ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE LELONG

Topologies semi-vectorielles. Application à l'analyse complexe

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 3-4 (1975), p. 381-407

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_381_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 3 et 4 (1975), 381-407.

TOPOLOGIES SEMI-VECTORIELLES. APPLICATION A L'ANALYSE COMPLEXE

par Pierre LELONG

Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion de son 70^e anniversaire.

1. Introduction.

Notre but est d'étudier certaines topologies qui sont invariantes par les translations et rendent continue la multiplication sur un espace vectoriel E. On supposera le corps de base K de E valué complet, à valuation non discrète; on précisera certaines propriétés élémentaires quand, de plus, K est localement compact ($K = R$ et $K = \mathbf{C}$ en particulier).

Un certain intérêt est porté actuellement à l'étude des topologies vectorielles non localement convexes (cf. [5] et [6]) sur les espaces vectoriels réels. Allant plus loin,on considérera ici des topologies qu'on appellera *semi-vectorielles* : elles sont définies par la propriété d'induire une topologie vectorielle sur tous les sous-espaces de dimension finie.

On peut considérer que les topologies localement convexes sur un espace vectoriel E sont particulièrement adaptées à l'étude des formes linéaires $f \in E^*$; l'étude de classes plus générales de fonctions (polynomiales, analytiques...) conduit à des topologies plus fines, invariantes par translation, où le filtre $\mathcal{F}_0$ des voisinages de l'origine a une base $B = \{V_\alpha\}$, chaque V_α étant défini par $p_\alpha(x) = \sup\limits_j |f_{\alpha,j}(x)| < 1$, les

$f_{\alpha, j}$ n'étant plus linéaires. Rappelons que dans [$4b$] nous avons considéré le cas où les V_α sont pseudo-convexes et leurs jauges $p_\alpha(x)$ sont plurisousharmoniques sur un espace complexe E; de telles topologies peuvent être appelées pseudo-convexes (ou plurisousharmoniques). Les p_α doivent vérifier des conditions étudiées par C.-O. Kiselman [$3b$] pour que $\mathcal{F}_0$ soit un filtre de voisinages de 0, et d'autres plus précises pour que la topologie invariante par translation qu'on en déduit soit vectorielle. Mais on définit aussi sur E des topologies qui ne sont plus nécessairement vectorielles.

On se limitera ici à l'étude de la classe suivante — notée θ — de topologies sur un espace vectoriel E.

DÉFINITION 1. — *Une topologie* T *sur un espace vectoriel* E *de corps de base* K *valué, non discret, complet, sera dite de classe* θ *si*

a) elle est invariante par les translations $x \to x + a$, $a \in E$.

b) La multiplication $(u, x) \to ux$ *est une application continue* $K \times E \to E$, K *étant muni de la topologie de la valuation et* E *de la topologie* T.

On verra que les topologies θ sont semi-vectorielles quand elles sont séparées. Elles rendent continue l'addition

$$(x, y) \to x + y$$

quand l'un des facteurs demeure dans un sous-espace de dimension finie. Cette propriété les rapproche de la topologie T_f, dite « finiment ouverte » sur E étudiée par S. Kakutani et V. Klee [2] sur les espaces réels : en fait dès que K est supposé localement compact, la classe θ a un seul élément maximal qui est la topologie T_f. Rappelons que T_f est semi-vectorielle et non vectorielle quand E ne possède pas de base dénombrable (cf. [2]). Si $K = C$, les topologies θ sont des topologies plurisousharmoniques et même polynomiales dans E puisque cette propriété est vraie pour T_f comme l'a montré C.-O. Kiselman.

Ce sont les applications à l'analyse complexe qui ont motivé l'étude de la classe θ : les propriétés de base des fonctions plurisousharmoniques demeurent valables dans le cadre plus général des topologies semi-vectorielles, comme on le verra à la fin de ce travail (cf. aussi [3a]). Nous sommes heureux de dédier cette étude à Marcel Brelot en hommage à ses travaux sur le potentiel et les fonctions sousharmoniques.

2. La topologie finiment ouverte T_f.

Le corps K étant supposé valué complet, à valuation non discrète, la valuation $u \in K \to |u| \in R^+$ définit sur K une distance $d(u, v) = |u - v|$ et fait de K un espace métrique complet.

On désigne par $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension n, par $\Lambda(E) = \oplus \Lambda_n(E)$ ceux de dimension finie. La seule topologie vectorielle séparée sur $M \in \Lambda_n(E)$ est l'image de celle de K^n donnée par l'application $x = \Sigma u_k e_k$, où $\{e_k\}$ est une base de M.

La topologie *finiment ouverte* notée T_f sur E est définie comme suit : $\omega \subset E$ est T_f ouvert si et seulement si pour tout $M \in \Lambda(E)$, l'intersection $\omega \cap M$ est un ouvert (éventuellement vide) sur M pour sa topologie vectorielle séparée T_M ; T_f est la limite inductive stricte (en général non dénombrable) des topologies (M, T_M), pour $M \in \Lambda(E)$. Si $\{e_\lambda\}$ est une base de E, $\lambda \in L$, à toute partie finie $H \subset L$ correspond $M_H \in \Lambda(E)$ engendré par les e_λ, $\lambda \in H$: l'espace (E, T_f) est la limite inductive stricte des M_H quand $H' = L - H$ parcourt le filtre φ sur L des complémentaires des parties finies. La topologie T_f sur E est séparée car elle est plus fine que la topologie produit des sous-espaces $\prod_\lambda Ke_\lambda$ qui est séparée. Si $K = R$ ou C, et L dénombrable, T_f est localement convexe et (E, T_f) est limite inductive stricte d'une suite d'espaces localement convexes. Dans [2] S. Kakutani et V. Klee ont établi la continuité de la multiplication sur (E, T_f) si $K = R$, ainsi que celle de l'addition

$$(x, y) \to x + y$$

si x ou y demeure dans un sous-espace de dimension finie; mais l'addition n'est pas continue si card. L n'est pas dénombrable et T_f est alors une topologie semi-vectorielle non vectorielle séparée; c'est évidemment la *plus fine* des topologies semi-vectorielles.

3. Propriété des topologies de la classe θ.

Indiquons d'abord quelques conséquences immédiates de la définition 1.

1° *Si* E *est muni d'une topologie* T *de classe* θ, *alors sur un sous-espace* $F \subset E$, *la topologie induite par* (E, T) *est de classe* θ. En effet (F, T_F) est invariante par translation et rend continue la multiplication.

2° *L'adhérence* $\overline{0}$ *de* 0 *dans* (E, T) *est un cône.* En effet $x_0 \in \overline{0}$ entraîne $ux_0 \in \overline{0}$ quel que soit $u \in K$. Il en résulte

PROPOSITION 1. — *Soit* T *une topologie* θ *sur un espace vectoriel* E *et* M *un sous-espace de* E, *de dimension* 1 : *ou bien la topologie* T_M *induite par* T *sur* M *est la topologie vectorielle séparée et* $M \sim Ke$, $e \in M$, $e \neq 0$ *ou bien* M *est le seul ouvert de* T_M *et* $M \subset \overline{0}$.

En effet T_M est une topologie θ sur M; elle est invariante par translation, donc si l'adhérence $\overline{0}_M$ de 0 pour T_M est 0 on a, $\overline{x}_M = x$ pour tout $x \in M$, et T_M est séparée. Un raisonnement classique (cf. [1], p. 17) montre que si l'on prend $e \in M$, $e \neq 0$, l'application $x \to ue$ définit un isomorphisme $K \sim M$, $u(x)$ étant linéaire et continue sur M : T_M est alors la topologie vectorielle séparée sur M.

