, on a la décomposition orthogonale complexe

$$C^n = N_\zeta \oplus P_\zeta$$

et la décomposition orthogonale réelle

$$T_\zeta = L_\zeta \oplus P_\zeta.$$

On notera Π_{N_ζ} la projection orthogonale complexe sur N_ζ et Π_{L_ζ} la projection orthogonale réelle sur L_ζ .

9. COROLLAIRE. — *Il existe des constantes A_1 et A_2 , strictement positives, telles que, pour tout (ζ, z) de $\partial D \times \partial D$ on ait*

$$|G(\zeta, z)| \leq A_1 |\zeta - z|^2 + A_2 |\Pi_{L_\zeta}(\zeta - z)|.$$

Preuve. — On a

$$|G(\zeta, z)| \leq -\operatorname{Re} G(\zeta, z) + |\operatorname{Im} G(\zeta, z)|.$$

On utilise (a) et (c) de la proposition 7 ainsi qu'un développement de Taylor de $\operatorname{Im} G(\zeta, z)$, par rapport à z , au point $z = \zeta$. De là, il existe K tel que, pour tout (ζ, z) de $\partial D \times \partial D$, on ait

$$|G(\zeta, z)| \leq K |\zeta - z|^2 + |(\operatorname{grad}_z \operatorname{Im} G(\zeta, \zeta), z - \zeta)|.$$

La fonction G vérifie P_4 et est holomorphe en z ; on a donc

$$\frac{\partial}{\partial z} G(\zeta, \zeta) = \frac{\partial}{\partial z} \rho(\zeta). \quad (9.1)$$

De là, on conclut que $\text{grad}_z \text{Im } G(\zeta, \zeta)$ est porté par iv_ζ et vérifie

$$|\text{grad}_z \text{Im } G(\zeta, \zeta)| = \frac{1}{2} |\text{grad } \rho(\zeta)|.$$

Ceci, compte-tenu de la régularité de ρ , établit le corollaire.

10. COROLLAIRE. — *Il existe des constantes B_1 et B_2 , strictement positives, telles que, pour tout (ζ, z) de $\partial D \times \partial D$, on ait*

$$|G(\zeta, z)| \geq B_1 |\Pi_{N_\zeta}(\zeta - z)| - B_2 |\zeta - z|^2.$$

Preuve. — D'après (9.1)

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} G(\zeta, \zeta), z - \zeta \right\rangle = \overline{\langle \text{grad } \rho(\zeta), z - \zeta \rangle}.$$

Le vecteur $\text{grad } \rho(\zeta)$ est dans le sous espace vectoriel N_ζ . Le lemme se déduit donc du développement de Taylor de G par rapport à z au point $z = \zeta$, puisque G appartient à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}(\mathcal{D}_\delta))$ et que $\text{grad } \rho$ ne s'annule pas sur ∂D .

II

11. On considère sur ∂D la mesure μ induite par la structure euclidienne de \mathbb{C}^n et on définit, pour tout ζ de ∂D et tout $r > 0$, la "boule" $B(\zeta, r)$ de "centre" ζ et de "rayon" r par

$$B(\zeta, r) = \{z \in \partial D ; |\langle z - \zeta, \bar{v}_\zeta \rangle| < r, |z - \zeta|^2 < r\}. \quad (11.1)$$

Une telle famille de boules vérifie la propriété suivante. [11]

12. PROPOSITION. — *Il existe des constantes strictement positives K et A , $K > 1$, telles que*

$$\text{a) } B(\zeta_1, r_1) \cap B(\zeta_2, r_2) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad r_1 \geq r_2. \quad (12.1)$$

implique

$$B(\xi_2, r_2) \subset B(\xi_1, Kr_1)$$

b)

$$0 < \mu[B(\xi, Kr)] \leq A\mu[B(\xi, r)]. \quad (12.2)$$

Plus précisément, il existe des constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que

$$C_1 r^n \leq \mu[B(\xi, r)] \leq C_2 r^n. \quad (12.3)$$

13. On définit de là une pseudo distance sur ∂D en posant $\rho(z, w) = \inf\{r ; \text{il existe une boule de rayon } r \text{ contenant } z \text{ et } w\}$,

On a, en effet, quels que soient z, w et t de ∂D ,

$$\rho(z, w) > 0 \Leftrightarrow z \neq w,$$

$$\rho(z, w) = \rho(w, z),$$

$$\rho(z, w) \leq K[\rho(z, t) + \rho(t, w)],$$

où K est la constante figurant dans (12.1).

