FRANCIS HIRSCH

Familles d'opérateurs potentiels

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 3-4 (1975), p. 263-288
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_263_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 3 et 4 (1975), 263-288.

FAMILLES D'OPÉRATEURS POTENTIELS

par Francis HIRSCH

Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion de son 70e anniversaire.

Ce travail se compose de trois parties. Dans la première partie, nous donnons quelques résultats sur les noyaux-mesure de Hunt sur $\mathbf{R}_+$. Nous caractérisons à ce propos les transformées de Laplace des fonctions logarithmiquement convexes et décroissantes sur $\mathbf{R}_+$.

Dans la deuxième partie, nous démontrons que, si μ est un noyau-mesure de Hunt sur $\mathbf{R}_+$ et si $(\mathrm{P}_t)_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe de Feller intégrable sur un espace localement compact Ω, l'intégrale $\int \mathrm{P}_t\, d\mu(t)$ définit un noyau de Hunt sur Ω.

Enfin, dans la troisième partie, nous montrons que, si μ est un potentiel abstrait-mesure sur $\mathbf{R}_+$ de la forme

$$\nu + g(t)\, dt$$

avec ν mesure bornée sur $\mathbf{R}_+$ et g fonction à variation bornée sur $\mathbf{R}_+$, et si $(\mathrm{P}_t)_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe à contraction dans un espace de Banach X tel que son générateur infinitésimal soit d'image dense, alors l'opérateur $\int \mathrm{P}_t\, d\mu(t)$ défini au sens d'Abel (c'est-à-dire

$$\int \mathrm{P}_t\, d\mu(t)(x) = \lim_{\lambda \to 0} \int e^{-\lambda t}\mathrm{P}_t x\, d\mu(t),$$

avec pour domaine l'ensemble des x pour lesquels la limite existe) est un potentiel abstrait sur X.

Les résultats des parties 2 et 3 sont en relation avec des considérations de calcul symbolique que nous explicitons et qui permettent notamment de préciser le spectre des opérateurs ainsi construits.

Les résultats énoncés dans les deux premières parties ont été exposés au Séminaire de Théorie du Potentiel de Paris en mars 1974.

0. PRÉLIMINAIRES

Nous donnons d'abord un certain nombre de rappels concernant quelques définitions et propriétés.

0.1. Potentiels abstraits et noyaux de Hunt.

Soit X un espace de Banach. On appelle *potentiel abstrait* sur X (c.f. [13], p. 412) un opérateur V de la forme $-A^{-1}$ où A est un générateur infinitésimal d'image dense d'un semi-groupe fortement continu à contraction sur X.

Soit Ω un espace localement compact, $\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$ (respectivement $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)$) l'espace des fonctions réelles continues tendant vers 0 à l'infini (respectivement à support compact). Un *semi-groupe de Feller* sur Ω est un semi-groupe fortement continu et à contraction $(P_t)_{t\geqslant 0}$ sur $\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$ tel que

$$\forall f \in \mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega),\quad \forall t \geqslant 0 \quad (f \geqslant 0) \Longrightarrow (P_t f \geqslant 0).$$

Le semi-groupe $(P_t)_{t\geqslant 0}$ est dit *intégrable* si

$$\forall f \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\Omega),\quad \forall x \in \Omega \quad \int_0^\infty |P_t f(x)|\, dt < \infty,$$

et $\left(x \to \int_0^\infty P_t f(x)\, dt\right) \in \mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$. A tout semi-groupe intégrable, la formule précédente permet donc d'associer un opérateur V sur $\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$, de domaine $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)$.

Un tel opérateur est appelé *noyau de Hunt* sur Ω.

D'après [9], un opérateur sur $\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$ de domaine $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)$ est un noyau de Hunt si et seulement si

i) V vérifie le principe complet du maximum

$$[\text{i.e. } \forall f \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\Omega) (Vf \leqslant 1 \text{ sur } \{f > 0\}) \Longrightarrow (Vf \leqslant 1)]$$

ii) $\overline{V[\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)]} = \mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$ (au sens de la convergence uniforme sur $\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$).

On peut d'autre part remarquer que si V est un noyau de Hunt, son plus petit prolongement fermé dans $\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$ est un potentiel abstrait.

0.2. Semi-groupes et familles résolvantes de mesures sur $\mathbf{R}_+$.

$\mathbf{R}_+$ désigne l'intervalle $[0, \infty[$ de $\mathbf{R}$.