Si T_M n'est pas séparée, d'après la remarque 2°, on a $M \subset \overline{0}_M$, ce qui entraîne $\overline{0}_M = M$ et $\overline{x}_M = M$ pour tout $x \in M$; M est le seul ouvert de T_M et T_M est la topologie vectorielle non séparée sur M, ce qui établit la proposition.

COROLLAIRE 1. — *Sur un espace vectoriel* M *de dimension* 1, *la seule topologie* θ *qui soit séparée est la topologie vectorielle séparée.*

3° Concernant le filtre $\mathscr{F}_0$ des voisinages de l'origine, on a :

PROPOSITION 2. — *Si* T *est une topologie* θ, *les voisinages de l'origine sont absorbants et il existe une base de voisinages disqués.*

Là encore, la démonstration est classique : $(u, x) \to ux$ est continu pour $u = 0$, $x = 0$, $u \in K$, $x \in E$; soit $W \in \mathscr{F}_0$: il existe $V \in \mathscr{F}_0$ et $\varepsilon > 0$ tels qu'on ait $ux \in W$ pour $|u| \leqslant \varepsilon$, et $x \in V$. Le voisinage disqué $\bigcup_{|u| \leqslant \varepsilon} uV$ appartient alors à W, ce qui établit la seconde propriété; la première résulte directement de $ux_0 \to 0$ pour x_0 donné, et u tendant vers zéro.

La propriété suivante intervient quand on considère l'injection du disque unité $|u| \leqslant 1$ du corps K dans E. Elle a été introduite par C.-O. Kiselman dans [3, *a*].

Proposition 3. — *Pour qu'une topologie* T *sur* E *soit de classe* θ, *il faut et il suffit que soit vérifiée la propriété* (K) — *Pour tout* $y \in E$, *l'application* $K \times E \to E$ *définie par*

$$(u, x) \to f_y(u, x) = x + uy$$

est continue.

a) La condition (K) est *nécessaire*. Plaçons-nous d'abord au voisinage d'un couple (u_0, x_0), où $|u_0| = c > 0$ et montrons la continuité de $(u, x) \to f_y(u, x) = x + uy$ pour y donné. Pour $|u| > \frac{c}{2}$, $u \to u^{-1}$ est continu. De plus :

(I) $(u, x) \to x_1 = u^{-1}x$ est continu de (u, x), d'après *b*) de la définition 1.

(II) $x \to x_1 + y = x_2 = y + u^{-1}x$ est continu d'après la continuité de la translation, condition *a*) de la définition 1.

(III) $(u, x_2) \to ux_2 = u(y + u^{-1}x) = x + uy = f_y(u, x)$ est continu d'après la condition *b*) de la définition 1.

Finalement en composant (I), (II), (III), on obtient

$$(u, x) = f_y(u, x)$$

comme application continue de (u, x) au voisinage de (u_0, x_0) si $u_0 \neq 0$.

Dans le cas $u_0 = 0$, on pose $u = a + u_1$, $a \in K$, $|a| \neq 0$, et l'on écrit

$$f_y(u, x) = x + uy = (x + u_1y) + ay = f_y(u_1, x) + ay.$$

Pour a fixé, $|a| > 0$, $(u, x) \to (u_1, x) \to f_y(u_1, x)$ est continu de (u_1, x) pour $|u_1| = |u - a| \geqslant \frac{a}{2} > 0$, donc continu de (u, x) pour $|u| < \frac{a}{2}$; $f_y(u, x)$ qui ne diffère de $f_y(u_1, x)$ que par une translation est donc continu de (u, x), ce qui achève d'établir la nécessité de la condition (K).

b) La condition (K) est *suffisante* pour que T soit une topologie θ sur E. Spécialisons $u = 1$: elle entraîne la continuité de la translation, donc T est une topologie invariante par les translations. De plus $u \to u^{-1}$ étant continu au voisinage de $u_0 \neq 0$,

$$(u, x) \to u^{-1}f_y(u, x) = y + u^{-1}x$$

est continue de (u, x); il en est de même de

$$u^{-1}f_y(u, x) - y = u^{-1}x,$$

T étant invariante par les translations. Finalement

$$(u, x) \to u^{-1}x \to ux$$

est continu de (u, x) au voisinage (u_0, x_0) si l'on a $u_0 \neq 0$. On procède comme plus haut si $u_0 = 0$, ce qui achève la démonstration de la proposition 3. On a aussi, à partir de la définition 1 :

Proposition 4. — Si T_1 *et* T_2 *sont deux topologies de classe* θ *sur* E, *alors* $T_3 = \sup(T_1, T_2)$ *est encore de classe* θ.

Montrons encore :

Proposition 5. — *Si* M *est un sous-espace de* (E, T), *où* T *est une topologie* θ, *la topologie quotient sur* $E/M = E_1$ *est une topologie* θ.

Soit $x' = p(x)$ la projection canonique $E \to E/M$; $\omega \subset E_1$ est un ouvert de E_1 si et seulement si $p^{-1}(\omega)$ est un ouvert de (E, T). Le saturé Ω_s d'un ouvert $\Omega \subset (E, T)$ est ouvert d'après $\Omega_s = \Omega + M = \bigcup_{a \in M} (\Omega + a)$; T étant invariante par translation, $\Omega + a$ et Ω_s sont des ouverts de (E, T); ainsi les ouverts dans E_1 sont des projections par p des ouverts saturés de (E, T); la topologie quotient est donc invariante par les translations. Montrons la continuité de la multiplication $(u, \xi) \to \eta$ dans E_1. Soit $x \in p^{-1}(\xi)$, et

$$y = ux \in p^{-1}(\eta)$$

Si ω est un ouvert de E_1 contenant η, $\Omega = p^{-1}(\omega)$ est un ouvert de E contenant ux et contient $u'x'$ pour $|u' - u| < c$, $x' \in \Omega_1$, où Ω_1 est un ouvert de (E, T) contenant x. On a alors $u'\xi' \in \omega$ pour $|u' - u| < c$ et $\xi' \in p(\Omega_1)$, où $p(\Omega_1)$ est un voisinage de ξ dans E_1, ce qui établit la continuité du produit $\eta = u\xi$ et l'énoncé.

4. Topologies séparées de classe θ.

Les topologies θ qui sont séparées sont des topologies semi-vectorielles. On a en effet :

Proposition 6*a*. — *Toutes les topologies qui sont de classe* θ *(c'est-à-dire invariantes par translation et rendant continue la multiplication) et qui sont séparées sur un espace vectoriel* E *induisent sur tout sous-espace vectoriel* M *de dimension finie la topologie vectorielle séparée* T_M.

Soit d'abord $\dim M = 1$: la topologie trace de T sur M est séparée, donc d'après la proposition 1, c'est la topologie vectorielle séparée T_M sur M.