On en déduit alors, pour tout (z, w) de $\partial D \times \partial D$,

$$\rho(z, w) \leq |\Pi_{N_z}(z - w)| + |z - w|^2 \leq 2K \rho(z, w). \quad (13.1)$$

Si E est un sous-ensemble fermé de ∂D , on note

$$\rho(z, E) = \inf_{w \in E} \rho(z, w).$$

On peut définir une nouvelle famille de boules

$$\tilde{B}(z, r) = \{w \in \partial D ; \rho(z, w) < r\}.$$

Les boules $B(z, r)$ et $\tilde{B}(z, r)$ ne coïncident pas ; on a néanmoins, d'après la proposition 12,

$$B(z, r) \subset \tilde{B}(z, r) \subset B(z, Kr). \quad (13.2)$$

On pourra trouver dans [5] une démonstration des deux lemmes suivants.

14. LEMME. — Il existe une constante k telle que, si E est un sous-ensemble fermé de ∂D et $\tilde{B}(\xi, r(\xi))$ un recouvrement de CE , il

existe une suite de boules disjointes $\widetilde{B}(\xi_i, r(\xi_i))$ telles que la famille $\{\widetilde{B}(\xi_i, kr(\xi_i))\}$ forme un recouvrement de CE .

15. On applique le lemme 14 en posant

$$r(\xi) = \frac{1}{2Kk} \rho(\xi, E) \quad (15.1)$$

et on note $r_i = r(\xi_i)$. On en déduit un lemme de recouvrement analogue à celui de Whitney.

16. LEMME. — *Il existe des constantes k, A, B et M strictement positives telles que, si E est un sous-ensemble fermé de ∂D , il existe une suite de boules $\widetilde{B}(\xi_i, r_i)$ ayant les propriétés suivantes :*

1) les boules $\widetilde{B}(\xi_i, r_i)$ sont disjointes :

2) $CE \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{B}(\xi_i, kr_i)$;

3) Si z appartient à une boule $\widetilde{B}(\xi_i, kr_i)$ on a

$$Ar_i \leq \rho(z, E) \leq Br_i.$$

4) Un point z de CE ne peut appartenir à plus de M boules distinctes.

17. D'après (13.2), il existe une suite de boules $B(\xi_i, r_i)$ qui vérifie le lemme 16. Plus généralement, si une suite de boules de centre x_i et de rayon α_i vérifie le lemme 16, on dira que les boules dilatées dans le rapport k forment un recouvrement du type Whitney de CE .

18. LEMME. — *Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D dans C^n , $n \geq 1$, et $B(\xi_i, r_i)$ une suite de boules dont les dilatées $B(\xi_i, kr_i)$ forment un recouvrement du type Whitney de CE , alors la condition*

$$\int_{\partial D} \frac{1}{[\rho(z, E)]^{n-1}} \log \frac{1}{\rho(z, E)} d\mu(z) < \infty \quad (18.1)$$

est équivalente à la condition

$$\mu(E) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i r_i \log \frac{1}{r_i} < \infty. \quad (18.2)$$

Preuve. — La condition (18.1) implique $\mu(E) = 0$ et le lemme est une conséquence immédiate du lemme 16 et de (12.3).

19. Si D est la boule unité de \mathbb{C}^n , $n \geq 1$, la pseudo-distance $\tilde{\rho}$ définie par

$$\tilde{\rho}(\xi, z) = |1 - \langle \bar{\xi}, z \rangle|$$

est équivalente à la pseudo-distance ρ introduite dans le paragraphe 13.

Puisque la fonction $G(\xi, z) = \langle \bar{\xi}, z \rangle - 1$ vérifie la proposition 7, on a alors

$$|G(\xi, z)| = \tilde{\rho}(\xi, z).$$

Cette situation se généralise lorsque D est un domaine strictement pseudo-convexe de \mathbb{C}^n . C'est ce qu'expriment les lemmes qui suivent.

20. LEMME. — *Il existe une constante $A, > 0$, telle que si (ξ, z) appartient à $\partial D \times \partial D$*

$$|G(\xi, z)| \leq A\rho(\xi, z).$$

Preuve. — Ce lemme est une conséquence immédiate du corollaire 9 et de (13.1). On a, en effet,

$$|\Pi_{L_\xi}(\xi - z)| \leq |\Pi_{N_\xi}(\xi - z)|.$$

21. LEMME. — *Il existe une constante B , strictement positive, telle que si (ξ, z) appartient à $\partial D \times \partial D$, on ait*

$$|G(\xi, z)| \geq B\rho(\xi, z).$$

Preuve. — D'après la proposition 7 et le corollaire 10, il existe m, B_1 et B_2 telles que l'on ait

$$|G(\xi, z)| \geq -\operatorname{Re} G(\xi, z) \geq m|\xi - z|^2 \tag{21.1}$$

et,

$$|G(\xi, z)| \geq B_1 |\Pi_{N_\xi}(\xi - z)| - B_2 |\xi - z|^2. \tag{21.2}$$

On considère deux cas.