On appellera *famille résolvante de mesures sur* $\mathbf{R}_+$ une famille $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ de mesures complexes bornées sur $\mathbf{R}$, à support dans $\mathbf{R}_+$, telle que

$$\begin{array}{ll} \forall\lambda, \mu > 0 & \varepsilon_\lambda = \varepsilon_\mu + (\mu - \lambda)\varepsilon_\lambda * \varepsilon_\mu \\ \forall\lambda > 0 & \|\lambda\varepsilon_\lambda\| \leqslant 1. \end{array}$$

De même, on appellera *semi-groupe de mesures sur* $\mathbf{R}_+$ une famille $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ de mesures complexes bornées sur $\mathbf{R}$, à support dans $\mathbf{R}_+$, telle que

$$\begin{array}{ll} & \mu_0 = \delta \\ \forall t, s \geqslant 0, & \mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s \\ \forall t \geqslant 0 & \|\mu_t\| \leqslant 1 \\ \multicolumn{2}{l}{\lim\limits_{t\to 0} \mu_t = \delta \text{ vaguement.}} \end{array}$$

Il est facile de voir qu'à tout semi-groupe de mesures $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ sur $\mathbf{R}_+$, on peut associer une famille résolvante de mesures $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ sur $\mathbf{R}_+$ par la formule

$$\forall\lambda > 0 \quad \varepsilon_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu_t \, dt \quad \text{(intégrale faible).}$$

En fait, *on obtient ainsi toutes les familles résolvantes de mesures* (excepté la famille : $\forall\lambda$, $\varepsilon_\lambda = 0$). (Ceci est un cas très particulier de résultats généraux. Voir, par exemple [7], Théorème 15). Rappelons alors le résultat suivant (c.f. [6], Proposition 2) : Soit $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe de mesures sur $\mathbf{R}_+$, distinct du semi-groupe $\mu_t \equiv \delta$ et soit $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ la famille résolvante associée. Alors $\lim\limits_{\lambda\to 0} \varepsilon_\lambda$ existe vaguement.

On appellera *potentiel-mesure sur* $\mathbf{R}_+$ toute mesure μ non nulle sur $\mathbf{R}$ telle qu'il existe une famille résolvante

$(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ de mesures sur $\mathbf{R}_+$ (qui est alors unique) vérifiant

$$\mu = \lim_{\lambda\to 0} \varepsilon_\lambda$$

$\left(\text{On a alors (c.f. [6]), } \mu = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varepsilon_\lambda^{*(n+1)}\right).$

Si en outre, les mesures ε_λ sont positives, on dira que μ est un *noyau-mesure de Hunt sur* $\mathbf{R}_+$.

Nous noterons (H) *l'ensemble des noyaux-mesure de Hunt sur* $\mathbf{R}_+$ *et* (P) *l'ensemble des potentiels-mesure sur* $\mathbf{R}_+$.

0.3. Calcul symbolique.

Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu à contraction sur un espace de Banach X et $(\mu_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de mesures sur $\mathbf{R}_+$. On définit, pour tout $t \geq 0$ et tout x de X

$$Q_t x = \int P_s x \, d\mu_t(s).$$

Alors $(Q_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu à contraction sur X et la résolvante de $(Q_t)_{t\geq 0}$ est donnée par

$$S_\lambda x = \int P_s x \, d\varepsilon_\lambda(s)$$

où $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ est la résolvante du semi-groupe $(\mu_t)_{t\geq 0}$.

Supposons que $(\mu_t)_{t\geq 0}$ ne soit pas le semi-groupe identique à δ et désignons par μ l'élément de (P) associé à $(\mu_t)_{t\geq 0}$. Soit H_μ la fonction définie par :

$$H_\mu(z) = \int e^{-\frac{t}{z}} \, d\mu(t).$$

(H_μ est bien définie pour $\mathcal{R}e z > 0$ d'après [6], Proposition 2). Supposons en outre que $(P_t)_{t\geq 0}$ soit associé à un potentiel abstrait V.

On notera alors

$$H_\mu(V) = s - \lim_{\lambda\to 0} S_\lambda$$

(i.e. $D(H_\mu(V)) = \left\{x;\ \lim_{\lambda\to 0} S_\lambda x \text{ existe au sens de la norme}\right\}$ et $H_\mu(V)$ est défini sur son domaine par cette limite).