Montrons alors l'énoncé par récurrence sur $n = \dim M$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $M \in \Lambda_n(E)$ et $Ke_n = N$: la topologie T induit sur N la topologie vectorielle séparée. Soit M_1 engendré par $e_1, \ldots, e_{n-1}$ le supplémentaire algébrique de N; d'après l'hypothèse de récurrence, M_1 est isomorphe à K^{n-1}, donc complet, donc fermé et la topologie quotient T_1 sur $M/M_1 = N$ est séparée; c'est une topologie θ d'après la proposition 5. Donc elle coïncide avec la topologie vectorielle séparée induite sur N par T ce qui établit que M_1 et N sont supplémentaires topologiques et que M est isomorphe à K^n. On en déduit :

Proposition 6*b*. — *Toute topologie séparée, de classe* θ *sur* E, *rend continue l'addition* $(x, y) \to x + y$ *quand* x *ou* y *demeure dans un sous-espace de dimension finie.*

Soit $y \in M$, et $M \in \Lambda_n(E)$: $y = \sum_1^n u_k e_k$ où (e_k) est une base de M : d'après la proposition 6*a* les coordonnées $u_k(y)$ sont continues de y sur M. D'autre part (proposition 3),

$$(x, u_k) \to x + u_k e_k$$

est continu de (x, u_k) donc de (x, y), pour $y \in M$, ce qui établit l'énoncé quand $n = 1$. Pour $n > 1$, raisonnons par récurrence en posant $y' = \sum_1^{n-1} u_k e_k$, $y'' = u_n e_n$. Les $u_k(y)$ étant continus de y, y'' est continu de $y \in M$. De même $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \to y'$ est continue d'après la proposition 6*a*, T étant séparée et de classe θ sur M. Alors les applications $y \to (u_1, \ldots, u_{k-1}) \to y'$ sont continues et y' est continu de y. D'après l'hypothèse de récurrence

$$(x, y') \to x + y'$$

est continu de (x, y') donc de (x, y). Alors

$$(x, y) \to (x + y') + y'' = x + y$$

est continu de $(x + y')$ et de y'', d'après la propriété pour $n = 1$, donc, finalement, l'application $(x, y) \to x + y$ est continue de (x, y).

On résumera ces propriétés dans l'énoncé suivant :

Théorème 1. — *Pour qu'une topologie séparée* T *sur* E *soit une topologie* θ, *c'est-à-dire soit invariante par les translations et rende la multiplication continue, il faut et il suffit* :

a) *que les voisinages de* 0 *soient absorbants,*

b) *que l'addition* $(x, y) \to x + y$ *soit continue quand* x *ou* y *demeure dans un sous-espace* M *de dimension finie.*

Dans la condition suffisante on peut remplacer b) *par la condition portant sur les seuls sous-espaces de dimension un.*

La condition *nécessaire* résulte de la proposition 6*b* et de la proposition 2.

Pour montrer la condition suffisante, remarquons que *b*) entraîne l'invariance de T par les translations. D'autre part $(u, y) \to uy$ est continu de u pour y donné d'après *a*) et l'invariance de T par les translations. Enfin $(u, x) \to x + uy$ pour y donné est continu de (u, x) d'après la condition *b*) portant sur les sous-espaces M de dimension un. La propriété (K) est donc établie; elle entraîne la continuité de la multiplication, ce qui achève la démonstration.

Indiquons quelques corollaires :

COROLLAIRE 2. — *La topologie finiment ouverte* T_f *est plus fine que toute topologie séparée de classe* θ.

En effet, si T est une topologie θ et est séparée, un ouvert Ω de T coupe tout $M \in \Lambda(E)$ selon un ouvert de la topologie vectorielle séparée pour M : il est donc T_f-ouvert. On verra plus loin que si K est localement compact, T_f est une topologie θ; la question est ouverte dans le cas général.

Une conséquence de la proposition 6*a* est d'autre part :

COROLLAIRE 3. — *Les topologies* θ *qui sont séparées sont des topologies semi-vectorielles.*

5. Topologies de classe θ non séparées.

Cherchons à quelles conditions une topologie non séparée de classe θ est semi-vectorielle.

Une condition nécessaire est que l'adhérence $\overline{0}$ de l'origine soit un sous-espace vectoriel. En effet soit $x_1 \in \overline{0}$, $x_2 \in \overline{0}$; le sous-espace M engendré par x_1 et x_0 a alors une topologie vectorielle; on a donc $ux_1 + vx_1 \in \overline{0}$, quels que soient u, $v \in K$; le cône $\overline{0}$ est donc un sous-espace fermé N.

On va montrer :

PROPOSITION 7. — *a) Soit* T *une topologie non séparée, de classe* θ *sur* E : *pour qu'elle soit semi-vectorielle, il faut et il suffit que l'adhérence* $\overline{0}$ *de l'origine soit un sous-espace vectoriel de* E.

b) S'il en est ainsi, l'addition $(x, y) \to x + y$ *est* T*-continue quand* x *ou* y *demeure dans un sous-espace* M *de dimension finie.*

Il suffit d'établir que si $\overline{0}$ est un espace vectoriel *b*) est vérifié : en effet, T rend alors continues l'addition et la multiplication sur les sous-espaces de dimension finie; T est donc une topologie semi-vectorielle au sens précisé plus haut.

Le sous-espace vectoriel $N = \bar{0}$ est T-fermé; soit $E_1 = E/N$, $M_1 = M/N$, et $\hat{x}$, $\hat{y}$ les classes de x, y respectivement. Sur E_1 la topologie quotient est une topologie θ (proposition 5); elle est séparée. Alors l'addition $(\hat{x}, \hat{y}) \to \hat{x} + \hat{y}$ est continue de $\hat{x}, \hat{y}$, quand $\hat{y}$ demeure dans le sous-espace M_1 de dimension finie (proposition 6*b*).

Il en résulte la continuité de $(x, y) \to (x + y)$ modulo N, c'est-à-dire la continuité de $(x, y) \to x + y$ pour $y \in M$ car N appartient à l'adhérence de tout point pour la topologie T.

Remarque. — On peut énoncer différemment la proposition 7 en tenant compte du théorème 1.

THÉORÈME 2. — *Pour qu'une topologie* T *sur* E *(séparée ou non) soit de classe* θ, *et semi-vectorielle, il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions* :

a) *l'adhérence de l'origine est un sous-espace vectoriel de* E;

b) *les voisinages de* 0 *sont absorbants*;

c) *l'addition* $(x, y) \to x + y$ *est continue si* x *ou* y *demeure dans un sous-espace de dimension finie.*

La nécessité des conditions résulte des propositions 7 et 2. Elles sont d'autre part suffisantes, car *c*) entraîne (pour $y = a$) l'invariance de T par rapport aux translations; *b*) entraîne la continuité de $u \to uy = y'$ pour y donné; enfin *c*) entraîne la continuité de $(x, y') \to x + y' = x + uy$ en (u, x), donc la propriété (K). Celle-ci (proposition 3) entraîne que T soit une topologie de classe θ. La condition *a*) et la proposition 7 montrent alors que T induit une topologie vectorielle en dimension finie.

Remarque. — Dans l'énoncé du théorème 2, la condition *c*) peut être remplacée par l'ensemble des conditions suivantes :

c_1) T *est invariante par les translations.*

c_2) *Le filtre* $\mathscr{F}_0$ *des voisinages de l'origine a la propriété que à tout couple* $[M \in \Lambda(E),\ V \in \mathscr{F}_0]$ *correspond* $V' \in \mathscr{F}_0$ *tel que l'on ait*

$$V' + (V' \cap M) \subset V.$$

En effet cette dernière condition équivaut à la continuité de l'addition à l'origine quand y demeure dans M.

6. Application aux compacts.

Rappelons que si une application $f\colon X \times Y \to Z$ est continue de (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, à valeurs dans Z, où X, Y, Z sont des espaces topologiques, alors si C est un compact de Y et Ω un ouvert de Z, l'ensemble

$$X_C = [x \in X;\ f(x, y) \in \Omega, \text{ pour tout } y \in C]$$

est un ouvert (éventuellement vide) de X.