Soit,

$$|\Pi_{N_\xi}(\xi - z)| < \frac{2B_2}{B_1} |\xi - z|^2$$

alors, d'après (13.1), on a

$$\rho(\xi, z) \leq \left(\frac{2B_2}{B_1} + 1 \right) |\xi - z|^2,$$

et, pour conclure dans ce cas, on utilise l'inégalité (21.1).

Soit, au contraire,

$$|\Pi_{N_\xi}(\xi - z)| \geq \frac{2B_2}{B_1} |\xi - z|^2$$

alors, d'après (21.2), on a

$$|G(\xi, z)| \geq \frac{B_1}{2} |\Pi_{N_\xi}(\xi - z)|,$$

et, d'après (13.1),

$$\rho(\xi, z) \leq \left(\frac{B_1}{2B_2} + 1 \right) |\Pi_{N_\xi}(\xi - z)|;$$

ceci achève la démonstration du lemme.

22. On note :

$A(D)$ la classe des fonctions analytiques dans D , continues dans \bar{D} ,

$A^k(D)$ [resp. $A^\infty(D)$] la classe des fonctions analytiques dans D , continues ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k [resp. de tous ordres] dans \bar{D} .

Dans tout ce qui suit, E est un sous-ensemble fermé de ∂D .

On dit que E est un Z^0 pour une classe \mathcal{A} , s'il existe une fonction f de \mathcal{A} telle que l'on ait

$$E = \{z \in \bar{D} ; f(z) = 0\} = Z^0(f).$$

On dit que E est un Z^k pour une classe \mathcal{A} , s'il existe une fonction f de \mathcal{A} , telle que E soit l'ensemble des zéros communs à f et à toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k . On note alors $E = Z^k(f)$, ($k = 1, 2, \dots$).

De même, E est un Z^∞ pour une classe \mathcal{A} , s'il existe une fonction f de \mathcal{A} , telle que l'on ait :

$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} Z^k(f) = Z^\infty(f).$$

Dans ce qui suit, à l'exception du théorème 32, on supposera que la fonction ρ définissant le domaine D est de classe $C^{2+\alpha}$, $\alpha > 0$.

Pour toute fonction f de $A(D)$, f^* désigne la restriction de f à ∂D .

23. LEMME. — Soit un domaine borné, strictement pseudo-convexe de classe $C^{2+\alpha}$, $\alpha > 0$, soit f une fonction de $A(D)$, si f^* appartient à $C^1(\partial D)$, f appartient à $A^1(D)$.

Pour tout $k = 1 \dots n$, on peut associer au champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z_k}$ un champ de vecteurs tangent à ∂D , T_k , de classe $C^{1+\alpha}$, tel que, pour toute fonction g holomorphe au voisinage de \bar{D} et tout ζ de ∂D , on ait

$$\frac{\partial g}{\partial z_k}(\zeta) = T_k g(\zeta). \tag{23.1}$$

On sait (G. Henkin, N. Kerzman, I. Lieb) que toute fonction f de $A(D)$ est limite uniforme sur \bar{D} d'une suite de fonctions f_p holomorphes dans un voisinage de \bar{D} [7].

La suite $(f_p^*)_{p \in \mathbb{N}}$ tend uniformément vers f^* sur ∂D , donc, pour tout k , la suite $(T_k f_p^*)_{p \in \mathbb{N}}$ tend vers $T_k f^*$ dans $\mathcal{O}'_1(\partial D)$, l'espace des distributions d'ordre 1 sur ∂D .

Soit z un point intérieur à D . Puisque D est de classe $C^{2+\alpha}$, le noyau de Poisson associé $P_z(\zeta)$ est de classe $C^{1+\alpha}$ sur ∂D .

On a donc, d'après (23.1),

$$\frac{\partial f_p}{\partial z_k}(z) = \int_{\partial D} P_z(\zeta) T_k f_p^*(\zeta) d\mu(\zeta),$$

et, lorsque p tend vers $+\infty$,

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}(z) = \int_{\partial D} P_z(\zeta) T_k f^*(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Par hypothèse, $T_k f^*(\zeta)$ est continue sur ∂D ; son intégrale de Poisson est donc continue dans \bar{D} . Pour tout $k = 1, \dots, n$, $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ coïncide sur D avec une fonction continue dans \bar{D} . La fonction f appartient donc à $A^1(D)$.

Le théorème que l'on se propose d'établir maintenant généralise un résultat obtenu, lorsque D est le disque unité du plan complexe, par L. Carleson [1] pour $A^k(D)$, par B.A. Taylor et D.L. Williams [12] et par B.I. Korembljum [10] pour $A^\infty(D)$.

