Annales de l'institut Fourier

Gunter Lumer

Problème de Cauchy pour opérateurs locaux et «changement de temps»

Annales de l'institut Fourier, tome 25, n° 3-4 (1975), p. 409-446

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_409_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 3 et 4 (1975), 409-446.

PROBLÈME DE CAUCHY POUR OPÉRATEURS LOCAUX ET « CHANGEMENT DE TEMPS »

par Gunter LUMER (1)

Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion de son 70e anniversaire.

Dans ce travail nous établissons dans un cadre très général, des critères de résolubilité pour un certain type de problèmes de Cauchy, et des résultats concernant les opérateurs associés à leur résolution; puis nous considérons les perturbations singulières du type « changement de temps » et obtenons des conditions suffisantes, et des critères nécessaires et suffisants (modulo prolongement, au besoin) de résolubilité pour le problème de Cauchy perturbé.

Nous décrivons d'abord nos résultats avec plus de détail, mais toujours brièvement et en termes forcément assez vagues, le lecteur étant renvoyé pour les précisions au développement détaillé qui suit cette introduction.

Nous considérons des opérateurs linéaires locaux, disons A, sur des espaces localement compacts séparés, disons Ω, et un certain type de « problème de Cauchy » (problème d'évolution) induit par A dans les ouverts arbitraires $V \subset \Omega$, $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = Au,\ u(0,\ x) = f(x),\ \forall x \in V,\ u(t,\ .)\ \text{ et }\ f(.) \in C_0(V)\right)$.

(1) L'essentiel de ce travail a été exposé au Séminaire de Probabilité, Université de Paris VI (Novembre 1974), et au Séminaire de Théorie du Potentiel, Université de Paris VI (Décembre 1974). Une partie des résultats avait été exposée antérieurement au « groupe de travail » Bénilan-Deny-Hirsch, à Orsay (Juin 1974).

Nous faisons dans ce contexte abstrait des hypothèses sur A qui traduisent le comportement d'une classe assez vaste d'opérateurs différentiels (aux dérivées partielles), auxquels nos résultats sont applicables. Dans ces conditions (hypothèses de la section 5), il nous est possible de déterminer exactement tous les ouverts, « bornés » ou non, de Ω, pour lesquels le problème de Cauchy considéré est résoluble. Ceci est le cas, pour un ouvert donné, si et seulement si il existe une sorte de barrière « surharmonique par rapport à $1\text{-}A$ » au « point à l'infini » de l'ouvert en question. En particulier, on a une solution pour tous les ouverts « réguliers » (au sens du problème de Dirichlet par rapport à A), et pour ces derniers, si A_V désigne l'opérateur correspondant à V induit par A, A_V^{-1} existe comme opérateur borné défini partout. Sous une hypothèse supplémentaire, très souvent vérifiée, A_V^{-1} est même compact pour V régulier. Par ailleurs, mentionnons que les méthodes et résultats généraux développés dans ce travail permettent même d'aborder des situations plus générales que le problème de Cauchy traité ici. En revenant à la situation considérée ici (section 5 et suivantes), nous appliquons nos résultats à l'étude des perturbations singulières du type « changement de temps », pA, $0 \leqslant p \in C_b(\Omega)$. D'abord dans le cadre général, nous donnons un critère nécessaire et suffisant, en termes de l'ouvert $V_p = \{p > 0\}$. Puis pour A un opérateur différentiel dans un ouvert de $\mathbf{R}^N$, nous avons une conclusion plus forte, en présence d'une condition de Hölder du même ordre que celui de l'opérateur. La théorie générale décrite plus haut nous permet alors, appliquée à ce contexte $\mathbf{R}^N$, de décider si la condition de Hölder que nous venons de mentionner peut être affaiblie dans le cas d'ordre 2 (le cas d'ordre 1 est très facile). La réponse est non, même pour le laplacien dans des ouverts de $\mathbf{R}^3$. Il est bon d'observer que dans des questions de ce type, ce sont les ouverts non-réguliers pour lesquels le problème de Cauchy correspondant à pA est ou n'est pas résoluble suivant le comportement de p, qui sont les seuls ayant un intérêt. Finalement, l'étude des perturbations singulières nous aide aussi à clarifier les relations entre « ouvert pour lequel le problème de Cauchy est résoluble » et « ouvert régulier ».

Les résultats des sections 5 et 6, combinés avec une partie de 3 et 4, constituent l'essentiel du présent travail; dans 1, 2, et en partie 3, nous présentons les notions, et résultats préliminaires, nécessaires pour la suite; 7 ne fait que compléter la discussion (en ce qui concerne le laplacien perturbé), faite dans 6, par l'examen du cas d'ordre 1 via approche directe.

1. Opérateurs locaux.

Dans ce qui suit Ω est un espace localement compact séparé, $C(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions continues à valeurs complexes sur Ω; $C_b(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions dans $C(\Omega)$ qui sont bornées en module (uniformément) sur Ω. $C_b(\Omega)$ sera toujours considéré un espace de Banach muni de la norme du sup, définie pour tout $f \in C_b(\Omega)$ par

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Nous désignerons par $C_0(\Omega)$, l'espace de Banach, sous-espace de $C_b(\Omega)$, formé par les fonctions de $C(\Omega)$ s'annulant à l'infini sur Ω, et par $C_{00}(\Omega)$ l'espace des fonctions dans $C_0(\Omega)$ ayant support compact dans Ω; (le support d'une fonction f sera noté $\operatorname{supp} f$).

Si X est un espace vectoriel quelconque, nous dirons que A est un opérateur dans X, si A est une application (opérateur) ayant domaine D(A), et image I(A), dans X. Comme nous ne considérons dans ce travail que des opérateurs linéaires, « opérateur » signifiera dorénavant pour nous « opérateur linéaire », quel que soit l'espace vectoriel X dans lequel l'opérateur agit. Pour X un espace de Banach, l'ensemble de tous les opérateurs (d'après ce que nous venons de dire cela sous-entend « linéaires ») dans X, bornés et définis partout, sera noté B(X). Nous nous occupons dans ce qui suit d'opérateurs agissant sur des fonctions.

Nous utiliserons parfois la notation « $f|V$ », avec $f \in C(\Omega)$, $V \subset \Omega$, pour « f restreinte à V » (« f dans V »).

1.1. Définition. — *L'opérateur* A *dans* $C(\Omega)$ *est dit local, si* $\forall f \in D(A)$, *et* V *ouvert dans* Ω,

$$(1) \qquad « (f|V) = 0 » \textit{ implique } « (Af|V) = 0 ».$$

De manière plus générale :

1.2. Définition. — *Par « opérateur local* A, *sur* Ω » *nous désignons une famille d'opérateurs,* $\{A^V\}$, *indexée par* V, *où* V *est un ouvert générique de* Ω, *telle que :*

a) Le domaine D^V *de* A^V *est* $\subset C(V)$, $0 \in D^V$, A^V: $D^V \longmapsto C(V)$.

b) Si V_1, V_2 *sont des ouverts de* Ω, $V_1 \subset V_2$, *alors*

$$D^{V_2}|V_1 = \{f|V_1 : f \in D^{V_2}\} \subset D^{V_1}; \ \forall f \in D^{V_2},$$
$$(A^{V_2}f)|V_1 = A^{V_1}(f|V_1). \tag{2}$$

Clairement, un opérateur local sur Ω, A, induit pour chaque $x \in \Omega$, un opérateur A_x de domaine D_x, dans l'espace vectoriel C_x des germes de fonctions continues complexes « au-dessus de » x. Pour f, continue dans un ouvert contenant x, on note f_x le germe correspondant dans C_x. Dans ces conditions, étant donné V ouvert dans Ω, on dira que $f \in C(V)$ est A-dérivable dans V, si $\forall x \in V$, $f_x \in D_x$, et la A-dérivée de f, que nous noterons Af, est la fonction dans $C(V)$ définie par

$$(Af)(x) = (A_x f_x)(x), \ \forall x \in V. \tag{3}$$

Par ailleurs, on posera, pour V ouvert $\subset \Omega$,

$$D(A, V) = \{f \in C(V) : f \text{ est A-dérivable dans } V\}. \tag{4}$$

On peut évidemment prolonger A en $\tilde{A}$, opérateur local sur Ω pour lequel $D^V = D(A, V)$, $\forall V$ ouvert $\subset \Omega$, et $\forall f \in D^V$, $(\tilde{A}^V f)(x) = (Af)(x)$, $\forall x \in V$. Pour tout opérateur local sur Ω, A, nous supposerons dorénavant que $A = \tilde{A}$. Si $f \in C(V)$, $g \in D(A, V)$, $f = Ag$, nous dirons que g est une A-intégrale de f dans V.

Observons que si A_0 est un opérateur local dans $C(\Omega)$ au sens de 1.1., il induit clairement un opérateur local sur Ω au sens de 1.2., que nous désignons ici par A. On pose pour V ouvert $\subset \Omega$, $D^V(A) = \{f \in C(V) : \exists g \in D(A_0), \ g|V = f\}$,

$$A^V f = (A_0 g)|V.$$

Un exemple d'opérateur local sur Ω = ouvert de $\mathbf{R}^N$, dont nous nous servirons plus loin est Δ, laplacien défini comme suit : Pour V ouvert $\subset \Omega$, $D^V = \{f \in C(V) :$ laplacien au sens distribution de $f = \Delta f \in C(V)\}$ et $A^V f = \Delta f$, laplacien distribution à valeur continue.

2. Ouverts réguliers.

Pour simplifier le langage, nous dirons dans ce qui suit d'un ouvert « relativement compact » de Ω qu'il est « borné ». On suppose donné un opérateur local A sur Ω.

2.1. DÉFINITION. — *Nous dirons qu'un ouvert* $V \subset \Omega$ *est faiblement* A-*régulier (ou seulement faiblement régulier, si* A *étant fixé le contexte ne se prête pas à confusion), s'il est borné, et si le problème de Dirichlet relatif à* A *admet une solution dans* $\overline{V}$ *(fermeture de* V *dans* Ω*) pour toute donnée continue sur la frontière topologique* ∂V, *de* V, *(explicitement : si* $\forall f \in C(\partial V)$, $\exists u \in C(\overline{V})$ *avec* $u|V \in D(A, V)$, $Au = 0$ *dans* V, $u|\partial V = f$).

Bien entendu, une fonction $u \in D(A, V)$, V un ouvert quelconque de Ω, telle que $Au = 0$ dans V, est dite A-harmonique. (Nous pourrons ne pas expliciter « A- » lorsqu'il n'y aura pas lieu à confusion). La définition de A-surharmonique (A-sousharmonique) est légèrement plus délicate, et nous l'introduirons plus tard dans le contexte approprié. La notion de faiblement A-régulier ne suppose *a priori* que l'existence d'une solution du problème de Dirichlet (même pas l'unicité de la solution). Cela suffit pour certains résultats très généraux, mais dans la suite nous utiliserons surtout la notion de « A-régulier » plus proche de la régularité au sens classique.

2.2. DÉFINITION. — *Nous dirons que* V *ouvert dans* Ω *est* A-*régulier, s'il est faiblement* A-*régulier, et si en outre : à tout* $f \in C(\partial V)$ *correspond une solution unique du problème de Dirichlet, notée* $H^V f$, *et l'opérateur* $f \longmapsto H^V f$ *est borné comme opérateur de* $C(\partial V)$ *dans* $C(\overline{V})$.

Nous considérons parfois aussi (bien que très rarement) des « ouverts non-bornés réguliers » (ou non-réguliers), les concepts étant les mêmes que pour les bornés, une fois que l'on a rajouté à la fermeture de l'ouvert le point à l'infini de la compactification de l'espace par un point. Quand « non-borné » n'est pas explicitement mentionné, « régulier » implique toujours borné. Quant à l'abondance d'ouverts réguliers, nous considèrerons deux situations :

2.3. Définition. — *Nous dirons que la collection* $\mathcal{R}$ *d'ouverts faiblement réguliers est une « famille ajustée » d'ouverts faiblement réguliers, si* $\forall G_1 \in \mathcal{R}$, $\exists G_2 \in \mathcal{R}$ *tel que* $\overline{G}_1 \subset G_2$. *(Comme question de convenance nous utiliserons ci-après généralement des* G *pour les ouverts réguliers, et des* V, W, ..., *pour des ouverts quelconques). Nous dirons que* $\mathcal{R}$ *est une « famille exhaustive » si pour tout* K *compact,* V *ouvert* $\supset K$, $\exists G \in \mathcal{R}$, *tel que* $K \subset G$, $\overline{G} \subset V$.