D'après ce qui précède, si E est un espace vectoriel muni d'une topologie de classe θ, on pourra appliquer ce résultat à $f(x, y) = x + y$, $x \in E$, $y \in C \subset E$, si C est un compact situé dans un sous-espace $M \in \Lambda(E)$. On a ainsi :

Proposition 8. — *a) Si G est un ouvert dans l'espace vectoriel E muni d'une topologie de classe θ, et si C est un compact situé dans un sous-espace de dimension finie, l'ensemble*

$$G_C = [x \in G;\ x + y \in G, \text{ pour tout } y \in C] \tag{1}$$

est un ouvert dans E.

b) Si C' est un compact (non nécessairement porté par un sous-espace de dimension finie) dans E, et si pour tout $x \in C'$, on a $x + y \in G$ pour tout $y \in C$, il existe un voisinage ouvert Ω de C' tel que l'on ait $x + y \in G$ pour tout $x \in \Omega$, et tout $y \in C$.

On a alors :

Corollaire 4. — *Soit E un espace vectoriel muni d'une topologie T de classe θ, et soit $f(x)$ une fonction semi-continue supérieurement définie dans un ouvert G de E. Alors si C est un compact dans G, qui est porté par un sous-espace de dimension finie,*

$$g_C(x) = \sup_{y \in C} f(x + y)$$

est semi-continue supérieurement dans l'ouvert G_C défini par (1).

En effet soit $G_C \neq \emptyset$, $x_0 \in G_C$ et $g_C(x_0) = a$: pour $\varepsilon > 0$ l'ensemble $g_C(x) < a + \varepsilon$ est défini par : $f(x + y) < a + \varepsilon$ pour tout $y \in C$; il est donc ouvert et est un voisinage de x_0, ce qui établit le Corollaire 4.

Corollaire 5. — *Soit, comme au corollaire précédent, un ouvert* G *dans* E *et* C *un compact dans* G *porté par un sous-espace* M *de dimension finie* n. *Soit* μ *une mesure positive portée par* C. *L'application* $K^n \to M$, *soit* $y = \Sigma u_k e_k$ *ou* e_k *est une base de* M *définit sur* M *une métrique* $d(y, y')$. *On suppose que pour tout* $\alpha > 0$, *il existe un recouvrement fini* $\{C_i\}$ *de* C *par des compacts* C_i *de diamètre au plus* α *et tels que* $\mu(C_i \cap C_j) = 0$ *si* $i \neq j$. *Alors si* $f(x)$ *est une fonction semi-continue supérieurement dans un domaine* G *contenant* C, *la fonction*

$$h(x) = \mu_y[f(x+y)] = \int d\mu(y) f(x+y)$$

est semi-continue supérieurement dans l'ouvert $G_C = [x \in G;\ x + y \in G$ *pour tout* $y \in C]$.

Démonstration. — On note $f_m(x) = \sup_y f(x+y)$ pour $y \in G$, $d(x, y) \leqslant \frac{1}{m}\cdot$ Les fonctions f_m décroissent et tendent vers f quand $m \to +\infty$; $f_m(x)$ est définie et semi-continue supérieurement pour $x \in C$ si m surpasse une valeur m_0. Soit x fixé dans G_C, et $\varepsilon > 0$ donné; fixons $m > m_0$ tel qu'on ait

$$h(x) < \mu_y[f_m(x+y)] < h(x) + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Soit $\{C_i\}$ un recouvrement de C, pour lequel on a $\alpha < m^{-1}$.

Posons $M_i(x) = \sup\limits_{y \in C_i} f(x+y)$, et $\mu_i = \mu(C_i)$; on a

$$h(x) \leqslant \sum_i \mu_i M_i(x) \leqslant \mu_y[f_m(x+y)]$$

qui entraîne au point x :

$$h(x) \leqslant \sum_i \mu_i M_i(x) \leqslant h(x) + \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{2}$$

D'autre part on a évidemment, quel que soit $x' \in G_C$:

$$h(x') \leqslant \Sigma \mu_i M_i(x'). \tag{3}$$

La somme $\Sigma \mu_i M_i(x)$ est semi-continue supérieurement d'après le corollaire 1. Il existe donc un voisinage V_x de x tel que pour $x' \in V_x$ on ait

$$\Sigma\mu_i M_i(x') \leqslant \Sigma\mu_i M_i(x) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

En comparant (2), (3), (4), on obtient

$$h(x') \leqslant h(x) + \varepsilon \quad \text{pour} \quad x' \in V_x$$

ce qui démontre le corollaire.

7. Cas où le corps de base K est localement compact.

Dans [2] S. Kakutani et V. Klee ont utilisé la compacité locale du corps R pour montrer que la multiplication

$$(u, x) \to ux$$

est T_f-continue dans les espaces réels. D'autre part C.-O. Kiselman [3*a*] a montré que la compacité locale du corps de base permet de passer à la limite inductive sur la propriété (K) de la proposition 3. On établira directement :

Proposition 9. — *Si le corps de base* K *est localement compact, la topologie finiment ouverte* T_f *sur l'espace vectoriel* E *est de la classe* θ *et en est l'élément maximal unique.*

La topologie T_f étant invariante par les translations, il suffit d'établir la continuité de $(u, x) \to f_y(u, x) = x + uy$ pour $u = 0$, $x = 0$, et y donné. Soit W un ensemble T_f-ouvert contenant l'origine; soit $M = Ky$ le sous-espace engendré par y; $\omega = W \cap M$ est un ouvert contenant 0 pour la topologie vectorielle séparée sur M; il est donc absorbant et il existe $c > 0$ tel qu'on ait $uy \in \omega$ pour $|u| \leqslant c$; d'autre part $|u| \leqslant c$ est un compact sur K. Sur tout

$$M' \in \Lambda(E),$$

l'ensemble $W' = [x \in E;\ x + uy \in W$ pour tout $u \in K$ vérifiant $|u| \leqslant c]$ découpe donc un ouvert (éventuellement vide) de la topologie vectorielle séparée de M' : autrement dit W' est T_f-ouvert, ce qui démontre qu'on a $f_y(u, x) \in W$ pour $x \in W'$ et $|u| \leqslant c$ et établit la continuité de $f_y(u, x)$; T_f est donc une topologie de classe θ d'après la proposition 3.

Elle est plus fine que toute topologie T de cette classe. En effet, d'après la proposition 4, la topologie

$$T' = \sup(T, T_f)$$

est de classe θ; T′ est séparée, donc, d'après le Corollaire 2, elle est moins fine que T_f, ce qui équivaut à dire que T est moins fine que T_f.

Proposition 10. — *Soient* (E_α, T_α) *une famille indexée par* $\alpha \in A$ *d'espaces vectoriels sur un corps* K *valué complet non discret, localement compact. Soit* E *l'espace engendré par les* E_α. *On suppose* A *muni d'un préordre: si* $\alpha \leqslant \beta$, E_α *est un sous-espace de* E_β *et l'application canonique* $E_\alpha \to E_\beta$ *est continue; pour* α, β *donnés, il existe* $\gamma \in A$ *tel que l'on ait* $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$, $E_\alpha \subset E_\gamma$, $E_\beta \subset E_\gamma$. *On définit la topologie inductive des* T *sur les* E_α: ω *est un ouvert de* T *si et seulement si* $\omega \cap E_\alpha$ *est* T_α*-ouvert. Alors si les* T_α *sont des topologies de classe* θ, *il en est de même de* T.