24. THEOREME. — Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D dans C^n , $n \geq 1$, tel que

$$\int_{\partial D} \frac{1}{[\rho(z, E)]^{n-1}} \operatorname{Log} \frac{1}{\rho(z, E)} d\mu(z) < \infty,$$

alors, il existe une fonction F de $A^\infty(D)$, non identiquement nulle, nulle seulement sur E , telle que, de plus, E soit l'ensemble des zéros communs à F et à toutes ses dérivées. On a donc

$$E = Z^0(F) = Z^\infty(F).$$

Démonstration. — Soit $\{B(\xi_i, r_i)\}$ une suite de boules telles que les boules dilatées $B(\xi_i, kr_i)$ forment un recouvrement du type Whitney de $C E$.

D'après le lemme 18, la série $\sum_i r_i \operatorname{Log} \frac{1}{r_i}$ converge ; il existe donc une suite de réels positifs λ_i tendant vers $+\infty$ telle que l'on ait

$$\sum_i \lambda_i r_i \operatorname{Log} 1/r_i < \infty. \quad (24.1)$$

On pose, pour tout z dans $\bar{D} \setminus E$,

$$\varphi(z) = \sum_i \frac{\lambda_i r_i \operatorname{Log} 1/r_i}{G(\xi_i, z) - r_i} \quad (24.2)$$

où $G(\xi_i, z)$ est la fonction vérifiant la proposition 7. On a

$$|G(\xi_i, z) - r_i| \geq -\operatorname{Re} G(\xi_i, z) + r_i \geq m |\xi_i - z|^2 + r_i.$$

Ainsi φ est analytique donc indéfiniment différentiable dans un voisinage de \bar{D} privé de E .

On se propose d'établir pour φ la propriété suivante : il existe des constantes c et C strictement positives, telles que, si z appartient à $\partial D \setminus E$, z dans $B(\xi_j, kr_j)$ par exemple, on ait

$$\operatorname{Re} \varphi(z) < -c \lambda_j \operatorname{Log} 1/r_j, \tag{24.3}$$

et

$$|D^J \varphi(z)| < C^{k+1} \frac{k!}{r_j^{k+1}}, \tag{24.4}$$

pour tout entier k , et pour tout multi-indice J tel que $|J| = k$.

D'après la proposition 7, pour tout entier i et pour tout z de \bar{D} , $\operatorname{Re} G(\xi_i, z)$ est négative.

Ceci implique

$$\operatorname{Re} \varphi(z) < 0, \quad \text{pour tout } z \text{ de } \bar{D} \setminus E. \tag{24.5}$$

Soit z un point de CE , z appartient à une des boules dilatées, soit $B(\xi_j, kr_j)$.

D'après (24.5), on obtient

$$\operatorname{Re} \varphi(z) < \operatorname{Re} \frac{\lambda_j r_j \operatorname{Log} 1/r_j}{G(\xi_j, z) - r_j}.$$

Or, on a

$$\operatorname{Re} G(\xi_j, z) - r_j \leq -r_j$$

et, d'après le lemme 20,

$$|G(\xi_j, z) - r_j| \leq (A + 1) r_j$$

donc,

$$\operatorname{Re} \varphi(z) \leq -\frac{\lambda_j \operatorname{Log} 1/r_j}{(A + 1)^2}$$

ce qui prouve (24.3).

G appartient à $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}(D_\delta))$, donc, d'après les lemmes 2 et 3 et un argument de compacité, il existe une constante M telle que, pour tout k , et tout (ξ, z) dans $\partial D \times \bar{D}$, on ait

$$|D_z^J G(\xi, z)| \leq M^{k+1} k!. \quad |J| = k \tag{24.6}$$

En utilisant une formule de dérivation de fonction composée de Fa di Bruno [2] et (24.6) on obtient

$$|D^J \varphi(z)| \leq (2M^2)^k k! \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i r_i \operatorname{Log} 1/r_i}{|r_i - G(\xi_i, z)|^{k+1}}. \tag{24.7}$$

Pour établir (24.4), on distingue deux cas.

Si

$$\rho(\xi_i, z) \geq \frac{1}{2K} \rho(z, E),$$

(avec K la constante intervenant dans l'inégalité de pseudo-distance), on a d'après le lemme 21,

$$|r_i - G(\xi_i, z)| \geq |G(\xi_i, z)| \geq B \rho(\xi_i, z),$$

donc,

$$|r_i - G(\xi_i, z)| \geq \frac{B}{2K} \rho(z, E). \quad (24.9)$$

Si, au contraire,

$$\rho(\xi_i, z) < \frac{1}{2K} \rho(z, E),$$

on a alors, d'après l'inégalité de pseudo-distance,

$$\frac{1}{K} \rho(z, E) \leq \rho(z, \xi_i) + \rho(\xi_i, E)$$

donc,

$$\frac{1}{2K} \rho(z, E) \leq \rho(\xi_i, E)$$

et d'après (15.1),

$$\frac{1}{2K} \rho(z, E) \leq 2K k r_i.$$

De là, puisque $\operatorname{Re} G$ est négative sur $\partial D \times \bar{D}$, on obtient,

$$|r_i - G(\xi_i, z)| \geq r_i$$

donc,

$$|r_i - G(\xi_i, z)| \geq \frac{1}{4K^2 k} \rho(z, E). \quad (24.10)$$

Les inégalités (24.9) et (24.10), compte tenu de (24.1), établissent (24.4).