Observons qu'avec les conventions usuelles concernant $\emptyset$, 2.2. implique que tout V borné, avec $\partial V = \emptyset$, est faiblement A-régulier ($h = 0$ est une solution du problème de Dirichlet); par contre un tel V est A-régulier si et seulement si toute fonction A-harmonique $h \in C(V) = C(\overline{V})$, est $= 0$ (à cause de l'unicité de la solution).

Évidemment toute famille exhaustive est ajustée. Nous utiliserons ces concepts dans la section suivante.

3. Problème de Cauchy.

Nous supposons donné un opérateur local sur Ω, A. Pour chaque ouvert $V \subset \Omega$, nous définissons l'opérateur induit par A dans $C_0(V)$, A_V, par

$$(5)\quad D(A_V) = \{f \in C_0(V) : \ f \in D(A, V), \quad Af \in C_0(V)\},$$
$$A_V f = Af, \ \forall f \in D(A_V).$$

Il est connu que, en supposant A_V fermé et de domaine dense, le problème de Cauchy

$$(6)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = A_V u,\ u(0, .) = f(.),\ f \in D(A_V),$$

est « uniformément bien posé » (voir [6]), dans $C_0(V)$, [2] si

[2] Ce qui veut dire entre autres que dans (6), $\frac{\partial u}{\partial t}$ comme élément de $C_0(V)$, est $\frac{d}{dt}(u(t, .))$ calculé dans $C_0(V)$.

et seulement si A_V est le générateur d'un semi-groupe dans $C_0(V)$. Précisons que nous appelons « semi-groupe » (s.g.) dans un espace de Banach X, toute application $t \longmapsto P_t$, de $[0, +\infty)$ dans $B(X)$, telle que $P_0 = 1 =$ identité, $P_{t+s} = P_t P_s$ pour $t, s \geqslant 0$, l'application étant fortement continue en t dans $[0, +\infty)$. Le s.g. sera noté $\{P_t\}$. Nous dirons dorénavant :

« le problème de Cauchy (correspondant à A) est résoluble pour l'ouvert $V \subset \Omega$ »,
si et seulement si (avec $D(A_V)$ dense), (6) est uniformément bien posé dans $C_0(V)$, ce qui équivaut pour A_V fermé à « A_V est le générateur d'un s.g. dans $C_0(V)$ ». Nous appelons le s.g. correspondant « s.g. solution ». En termes du s.g. solution, la solution de (6), $u(t, x)$, est donnée par

$$u(t,x) = (P_t f)(x), \quad 0 \leqslant t, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

pour $f \in D(A_V)$; (7) donne une solution généralisée de (6) pour un f arbitraire de $C_0(V)$.

Concernant notions et résultats relatifs aux s.g., s.g. à contraction, opérateurs dissipatifs, en général et dans $C_0(\Omega)$, dont nous ferons usage par la suite, on pourra consulter [5], [4], [2].

3.1. Théorème. — *Soit $\mathcal{R}$ une famille ajustée d'ouverts faiblement réguliers de Ω. Alors le problème de Cauchy est résoluble $\forall G \in \mathcal{R}$, avec un s.g. solution à contraction, et*

$$A_G^{-1} \in B(C_0(G)),$$

si et seulement si $\forall G \in \mathcal{R}$, tout $f \in C_0(G)$ admet dans G une A-intégrale g, et A_G est dissipatif à domaine dense. (Dans cet énoncé on peut supprimer « ajustée », à condition de dire « g se prolongeant continûment à $\overline{G}$ »).

Preuve. — Supposons la condition suffisante remplie, et soit $G \in \mathcal{R}$, $\partial G \neq \emptyset$. Soit $f \in C_0(G)$, alors $\exists G' \in \mathcal{R}$, avec $\overline{G} \subset G'$, et soit $\tilde{f} \in C_0(G')$ la fonction obtenue en prolongeant f par 0 dans $G' \setminus G$ (complémentaire de G dans G′). Par hypothèse $\exists$ une A-intégrale g' de $\tilde{f}$, dans G′, et si

$g = g'|\overline{G}$, alors $g \in C(\overline{G})$, $g \in D(A, G)$ et $Ag = f$ dans G. Soit h_g une solution du problème de Dirichlet pour la donnée $g|\partial G$ sur ∂G, et soit $\tilde{g} = (g - h_g)|G$. Alors $\tilde{g} \in C_0(G)$, $\tilde{g} \in D(A, G)$ et $A\tilde{g} = f$. D'où $\tilde{g} \in D(A_G)$. Ceci montre que $I(A_G) = C_0(G)$, et comme A_G est dissipatif il suit que A_G^{-1} existe (voir [2]). Puisque dissipatif, A_G est préfermé (sa fermeture sera notée $\overline{A}_G$), et encore par dissipativité de $\overline{A}_G$, $\exists \overline{A}_G^{-1} = \overline{A_G^{-1}} = A_G^{-1}$. Ainsi A_G^{-1} est fermé et défini partout sur l'espace de Banach $X = C_0(G)$, donc $A_G^{-1} \in B(X)$ par le théorème du graphe fermé. Mais alors, par un résultat élémentaire bien connu, on aura $(\lambda 1 - A_G)^{-1} \in B(X)$ dès que $|\lambda| < \|A_G^{-1}\|^{-1}$, en particulier pour $\lambda > 0$ assez petit. Dans ces conditions, [5], [7], avec A_G dissipatif, fermé (puisque A_G^{-1} est fermé), de domaine dense, A_G est le générateur d'un s.g. à contraction. Ci-dessus on avait supposé $\partial G \neq \varnothing$; si $\partial G = \varnothing$, on procède de la même façon avec $h_g = 0$ (puisque $\partial G = \varnothing$, $h_g = 0$ est solution du problème de Dirichlet). Ceci établit une moitié du théorème. La réciproque est immédiate, car si $G \in \mathcal{R}$, $f \in C_0(G)$, $A_G^{-1}f$ est une A-intégrale de f dans G (se prolongeant continûment à $\overline{G}$). L'argument ci-dessus établit aussi la variante indiquée entre parenthèses à la fin de l'énoncé. C.Q.F.D.

Nous considérerons maintenant quelques exemples.

3.2. *Exemple.* — Soit $\Omega = \mathbf{R} =$ la droite réelle, $A_0 = \dfrac{d^2}{dx^2}$ opérateur local dans $C(\mathbf{R})$ avec $D(A_0) = C^2(\mathbf{R})$, A l'opérateur local sur $\mathbf{R}$ induit par A_0; la famille ajustée $\mathcal{R} = \{$intervalles ouverts $(a, b)\}$. Clairement la condition suffisante de 3.1. est satisfaite; pour $f \in C_0((a, b))$, on a une A-intégrale se prolongeant continûment à $\overline{(a, b)}$, évidente,

$$g(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(s)\, ds.$$

D'où, le problème de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(0, .) = f(.),$$

dans $C_0(G)$, est résoluble $\forall G \in \mathcal{R}$, et $A_G^{-1} \in B(C_0(G))$.

3.3. *Exemple.* — Prenons $\Omega = \mathbf{R}^N$, $N \geqslant 3$,

$$A_0 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} = \text{laplacien},$$

avec

$$D(A_0) = \{f \in C(\mathbf{R}^N) : \Delta f$$

au sens distribution $\in C(\mathbf{R}^N)\}$, et A l'opérateur local sur $\mathbf{R}^N$ induit par A_0. Si

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N,\ r^2 = (r(x))^2 = |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2,$$

alors on a (C_N étant une constante),

$$\Delta(C_N r^{2-N}) = \delta,$$

δ la distribution de Dirac, et pour $f \in C_0(G)$, G ouvert régulier (borné), $\tilde{f}$ prolongeant f par 0 dans $\mathbf{R}^N \setminus G$, on a clairement que si $\tilde{g} = \tilde{f} * (C_N r^{2-N})$, $g = \tilde{g}|G$ est une A-intégrale de f à prolongement continu. D'où $A_G^{-1} \in B(C_0(G))$ (pour tout G du type considéré), et le problème de Cauchy dans $C_0(G)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$
$$u(0, .) = f(.),$$

est résoluble, avec un s.g. solution à contraction dans $C_0(G)$. (La vérification de la dissipativité de A_G se fait via régularisation de f et Δf, laplacien distribution continu.)

Dans l'exemple antérieur, on aboutit au même opérateur local sur Ω, A, en partant de A_Ω au lieu de A_0. Par ailleurs A_Ω est le générateur d'un s.g. bien connu (mouvement brownien), associé à un noyau de Hunt [3] (en l'occurrence, le noyau newtonien), et en conséquence la situation de 3.3. est un cas particulier de la situation très générale considérée dans l'exemple suivant.

3.4. *Exemple.* — Soit Ω un espace localement compact séparé, A_0 un opérateur local dans $C_0(\Omega)$ générateur d'un s.g. associé à un noyau de Hunt [3], et A l'opérateur local sur Ω induit par A_0. Supposons que $\mathcal{R}$ désigne une famille d'ouverts faiblement réguliers telle que pour chaque $G \in \mathcal{R}$, A_G soit dissipatif de domaine dense. Alors pour $G \in \mathcal{R}$, $f \in C_0(G)$, si $\tilde{f}$ est le prolongement de f par 0 dans $\Omega \setminus G$,

$\tilde{f} \in C_{00}(\Omega) \subset I(A_0)$, donc $\tilde{f} = A_0 g$, $g \in C_0(\Omega)$ et $g|G$ est une A-intégrale de f se prolongeant continûment à $\overline{G}$. Donc $\forall G \in \mathcal{R}$, $A_G^{-1} \in B(C_0(G))$ et le problème de Cauchy est résoluble pour G.

Observons encore que 3.1. entraîne le suivant :

3.5. Corollaire. — *Supposons que dans le contexte du théorème* 3.1. *la condition nécessaire et suffisante est remplie. Alors* $\forall G \in \mathcal{R}$, *le problème de Dirichlet pour* $f \in C(\partial G)$ *a une solution unique, qui sera notée* $H^G f$, *déterminant ainsi un opérateur* H^G *de* $C(\partial G)$ *dans* $C(\overline{G})$.

Preuve. — Si u et u' sont deux solutions correspondant à un $f \in C(\partial G)$, alors clairement dans G, $u - u' \in D(A_G)$, $A_G(u - u') = 0$, et comme A_G^{-1} existe, $u - u' = 0$. La linéarité de H^G suit alors de celle de A. C.Q.F.D.

Dans le prochain théorème « localement » veut dire « ayant lieu pour au moins un voisinage ouvert de chaque point ».

3.6. Théorème. — *Dans le contexte du théorème* 3.1., *supposons la condition suffisante de ce théorème remplie sauf pour l'exigence* « $D(A_G)$ *dense* $\forall G \in \mathcal{R}$ », *et* $\mathcal{R}$ *exhaustive. Alors sont équivalents* :

a) *Limite localement uniforme* (*i.e. localement en norme* C_b) *de fonctions* A-*harmoniques est* A-*harmonique.*

b) A *est localement fermé pour la norme* C_b (*ou de façon équivalente, fermé en norme* C_b *pour tout ouvert* V, *et cela au sens suivant* : $f_n \in D(A, V) \cap C_b(V)$, Af_n, f, $g \in C_b(V)$, $f_n \to f$, $Af_n \to g$, *dans* $C_b(V)$, $\Longrightarrow f \in D(A, V)$, $Af = g$).

c) H^G *est borné, comme opérateur de* $C(\partial G)$ *dans* $C(\overline{G})$, $\forall G \in \mathcal{R}$.

Preuve. — La conclusion « $\exists A_G^{-1} \in B(C_0(G))$, $\forall G \in \mathcal{R}$ » de 3.1. subsiste si l'on a la condition suffisante de 3.1. moins « $D(A_G)$ dense » (³) ; en particulier H^G est bien défini. Observons par ailleurs que si $G \in \mathcal{R}$, $\partial G = \emptyset$, G est compact, et alors si h est A-harmonique dans G, $h \in D(A_G)$, $A_G h = 0$, d'où $h = 0$, $H^G = 0$, (il sera donc souvent inutile de s'occuper de ce cas). Supposons maintenant que a) est vrai, et soient $f_n \in C(\partial G)$,

(³) On se sert de « $-A_G^{-1}$ codissipatif, de domaine $= C_0(G)$ ».