La démonstration se fait comme à la proposition 9: les T_α, donc aussi T sont invariants par les translations; il suffit de vérifier la continuité de $f_y(u, x) = x + uy$ à l'origine $x = 0$, $u = 0$. Si W est T-ouvert et contient 0, et si E_α contient y, il existe $c > 0$, tel que l'on ait $uy \in W$ pour $|u| \leqslant c$, $W \cap E_\alpha$ étant absorbant. Posons: $G = [x \in E;\ f_y(u, x) \subset W$ pour tout u tel que $|u| \leqslant 1]$; alors pour $\beta \geqslant \alpha$, G coupe E_β selon un ouvert non vide; G est donc T-ouvert, c'est un voisinage de l'origine dans (E, T); l'on a $f_y(u, x) \in W$ pour $|u| \leqslant c$, et $x \in G$, et T est de classe θ d'après la proposition 3.

8. Fonction interne $\rho_A(x,y)$ d'un ensemble A.

Soit $A \subset E$ où E est un espace vectoriel sur K valué complet non discret et E a une topologie de classe θ.

Définition. — *On appellera fonction interne relative à* A *la fonction* $\rho_A(x, y)$, $x \in A$, $y \in E - \{0\}$, *application de*

$$A \times (E - \{0\})$$

dans R^+, *définie par*

$$\rho_A(x, y) = \sup r,\ r > 0,\ x + uy \in A \ \text{ pour } |u| \leqslant r.$$

Remarques. — 1) $\rho_A(x, y)$ donne une distance de x au complémentaire de A selon une direction y donnée. La définition et les propriétés de $\rho_A(x, y)$ en dimension finie ont été données dans [4*e*, chapitre 2].

2) On a d'une manière évidente $\rho_A(x, uy) = |u|^{-1}\rho_A(x, y)$ et encore :

Proposition 11. — *Soit* $A \subset E$ *ou* E *a une topologie de classe* θ. *Il est équivalent d'énoncer*

1) 0 *est point interne de* A; 2) *il existe un ensemble disqué* $A' \subset A$ *dont* 0 *est point interne*; 3) A *est absorbant*; 4) $\rho_A(x, y) > 0$ *pour tout* $y \in E - \{0\}$.

Proposition 12. — *Soit* E *un espace vectoriel sur un corps* K, *valué, complet, non discret, localement compact*; *si la topologie* T *de* E *est de classe* θ *et si* A *est* T-*ouvert, sa fonction interne* $\rho_A(x, y)$ *est semi-continue inférieurement de* (x, y) *pour* $x \in A$, $y \in E - \{0\}$ *sur l'espace produit*

$$F = (E, T) \times (E, T),$$

lorsque x *ou* y *demeure dans un sous-espace de dimension finie.*

En effet dans le produit F, l'ensemble $\rho_A(x, y) > c$ est défini aussi par la condition : $x + uy \in A$ pour tout u vérifiant $|u| \leqslant c$. Il est donc T-ouvert sur tout sous-espace M de F qui a comme projection sur l'un des facteurs de F un sous-espace de dimension finie.

9. Étoile d'un point.

Nous supposerons désormais le corps de base K localement compact. Dans [4, *d*] et [4, *f*] nous avons utilisé la notion d'étoile $S(x, A)$ d'un point x relativement à un ensemble $A \subset E$.

Définition. — *Soit* $x \in A$, *où* A *est un ensemble d'un espace vectoriel* E, *muni d'une topologie de classe* θ : *on* *définit l'étoile* $S(x, A)$ *de* x *par rapport à* A, *comme l'ensemble des disques de centre* x *contenus dans* A.

Un disque s'écrit $\Delta_{x,y} = [z \in A;\ z = x + uy,\ x, y$ donnés dans E, $y \neq 0$; et u variable, $|u| \leqslant 1]$. $S(x, A)$ est encore l'ensemble des z qui s'écrivent

$$z = x + uy \quad \text{avec} \quad |u| < \rho_A(x, y) \quad \text{ou} \quad |u| \leqslant \rho_A(x, y).$$

Proposition 13. — *Si* E *est muni d'une topologie* T, *de classe* θ, *qui fait de* A *un ouvert, et si le corps de base* K *de* E *est localement compact,* $S(x, A)$ *est ouvert pour tout* $x \in E$.

Si $x \notin A$, $S(x, A) = \emptyset$; soit $x \in A$; on peut supposer $x = 0$ et montrer que $S(0, A)$ est ouvert. Alors $x' \in S(0, A)$ équivaut à $ux' \in A$ pour tous les $u \in K$ qui vérifient $|u| \leqslant 1$; K étant localement compact, on définit ainsi un ouvert de T.

Remarque. — $S(x, A)$ est le plus grand voisinage disqué de x dans A.

Proposition 14. — *Avec les mêmes hypothèses sur* E, T *et* A, *si* G *est un sous-ensemble de* A *qui vérifie la condition* :

$$\textit{pour } x \in G, \textit{ on a } S(x, A) \subset G$$

alors G *coïncide avec une composante connexe ouverte de* A.

On va d'abord démontrer :

Lemme. — *Si l'on associe à* $S(x, A)$ *son homothétique* $S_{1/2}(x, A)$ *dans l'homothétie de centre* x, *de rapport* $1/2$, *alors si l'on a* $x' \in S_{1/2}(x, A)$, *on a* $x \in S(x', A)$.

Si $x' = x$ l'énoncé est évident.

Si l'on a $x' \neq x$, on considère la configuration obtenue sur la droite affine déterminée par x et x'; posons

$$y = x' - x.$$

On a $z = x + uy \in A$ pour $|u| \leqslant 2$. Écrivons

$$z = x + uy = x' + vy;$$

il vient $v = u - 1$. Donc pour $|v| \leqslant 1$, on a $x' + vy \in A$; en particulier pour $v = -1$, on obtient le point x. On a donc $x \in S(x', A)$.

La proposition 14 en résulte. Montrons que G est ouvert et fermé pour la topologie T : $x \in G$ entraîne $S(x, A) \subset G$, et $S(x, A)$ est ouvert, donc G est ouvert. De plus si l'on a $\xi \in \overline{G}$ et $\xi \in A$, $S(\xi, A)$ et son homothétique $S_{1/2}(\xi, A)$ dans l'homothétie $(\xi, 1/2)$ contiennent un point $x \in G$. Alors, d'après le lemme on a $\xi \in S(x, A)$, donc $\xi \in G$, et G est fermé, ce qui achève la démonstration.

10. Applications à l'analyse complexe.

Dans ce paragraphe, on suppose $K = \mathbf{C}$. Rappelons qu'une fonction $f : E \to R$, définie dans un domaine G (pour une topologie de classe θ) est dite plurisousharmonique si elle est semi-continue supérieurement, et vérifie l'inégalité

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + ye^{i\theta})\, d\theta$$

pour tout disque $\Delta_{x,y} = x + Dy \subset G$, où D est le disque unité de C. Enfin on exige $f(x) \not\equiv -\infty$. La seconde condition équivaut à dire que la restriction f/L, soit

$$\varphi(u) = f(x + uy)$$

est localement sousharmonique ou la constante $-\infty$ sur toute droite complexe L.

L'ensemble P(G) des fonctions plurisousharmoniques dans un ouvert G est fonction croissante de la topologie T.