On pose

$$F(z) = \exp \varphi(z). \quad (24.11)$$

F est analytique dans D , de classe C^∞ dans $\bar{D} \setminus E$. On a une majoration des dérivées d'ordre k de F .

Il existe, en effet, une constante $C, > 0$, telle que quel que soit l'entier $k, > 0$, et quel que soit le multi-indice $J, |J| = k$, on ait, pour tout z de $\partial D \setminus E$,

$$|D^J F(z)| \leq k! \frac{C^k |F(z)|}{[\rho(z, E)]^{2k}} \tag{24.12}$$

De là, d'après (24.3) et le lemme 16, si z appartient à $B(\xi_j, kr_j)$,

$$|D^J F(z)| \leq k! C^k r_j^{c\lambda_j - 2k} \tag{24.13}$$

Lorsqu'un point z de $\partial D \setminus E$ tend vers un point de E il appartient successivement à des boules $B(\xi_j, kr_j)$ dont le rayon tend vers zéro. On sait, en effet, que si z appartient à une boule $B(\xi_j, kr_j)$, r_j est équivalent à $\rho(z, E)$.

De là, d'après (24.13), lorsque z dans $\partial D \setminus E$ tend vers un point de E , r_j tend vers 0, λ_j tend vers $+\infty$, donc, à partir d'un certain rang, on a

$$c\lambda_j \geq 2k + 1,$$

et de là, pour tout entier $k \geq 0$ et tout multi-indice J tel que $|J| = k$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |D^J F(z)| = 0, \quad z_0 \in E, \quad z \in \partial D \setminus E. \tag{24.14}$$

La fonction F est holomorphe dans un voisinage de $\bar{D} \setminus E$. Sa restriction à $\partial D \setminus E$ admet, d'après (24.14), un prolongement continu à ∂D .

Soit,

$$F^* = \begin{cases} F & \text{sur } \partial D \setminus E, \\ 0 & \text{sur } E. \end{cases}$$

Puisque F est holomorphe et bornée dans D et que E est de mesure nulle sur ∂D , F est l'intégrale de Poisson-Szegö de F^* [11]. Or le noyau de Poisson-Szegö est une approximation de l'identité et F^* est continue sur ∂D , F appartient donc à $A(D)$ et, d'après (24.5), s'annule seulement sur E .

On a, de plus, si z appartient à $\partial D \setminus E$, z dans $B(\xi_j, kr_j)$ par exemple,

$$|F(z)| \leq r_j^{c\lambda_j}.$$

La fonction F^* admet donc des dérivées d'ordre 1 nulles en chaque point de E , ce qui, compte tenu de (24.14), implique que F^* est de classe C^1 sur ∂D . D'après le lemme 23, F appartient donc à $A^1(D)$. On conclut par itération que F appartient à $A^\infty(D)$ et que F et toutes ses dérivées s'annulent sur E . On a alors

$$E = Z^0(F) = Z^\infty(F)$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

25. On a donc deux formes équivalentes (18.1) et (18.2) d'une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble fermé de ∂D soit un Z^0 et un Z^∞ pour $A^\infty(D)$. On va en donner une nouvelle version dont l'intérêt réside dans son application à l'étude de cas particuliers.

26. On désigne par $N_\epsilon(E)$ le nombre minimal de boules B de rayon ϵ dont la réunion recouvre E .

On note

$$E_\epsilon = \{z \in \partial D ; \rho(z, E) \leq \epsilon\}. \quad (26.1)$$

27. PROPOSITION. — Il existe des constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que

$$c_1 N_\epsilon(E) \epsilon^n \leq \mu(E_\epsilon) \leq c_2 N_\epsilon(E) \epsilon^n. \quad (27.1)$$

Preuve. — L'inégalité de droite se déduit simplement des définitions de E_ϵ , $N_\epsilon(E)$ et de (12.3). On établit l'inégalité de gauche en comparant $N_\epsilon(E)$ et le nombre maximal de points z_i , $i = 1, 2, \dots$ tels que l'on ait, pour tout i et j , $i \neq j$,

$$\rho(z_i, z_j) \geq \epsilon.$$

28. PROPOSITION. — La condition

$$\int_{\partial D} \frac{1}{[\rho(z, E)]^{n-1}} \operatorname{Log} \frac{1}{\rho(z, E)} d\mu(z) < \infty \quad (28.1)$$