$f_n \to f \in C(\partial G)$ en norme, $H^G f_n \to g$ en norme $C(\overline{G})$. Par $a)$, g est A-harmonique dans G, et $f_n \to g|\partial G = f$, entraîne par unicité $g = H^G f$. Ainsi H^G est fermé et défini partout sur l'espace de Banach $C(\partial G)$ donc borné. D'où $a) \Longrightarrow c)$. On voit facilement que $c) \Longrightarrow a)$, et il est immédiat que $b) \Longrightarrow a)$. Il nous reste donc à montrer que $a) \Longrightarrow b)$. Soit V un ouvert $\subset \Omega$, $f_n \in D(A, V) \cap C_b(V)$, $f_n \to f$, $Af_n \to g$, en norme $C_b(V)$. Considérons un $x \in V$, G_1 et $G_2 \in \mathscr{R}$, avec $x \in G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G_2 \subset \overline{G}_2 \subset V$. Soit $\psi \in C_0(V)$, réelle, $= 1$ dans G_1, $= 0$ dans $V \setminus G_2$. Posons $g_n = \psi A f_n$, alors $g_n \to$ un $\tilde{g}$ en norme $C_b(V)$. Dans G_2, g_n et $\tilde{g} \in C_0(G_2)$, et $A_{G_2}^{-1} \in B(C_0(G_2))$, $f'_n = A_{G_2}^{-1} g_n \to f' \in D(A_{G_2})$. Donc dans G_1, en norme $C_b(G_1)$, $f_n - f'_n \to f - f'$, et $A(f_n - f'_n) = 0$, ce qui par $a)$, entraîne $f - f' \in D(A, G_1)$, $A(f - f') = 0$ dans G_1. Comme $f' \in D(A, G_2)$, il s'ensuit que $f \in D(A, G_1)$; on a aussi, dans G_1, $Af = Af' = (A_{G_2} f')|G_1 = \tilde{g}|G_1 = g$. Comme x était arbitraire, cela montre : A est localement fermé (et fermé en norme C_b pour tout V ouvert). C.Q.F.D.

Si un opérateur local sur Ω remplit la condition $b)$, de 3.6., nous dirons qu'il est « localement fermé ».

3.7. Théorème. — *Nous reprenons le contexte et les hypothèses du théorème antérieur* 3.6., *et supposons en outre que* A *est localement fermé. Alors tout ouvert* G *faiblement régulier tel que* A_G *est dissipatif, est régulier.*

Preuve. — Si $f \in C_0(G)$, il suffit de prendre $G_1 \in \mathscr{R}$, $G_1 \supset \overline{G}$, et de prolonger f par 0 dans $G_1 \setminus G$ pour voir que

$$\exists g \in C(\overline{G}), \quad g \in D(A, G), \ Ag = f,$$

dans G. Comme aussi A_G est dissipatif, il suit de 3.6. et du fait que A est localement fermé, que H^G est borné, donc G régulier.

4. Opérateurs semi-compacts.

Nous supposerons maintenant une « condition de compacité », qui est satisfaite pour de nombreux opérateurs différentiels, et souvent assez facile à vérifier.

4.1. Définition. — *Soit* A *un opérateur local sur* Ω, *avec une famille exhaustive* $\mathscr{R}$ *d'ouverts faiblement réguliers.*

Nous dirons qu'un tel opérateur est semi-compact, si quels que soient $G_1, G_2 \in \mathcal{R}$, $\overline{G}_1 \subset G_2$, *et l'ensemble* $\{f_\alpha\} \subset D(A, G_2)$, *avec* f_α, $Af_\alpha \in C_b(G_2)$, *la condition (en norme* $C_b(G_2)$*),*

$$\|f_\alpha\| + \|Af_\alpha\| \leqslant \textit{constante},$$

entraîne que $\{f_\alpha | \overline{G}_1\}$ *est précompact dans* $C(\overline{G}_1)$.

4.2. *Remarque.* — En fait la définition de semi-compact est clairement indépendante de la famille exhaustive particulière $\mathcal{R}$ choisie. On peut, de façon équivalente, remplacer dans la définition antérieure, « ... $G_1, G_2 \in \mathcal{R}$, $\overline{G}_1 \subset G_2$ ... », par « ... V, W ouverts $\subset \Omega$, $\overline{V} \subset W$, ... », car il suffit étant donnés V, W, $\overline{V} \subset W$, de choisir $G_1, G_2 \in \mathcal{R}$, tels que $\overline{V} \subset G_1$, $\overline{G}_1 \subset G_2$, $\overline{G}_2 \subset W$, ce qui est possible puisque $\mathcal{R}$ est exhaustive.

4.3. Théorème. — *Supposons que* A *est un opérateur semi-compact, localement fermé, et que la condition nécessaire et suffisante du théorème* 3.1. *est satisfaite par rapport à une famille exhaustive d'ouverts réguliers* $\mathcal{R}$. *Alors* $\forall g \in \mathcal{R}$, A_G^{-1} *est un opérateur compact dans* $C_0(G)$, *et il en est de même pour* $R_\lambda = (\lambda 1 - A_G)^{-1}$, $\forall \lambda > 0$.

Preuve. — Soit $G \in \mathcal{R}$, $\exists G' \in \mathcal{R}$ avec $\overline{G} \subset G'$. Soit $\{f_\alpha\}$ un ensemble arbitraire d'éléments de $C_0(G)$, borné en norme, $\|f_\alpha\| \leqslant C$. Soit $\tilde{f}_\alpha$ le prolongement de f_α, par 0 dans $G' \setminus G$; $\tilde{f}_\alpha \in C_0(G')$. Soit $g_\alpha = A_G^{-1} f_\alpha$, $\tilde{g}_\alpha = A_{G'}^{-1} \tilde{f}_\alpha$, alors

$$\|A_{G'}\tilde{g}_\alpha\| \leqslant C, \quad \|\tilde{g}_\alpha\| \leqslant \|A_{G'}^{-1}\| \, \|\tilde{f}_\alpha\| \leqslant C\|A_{G'}^{-1}\|,$$

donc pour $\{\tilde{g}_\alpha\}$, $\|\tilde{g}_\alpha\| + \|A\tilde{g}_\alpha\| \leqslant$ constante, et puisque A est semi-compact, $\{\tilde{g}_\alpha | \overline{G}\}$ est précompact dans $C(\overline{G})$. Par 3.6., *c*), l'opérateur H^G est borné, et en conséquence l'application de $C(\overline{G})$ dans $C_0(G)$ définie par

$$h \longmapsto h|G - H^G(h|\partial G)|G,$$

est continue, d'où l'image par cette application de $\{\tilde{g}_\alpha | \overline{G}\}$, disons $\{g_\alpha^*\}$, est un ensemble précompact. Mais $g_\alpha^* \in D(A_G)$, $A_G g_\alpha^* = f_\alpha$, donc $\{A_G^{-1} f_\alpha\}$ est précompact, ce qui prouve que A_G^{-1} est compact dans $C_0(G)$.

Supposons maintenant que $\lambda > 0$, $\{R_\lambda f_\alpha\} = \{g_\alpha\}$, $\{f_\alpha\}$ un ensemble borné, en norme $C_0(G)$, $\|f_\alpha\| \leqslant C$. On a $f_\alpha = \lambda g_\alpha - A_G g_\alpha$, et comme A_G est dissipatif,

$$\lambda\|g_\alpha\| \leqslant \|f_\alpha\| \leqslant C, \quad \|A_G g_\alpha\| \leqslant 2C.$$

Donc, en posant $A_G g_\alpha = f_\alpha^*$, on a $\|f_\alpha^*\| \leqslant 2C$, d'où par compacité de A_G^{-1},

$$\{A_G^{-1} f_\alpha^*\} = \{g_\alpha\} = \{R_\lambda f_\alpha\} \quad \text{est précompact.}$$

Donc R_λ est compact dans $C_0(G)$. C.Q.F.D.

4.4. *Exemples.* — Nous considérons deux cas simples d'opérateurs semi-compacts. La semi-compacité dans ces cas peut se déduire de résultats généraux, mais nous la déduirons ici de façon élémentaire directe.

1) Nous reprenons d'abord la situation de l'exemple 3.2. où l'on prend maintenant pour $\mathcal{R}$ la famille exhaustive {unions finies d'intervalles ouverts bornés}. Soit (a, b) un intervalle ouvert borné, et $f \in C_b((a, b)) \cap D(A, (a, b))$. On montre par un raisonnement élémentaire qu'il existe une constante k (dépendant en principe de $|b - a|$) telle que (avec $\| \quad \| = \| \quad \|_{C_b((a, b))}$),

$$\|f'\| \leqslant k(\|f\| + \|f''\|).$$

On en déduit que si $\{f_\alpha\}$ est borné en norme du graphe, $\|f_\alpha\| + \|f_\alpha''\|$, alors, sur un sous-compact K de (a, b), $\{f_\alpha\}$ est une famille équicontinue parce que $\|f_\alpha'\| \leqslant$ constante; et comme $\|f_\alpha\| \leqslant$ constante, $\{f_\alpha\}$ est pré-compact dans $C(K)$ par le théorème de Ascoli. Donc A est semi-compact, et par 4.3. les $A_{(a,b)}^{-1}$ sont compacts comme opérateurs dans $C_0((a, b))$.

2) Nous reprenons le contexte de l'exemple 3.3. Alors si G est un ouvert borné connexe très régulier, et ∂G une hypersurface C^∞ orientée, $\mathcal{G}(x, t)$ est la fonction de Green de G, $f \in C_b(\overline{G})$, Δf distribution $\in C_b(G)$, on a la représentation bien connue, $\forall x \in G$,

$$(8) \quad f(x) = \int_{\partial G} f(t) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n}(x, \zeta)\, d\zeta + \int_G (\Delta f)(t) \mathcal{G}(x, t)\, dt.$$

Il suit facilement de (8), de l'expression de $\mathscr{G}$ en fonction du noyau newtonien, constante $\times \frac{1}{r^{N-2}}$, et des propriétés élémentaires du potentiel newtonien dans $\mathbf{R}^N$, que l'on peut calculer $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, par dérivation sous le signe somme dans (8) et qu'en conséquence $\left\|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right\|_{C_b(K)}$ est bornée en termes de

$$\|f\|_{C_b(G)} + \|\Delta f\|_{C_b(G)},$$

si K est un sous-compact de G. D'où par équicontinuité et le théorème de Ascoli on voit que A est semi-compact. On en déduit que A_G^{-1} est compact dans $C_0(G)$, pour G régulier.

5. Condition nécessaire et suffisante pour le problème de Cauchy.

Dorénavant, sauf avis contraire, nous ne considérerons que des opérateurs locaux A réels, c'est-à-dire tels que $\forall$V ouvert $\subset \Omega$, $f \in D(A, V) \Longrightarrow \bar{f}$ (conjuguée complexe) $\in D(A, V)$, et $A\bar{f} = \overline{Af}$. Alors pour tout V ouvert $\subset \Omega$, A_V est un opérateur réel, au sens évident, $f \in D(A_V) \Longrightarrow \bar{f} \in D(A_V)$, $A_V\bar{f} = \overline{A_V f}$. Un opérateur réel dissipatif dans $C_0(V)$ détermine un opérateur dissipatif dans l'espace $C_0^R(V)$ des fonctions réelles de $C_0(V)$, et réciproquement si l'on part d'un opérateur dissipatif dans $C_0^R(V)$, on obtient par la complexification standard un opérateur dissipatif dans $C_0(V)$, (voir [2]). Pour voir qu'un opérateur dissipatif réel à domaine dense, dans $C_0(V)$, est un prégénérateur, il suffit de vérifier que $\overline{I(\lambda - A)} \supset C_0^R(V)$, pour un $\lambda > 0$. (Nous écrivons pour simplifier $\lambda - A$ au lieu de $\lambda 1 - A$, et « ——— » dénote ici « fermeture de »).

Nous allons maintenant voir que, pour un A donné, on peut décrire exactement tous les ouverts σ-compacts pour lesquels le problème de Cauchy a une solution. Nous supposons donc fixé un A réel, local sur Ω.

5.1. Définition. — *Soit* V *un ouvert de* Ω. *Nous dirons que* V *est quasi-régulier à l'infini par rapport à* 1-A, *si* $\exists$K *compact* $\subset V$, $h \in D(A, V \setminus K)$, $h > 0$, $(1\text{-}A)h \geqslant 0$, *dans* $V \setminus K$, *et* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon$ *compact*, $V \supset K_\varepsilon \supset K$, $h < \varepsilon$ *dans* $V \setminus K_\varepsilon$.

Nous allons interpréter la notion 5.1., mais avant il sera utile d'introduire encore la notion de « localement dissipatif ».