Proposition 15. — *Si* G *est un ouvert dans un espace vectoriel* E *muni d'une topologie de classe* θ, *on a les propriétés suivantes :*

1) P(G) *est un cône convexe réticulé supérieurement.*

2) *Si* G *est* T_1 *ouvert et si l'on a* $T_1 \subset T_2$, *on a*

$$P_1(G) \subset P_2(G).$$

Si T *parcourt les topologies* θ, P(G) *a un élément maximal unique donné par la topologie finiment ouverte* T_f *sur* G.

On démontrera d'abord :

Proposition 16. — *Soit* f *une fonction plurisousharmonique dans un domaine* G *d'un espace vectoriel complexe* E *muni d'une topologie de classe* θ : *l'ensemble*

$$A = [x \in G;\ f(x) = -\infty]$$

a son intérieur $\mathring{A}$ *vide.*

En effet $x \in \mathring{A}$ entraîne $S(x_0, G) \subset A$; on a alors

$$S(x, G) \subset \mathring{A},$$

car $S(x, G)$ est T-ouvert (proposition 13). Alors d'après la proposition 14, on a $\mathring{A} = G$, ou $\mathring{A} = \varnothing$, mais $\mathring{A} = G$ est exclu car la définition des fonctions plurisousharmoniques exclut la constante $f(x) \equiv -\infty$.

Démontrons la proposition 15 : il est clair que $f \in P(G)$ et $c > 0$ entraînent $cf \in P(G)$. De plus $f_1, f_2 \in P(G)$ entraîne $f_1 + f_2 \in P(G)$. En effet il existe $x_1 \in G$ avec $f_1(x_1) \neq -\infty$; il existe $x_2 \in S(x_1, G)$ avec $f_2(x_2) \neq -\infty$, d'après la proposition 16 et le fait que $S(x_1, G)$ est ouvert.

Sur un disque de centre x_1 contenant x_2, f_1 et f_2 ont des restrictions sousharmoniques ($\not\equiv -\infty$); leur somme est donc sousharmonique, $\not\equiv -\infty$, ce qui établit

$$f_1 + f_2 \not\equiv -\infty$$

dans G; $P(G)$ est donc un cône convexe. D'autre part

$$\sup (f_1, f_2)$$

appartient à $P(G)$ en même temps que f_1 et f_2 d'après la définition. Si G est un ensemble T_1-ouvert, il est T_2-ouvert si $T_2 \supset T_1$; une fonction $f \in P(G)$ pour T_1 appartient à $P(G)$ pour T_2, car f semi-continue supérieurement pour T_1 l'est pour T_2.

Principe du maximum. Soit G *un domaine d'un espace vectoriel* E *muni d'une topologie de classe* θ, *et* $f \in P(G)$. *Si en* $x_0 \in G$ *on a* $f(x_0) = \sup_{x \in G} f(x)$, *alors* f *est la constante* $f(x_0)$.

En effet l'ensemble $A = [x \in G; f(x) = f(x_0)]$ a la propriété suivante : si l'on a $x \in A$, on a $S(x, G) \subset A$ (d'après le résultat analogue en dimension un). On a donc $A = G$ d'après $A \neq \varnothing$ et la proposition 14.

11. Théorème de la régularisée supérieure pour $\sup f_\alpha$ et $\lim \sup f_\alpha$ pour les fonctions plurisousharmoniques et des topologies de classe θ.

Soit $f_\alpha(x)$ une famille de fonctions plurisousharmoniques localement bornées supérieurement dans un domaine G d'un espace vectoriel complexe E muni d'une topologie de classe θ. On a les deux énoncés :

Proposition 16. — 1° $g = \sup\limits_{\alpha} f_{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *a une régularisée supérieure* g^* *plurisousharmonique.*

2° $h = \lim\limits_{\alpha} \sup f_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, *a une régularisée supérieure* h^* *plurisousharmonique si pour le préordre sur* $\mathfrak{A}$ *le filtre des sections a une base dénombrable.*

La démonstration ne diffère pas de la démonstration classique (par exemple [4, *a*]). Elle est possible dans une topologie θ grâce aux propositions précédentes.

Tout d'abord on a par définition $g^*(x) = \lim\limits_{x' \to x} \sup g(x')$. D'où $f_\alpha \leqslant g \leqslant g^*$ et

$$f_\alpha(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\alpha(x + ye^{i\theta})\, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^*(x + ye^{i\theta})\, d\theta$$

donc $g(x) \leqslant \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g^*(x + ye^{i\theta})\, d\theta$ pour tout disque $\Delta_{x,y} \subset G$.

D'autre part le second membre est une fonction semi-continue supérieurement de $x \in G$ (corollaire 5), donc, en prenant la régularisée supérieure des deux membres on obtient l'inégalité du disque

$$g^*(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^*(x + ye^{i\theta})\, d\theta.$$

Démontrons 2° : soit $\{M_\sigma\}$ le filtre des sections $\alpha \geqslant \sigma$, $\alpha \in A$. On a

$$h = \lim_{\sigma}\, [\sup f_\alpha,\ \alpha \in M_\sigma].$$

Par hypothèse, il existe une sous-suite M_n qui est cofinale aux M_σ, c'est-à-dire telle que tout M_σ contient un M_n. On peut supposer $M_{n+1} \subset M_n$. On a :

$$h = \lim_n [\sup_{\alpha \in M_n} f_\alpha] = \lim_n g_n \text{ où } g_n = \sup f_\alpha \text{ pour } \alpha \in M_n.$$

Plaçons-nous sur une droite complexe L support du disque $\Delta_{x,y}$. On a, u étant variable dans C :

$$h(x+uy) = \lim_n [g_n(x+uy)].$$

Utilisons un résultat de la dimension 1 en posant :

$$\overline{g_n}(x) = \limsup_{\omega \to 0} g_n(x+uy);$$

$\overline{g_n}$ *est la régularisée supérieure* de g_n selon y et l'on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n(x+ye^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g_n}(x+ye^{i\theta})\,d\theta.$$

D'après le 1°, $\overline{g_n}(x+uy)$ est fonction sousharmonique de u, ce qui entraîne, pour $\Delta_{x,y} \subset G$:

$$g_n(x) \leqslant \overline{g}_n(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g}_n(x+ye^{i\theta})\,d\theta.$$

Soit, de même, $\overline{h}$ la régularisée supérieure de h selon y (elle est aussi celle de la restriction de h à la droite L, support de $\Delta_{x,y}$ dans E). La suite g_n est décroissante de n;

$$\overline{g}_n(x+uy)$$

est sur $L \cap G$ une suite décroissante de fonctions sousharmoniques de u; d'après un résultat de la dimension finie, on a sur L: $\lim_n \overline{g_n}(x+uy) = \overline{h}(x+uy)$. En particulier pour $u = 0$, on obtient au point x :

$$(5) \quad h(x) = \lim_n g_n(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_n \overline{g_n}(x+ye^{i\theta})\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{h}(x+ye^{i\theta})\,d\theta.$$

Alors si h^* est la régularisée de $h(x)$ *sur* G, on a

$$h \leqslant \overline{h} \leqslant h^*,$$

d'où, d'après (5) :

$$h(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^*(x + ye^{i\theta})\, d\theta$$

et l'on termine comme pour le 1° en prenant les régularisées supérieures des deux membres sur un voisinage de x dans *l'espace* E.

Remarque. — La partie 2° de la proposition 16 tombe en défaut, même en dimension un, si l'on supprime l'hypothèse que le filtre $\mathscr{F}$ des sections de $\mathfrak{A}$ a une partie cofinale dénombrable. Donnons-en un exemple, où $\mathfrak{A}$ est l'ensemble des parties finies d'un domaine.