équivaut, lorsque $n = 1$, à

$$\int_0^1 N_\epsilon(E) d\epsilon < \infty \quad (28.2)$$

et lorsque $n \geq 2$, à

$$\int_0^1 N_\epsilon(E) \cdot \text{Log} \frac{1}{\epsilon} d\epsilon < \infty. \quad (28.3)$$

Démonstration. — Soit

$$B_k = \{z \in \partial D ; 2^{-k-1} < \rho(z, E) \leq 2^{-k}\}.$$

La condition (28.1) est équivalente à

$$\mu(E) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{(n-1)k} \mu(B_k) < \infty.$$

On note

$$C_k = \bigcup_{j \geq k} B_j.$$

et on obtient, en sommant par parties

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k 2^{(n-1)k} \mu(B_k) &= \sum_{k=1}^N 2^{(n-1)(k-1)} [k(2^{n-1} - 1) + 1] \mu(C_k) - \\ &\quad - N 2^{(n-1)N} \mu(C_{N+1}). \end{aligned}$$

D'après (28.1), $N 2^{(n-1)N} \mu(C_N)$ tend vers 0, lorsque N tend vers $+\infty$.
Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k 2^{(n-1)k} \mu(B_k) < \infty$$

équivalent, lorsque $n = 1$, à

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) < \infty, \quad (28.4)$$

et, lorsque $n \geq 2$, à

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(n-1)k} k \mu(C_k) < \infty. \quad (28.5)$$

D'après (26.1) et la proposition 27,

$$C_k = E_{1/2^k} \quad \text{et} \quad 2^{nk} \mu(C_k) \leq c_2 N_{1/2^k}(E)$$

(28.4) équivaut donc à $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} N_{1/2^k}(E) < \infty$ et (28.5) à

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} N_{1/2^k}(E) < \infty.$$

Ceci établit la proposition.

29. L'équivalence, lorsque $n = 1$ et $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$, des conditions (18.2) et (28.2) figure dans [8]. La pseudo-distance $\rho(z, w)$ coïncide alors avec la distance euclidienne sur ∂D .

Voici un énoncé simple qui est une conséquence facile du théorème 24 et de la proposition 28.

30. PROPOSITION. — Si Γ est un arc sur δD de classe $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, dont la tangente en chaque point ζ est dans P_ζ , le sous-espace complexe de dimension $(n - 1)$ de l'espace tangent à D en ζ , il existe une fonction F , non identiquement nulle, de $A^\infty(D)$ telle que l'on ait

$$\Gamma = Z^0(F) = Z^\infty(F).$$

Démonstration. — On peut supposer ici $n > 1$. Soit γ l'application de $[a, b]$ dans C^n définissant Γ . Il existe une constante M telle que, pour tout couple (t, t_1) de points de $[a, b]$, on ait

$$|\gamma(t) - \gamma(t_1) - (t - t_1) \gamma'(t_1)| \leq M |t - t_1|^{1+\alpha}$$

$$|\gamma(t) - \gamma(t_1)| \leq M |t - t_1|$$

De là, en notant

$$z = \gamma(t) \quad , \quad z_1 = \gamma(t_1)$$

on obtient

$$|\Pi_{N_{z_1}}(z - z_1)| \leq M |t - t_1|^{1+\alpha} \quad (30.1)$$

$$|z - z_1|^2 \leq M^2 |t - t_1|^2. \quad (30.2)$$

Soit $P(\epsilon)$ le nombre minimal d'intervalles de longueur $\epsilon^{1/1+\alpha}$ dont la réunion recouvre $[a, b]$; $P(\epsilon)$ est de l'ordre de $\frac{1}{\epsilon^{1/1+\alpha}}$.

Soient t_i les centres de ces intervalles et $\gamma(t_i)$ leurs images. D'après (30.1) et (30.2), on a

$$E \subset \bigcup_i B(\gamma(t_i), \epsilon),$$

donc

$$N_\epsilon(E) \leq P(\epsilon),$$

et

$$\int_0^1 N_\epsilon(E) \operatorname{Log} \frac{1}{\epsilon} d\epsilon < \infty,$$

III

Un sous-ensemble E de ∂D est pic pour $A(D)$ s'il existe une fonction f de $A(D)$ telle que

$$f(z) = 1 \quad \text{si } z \text{ appartient à } E \text{ et,}$$

$$|f(z)| < 1 \quad \text{ailleurs,}$$

ou, ce qui est équivalent, s'il existe une fonction de $A(D)$, nulle seulement sur E , dont la partie réelle soit positive dans \bar{D} .