5.2. Définition. — *Nous dirons que* A *est localement dissipatif, si* $\forall$ *ouvert non-vide* $V \subset \Omega$, $f \in D(A, V)$, K *compact* $\subset V$, *avec* $|f|$ *dans* $V \setminus K \leqslant$ *constante* $< \sup_V |f|$, $\exists x \in V$, *avec* $|f(x)| = \sup_V |f|$, *et*

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{R}e\,((Af)(x)\overline{f(x)}) \leqslant 0.$$

Maintenant, soit V ouvert $\subset \Omega$, B un opérateur local sur Ω, localement dissipatif. Alors nous dirons que la fonction réelle h est B-surharmonique (sousharmonique), dans V, si $h \in D(B, V)$, $Bh \leqslant 0 (\geqslant 0)$ dans V. Si B' est de la forme $-B$, avec B comme nous venons de le décrire (on dira B' « localement accrétif »), nous dirons que h est B'-surharmonique (sousharmonique), si h est B-surharmonique (sousharmonique), i.e. $B'h \geqslant 0$ ($B'h \leqslant 0$). Si dans 5.1. A étant pris $= B$, V est non compact et ∞ désigne le point à l'infini dans la compactification de V par un point, alors h dans 5.1. est (1-A)-surharmonique et > 0, dans un voisinage de ∞, et $h \to 0$ à ∞. Il est donc naturel de dire que h est une barrière au point ∞ (point d'Alexandroff, point à l'infini, de V) par rapport à 1-A. En termes de l'existence d'une telle barrière on a une formulation équivalente de la condition 5.1. de quasi-régularité; (si V est compact la condition de quasi-régularité est automatiquement remplie et nous dirons par extension de langage qu'il « existe une barrière au point à l'infini par rapport à 1-A »). Nous avons utilisé le terme « quasi-régulier à l'infini » plutôt que « régulier à l'infini », car les constantes n'étant en général pas (1-A)-harmoniques, l'existence d'une barrière telle que décrite n'implique pas la « régularité au point ∞ » au sens de pouvoir résoudre le problème de Dirichlet avec une donnée continue arbitraire sur la frontière. Par exemple si $\Omega = \mathbf{R}$, A l'opérateur local induit sur $\mathbf{R}$ par A_0-1, A_0 comme dans 3.2., et on prend $V = (0, +\infty)$, alors $h(x)$, $= x$ pour $0 < x < 1$, $= e^{-x}$ pour $x > 1$, est une barrière au point ∞, par rapport à

1-A; mais il n'y a pas de solution pour : $f \in C(V \cup \{\infty\})$, $f|V \in D(A, V)$, $Af = 0$, $f(\infty) \neq 0$, $V \cup \{\infty\}$ = compactifié de V par un point.

Le résultat suivant montre que pour A localement dissipatif, les fonctions (1-A)-surharmoniques ont un comportement très voisin du comportement classique.

5.3. Théorème. — *Soit* A *localement dissipatif,* V *un ouvert borné* $\subset \Omega$, *soit* f, (1-A)-*surharmonique dans* V, *se prolongeant en un élément de* $C(\overline{V})$. *Alors pour toute fonction* $h \in C^{\mathbf{R}}(\overline{V})$, (1-A)-*harmonique dans* V, *avec* $h \leqslant f$ *dans* ∂V, *on a*

$$h \leqslant f \quad \textit{dans} \quad V. \tag{10}$$

Preuve. — Supposons $\partial V \neq \emptyset$. Soit $g = f - h \in C(\overline{V})$. Soit $V_1 = \{x \in V : g(x) < 0\}$. Puisque $g \geqslant 0$ dans ∂V, $g|V_1 \in C_0(V_1)$. Si $V_1 \neq \emptyset$, $\exists$ par dissipativité locale, $x \in V_1$, $g(x) = \min\limits_{V} g$, < 0, et

$$(Ag)(x)g(x) \leqslant 0. \tag{11}$$

Comme $(1 - A)g \geqslant 0$, on a tenant compte de (11),

$$0 \geqslant ((1 - A)g)(x)g(x) = g^2(x) - (Ag)(x)g(x) \geqslant g^2(x),$$

donc $g(x) = 0$, une contradiction. Donc $V_1 = \emptyset$, $g \geqslant 0$, $f \geqslant h$. (Dans le cas où $\partial V = \emptyset$, on montre de façon analogue que alors $f \geqslant 0$, et que toute fonction (1-A)-harmonique h, est $= 0$ dans V, d'où (10) est encore vérifié dans cette situation). C.Q.F.D.

Il vaut la peine de donner ici (bien que nous ne nous en servirons, dans le présent travail, que sous les hypothèses de 5.3.), un principe du maximum, valable en plus grande généralité que 5.3. pour fonctions (1-A)-harmoniques. Pour A comme plus haut mais sans être forcément réel, nous dirons que A est « localement faiblement restreint », s'il satisfait aux conditions de la définition 5.2. avec (9) remplacé par « $(Af)(x)\overline{f(x)} \notin \mathbf{R}_+^*$ », où $\mathbf{R}_+^* = \{\lambda \in \mathbf{R} : \lambda > 0\}$. Donc, exceptionnellement, nous ne supposerons pas A réel dans le théorème suivant.

5.3'. THÉORÈME. — *Soit* A, *localement faiblement restreint, (pas forcément réel),* V *un ouvert borné* $\subset \Omega$, *et* $h \in C(\overline{V})$, (1-A)-*harmonique dans* V. *Alors si* $\partial V = \emptyset$, $h = 0$ *dans* V; *autrement,*

$$(10') \qquad |h(x)| \leqslant \max_{y \in \partial V} |h(y)|, \quad \forall x \in V.$$

Preuve. — Si $\partial V \neq \emptyset$, h comme dans l'énoncé, soit

$$C = \max \{|h(y)| : y \in \partial V\}.$$

Supposons que $\exists x_0 \in V$ tel que $|h(x_0)| > C$, et soit

$$C < C' < |h(x_0)|.$$

Alors $V_1 = \{x \in V : |h(x)| \geqslant C'\}$ est un compact non-vide $\subset V_0 = \{x \in V : |h(x)| > C\}$, $|h(x)| < C' < |h(x_0)|$ dans $V_0 \setminus V_1$, et puisque A est localement faiblement restreint $\exists x_1 \in V$ avec $|h(x_1)| \geqslant |h(x_0)| > 0$, et tel que

$$((Ah)(x_1)\overline{h(x_1)}) \notin \mathbf{R}_+^*$$

d'où

$$0 = ((1 - A)h)(x_1)\overline{h(x_1)} = |h(x_1)|^2 - \mathrm{Re}\,((Ah)(x_1)\overline{h(x_1)}) \geqslant |h(x_1)|^2.$$

On en déduirait $h(x_1) = 0$, une contradiction; d'où (10'). Si $\partial V = \emptyset$, alors $V = \overline{V}$ est compact, et l'on voit de suite que h, (1-A)-harmonique, doit être $= 0$ dans V. C.Q.F.D.

Le suivant est le résultat central de cette section, et joue un rôle basique dans le présent travail. Nous répéterons exceptionnellement dans l'énoncé ci-dessous, des hypothèses faites une fois pour toutes plus haut, concernant A.

5.4. THÉORÈME. — *Soit* A *un opérateur local sur* Ω, *réel, localement fermé, localement dissipatif. Nous supposons que la condition suffisante (et nécessaire) du théorème* 3.1. *est satisfaite, avec* $\mathcal{R}$ *exhaustive. Alors* V *ouvert* $\subset \Omega$ *est* σ-*compact et le problème de Cauchy pour* V *est résoluble, avec un s.g. solution à contraction, si et seulement si* $D(A_V)$ *est dense et* V *quasi-régulier à l'infini par rapport à* 1-A. *Cette dernière condition est nécessairement vérifiée si* V *est* A-*régulier et* σ-*compact.*

Preuve. — Supposons que pour V ouvert non compact $\subset \Omega$, $\exists$ une barrière à l'infini par rapport à 1-A, h, et que $D(A_V)$ est dense. Comme A est localement fermé, et localement dissipatif, A_V est fermé et dissipatif, donc pour établir que A_V est le générateur d'un s.g. à contraction il suffira de montrer que $I(1-A_V)$ est dense dans $C_0(V)$. Pour cela, considérons un $g \in C_{00}(V) \cap C^{\mathbf{R}}(V)$. Puisque il existe la barrière h, V est σ-compact, et $\mathcal{R}$ étant exhaustive $\exists$ une suite de $G_n \in \mathcal{R}$, avec

$$\operatorname{supp} g = K \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G_2 \subset \overline{G}_2 \subset G_3 \subset \cdots \subset V,$$

et $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = V$. Soit $\tilde{g}$ la fonction obtenue en prolongeant g par 0 dans $\Omega \setminus K$. Comme $\tilde{g}|G_n \in C_0(G_n)$, $\exists$ par 3.1., et la dissipativité de A_{G_n}, $f_n \in D(A_{G_n})$ avec $f_n - Af_n = \tilde{g}$ dans G_n, $\|f_n\| \leqslant \|\tilde{g}\| = \|g\|$. On peut supposer que l'ouvert dans lequel h est définie contient $V \setminus G_1$. Comme $h > 0$ dans $V \setminus G_1$, $\overline{G}_1 \subset V$, ∂G_1 est compact $\subset V \setminus G_1$, on a $\alpha = \inf_{\partial G_1} h > 0$. (Il n'y a pas de problème si $\partial G_1, \partial G_n, = \varnothing$). Soit

$$h_1 = (\|g\|/\alpha)h. \tag{12}$$

Observons que

$$\partial(G_n \setminus \overline{G}_1) = \partial G_n \cup \partial G_1, \tag{13}$$

que dans ∂G_1, $f_n \leqslant \|g\| \leqslant \inf_{\partial G_1} h_1$, et que dans ∂G_n, (avec f_n considéré prolongé par continuité à ∂G_n), $f_n = 0 \leqslant h_1$, de sorte que l'on a $f_n \leqslant h_1$ dans $\partial(G_n \setminus \overline{G}_1)$. Mais h_1 est (1-A)-surharmonique, et dans $G_n \setminus \overline{G}_1$, $(1\text{-}A)f_n = \tilde{g}|(G_n \setminus \overline{G}_1) = 0$, d'où par 5.3,

$$f_n \leqslant h_1 \quad \text{dans} \quad G_n \setminus \overline{G}_1. \tag{14}$$

Par ailleurs $f_n \in C_0(G_n)$, donc si l'on écrit $\tilde{f}_n$ pour f_n prolongée par 0 dans $V \setminus G_n$, alors $\tilde{f}_n \in C_0(V)$, et par (14) $\tilde{f}_n \leqslant h_1$ dans $V \setminus G_1$. En considérant maintenant $-g$, $-f_n$, on voit finalement que

$$-h_1 \leqslant \tilde{f}_n \leqslant h_1 \quad \text{dans} \quad V \setminus G_1. \tag{15}$$

Considérons un G_k, k arbitrairement choisi, et $m \geqslant n \geqslant k$. Alors dans G_n, $f_n - Af_n = \tilde{g}$, et $f_m - Af_m = \tilde{g}$, donc $f_n - f_m - A(f_n - f_m) = 0$, et par 5.3'. on a

$$\sup_{G_n} |f_m - f_n| \leqslant \max_{\partial G_n} |f_m - f_n| = \max_{\partial G_n} |fm| \leqslant \max_{\partial G_n} h_1.$$

D'où

$$\sup_{G_k} |f_m - f_n| \leqslant \max_{\partial G_n} h_1, \quad m \geqslant n.$$

Puisque $h_1 \in C_0(V)$, il suit que $\{\tilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément dans tout G_k, et donc $\tilde{f}_n \to f \in C_b(V)$, en convergence simple dans V, uniformément dans chaque souscompact de V. A étant localement fermé, il suit que

$$f \in D(A, V),$$

et $f - Af = \tilde{g}$ dans V. Il suit de (15) que $f \in C_0(V)$, donc aussi $Af = f - g \in C_0(V)$, d'où $f \in D(A_V)$, et

$$(1\text{-}A_V)f = g.$$

$C_{00}(V)$ étant dense dans $C_0(V)$, nous avons ainsi montré que $I(1\text{-}A_V)$ est dense, et cela démontre le théorème dans une direction. (Nous avons laissé de côté ci-dessus le cas où V est un ouvert compact, mais dans ce cas V est dans $\mathcal{R}$, et par 3.1., A_V est générateur).