Le but des parties 2 et 3 de ce travail est de montrer que, sous certaines hypothèses, $H_\mu(V)$ est un potentiel abstrait (ce qui revient à dire que $D(H_\mu(V))$ est dense d'après [4] I.3.4 et II.2.5), et de donner dans ces cas des expressions de $H_\mu(V)$ ne faisant pas appel à $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ mais uniquement à μ, ainsi que des précisions sur le domaine de cet opérateur.

1. NOYAUX-MESURES DE HUNT SUR $\mathbf{R}_+$

1.1. Remarques générales.

Soit μ une mesure positive sur $\mathbf{R}$ à support dans $\mathbf{R}_+$, non nulle. On note V_μ l'opérateur sur $\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}_+)$, de domaine $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}_+)$ défini par

$$\forall f \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}_+) \quad \forall x \geqslant 0, \quad V_\mu f(x) = \int f(x+y)\, d\mu(y).$$

De même, on note W_μ l'opérateur de $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ (ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbf{R}$), de domaine $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ défini par

$$\forall f \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}), \quad W_\mu f = \mu * f.$$

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Sont équivalents :*

i) $\mu \in (H)$.

ii) V_μ *est un noyau de Hunt sur* $\mathbf{R}_+$.

iii) V_μ *vérifie le principe complet du maximum.*

iv) W_μ *vérifie le principe complet du maximum.*

v) *Pour tout ouvert borné* ω *de* $]0, \infty[$, *il existe une mesure positive* ν_ω *telle que*

$$\operatorname{Supp} \nu_\omega \subset \bar{\omega},\ \mu * \nu_\omega = \mu \textit{ sur } \omega \textit{ et } \mu * \nu_\omega \leqslant \mu,$$
$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \mu([n, n+1[) < \infty.$$

i) $\Longrightarrow$ iv) : Soit $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ la famille résolvante associée à μ. Définissons $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ la famille résolvante sur $\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ définie par

$$R_\lambda f = \varepsilon_\lambda * f.$$

$(R_\lambda)_{\lambda>0}$ étant une famille résolvante sous-markovienne, pour tout λ strictement positif R_λ vérifie le principe complet du maximum (c. f. par exemple [11], p. 406).

Or, si f appartient à $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$,

$$\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda f = W_\mu f \text{ uniformément sur tout compact.}$$

Donc W_μ vérifie le principe complet du maximum.

iv) $\Longrightarrow$ v) : La première partie de v) est conséquence de théorèmes classiques (c.f. [1], Théorème 1). D'autre part iv) implique :

$$\forall f \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}),\ \mu * f \text{ est bornée sur } \mathbf{R}.$$

On en déduit aussitôt la seconde partie de v).

v) $\Longrightarrow$ iii) : Supposons v). Montrons d'abord que $\int d\nu_\omega$ est inférieur ou égal à 1.

Si $\int d\mu$ es fini, c'est évident.

Supposons $\int d\mu$ infini et ω inclus dans $[0, b]$. Soit $a < b$.

$$\begin{aligned}\int 1_{[0,a]}(x+y)\, d\mu(y)\, d\nu_\omega(x) &= \int \mu([0, a-x])\, d\nu_\omega(x)\\ &\geqslant \mu([0, a-b]) \int d\nu_\omega.\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int d\nu_\omega \leqslant \frac{\mu([0,a])}{\mu([0,a-b])} = 1 + \frac{\mu(]a-b, a])}{\mu([0, a-b])}$$

$$\mu(]a-b, a]) \leqslant (b+2) \sup_n \mu([n, n+1[).$$

Faisant tendre a vers l'infini, on obtient

$$\int d\nu_\omega \leqslant 1.$$

Soit f appartenant à $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}_+)$.
Supposons $V_\mu f(x) \leqslant 1$ sur $\{x \geqslant 0; f(x) > 0\}$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}_+$; supposons $f(x_0) \leqslant 0$ et soit

$$\omega = \{y > 0; f(x_0 + y) > 0\}.$$

$$\begin{aligned}V_\mu f(x_0) = \int f(x_0+y)\, d\mu(y) &\leqslant \int f(x_0+y)\, d(\mu * \nu_\omega)(y)\\ &= \int V_\mu f(x_0+y)\, d\nu_\omega(y) \leqslant \int d\nu_\omega \leqslant 1.\end{aligned}$$

Donc V_μ vérifie le principe complet du maximum.

iii) $\Longrightarrow$ i) : D'après le théorème II, p. 403 de [11], il existe une famille résolvante sous-markovienne $(R_\lambda)_{\lambda \vee 0}$ sur $\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}_+)$ telle que

$$\forall f \in \mathscr{K}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}_+) \ \lim_{\lambda \to 0} R_\lambda f = V_\mu f \quad \text{uniformément.}$$