A toute partie finie $(a_1, \ldots, a_n) = \alpha$ du disque $|z| \leqslant 1$ de $\mathbf{C}$, faisons correspondre

$$f_\alpha(z) = \sup \left[\frac{1}{2^n} \sum_{a_i \in \alpha} \log|z - a_i|, -1\right]$$

et considérons la famille $f_\alpha(z)$ dans $|z| < 2$. Sur $\mathfrak{A}$ on prend l'ordre déterminé par l'inclusion $\alpha \subset \beta$. Pour que $\varphi(z)$ soit valeur d'adhérence des $f_\alpha(z)$ en z, il faut que pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $\alpha \in A$ donnés, il existe une partie finie β telle qu'on ait

$$\beta \supset \alpha \qquad \text{et} \qquad |f_\beta(z) - \varphi(z)| < \varepsilon.$$

Prenons α contenant z; on a alors $f_\beta(z) = -1$ quel que soit $\beta \supset \alpha$; il est donc impossible d'obtenir une valeur d'adhérence $\varphi(z)$ différente de -1, si l'on a $|z| \leqslant 1$. En particulier la plus grande valeur d'adhérence, c'est-à-dire $\limsup_{\alpha \in A} f_\alpha(z)$ vaut -1.

D'autre part si $1 < |z| < 2$, on a

$$n2^{-n} \log[|z| - 1] \leqslant |f_\alpha(z)| \leqslant n2^{-n} \log 3$$

ce qui donne les valeurs suivantes de $h(z) = \limsup f_\alpha(z)$:

$$\begin{array}{llll} h(z) = -1 & \text{pour } |z| \leqslant 1; & h(z) = 0 & \text{pour } 1 < |z| < 2 \\ h^*(z) = -1 & \text{pour } |z| < 1; & h^*(z) = 0 & \text{pour } 1 \leqslant |z| < 2. \end{array}$$

En conclusion $h^*(z)$ n'est pas sousharmonique dans $|z| < 2$; *le théorème de la régularisée supérieure ne s'applique pas si le filtre des sections de* $\mathfrak{A}$ *n'a pas une base dénombrable.*

12. Applications analytiques $E \to F$.

Rappelons qu'une fonction $E \to \mathbf{C}$, soit $f(x)$, est dite G-analytique dans un ouvert ω de E si sa restriction aux droites affines soit

$$\varphi(u) = f(x + uy)\,; \quad u \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

est une fonction analytique de u. Il résulte alors du théorème de Hartogs que la restriction de f à un sous-espace de dimension finie est une fonction analytique. *Les fonctions* G-*analytiques* $E \to \mathbf{C}$ *sont les fonctions analytiques de la topologie* T_f *sur* E.

Si l'on considère les *applications analytiques* $E \to F$, des difficultés apparaissant même quand la topologie sur F est vectorielle, dès qu'elle n'est pas supposée localement convexe. Considérons la restriction d'une application f à un sous-espace affine $z = x + uy$, soit

$$(6) \quad f(x + uy) = f(x) + A_{1,x,y}u + \cdots + A_{p,x,y}u^p + \cdots$$

On définira dans un ouvert $G \subset E$ la classe des applications analytiques $G \to F$ par les conditions suivantes :

a) f est une application continue $G \to F$,

b) La restriction $f(x + uy)$ à une droite complexe est donnée par un développement (5) qui converge pour

$$|u| < \rho(x, y), \ \rho(x, y) > 0.$$

Si F a une topologie localement convexe et est de plus séquentiellement complet, le calcul des $A_{p,x,y}$ par l'intégrale de Cauchy montre qu'ils sont des éléments de F lui-même, comme le sont les valeurs prises par $f(x + uy)$ quand u varie dans $\mathbf{C}$.

On se placera dans le cas où les topologies T_1 et T_2 sur E et F sont seulement supposées de classe θ. On dira que l'application $f: G \to F$, où G est un ouvert de E est analytique si elle est continue pour T_1 et T_2 et vérifie la condition.

b') Sur tout disque $\Delta_{x,y} \subset G$, donné par $z = x + uy$, pour $|u| \leqslant 1$, f admet un développement (6) qui est uniformément convergent pour $|u| \leqslant 1$, *les* $A_{p,x,y}$ *étant des éléments de* F.

Montrons alors :

Proposition 17. — *Soit* f *une application analytique* $G \to F$ *d'un domaine* $G \subset E$ *dans* F, *les espaces vectoriels complexes* E, F *ayant des topologies* T_1, T_2, *de classe* θ *toutes deux. Alors si* V *est une fonction plurisousharmonique définie sur un domaine* Ω *contenant* $f(G)$, *la fonction composée* $V \circ f(x)$ *est plurisousharmonique dans* G, *ou est la constante* $-\infty$.

La démonstration ne diffère de celle que nous avons donnée dans [4*a*] que par des changements mineurs. Tout d'abord $V \circ f$ est semi-continue supérieurement. Montrons ensuite que l'inégalité du disque est vérifiée pour $V \circ f$ en considérant un disque $\Delta_{x,y}$ compact dans G et utilisant (6).

L'image $D = f(\Delta_{x,y})$ est compacte dans Ω, f étant continue sur le compact $\Delta_{x,y}$. Sur $f(\Delta_{x,y})$, la fonction plurisousharmonique V a alors un maximum fini M. Considérons pour $M' > M$ l'ensemble $\Omega' = [x \in \Omega;\ f(x) < M']$; c'est un voisinage ouvert de D.

Soit $f_q(x + uy) = \varphi_q(u)$ la somme des $q + 1$ premiers termes du développement (6) : elle est fonction continue de u, et, pour u variable, $\varphi_q(u)$ demeure dans le sous-espace N de dimension $q + 1$ déterminé par les $A_{i,x,y}$ et $f(x)$. La restriction de V à N est plurisousharmonique (ou la constante $-\infty$) et il en est de même de la restriction de V à la sous-variété analytique paramétrée par u et décrite dans N par $z = \varphi_q(u)$, pour $|u| \leqslant 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. On aura donc

$$(7)\quad V \circ \varphi_q(0) = V \circ f_q(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V \circ f_q(x + ye^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V \circ \varphi_q(e^{i\theta})\,d\theta$$

où l'on choisit $q > q_0$ de manière que le compact $f_q(\Delta_{x,y})$ soit dans Ω' ; (7) est obtenu comme application de l'inégalité du disque à la fonction sousharmonique de u définie par $V \circ \varphi_q(u)$. Les fonctions $V \circ f_q(x + ye^{i\theta})$ pour $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ sont bornées supérieurement par M' ; on a alors par application du lemme de Fatou :

$$\limsup_q \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V \circ \varphi_q(e^{i\theta})\, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \limsup_q V \circ \varphi_q(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Mais

$$\limsup_q V \circ \varphi_q(e^{i\theta}) = \limsup_q V \circ f_q(x + ye^{i\theta}) \leqslant V \circ f(x + ye^{i\theta})$$

d'après la semi-continuité supérieure de V. On a donc, finalement

$$V \circ f(x) = V \circ f_q(x) \leqslant \limsup_q \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V \circ \varphi_q(e^{i\theta})\, d\theta$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V \circ f(x + ye^{i\theta})\, d\theta$$

qui est l'inégalité du disque pour $V \circ f$. Elle montre que $V \circ f$ qui est semi-continue supérieurement, est soit la constante $-\infty$ dans G, soit une fonction plurisousharmonique dans G.