Réciproquement, supposons que A_V est le générateur d'un s.g. à contraction, V ouvert σ-compact dans Ω. Donc A_V est dissipatif à domaine dense et il nous faut montrer que V est quasi-régulier à l'infini par rapport à 1-A. V étant σ-compact, $\exists g \in C_0(V)$, > 0 dans V. $(1\text{-}A_V)^{-1} \in B(C_0(V))$, donc $\exists f \in D(A_V)$ avec f réelle, et

$$g = f - Af \quad \text{dans} \quad V. \tag{16}$$

Nous montrons d'abord qu'on a $f \geqslant 0$ dans V. On procède pratiquement comme dans 5.3., sauf que V n'est pas forcément borné, et par contre $f \in C_0(V)$: si $V_1 = \{x \in V : f(x) < 0\}$ était $\neq \emptyset$, on aurait $f|V_1 \in C_0(V_1)$, et par dissipativité locale $\exists x \in V_1$, avec $(Af)(x)f(x) \leqslant 0$; comme

$$(1 - A)f = g > 0,$$

on aurait

$$0 > ((1-A)f)(x)f(x) = f^2(x) - (Af)(x)f(x) \geqslant f^2(x),$$

d'où $f(x) = 0$, ce qui contredit $x \in V_1$. Maintenant nous allons montrer qu'on a en fait $f > 0$ dans V. Pour cela, supposons $\exists x_0 \in V$, $f(x_0) = 0$. Alors $\exists \delta > 0$ et un voisinage ouvert V_0 de x_0, tels que $\overline{V}_0 \subset V$, et

$$f < \delta, \ g > 2\delta, \quad \text{dans} \quad V_0.$$

Alors on a

$$Af < -\delta \quad \text{dans} \quad V_0. \tag{17}$$

Soit $\tilde{h}$ continue réelle, $0 \leqslant -\tilde{h} \leqslant 1$, $\tilde{h}(x_0) = -1$, $\tilde{h} = 0$ sur $V \setminus V_0$, $\tilde{h} \in C_0(V)$, donc $\exists h \in D(A_V)$ tel que

$$\|\tilde{h} - h\| < \frac{1}{2}.$$

Pour chaque constante $\lambda > 0$, posons $f_\lambda = f + \lambda h \in D(A_V)$. Alors dans $V \setminus V_0$, puisque $f \geqslant 0$, $f_\lambda > -\frac{1}{2}\lambda$, tandis que $f_\lambda(x_0) = \lambda h(x_0) < -\frac{1}{2}\lambda$, d'où l'on voit que $\min f_\lambda$ doit avoir lieu dans V_0 quel que soit λ. Soit

$$V_\lambda = \{x \in V : f_\lambda(x) < 0\},$$

alors $x_0 \in V_\lambda \neq \emptyset$, $f_\lambda | V_\lambda \in C_0(V_\lambda)$, et $\min(f_\lambda | V_\lambda)$ est atteint dans $V_\lambda \cap V_0$, donc par dissipativité locale $\exists x_\lambda \in V_\lambda$ avec

$$(Af_\lambda)(x_\lambda)f_\lambda(x_\lambda) \leqslant 0, \tag{18}$$

où $f_\lambda(x_\lambda) = \min(f_\lambda | V_\lambda) < 0$, $(Af_\lambda)(x_\lambda) = (Af)(x_\lambda) + \lambda(Ah)(x_\lambda)$,

$$|(Ah)(.)| \leqslant \|A_V h\|,$$

d'où par (17), dès que $\lambda < \delta / \|A_V h\|$, on aura

$$(Af_\lambda)(x_\lambda) < -\delta + (\delta/\|A_V h\|)(Ah)(x_\lambda) \leqslant 0.$$

Ce qui implique $(Af_\lambda)(x_\lambda)f_\lambda(x_\lambda) > 0$ en contradiction avec (18). Donc $f > 0$ partout dans V; comme par ailleurs $f \in C_0(V)$, $f \in D(A, V)$, $(1 - A)f = g > 0$, f est bien une barrière au point à l'infini de V par rapport à 1-A. C.Q.F.D. ([4]).

Nous traitons des applications aux perturbations du type « changement de temps » dans la section suivante.

6. Perturbations du type « changement de temps » et problème de Cauchy.

Nous avons démontré récemment, [4], étendant un résultat de Dorroh, [1], que si A est le générateur d'un s.g. à contraction sur $C_0(\Omega)$ (pour ce résultat A n'est pas nécessairement local, ni réel), et si $p \in C_b(\Omega)$, $p > 0$ dans Ω, alors pA est encore le prégénérateur d'un s.g. à contraction. Il s'agit là d'une perturbation multiplicative singulière du type « changement de temps en processus de Markov ». L'énoncé analogue avec $p \geqslant 0$ est faux en général. Mais il reste vrai, comme nous verrons plus loin, en présence de conditions de Hölder appropriées pour des opérateurs différentiels (sur des ouverts de $\mathbf{R}^N$). Les conditions de Hölder mentionnées sont suffisantes mais pas nécessaires, pourtant nous montrerons que comme telles, elles ne peuvent pas être améliorées. Nous appliquons les résultats précédents pour étudier pA, A étant un opérateur local du type considéré dans ce travail. En passant nous comparerons « A-régularité » et « quasi-régularité » à l'infini par rapport à 1-A.

6.1. Théorème. — *Soit* A *un opérateur local sur* Ω, *tel que les conditions du théorème* 5.4. *sont satisfaites*,

$$0 \leqslant p \in C_b(\Omega),\ V_p = \{x \in \Omega : p(x) > 0\}.$$

Alors V_p *est* σ*-compact et le problème de Cauchy correspondant à* pA *est résoluble pour* V_p, *avec un s.g. solution à contraction, si et seulement si* $D((pA)_{V_p})$ *est dense et* V_p *est quasi-régulier à l'infini par rapport à* $1\text{-}pA$.

Preuve. — D'abord observons que sous les hypothèses de l'énoncé, les conditions du théorème 5.4. sont aussi satisfaites

([4]) La démonstration ci-dessus établit la dernière phrase de l'énoncé sous l'hypothèse « $D(A_V)$ dense »; on se débarasse facilement de celle-ci en adaptant légèrement l'argument $(\exists(1 - A_V)^{-1} \in B(C_0(V)),\ \exists G \in R$ avec $\overline{V}_0 \in G,\ \overline{G} \subset V$, etc.).

pour pA comme opérateur local sur V_p, si l'on prend pour V_p, à la place de $\mathscr{R}$, la famille exhaustive

$$\mathscr{R}_{V_p} = \{G \in \mathscr{R} : \overline{G} \subset V_p\}.$$

Il suffit de se servir du fait que dans tout $G \in \mathscr{R}_{V_p}$, $p \geqslant$ constante > 0. Cela étant, notre énoncé découle maintenant directement de 5.4. C.Q.F.D.

6.2. *Remarques.* — Dans le contexte et avec les hypothèses de 6.1., on voit aussi immédiatement que si A est semi-compact, alors pA comme opérateur local sur V_p est semi-compact.

Si A est un opérateur local sur Ω, localement dissipatif, et si « A est obtenu à partir d'un générateur local A_0 » au sens « un générateur A_0 — d'un s.g. dans $C_0(\Omega)$ — local dans $C_0(\Omega)$, tel que l'opérateur local sur Ω induit par A_0 est A », alors A_Ω est un générateur $= A_0$. En effet si $\exists$ un générateur local dans $C_0(\Omega)$, A_0, et A est l'opérateur local sur Ω induit, alors clairement $A_0 \subset A_\Omega$, et comme on suppose que A est localement dissipatif, A_Ω est un prolongement dissipatif du générateur A_0, donc $A_\Omega = A_0$.

Nous nous intéressons à l'étude des perturbations singulières du type « changement de temps », d'un générateur local A_0 dans $C_0(\Omega)$ c'est-à-dire des opérateurs de la forme pA_0, $0 \leqslant p \in C_b(\Omega)$. D'après la remarque 6.2, on pourra plus généralement étudier les opérateurs de la forme pA_Ω, avec A local sur Ω, localement dissipatif, si l'on se place — comme nous le ferons — dans le contexte où l'opérateur local sur Ω induit par A_0 est localement dissipatif. Soit donc A satisfaisant aux conditions du théorème 5.4., et supposons en outre que A_Ω est un générateur. Nous introduisons le « prolongement naturel » $\widetilde{pA_\Omega}$ de pA_Ω, défini par

$$\text{(19)} \quad D(\widetilde{pA_\Omega}) = \{f \in C_0(\Omega) : f|V_p \in D(A, V_p), \ \text{dans} \ V_p \ pAf \in C_0(V_p)\},$$

et pour $f \in D(\widetilde{pA_\Omega})$,

$$\text{(20)} \quad \widetilde{pA_\Omega}f = \begin{cases} pAf & \text{dans } V_p \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus V_p. \end{cases}$$

(On rappelle que $V_p = \{x \in \Omega : p(x) > 0\}$, et que les s.g. sont toujours dans $C_0(.)$). On a le résultat suivant :

6.3. Théorème. — *Soit* A *un opérateur local sur* Ω, *satisfaisant aux conditions de* 5.4., *et supposons que* A_Ω *est un générateur (le problème de Cauchy est résoluble pour* Ω). *Soit* $p \in C_b(\Omega)$, $\geqslant 0$, *et* V_p σ*-compact. Alors le prolongement naturel* $\widetilde{pA_\Omega}$ *est un générateur, si et seulement si* $(pA)_{V_p}$ *est un générateur dans* $C_0(V_p)$, *c'est-à-dire le problème de Cauchy correspondant à l'opérateur local* pA *est résoluble pour l'ouvert* V_p, *donc si et seulement si* $D((pA)_{V_p})$ *est dense, et* V_p *est quasi-régulier à l'infini par rapport à* $1\text{-}pA$. *L'opérateur* pA_Ω *est dissipatif, donc préfermé, mais n'est pas forcément un prégénérateur*; pA_Ω *est un prégénérateur si et seulement si* $D((pA)_{V_p})$ *est dense,* V_p *est quasi-régulier à l'infini par rapport à* $1\text{-}pA$, *et*

$$\overline{pA_\Omega} = \widetilde{pA_\Omega}.$$

Preuve. — L'opérateur $\widetilde{pA_\Omega}$ est dissipatif. En effet soit $f \in D(\widetilde{pA_\Omega})$, $\neq 0$, et soit $\sup\limits_{\Omega \setminus V_p} |f| = \alpha$. Si $\alpha < \|f\|$, alors comme $f \in C_0(\Omega)$, pour $\alpha < \beta < \|f\|$, $K = \{x \in \Omega : |f(x)| \geqslant \beta\}$ est compact, $K \subset V_p$, $|f| < \beta < \|f\|$ dans $V_p \setminus K$, donc par la dissipativité locale de A, $\exists x \in V_p$, avec

$$|f(x)| = \|f\| = \max_{V_p} |f|,$$

et $\operatorname{Re}((Af)(x)\overline{f(x)}) \leqslant 0$, donc

$$\text{(21)} \quad \operatorname{Re}(((pA)f)(x)\overline{f(x)}) = p(x)\operatorname{Re}((Af)(x)\overline{f(x)}) \leqslant 0.$$

Si par contre $\alpha = \|f\|$, alors $\sup\limits_{\Omega \setminus V_p} |f| = \sup\limits_{K_1} |f|$, où

$$K_1 = (\Omega \setminus V_p) \cap \left\{ x \in \Omega : \ |f(x)| \geqslant \frac{1}{2} \|f\| \right\}$$

est compact, donc $\exists x \in \Omega \setminus V_p$, avec $|f(x)| = \|f\|$ et naturellement $((pA)f)(x) = p(x)(Af)(x) = 0$. Donc en tout cas

$$\exists x \in \Omega,$$

avec $|f(x)| = \|f\|$, et (21) est satisfait, d'où $\widetilde{pA_\Omega}$ est dissipatif. Nous vérifions plus loin que $p\tilde{A}_\Omega$ est fermé.