31. PROPOSITION. — *Il n'existe pas d'ensembles infinis qui soient pics pour $A^m(D)$, $m \geq 1$.*

Ce résultat est établi dans [13] lorsque D est le disque unité du plan complexe. Il s'étend lorsque D est un domaine borné strictement pseudo-convexe de C^n , $n \geq 1$, à frontière de classe C^2 . En effet, s'il existe un ensemble infini pic pour $A^1(D)$, il existe un point z_0 de ∂D et une fonction f de $A^1(D)$ telle que

$$\operatorname{Re} f(z) \geq 0, \quad \text{pour tout } z \text{ dans } \bar{D},$$

et,

$$f(z_0) = f'(z_0) = 0.$$

Alors, en se restreignant à un disque convenable passant par z_0 et contenu dans \bar{D} , on obtient une contradiction.

32. Dans [6], A.M. Davie et B.K. Øksendal ont donné une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble E de ∂D soit un ensemble pic pour $A(D)$. D'après la proposition 31, leur construction ne s'étend pas aux classes $A^m(\bar{D})$, $m \geq 1$.

En revanche, on peut donner des conditions sur E telles que, avec les idées développées dans la démonstration du théorème 24, on sache construire des fonctions, nulles seulement sur E , appartenant, soit à $A(D)$ (les résultats obtenus sont alors contenus dans ceux de A.M. Davie et B.K. Øksendal [6]), soit à des classes plus régulières que $A^\infty(D)$, à des classes de Gevrey par exemple.

33. THEOREME. — *Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D dans C^n , $n \geq 1$, de mesure nulle, vérifiant*

$$\int_{\partial D} \frac{1}{[\rho(z, E)]^{n-1}} d\mu(z) < \infty \quad (33.1)$$

alors, il existe une fonction F de $A(D)$ telle que l'on ait

$$E = Z^0(F).$$

Démonstration. — Si $n \geq 2$, la condition (33.1) est équivalente à

$$\int_0^1 N_\epsilon(E) d\epsilon < \infty, \quad (33.2)$$

ou à

$$\mu(E) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i r_i < \infty, \quad (33.3)$$

si r_i désigne le rayon des boules d'un recouvrement du type Whitney de $C E$. On note ξ_i leur centre.

Si $n = 1$, on a encore $\sum r_i < \infty$.

On montre alors en reprenant les idées et les notations de la démonstration du théorème 24 que la fonction

$$F(z) = \exp \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i r_i}{G(z_i, z) - r_i}$$

appartient à $A(D)$ et s'annule seulement sur E .

34. Soit $(M_k)_{k \geq 0}$, une suite de réels positifs, logarithmiquement convexe, on désigne par $\{M_k\}^+$ la classe des fonctions f , analytiques dans D , continues ainsi que leurs dérivées de tous ordres dans \bar{D} , qui vérifient la propriété suivante : il existe une constante A_f telle que, pour tout z dans \bar{D} , tout entier k positif ou nul et tout multi-indice J tel que $|J| = k$, on ait

$$|D^J f(z)| \leq A_f^{k+1} M_{k+1}.$$

On pose

$$T(r) = \sup_k \frac{r^k}{M_k}.$$

Le théorème suivant généralise un résultat [3] précédemment établi, lorsque D est le disque unité du plan complexe.

35. THEOREME. — Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D dans C^n , $n \geq 1$, vérifiant

$$\int_{\partial D} \frac{1}{[\rho(z, E)]^{n-1}} \text{Log } T\left(\frac{1}{\rho(z, E)}\right) d\mu(z) < \infty \quad (35.1)$$

alors il existe une fonction F de $\{M_{2k}\}^+$ telle que l'on ait

$$E = Z^0(F) = Z^\infty(F).$$

Démonstration. — La condition (35.1) est équivalente, quel que soit n , à

$$\int_0^1 N_\epsilon(E) \text{Log } T\left(\frac{1}{\epsilon}\right) d\epsilon < \infty \quad (35.2)$$

ou à,

$$\mu(E) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i r_i \text{Log } T(1/r_i) < \infty \quad (35.3)$$

si r_i désigne ici encore le rayon des boules d'un recouvrement du type Whitney de $C E$.

On pose

$$T^*(r) = \sup_k \frac{r^k}{2^k M_k}.$$

En adaptant, à l'aide des méthodes détaillées dans [3], la démonstration du théorème 24 dont on reprend les notations, on montre que la fonction

$$F(z) = \exp \sum_i \frac{r_i \text{Log } T^*(1/r_i)}{G(\xi_i, z) - r_i}$$

appartient à $\{M_{2k}\}^+$, qu'elle s'annule seulement sur E et que, de plus, E est l'ensemble des zéros communs à F et à toutes ses dérivées.