13. Remarque sur les topologies polynomiales et plurisousharmoniques.

Soit E un espace vectoriel de corps de base K valué, non discret et localement compact. On considère une famille φ de fonctions définies sur E et nulles à l'origine.

Si une topologie T invariante par translation sur E possède une base des voisinages de 0 donnée par des ensembles

$$g_\alpha(x) \leqslant 1,$$

où $g_\alpha = \sup_j g_{\alpha,j}$, $g_{\alpha,j} \in \varphi$, on dira que T *est une* φ*-topologie.*

Faisons sur la famille φ les hypothèses suivantes :

a) *Les* $g_{\alpha,j}$ *et les* g_α *sont* T_f*-continues,* c'est-à-dire continues sur les sous-espaces vectoriels de dimension finie, pour la topologie vectorielle séparée.

b) On a $g(x) \geqslant 0$ et $g(ux) = |u|g(x)$ pour $u \in K$, $x \in E$, et $g \in \varphi$.

c) Il existe dans la famille φ une sous-famille g_H indexée à partir d'une base $B = \{e_\lambda\}$ de E, $\lambda \in \Lambda$, de la manière suivante. A une partie finie $H \subset \Lambda$ on fait correspondre : 1° le sous-espace de dimension finie M_H engendré par les e_λ, $\lambda \in H$; 2° une fonction $g_H \in \varphi$ avec la propriété : l'ensemble $g_H = 0$ coïncide avec la réunion des M_H, pour $H' \subset H$. On a alors :

Proposition 18. — *Si la famille* φ *vérifie les conditions précédentes,* T_f *est une* φ*-topologie. Plus précisément, étant donné un* T_f*-voisinage de* 0, *soit* U, *et une base* e_λ, $\lambda \in \Lambda$, *de* E, *il existe une application* $H \to A(H)$ *des parties finies de* Λ *dans le corps* K, *et un* T_f*-voisinage de* 0, *soit* $U' \subset U$, *défini par* $f(x) \leqslant 1$, *ou l'on a*

$$(8) \qquad f(x) = \sup_{H' \subset H} |A(H') . g_{H'}(x)|, \quad A(H') \in K.$$

En effet soit $H = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} : x \in M_H$ s'écrit $x = \Sigma x_\alpha e_\alpha$, $\alpha \in H$; d'après la condition 2° du *c*) on a $g_{H'}(x) = 0$ si $H' \supset H$ et $H' \neq H$, donc sur tout sous-espace de dimension finie, on n'a qu'un nombre fini de $g_H(x) \neq 0$ et (8) définit une fonction positive qui est T_f-continue et vérifie encore

$$f(ux) = |u| f(x); \; 0 \leqslant f(x) < +\infty; \; f(0) = 0.$$

Montrons qu'on peut déterminer les $A(H)$ de manière que l'ensemble $f(x) \leqslant 1$ soit contenu dans U. Un point $x \in M_H$ s'écrivant $x = \omega x_{\alpha_k} e_{\alpha_k}$, $\alpha_k \in H$, il suffit pour cela qu'on puisse déterminer les $A(H)$ de manière que la condition

$$(8) \qquad |A(H') g_{H'}(x)| \leqslant 1$$

réalisée pour tout $H' \subseteq H$ entraîne $\Sigma x_{\alpha_k} e_{\alpha_k} \subset U$ pour $\alpha_k \in H$. Pour card $H = 1$ et M_H engendré par le seul élément e_α, on choisit $A(\alpha)$ de manière que

$$|A(\alpha) g_\alpha(x_\alpha)| \leqslant 1$$

entraîne $x_\alpha e_\alpha \in U$.

Ensuite supposons que $K(H')$ ait été déterminé pour tous les $H' \subset H$ et $H' \neq H$, de manière à vérifier (8). On peut choisir $K(H)$ de manière à réaliser encore (8). Dans M_H considérons l'ensemble compact

$$S = \bigcup_{H' \subset H} [x \in M_{H'}; |A(H') g_{H'}(x)| \leqslant 1],$$

pour $H' \subset H$ et $\operatorname{card} H' = \operatorname{card} H - 1$; S est contenu dans $U \cap M_H$. De plus quand $r > 0$ varie, les ensembles $S_r = [x \in M_H;\ r|g_H(x)| \leqslant 1$ et $|A(H')g_{H'}(x)| \leqslant 1$ pour tout $H' \subset H$, $H' \neq H$, $r > 0]$ sont compacts et leur intersection est S. On peut donc choisir $r = |A(H)|$ assez grand pour réaliser $S_r \subset [U \cap M_H]$, et (8) est encore valable pour H.

La fonction $f(x) = \sup |A(H)g_H(x)|$ est T_f-continue et $|f(x)| \leqslant 1$ est un voisinage disqué de 0 contenu dans U, ce qui établit la proposition.

Exemples. — Si $\operatorname{card} H = n$, et $H = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ considérons

$$g_H(x) = |x_{\alpha_1}, \ \ldots, \ x_{\alpha_n}|^{1/n}[A(H)]^{1/n}.$$

où $x \in M_H$ s'écrit $x_{\alpha_1}e_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_n}e_{\alpha_n}$.

On obtient ainsi : les topologies séparées de classe θ, et en particulier T_f, sont polynomiales si $K = R$ ou **C**. Si $K = C$, $g_H(x)$ est une fonction plurisousharmonique qui est T_f-continue; toute topologie de classe θ, en particulier T_f est une topologie plurisousharmonique (cf. [3*a*]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, *Actualités Hermann*, n° 1189.

[2] S. Kakutani et V. Klee, The finite topology of a linear space, *Arch. Math.* (Bâle), 14 (1963), 55-58.

[3] C.-O. Kiselman, *a*) Plurisubharmonic functions in vector spaces, Uppsala University Department of Math., Report 39, 1972.

b) On locally pseudo-convex topological vector spaces, Uppsala University Department of Math.

[4] P. Lelong, *a*) Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques, *Lecture-Notes* n° 71 (1968), 167-189, (Springer).

b) Sur les fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques et une extension du théorème de Banach-Steinhaus aux familles d'applications polynomiales, *Comptes rendus du Colloque d'Analyse fonctionnelle de Liège*, 1970, 21-45.

c) Théorème de Banach-Steinhaus pour les polynômes; applications entières d'espaces vectoriels complexes, *Lecture-Notes in Mathematics*, n° 205 (1971), 87-112, (Springer).

d) Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques et sur les algèbres de fonctions analytiques, *Colloque international du C.N.R.S.*, n° 208, Paris (1972), 95-116, Agora Mathematica n° 1, Gauthier-Villars, Paris.

e) Fonctionnelles analytiques et fonctions entières. Cours paru aux Presses de l'Université de Montréal, 1967.

f) Plurisubharmonic functions in topological vector spaces; polar sets and problems of measure, *Lecture Notes Springer*, n° 364 (1973), 58-68.

[5] J.-P. Ligaud, Espaces D. F. non nécessairement localement convexes, *C. R. Acad. Sci.*, 275 (1972), 283-285.

[6] P. Turpin, Opérateurs linéaires entre espaces d'Orlicz non localement convexes, *Studia Math.*, 46, (1973), 141-148; *Ibidem*, 153-165 et 167-195.

Manuscrit reçu le 22 mars 1975.

Pierre Lelong,
Université P.-et-M.-Curie
Tour 46
4, place Jussieu
75005 Paris.