Supposons maintenant que $\widetilde{pA_\Omega}$ est générateur d'un s.g. $\{\tilde{P}_t\}$. Nous allons montrer que $\{\tilde{P}_t\}$ induit un s.g. dans $C_0(V_p)$, de générateur $(pA)_{V_p}$. $\forall f \in C_0(V_p)$, nous écrirons $\tilde{f}$ pour le prolongement à Ω, par la valeur 0 dans $\Omega \diagdown V_p$. La résolvante de $\{\tilde{P}_t\}$ sera notée $\tilde{R}_\lambda$; $\forall \lambda > 0$,

$$\tilde{R}_\lambda = (\lambda - \widetilde{pA_\Omega})^{-1} \in B(C_0(\Omega)).$$

Soit $f \in C_0(V_p)$, $\tilde{R}_\lambda \tilde{f} = g$, alors $\tilde{f} = \lambda g - \widetilde{pA_\Omega} g$ implique $g|(\Omega \diagdown V_p) = 0$, c'est-à-dire $\tilde{R}_\lambda \tilde{f}|(\Omega \diagdown V_p) = 0$. Comme

$$\tilde{P}_t \tilde{f} = \lim_{\lambda \to +\infty} \exp t(\lambda^2 \tilde{R}_\lambda - \lambda) \tilde{f},$$

on voit que $(\tilde{P}_t \tilde{f})|(\Omega \diagdown V_p) = 0$. Donc $\tilde{P}_t \tilde{f} = \tilde{h}$, $h \in C_0(V_p)$, et l'application $f \longmapsto h$, $(f \longmapsto \tilde{f} \longmapsto \tilde{P}_t \tilde{f} \longmapsto \tilde{h} \longmapsto h)$, détermine un s.g. dans $C_0(V_p)$, comme on vérifie facilement. Soit $\{P_t\}$ ce s.g., B le générateur correspondant. Comme

$$(P_t f)^\sim = \tilde{P}_t \tilde{f}, \quad \forall f \in C_0(V_p), \tag{22}$$

on voit facilement que B est de la forme,

$$\begin{aligned} D(B) &= \{f \in C_0(V_p) : \tilde{f} \in D(\widetilde{pA_\Omega})\}, \\ Bf &= (\widetilde{pA_\Omega} \tilde{f})|V_p, \quad \forall f \in D(B). \end{aligned} \tag{23}$$

D'après (23) et (20), on voit que

$$B = (pA)_{V_p}. \tag{24}$$

Nous avons montré ainsi que si $\widetilde{pA_\Omega}$ est un générateur, il en est de même de $(pA)_{V_p}$ dans $C_0(V_p)$. Nous allons montrer la réciproque. Supposons donc que $(pA)_{V_p}$ est un générateur. Nous savons que $\widetilde{pA_\Omega}$ est dissipatif, et il est clair que

$$pA_\Omega \subset \widetilde{pA_\Omega}, \tag{25}$$

donc $D(\widetilde{pA_\Omega}) \supset D(A_\Omega)$ dense dans $C_0(\Omega)$, puisque A_Ω est un générateur. Il suffira en conséquence de montrer que $I(1\text{-}\widetilde{pA_\Omega})$ est dense. Soit ν une mesure dans $(C_0(\Omega))^*$, « orthogonale » à l'image en question, c'est-à-dire telle que

$$\int (1\text{-}\widetilde{pA_\Omega}) f \, d\nu = 0, \quad \forall f \in D(\widetilde{pA_\Omega}). \tag{26}$$

De la densité de $I(1\text{-}(pA)_{V_p})$ dans $C_0(V_p)$ on voit de suite que $|\nu|(V_p) = 0$ et (26) devient

$$\int f\,d\nu = 0, \quad \forall f \in D(\widetilde{pA_\Omega}). \tag{27}$$

Comme les f dans (27) sont denses, $\nu = 0$, et la réciproque est démontrée. Donc par 5.4., $\widetilde{pA_\Omega}$ est un générateur si et seulement si $D((pA)_{V_p})$ est dense et V_p quasi-régulier à l'infini par rapport à $1\text{-}pA$ (V_p est par hypothèse σ-compact).

Il est clair que pA_Ω est dissipatif, et nous verrons plus loin des exemples montrant que pA_Ω n'est pas forcément un prégénérateur. Si $\overline{pA_\Omega}$ est un générateur, alors le prolongement dissipatif $\widetilde{pA_\Omega}$ est aussi un générateur, et coïncide avec $\overline{pA_\Omega}$ par une propriété bien connue, (maximalité), des générateurs. Finalement observons que $\widetilde{pA_\Omega}$ est toujours fermé, car si $f_n \in D(\widetilde{pA_\Omega})$, $f_n \to f$ et $\widetilde{pA_\Omega} f_n \to g$, dans $C_0(\Omega)$, alors $g|(\Omega \setminus V_p) = 0$, et pAf_n converge de façon localement uniforme vers g dans V_p, d'où $f \in D(A, V_p)$ puisque A est localement fermé, et $pAf = g$ dans V_p, c'est-à-dire $f \in D(\widetilde{pA_\Omega})$ et $\widetilde{pA_\Omega} f = g$. Donc $\overline{pA_\Omega} = \widetilde{pA_\Omega}$ et tout est démontré.

Par ailleurs, d'après ce qui précède, et de faits connus concernant générateurs et problème de Cauchy uniformément bien posé (voir par exemple [6], p. 132), pA_Ω est un prégénérateur si et seulement si $\widetilde{pA_\Omega}$ est un générateur et le s.g. qu'il engendre laisse $D(\overline{pA_\Omega})$ invariant. On peut donc aussi conclure de 6.3. que : « pA_Ω est un prégénérateur si et seulement si $D((pA)_{V_p})$ est dense, V_p est quasi-régulier à l'infini par rapport à $1\text{-}pA$, et le s.g. engendré dans ces conditions par $\widetilde{pA_\Omega}$ laisse $D(\overline{pA_\Omega})$ invariant. (V_p est supposé σ-compact) ».

En spécialisant le contexte du résultat antérieur au cas où l'opérateur A en question est un opérateur différentiel, nous donnons maintenant une condition suffisante — condition de Hölder sur p — pour que pA_Ω soit un prégénérateur. Nous écrirons $C_{00}^\infty(\Omega)$ pour $C^\infty(\Omega) \cap C_{00}(\Omega)$, Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$.

6.4. THÉORÈME. — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^N$, A *le prégénérateur d'un s.g. à contraction,* $D(A) \supset C_{00}^{\infty}(\Omega)$, *et sur* $C_{00}^{\infty}(\Omega)$, A *est un opérateur différentiel à coefficients continus, bornés dans* Ω. *Soit* $0 \leqslant p \in C_b(\Omega)$ *tel que pour tout compact* $K \subset \Omega \setminus V_p$, $\exists$ *une constante* C_K *avec*

$$p(x) \leqslant C_K(d(x, K))^m, \ \forall x \in \Omega, \tag{28}$$

où $d(x, K)$ *est la distance de* x *à* K *dans la métrique de* $\mathbf{R}^N$, *et* m *est l'ordre de l'opérateur différentiel en question. Alors* pA *est le prégénérateur d'un s.g. à contraction dans* $C_0(\Omega)$. (Dans ce théorème on ne suppose pas, comme on fait automatiquement ailleurs dans cette section, que A est réel).

Preuve. — Puisque pA est dissipatif, et à domaine dense, il suffira de montrer que $I(1\text{-}pA)$ est dense. Soit ν une mesure dans $(C_0(\Omega))^*$, « orthogonale » à $I(1\text{-}pA)$. Posons $V_p = E$, $\Omega \setminus V_p = F$, et pour

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ F_n = \{x \in \Omega : \ p(x) \geqslant 1/n\},$$

$p_n = \sup\left(p, \dfrac{1}{n}\right)$. Considérons un f arbitraire dans $C_0(\Omega)$. Par un résultat bien connu de Dorroh [1], $\exists$ pour chaque n, $g_n \in D(\overline{A})$, tel que

$$f = (1 - p_n\overline{A})g_n, \tag{29}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int f\,d\nu &= \int (1\text{-}p\overline{A})g_n\,d\nu + \int (p\text{-}p_n)\overline{A}g_n\,d\nu \\ &= \int (p/p_n - 1)p_n\,\overline{A}g_n\,d\nu, \end{aligned} \tag{30}$$

puisque $I(1\text{-}p\overline{A}) \subset \overline{I(1\text{-}pA)}$, « orthogonal » à ν.

D'après (29), $\|p_n\overline{A}g_n\| = \|g_n - f\| \leqslant 2\|f\|$, puisque $\|g_n\| \leqslant \|f\|$ par la dissipativité de $p_n\overline{A}$. Comme on a aussi $|p/p_n - 1| \leqslant 1$ partout, on déduit de (30), que pour tout n, en posant $V_n = \Omega \setminus F_n$,

$$\left|\int f\,d\nu\right| \leqslant 2\|f\|\,|\nu|(V_n). \tag{31}$$

Comme les ouverts $V_n \downarrow F$, on a

$$\left|\int f\,d\nu\right| \leqslant 2\|f\|\,|\nu|(F); \tag{32}$$

nous montrerons maintenant que $|\nu|(\mathrm{F}) = 0$, ce qui entraîne par (32) que $\nu = 0$, et le théorème sera établi. Pour montrer que $|\nu|(\mathrm{F}) = 0$, il suffira de voir que $|\nu|(\mathrm{K}) = 0$ pour tout compact non-vide $\mathrm{K} \subset \mathrm{F}$. Considérons donc un tel K. Pour un $\delta > 0$ quelconque désignons par K_δ l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}^{\mathrm{N}} : d(x, \mathrm{K}) < \delta\}$. Il existe $\delta_0 > 0$, et $u \in \mathrm{C}_0(\mathrm{K}_{\delta_0})$ que l'on prolonge par 0 dans $\mathbf{R}^{\mathrm{N}} \setminus \mathrm{K}_{\delta_0}$, tels que

$$\int_{\mathrm{K}} u \, d\nu \geqslant \frac{1}{2} |\nu|(\mathrm{K}),$$

et $\overline{\mathrm{K}_{\delta_0}} \subset \Omega$. Soit $n = 1, 2, 3, \ldots$; pour $n \geqslant n_0$, $\mathrm{K}_{2/n} \subset \mathrm{K}_{\delta_0}$, et nous posons

$$\tilde{u}_n = u\chi_{\mathrm{K}_{1/n}} \tag{33}$$

où « χ_{S} » désigne « fonction caractéristique de S ». Soit $\psi \in \mathrm{C}_{00}^{\infty}(\mathbf{R}^{\mathrm{N}})$, avec $\psi \geqslant 0$, $\int_{\mathbf{R}^{\mathrm{N}}} \psi(x)\, dx = 1$, $\operatorname{supp} \psi \subset$ boule unité de $\mathbf{R}^{\mathrm{N}}$. Posons $\psi_n(x) = n^{\mathrm{N}} \psi(nx)$, obtenant ainsi une « identité approchée C^∞ » spécifique, avec « $\frac{1}{2}$ diamètre du $\operatorname{supp} \psi_n$ » $\leqslant 1/n$. Finalement, soit $u_n = \tilde{u}_n * \psi_n \in \mathrm{C}_{00}^{\infty}(\Omega)$. Alors pour $x \in \mathrm{K}$, $u_n(x) = (\tilde{u}_n * \psi_n)(x) = (u * \psi_n)(x) \rightarrow u(x)$ pour $n \rightarrow +\infty$ (uniformément dans K); pour $x \notin \mathrm{K}$, $d(x, \mathrm{K}) > 0$ et $x \notin \operatorname{supp} u_n$ pour n assez grand. On a donc

$$u_n \rightarrow u\chi_{\mathrm{K}} \text{ partout dans } \Omega. \tag{34}$$

On a aussi clairement,

$$|u_n(x)| \leqslant \|u\|, \ \forall x \in \Omega. \tag{35}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_{\mathrm{N}}}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_{\mathrm{N}}^{j_{\mathrm{N}}}} u_n(x) \right| &= \left| \int \tilde{u}_n(t) \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_{\mathrm{N}}}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_{\mathrm{N}}^{j_{\mathrm{N}}}} \psi_n(x - t)\, dt \right| \\ &\leqslant \mathrm{C} \|u\| n^{j_1 + \cdots + j_{\mathrm{N}}} \left\| \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_{\mathrm{N}}}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_{\mathrm{N}}^{j_{\mathrm{N}}}} \psi \right\| = \mathrm{C} n^{j_1 + \cdots + j_{\mathrm{N}}}; \end{aligned}$$

ici le même C désignera des constantes diverses. Ainsi puisque, dans C_{00}^{∞}, A est d'ordre m, $\|\mathrm{A}u_n\| \leqslant \mathrm{C}n^m$. Nous en déduisons une estimation pour $p\mathrm{A}u_n$; $(p\mathrm{A}u_n)(x)$ vaudra 0 si $d(x, \mathrm{K}) > 2/n$, car $\operatorname{supp} u_n \subset \overline{\mathrm{K}_{2/n}}$, et autrement, pour

$$d(x, \mathrm{K}) \leqslant 2/n,$$
$$|(p\mathrm{A}u_n)(x)| \leqslant \mathrm{C}(d(x, \mathrm{K}))^m n^m \leqslant \mathrm{C}(2/n)^m n^m = 2^m\mathrm{C}.$$

Donc

$$\|p\mathrm{A}u_n\| \leqslant 2^m\mathrm{C} \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0. \tag{36}$$

Mais $0 = \int (1\text{-}p\mathrm{A})u_n\, d\nu$, et $\int u_n\, d\nu \to \int_{\mathrm{K}} u\, d\nu$ par le théorème de Lebesgue, en vue de (34) et (35), alors que $\int p\mathrm{A}u_n\, d\nu \to 0$, puisque $\left|\int p\mathrm{A}u_n\, d\nu\right| \leqslant 2^m\mathrm{C}|\nu|(\overline{\mathrm{K}_{2/n}}\setminus\mathrm{K})$, par (36) et $\mathrm{K} \subset \mathrm{F}$ et par ailleurs l'on a $(\overline{\mathrm{K}_{2/n}}\setminus\mathrm{K}) \downarrow \varnothing$. On trouve donc :

$$0 = \int_{\mathrm{K}} u\, d\nu \geqslant \frac{1}{2}|\nu|(\mathrm{K})$$

et le théorème est démontré.