36. PROPOSITION. — Soit $D = \{z \in C^n ; |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}$, la non-quasi-analyticité d'une classe $\{M_{2k}\}^+$, c'est-à-dire l'existence dans la classe d'une fonction non identiquement nulle s'annulant en un point ainsi que toutes ses dérivées, équivaut à la condition

$$\int_0^1 \text{Log } T(1/\epsilon) d\epsilon < \infty.$$

Démonstration. — Ce résultat, si $n = 1$, est établi dans [9]. On ramène le cas général à l'étude d'une fonction d'une variable sur un disque en coupant D par une droite complexe.

37. PROPOSITION. — Soit D un sous-ensemble borné strictement pseudo-convexe de C^n , $n \geq 2$, la condition

$$\int_0^1 \text{Log } T(1/\epsilon) d\epsilon < \infty$$

implique l'existence dans la classe $\{M_{2k}\}^+$ d'une fonction non identiquement nulle qui s'annule ainsi que toutes ses dérivées sur un sous-ensemble parfait de ∂D .

Démonstration. — Il existe une fonction φ strictement croissante, tendant vers $+\infty$ quand ϵ telle que

$$\int_0^1 \varphi(\epsilon) \text{Log } T(1/\epsilon) d\epsilon < \infty.$$

Soit Γ un arc de classe C^2 sur ∂D , défini par $\gamma(t)$, t dans $[0, 1]$ par exemple, tel que la tangente à Γ en chaque point ζ soit situé dans P_ζ , le sous-espace complexe de dimension $n - 1$ de l'espace tangent à D en ζ .

On construit sur $[0, 1]$ un ensemble parfait F tel que le nombre minimal d'intervalles de longueur $\sqrt{\epsilon}$ dont la réunion recouvre E soit majoré par $C \varphi(\epsilon)$ où C désigne une constante ne dépendant que de E . On prend, par exemple,

$$F = \left\{ x ; x = \sum \frac{\alpha_j}{[\psi(1/2^j)] + 1}, \alpha_j = 0, 1 \right\}.$$

ψ désigne ici la fonction réciproque de φ et $[\psi(t)]$, la partie entière de $\psi(t)$.

Soit E , l'image par γ de F , E est parfait et l'on a, d'après (30.1) et (30.2),

$$N_\epsilon(E) < C \varphi(\epsilon).$$

On en déduit donc

$$\int_0^1 N_\epsilon(E) \text{Log } T(1/\epsilon) d\epsilon < \infty.$$

E vérifie donc la condition (35.1) et l'on a

$$E = Z^0(F) = Z^\infty(F),$$

avec F appartenant à $\{M_{2k}\}^+$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. CARLESON, Sets of uniqueness for functions, regular in the unit circle, *Acta Math.*, 87 (1952), 325-345.
- [2] A.-M. CHOLLET, Zéros dans les classes de Gevrey de type analytique, *Bull. Soc. Math.*, 96 (1972), 65-82.
- [3] A.-M. CHOLLET, Ensembles de zéros de fonctions analytiques dans le disque dont les valeurs au bord appartiennent à une classe très régulière, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 276 (1973), 731-733.
- [4] A.-M. CHOLLET, Ensembles de zéros à la frontière de fonctions analytiques dans la boule de C^n , *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 277 (1973), 1165-1167.
- [5] R. COIFMAN, et G. WEISS, Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes, Springer-Verlag (1971).
- [6] A.M. DAVIE and B.K. ØKSENDAL, Peak interpolation sets for some algebras of analytic functions, *Pacific J. Math.*, 41 (1972), 81-87.
- [7] G.M. HENKIN, Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and some applications, *Math. USSR Sb.*, 7 (1969), 597-616.
- [8] J.-P. KAHANE et Y. KATZNELSON, Sur les algèbres de restrictions des séries de Taylor absolument convergentes à un fermé du cercle, *J. Anal. Math.* Jérusalem, 23 (1970), 185-197.
- [9] B.I. KORENBLJUM, Quasi analytic classes of functions in a circle, *Soviet Math. Dokl.*, 6 (1965), 1155-1158.
- [10] B.I. KORENBLJUM, Functions holomorphic in a disk and smooth in its closure, *Soviet Math. Dokl.*, 12 (1971), 1312-1315.
- [11] E. STEIN, Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables, Princeton (1972).

- [12] B.A. TAYLOR and D.L. WILLIAMS, Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values, *Can. J. Math.*, 22 (1970), 1266-1283.
- [13] B.A. TAYLOR and D.L. WILLIAMS, The peak sets of A^m , *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24 (1970), 604-605.

Manuscrit reçu le 21 novembre 1974

Accepté par J.P. Kahane.

Anne-Marie CHOLLET,
Université Paris XI
U.E.R. Mathématique
91405 Orsay.