Nous sommes maintenant en meilleure position pour discuter les relations entre A-régularité et quasi-régularité à l'infini par rapport à 1-A, et pour chercher à déterminer si la condition de Hölder du résultat précédent peut être beaucoup affaiblie ou est par contre « la meilleure possible » en un sens raisonnable. Pour un ouvert σ-compact et sous les conditions du théorème 5.4., la A-régularité entraîne la quasi-régularité à l'infini par rapport à 1-A. En sens inverse, les choses sont très différentes. Soit par exemple dans le contexte de 3.3., V un ouvert borné qui n'est pas A-régulier. On voit très facilement qu'il existe $p \in \mathrm{C}_0(\mathrm{V})$, > 0 dans V, avec

$$p(x) = \left(d\left(x, \complement \mathrm{V}\right)\right)^2 \quad \text{près de} \quad \complement \mathrm{V} = \Omega\setminus\mathrm{V}.$$

Alors, d'après 6.4., si $\mathrm{A}_1 = p\mathrm{A}$, V est quasi-régulier à l'infini par rapport à $1\text{-}\mathrm{A}_1$, mais manifestement pas A_1-régulier (ce qui avec $p > 0$ est équivalent à A-régulier).

Considérons des situations du type 6.4., où l'on part d'un générateur de la forme A_Ω, A satisfaisant aux conditions de 5.4. Alors pour voir si l'hypothèse de 6.4. peut être affaiblie et jusqu'à quel point, en général, il nous faut examiner des situations où $\overline{p\mathrm{A}_\Omega}$ n'est pas un générateur, pour

$$0 \leqslant p \in \mathrm{C}_b(\Omega).$$

D'après 6.3. cela sera le cas si $(pA)_{V_p}$ n'est pas un générateur. Une approche sera donc de considérer des ouverts $V \neq \Omega$ (V sera le V_p pour des p à construire), et d'obtenir (s'il y en a), des $p \in C_0(V)$, > 0 dans V, tels que $(pA)_V$ n'est pas un générateur. Comme

$$\overline{pA_V} \subset (pA)_V,$$

$(pA)_V$ sera un générateur si pA_V est un prégénérateur, et ceci sera le cas, en vertu du résultat mentionné au début de la section 6, si A_V est un générateur (car $p > 0$ dans V). Mais nous savons que A_V est un générateur si V est A-régulier, donc notre approche, indiquée ci-dessus, ne peut avoir de succès que si nous partons d'un V qui n'est pas régulier. Nous suivrons cette approche. Le cas $m = 1$ est facile à élucider, et nous le traiterons à la fin. Nous examinons donc maintenant le cas $m = 2$ plus difficile à clarifier, en nous servant des résultats des sections 5 et 6. Nous nous plaçons dans le contexte de 3.3. avec $N = 3$, c'est-à-dire celui du laplacien Δ dans $\mathbf{R}^3$; l'ouvert non-régulier avec lequel nous travaillerons sera simplement $V = V_1 \setminus \{0\}$, où V_1 est la boule unité ouverte de $\mathbf{R}^3$. Dans ce contexte, nous commençons par

6.5. Théorème. — *Le problème de Cauchy correspondant à* $r\Delta$ *(ou* Δ *est l'opérateur* A *de* 3.3., *et nous avons pris* $p = p(r) = r =$ *distance à* 0) *n'est pas résoluble pour* V.

Preuve. — Considérons l'équation $r\Delta h = h$, pour $h = h(r)$. Cela donne,

$$r\left(\frac{d^2h}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dh}{dr}\right) - h = 0,$$

soit $rh'' + 2h' - h = 0$ $\left(\text{avec } \dfrac{dh}{dr} = h', \text{ etc...}\right)$. Si l'on pose

$$h(r) = \frac{1}{r}\Phi(r), \tag{37}$$

$r\Delta h = h$ devient équivalent à

$$r\Phi'' = \Phi. \tag{38}$$

En cherchant pour (38) une solution de la forme

$$\Phi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n,$$

on trouve une solution Φ_1, d'où par (37) on aura

$$(39)\qquad \begin{aligned} h_1(r) &= \frac{1}{r}\,\Phi_1(r) = \psi_1(r), \\ \Phi_1(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n((n-1)\,!)^2}\, r^n \\ h_1(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n\,!)^2}\, r^n. \end{aligned}$$

En faisant la substitution standard $\Phi_2 = u\Phi_1$, on trouve une autre solution Φ_2 de (38), donnée par

$$(40)\qquad \Phi_2(r) = \Phi_1(r) \int_1^r \frac{1}{\Phi_1^2(t)}\, dt.$$

D'où une solution générale $h(r) = \dfrac{1}{r}\,(C_1\Phi_1(r) + C_2\Phi_2(r))$. On détermine ainsi, pour $k = 2, 3, 4, \ldots,$ des solutions h_k de $r\Delta h = h$, telles que $h_k(1) = 1$, $h_k(1/k) = 0$. On a

$$(41)\qquad h_k(r) = \frac{1}{r}\, \frac{\Phi_1(r) - \left(\Phi_1\left(\frac{1}{k}\right)\Big/\Phi_2\left(\frac{1}{k}\right)\right)\Phi_2(r)}{\Phi_1(1)}.$$

Comme $\Phi_1(r) = r\psi_1(r)$, on a $\psi_1(1) \geqslant \psi_1(r) > 1$, pour

$$0 < r \leqslant 1,$$

et

$$\left|\int_1^r \frac{1}{t^2\psi_1^2(t)}\, dt\right| \geqslant \frac{1}{(\psi_1(1))^2}\left(\frac{1}{r} - 1\right),$$

d'où par (40),

$$|\Phi_2(r)| \geqslant (\psi_1(1))^{-2} r\psi_1(r)((1/r) - 1) \geqslant (\psi_1(1))^{-2}(1 - r) \to 1/\psi_1^2(1) > 0$$

quand $r \to 0$. D'où $\Phi_1\left(\dfrac{1}{k}\right)\Big/\Phi_2\left(\dfrac{1}{k}\right)$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$, et d'après (41).

$$(42)\qquad h_k(r) \to h(r) = \frac{1}{r}\,\Phi_1(r)/\Phi_1(1).$$

D'après (39), $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = \dfrac{1}{\Phi_1(1)} \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{r}\, \Phi_1(r) = 1/\Phi_1(1) > 0.$ Cela est incompatible avec l'existence d'une barrière $\tilde{h}$ près de 0, par rapport à $1 - r\Delta$ (disons que $\tilde{h}$ est définie pour $0 < r \leqslant r_0 < 1$, $r_0 > 0$), car on aurait, pour $1/k \leqslant r \leqslant r_0$, d'abord par 5.3., $0 \leqslant h_k \leqslant 1$, les h_k étant $(1 - r\Delta)$-harmoniques, et encore d'après 5.3., $0 \leqslant h_k \leqslant C\tilde{h}$, C une constante > 0, d'où $0 \leqslant h \leqslant C\tilde{h}$ pour $0 < r < r_0$; en conséquence on devrait avoir $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = 0$. Il n'y a donc pas de barrière à l'infini de V, par rapport à $1 - r\Delta$, et d'après le théorème 5.4., le problème de Cauchy pour V n'est pas résoluble. C.Q.F.D.

6.6. *Remarque.* — Dans la démonstration du théorème précédent nous avons utilisé le fait que l'opérateur Δ, A de 3.3., est localement dissipatif. Cela résulte d'un calcul simple, et bien connu, quand $f \in C^{\infty}_{00}$, ou pour f approprié dans C^2, et lorsque f n'est pas dans C^2 on le vérifie en régularisant avec une identité approchée C^{∞}_{00} (voir 3.3.).

6.7. Corollaire. — *Dans les conditions du théorème* 6.5., *le problème de Cauchy correspondant à* $r^{\alpha}\Delta$, *n'est pas résoluble pour* V, *si* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. (*En particulier le problème correspondant à* Δ, *n'est pas résoluble pour* V.)

Preuve. — Si $(r^{\alpha}\Delta)_V$ est un générateur, pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, alors par le résultat mentionné au début de la section 6, $r^{1-\alpha}(r^{\alpha}\Delta)_V$ est un prégénérateur. Mais $r^{1-\alpha}(r^{\alpha}\Delta)_V \subset (r\Delta)_V$; ce dernier étant dissipatif et fermé serait alors un générateur (maximalité), ce qui par 6.5., n'est pas le cas. Donc $(r^{\alpha}\Delta)_V$ n'est pas un générateur (ni prégénérateur, puisque fermé). C.Q.F.D.

L'argument du corollaire précédent a évidemment un caractère général qu'il convient de mettre en évidence, en nous écartant un instant du contexte « Δ dans V » pour passer au contexte général temporairement, et mener à bout ensuite notre discussion du contexte particulier. Considérons donc dans le contexte général un opérateur A local sur Ω, localement dissipatif et localement fermé. Soit V ouvert $\subset \Omega$. Si $0 < p_1$, $p_2 \in C_b(V)$, et C désigne diverses constantes, alors « $p_1 \prec p_2$ » veut dire « $p_1/p_2 \leqslant C$ » ($p_1 \prec p_2$ est équivalent à $p_2 \succ p_1$, et « $p_1 \approx p_2$ » veut dire « $p_1 \prec p_2 \prec p_1$ »). Alors en ces termes, on a

6.8. Proposition. — *Si le problème de Cauchy correspondant à p_1A est résoluble pour V, alors on a la même situation pour p_2A si $p_2 \prec p_1$.*

Preuve. — Par hypothèse $(p_1A)_V$ est un générateur, $q = p_2/p_1 \in C_b(V)$, $q > 0$ dans V. Mais $(p_2A)_V$ est dissipatif et fermé puisque A est localement dissipatif et localement fermé, et

$$q(p_1A)_V \subset (qp_1A)_V = (p_2A)_V. \tag{43}$$

Par le résultat déjà mentionné, cité au début de la section 6, $q(p_1A)_V$ est un prégénérateur, et alors (43) entraîne que $(p_2A)_V$ est un générateur. C.Q.F.D.

Une autre observation qui est utile dans le contexte « Δ dans V », mais vaut aussi la peine d'être formulée dans le contexte général, est la suivante :

6.9. Proposition. — *Soit A comme dans — et satisfaisant aux conditions de — 5.4., et V ouvert $\neq \emptyset$, σ-compact dans Ω, de la forme $V = V_2 \setminus K$, K compact $\subset V_2$, avec V_2 un ouvert régulier. Alors le problème de Cauchy correspondant à A, pour V, est résoluble si et seulement si $\exists$ « une barrière par rapport à $1\text{-}A$, près de K dans V » (de façon précise, si $\exists W_0$ ouvert $\supset K$, $\neq K$, $h \in D(A, W_0 \setminus K)$, $(1\text{-}A)h \geqslant 0$, $h > 0$, dans $W_0 \setminus K$, et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists W_\varepsilon$ ouvert, $K \subset W_\varepsilon \subset W_0$, $h < \varepsilon$ dans $W_\varepsilon \setminus K$), et $D(A_V)$ est dense.*

Preuve. — Suit immédiatement de 5.4., puisque les barrières sont définies dans des voisinages ouverts du point à l'infini, et par régularité de V_2 il existe automatiquement un « morceau de barrière, près de ∂V_2 dans V ».

Nous retournons maintenant au contexte de « Δ dans V », celui de 6.5.

6.10. Théorème. — *Dans les conditions de 6.5., le problème de Cauchy correspondant à $r^\alpha\Delta$ (ou $p\Delta$, avec $p = p(r) \approx r^\alpha$)*

n'est pas résoluble pour V, *si* $0 \leqslant \alpha < 2$. (*Le problème est résoluble par* 6.4. *pour* $\alpha \geqslant 2$.)

Preuve. — En vertu de 6.8. il suffira de montrer le résultat désiré pour α irrationnel, $1 < \alpha < 2$. Considérons l'équation, pour $h = h(r)$,

$$(1 - r^{\alpha}\Delta)h = 0.$$

Par le changement de variable $h(r) = \frac{1}{r}\,\Phi(r)$, elle devient :

$$r^{\alpha}\Phi'' - \Phi = 0. \tag{44}$$

Nous faisons maintenant le changement de variable indépendante $t = r^{\beta}$, avec $\beta = 2 - \alpha > 0$. Nous obtenons l'équation :

$$t\psi'' + \frac{\beta - 1}{\beta}\psi' - \frac{1}{\beta^2}\psi = 0, \tag{45}$$

$\psi(t) = \Phi(t^{1/\beta}) = \Phi(r)$. On trouve une solution particulière $\psi_1(t)$, de (45), sous forme de série de puissances

$$\psi_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots,$$

donnant lieu à la solution particulière $\Phi_1(r)$ (β irrationnel),

$$\Phi_1(r) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,!\beta^{2n}\left(n - \frac{1}{\beta}\right)\left(n - 1 - \frac{1}{\beta}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)}\, r^{\beta n}. \tag{46}$$

Le minimum de $|1 - k\beta|$, $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$, est > 0. Il existe donc pour chaque β du type considéré, $\delta(\beta) > 0$, tel que $|k - 1/\beta| \geqslant \delta(\beta) > 0$ pour $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$, d'où on trouve pour le terme $\sum_{n=1}^{\infty} \ldots$ de (46), l'estimation

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \cdots\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,!}\left(\frac{r^{\beta}}{\beta^2\delta(\beta)}\right)^n = e^{r^{\beta}/\beta^2\delta(\beta)} - 1,$$

qui $\to 0$ avec $r \to 0$, donc par (46), $\exists r_0 = r_0(\beta) > 0$, tel que

$$\Phi_1(r) \geqslant \text{constante} = C > 0, \quad \text{pour } r \leqslant r_0. \tag{47}$$

De façon analogue à (40), on a une autre solution $\Phi_2(r)$ (ici on intègre à partir de 0), donnée par

$$\Phi_2(r) = \Phi_1(r) \int_0^r \frac{1}{\Phi_1^2(s)}\, ds, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0.$$

On peut alors trouver une suite de fonctions h_k,

$$k = 1, 2, 3, \ldots,$$

avec $(1 - r^\alpha \Delta)h_k = 0$, $h_k(r_0) = 1$, $h_k(1/k) = 0$. (On peut supposer $1/k < r_0$). On trouve

$$(48) \qquad h_k(r) = \frac{r_0}{r} \frac{\Phi_2\left(\frac{1}{k}\right)\Phi_1(r) - \Phi_1\left(\frac{1}{k}\right)\Phi_2(r)}{\Phi_2\left(\frac{1}{k}\right)\Phi_1(r_0) - \Phi_1\left(\frac{1}{k}\right)\Phi_2(r_0)}.$$

Comme $\Phi_2(r) \to 0$ pour $r \to 0$, et $\Phi_1(r) \to 1$ pour $r \to 0$, on a de (48), $\exists h(r) = \lim_{k \to \infty} h_k(r)$, pour $0 < r \leqslant r_0$, et

$$(49) \qquad h(r) = \frac{r_0}{\Phi_2(r_0)} \frac{\Phi_2(r)}{r}.$$

Mais $\Phi_2'(r) = \dfrac{1}{\Phi_1(r)} + \Phi_1'(r) \displaystyle\int_0^r \frac{1}{\Phi_1^2(s)}\, ds$, d'où

$$\Phi_2'(0) = \frac{1}{\Phi_1(0)} = 1,$$

et en conséquence,

$$(50) \qquad \lim_{r \to 0} h(r) = \frac{r_0}{\Phi_2(r_0)} \lim_{r \to 0} \frac{\Phi_2(r)}{r} = \frac{r_0}{\Phi_2(r_0)} \Phi_2'(0)$$
$$= \frac{r_0}{\Phi_2(r_0)} > 0.$$

On conclut ainsi comme dans 6.5. qu'il n'y a pas de barrière, ce qui démontre le théorème.

En conséquence nous voyons que pour $m = 2$, la condition de Hölder du théorème 6.4. ne peut être remplacée par une d'ordre plus petit, même pour des opérateurs elliptiques à coefficients constants.

Observons, en passant, que dans 6.10., pour $\alpha \geqslant 2$, nous avons utilisé le théorème 6.4., mais il est facile de produire une barrière pour le cas spécial en question. En effet, il suffit de considérer le cas $\alpha = 2$, d'après 6.8., et de trouver une barrière h près de 0, d'après 6.9. Il suffit de prendre

$$h = h(r) = r^s, \; s > 0,$$

et l'on trouve $(1 - r^2\Delta)h = (1 - s - s^2)r^s$, donc on pourra prendre pour s la racine positive de $s^2 + s - 1 = 0$, soit $s = (\sqrt{5} - 1)/2$, pour avoir une barrière du type voulu.

Pour terminer cette section, quelques remarques concernant quasi-régularité (par rapport à 1-A) et régularité (par rapport à A, et 1-A). Pour un ouvert non-borné, nous définissons « V est un ouvert A-régulier non-borné » de la même façon que pour un borné sauf que nous prenons ∂V dans Ω^* compactifié de Ω par un point. Reprenons maintenant, pour commencer, le contexte de l'exemple 3.2., et l'ouvert $V = (0, +\infty) \subset \Omega^*$. Alors V est quasi-régulier à l'infini par rapport à 1-A (barrière $h(x) = x$ près de 0, $= e^{-x}$ près de $+\infty$), mais V est «non régulier Dirichlet» (il n'y a pas de fonction A-harmonique dans V, $\in C(\overline{V})$, sauf pour $f(0) = f(+\infty)$); V n'est pas « régulier » pour le problème de Dirichlet par rapport à 1-A, bien qu'il soit quasi-régulier (d'ailleurs, avec $\partial V = \{0\} \cup \{+\infty\}$, h est une barrière par rapport à A au point 0, mais pas au point $+\infty$).

Dans un esprit similaire, considérons le contexte analogue à celui de 3.3. sauf avec $N = 2$, au lieu de $N \geqslant 3$. Soit V le complément (dans $\mathbf{R}^2$) de la boule unité fermée V_1, de $\mathbf{R}^2 = \Omega$. Alors V n'est pas régulier pour le problème de Dirichlet ordinaire (pas A-régulier), mais le problème de Cauchy est résoluble, V est (1-A)-quasi-régulier, car comme dans 6.9. il suffit de trouver une barrière près de $\infty \in \partial V$ (il n'y a pas de difficulté près de $\partial V_1 \subset \partial V$, par régularité), et celle-ci est donnée par $h = h(r) = e^{-r}$ près de ∞,

$$(1 - \Delta)h = \frac{1}{r} e^{-r} > 0.$$

7. Le cas $m = 1$.

En ce qui concerne l'évaluation de la précision du résultat 6.4., le cas $m = 1$ est beaucoup plus facile à explorer que le cas $m = 2$ (que nous avons examiné ci-dessus à l'aide des résultats des sections 5 et 6). Par ailleurs l'esprit de la situation n'est pas le même. (Ici nous n'avons pas à faire à des opérateurs fortement elliptiques ni à des ouverts réguliers). Nous examinerons donc, pour terminer, ce cas simple dans la présente section, en résolvant complètement une situation particulière, par une « approche directe ». Soit $\Omega = \mathbf{R}$, A_0 l'opérateur local dans $C(\Omega)$, $A_0 = \frac{d}{dx}$, $D(A_0) = C^1(\Omega) = \{$fonctions continûment dérivables sur $\Omega\}$, et A l'opérateur local sur Ω induit par A_0. Soit V l'ouvert $(0, +\infty) \subset \Omega$. Naturellement A_Ω est un générateur (semi-groupe de translations), mais A_V n'est pas un générateur. On a

7.1. Théorème. — *Soit* $p \in C_b(V)$, > 0 *dans* V. *Alors* $(pA)_V$ *est dissipatif et fermé, et c'est un générateur si et seulement si*

$$\int_0^1 \frac{1}{p(t)}\, dt = +\infty. \tag{51}$$

Preuve. — Supposons que (51) n'est pas satisfait. Soit dans ces conditions

$$h(x) = e^{-\int_0^x \frac{1}{p(t)} dt}, \quad \text{pour} \quad x > 0. \tag{52}$$

Alors $h(x) > 0$ pour tout $x > 0$, et $h(x) \leqslant 1$. Aussi $h \in C_b(V) \cap C^1(V)$, et $ph' + h = 0$. Soit sur V la mesure totalement finie $d\nu$ définie par $d\nu = (h/p)\, dx$, où dx est la mesure de Haar ordinaire sur $\mathbf{R}$ (restreinte à V). On vérifie alors de suite, par intégration par parties, que si $f \in D((pA)_V)$,

$$\int (pf' - f)\, d\nu = 0$$

d'où $I(1 - (pA)_V)$ n'est pas dense dans $C_0(V)$, et $(pA)_V$ n'est pas un générateur ou prégénérateur. Puisque A est localement fermé, et $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in V : p(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$, on a comme avant $(pA)_V$ fermé, et par ailleurs $(pA)_V$ est clairement dissipatif.

Reste à montrer que la condition (51) est suffisante. Supposons qu'elle est satisfaite. Soit $g \in C_{00}(V)$, tel que

$$\operatorname{supp} g \subset (\alpha, \beta),$$

où $0 < \alpha < \beta < +\infty$. Posons

$$u(x) = \int_\beta^x \frac{1}{p(t)}\, dt,$$

alors $u \in C^1(V)$, et par (51),

$$\lim_{x \to 0} e^{u(x)} = 0 \tag{53}$$

Dans ces conditions, la fonction f définie dans V par

$$f(x) = -\, e^{u(x)} \int_\beta^x \frac{1}{p(t)}\, e^{-u(t)} g(t)\, dt, \tag{54}$$

est dans $C^1(V)$, et satisfait à $f(x) - p(x)f'(x) = g(x)$, $\forall x > 0$, comme on vérifie sans difficulté. Puisque $\operatorname{supp} g \subset (\alpha, \beta)$, $f(x) = 0$ pour $x \geqslant \beta$, et pour $0 < x < \alpha$,

$$f(x) = \text{constante} \times (-\, e^{u(x)}) \to 0 \qquad \text{avec} \qquad x \to 0.$$

Donc $f \in C_0(V)$, et par

$$f - pf' = g,$$

$pf' \in C_0(V)$, d'où $f \in D((pA)_V)$ et $g \in I(1 - (pA)_V)$. Ainsi $I(1 - (pA)_V)$ est dense, et le théorème est démontré.

7.2. Corollaire. — *Dans le contexte et les conditions de* 7.1., *soit* $p \in C_b(\Omega)$, $= 0$ *dans* $\Omega \setminus V$, > 0 *dans* V. *Alors si* $\int_0^1 \frac{1}{p(t)}\, dt < +\infty$, pA_Ω *n'est pas un prégénérateur dans* $C_0(\Omega)$. *Si* $p \approx x^\alpha$ *dans* $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *alors* pA_Ω *est un prégénérateur dans* $C_0(\Omega)$ *si et seulement si* $\alpha \geqslant 1$.

Preuve. — La première partie suit de 7.1. comme dans 6.3. Si maintenant $p \approx x^\alpha$ et $\alpha < 1$, alors $\int_0^1 \frac{1}{p(t)}\, dt < +\infty$, et nous venons de voir qu'alors $\overline{pA_\Omega}$ n'est pas un générateur dans $C_0(\Omega)$. Si par contre $\alpha \geqslant 1$, alors $\overline{pA_\Omega}$ est un générateur dans $C_0(\Omega)$, par le théorème 6.4. pour $m = 1$. C.Q.F.D.

Le corollaire précédent montre que aussi pour $m = 1$ la condition de Hölder de 6.4. ne peut être remplacée par une d'ordre inférieur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Dorroh, Contraction semi-groups in a function space, *Pacific J. Math.*, 19 (1966), 35-38.
[2] F. Hirsch, Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, *Ann. Inst. Fourier*, 22 (1972), 89-210.
[3] F. Hirsch, Intégrales de résolvantes et calcul symbolique, *Ann. Inst. Fourier*, 22 (1972), 239-264.
[4] G. Lumer, Perturbations de générateurs infinitésimaux, du type « changement de temps », *Ann. Inst. Fourier*, 23, 4 (1974), 271-279.
[5] G. Lumer and R. S. Phillips, Dissipative operators in a Banach space, *Pacific J. Math.*, 11 (1961), 679-698.
[6] N. Ya. Vilenkin (et autres), Functional analysis, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1972.
[7] K. Yosida, Functional analysis, 3rd ed. 1971, 4th ed., 1974, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Manuscrit reçu le 20 mars 1975.

Gunter Lumer,
Institut de Mathématique
Faculté des Sciences
Université de l'État
7000 Mons (Belgique).