Définissons

$$\varepsilon_\lambda : f \to R_\lambda f(0).$$

Pour $f \in \mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}_+)$ et $x \geqslant 0$, on note

$$_x f(y) = f(x+y).$$

Alors $V_\mu({}_x f) = {}_x[V_\mu(f)]$. Donc la même propriété est valable à V_μ pour $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ et

$$R_\lambda f(x) = \int f(x+y)\, d\varepsilon_\lambda(y).$$

On déduit alors immédiatement de l'équation résolvante que $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ est une famille résolvante de mesures positives sur $\mathbf{R}_+$ et $\lim\limits_{\lambda \to 0} \varepsilon_\lambda = \mu$.

i) $\Longrightarrow$ ii) : Immédiat à partir des définitions. Si $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ est le semi-groupe associé à μ, le semi-groupe $(P_t)_{t\geqslant 0}$ associé à $V\mu$ est donné par

$$\forall f \in \mathscr{C}^0_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}_+) \quad P_t f(x) = \int f(x+y)\, d\mu_t(y).$$

ii) $\Longrightarrow$ iii) : C'est un résultat général.

1.2. Fonctions logarithmiquement convexes.

Nous allons maintenant nous intéresser à des éléments de (H) particuliers. Dans [6], nous avons introduit *le cône* $\mathscr{H}$ *des fonctions complètement monotones sur* $]0, \infty[$, *non nulles, vérifiant*

$$\forall n \geqslant 0 \quad \forall x > 0 \quad \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)\,!}\right)^2 \leqslant \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}\right)\left(\frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+2)\,!}\right),$$

et nous avons montré que les éléments de $\mathscr{H}$ étaient des transformées de Laplace d'éléments de (H).

Dans [10], M. Itô a montré que si k était une fonction sur $\mathbf{R}_+$ continue strictement positive, décroissante, logarithmiquement convexe (i.e. de logarithme convexe) et si $\tilde{k}$ était la fonction sur $\mathbf{R}$ définie par $\tilde{k}(t) = k(t)$ si $t \geqslant 0$ $\tilde{k}(t) = 0$

si $t < 0$, le noyau de convolution associé à la mesure $\tilde{k}\,dt$ vérifiait le principe de domination.

Le théorème suivant fait le lien entre ces deux résultats.

THÉORÈME 2. — *Soit* $\mathcal{I}$ *l'ensemble des mesures sur* $\mathbf{R}$, *positives, non nulles, à support dans* $[0, \infty[$ *telles que* $\mu|\,]0, \infty[$ *admette une densité qui soit une fonction logarithmiquement convexe décroissante. Alors l'image de* $\mathcal{I}$ *par la transformation de Laplace est égale à* $\mathcal{H}$.

En outre, $\mathcal{I}$ *est un cône convexe inclus dans* (H).

(Dans l'énoncé précédent, comme dans la suite, une fonction sur $]0, \infty[$ est dite logarithmiquement convexe si elle est strictement positive en tout point et de logarithme convexe, ou identiquement nulle.) La deuxième partie du théorème est une conséquence directe du résultat de M. Itô mentionné ou une conséquence de la première partie du théorème et du résultat de [6] mentionné.

Désignons par $\mathcal{L}$ la transformation de Laplace :

$$\mathcal{L}\mu(t) = \int e^{-ts}\,d\mu(s).$$

• $\mathcal{L}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{H}$:

Supposons d'abord que φ soit une fonction logarithmiquement convexe, de classe $\mathcal{C}^{(2)}$ sur $[0, \infty[$ et décroissante.

Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction

$$\varphi_x(t) = e^{-xt}\varphi(t)$$

vérifie les mêmes propriétés. On a donc

$$(\varphi_x')^2 \leqslant \varphi_x\varphi_x''.$$

Soit f la fonction $\mathcal{L}(\varphi)$.

$$\frac{(-1)^{n+1}f^{(n+1)}(x)}{(n+1)\,!} = \int_0^\infty \frac{t^{n+1}}{(n+1)\,!}\varphi_x(t)\,dt = -\int_0^\infty \frac{t^{n+2}}{(n+2)\,!}\varphi_x'(t)\,dt.$$

Donc, d'après l'inégalité de Schwarz

$$\left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)\,!}\right)^2 \leqslant \int_0^\infty \frac{t^{n+2}}{(n+2)\,!}\,\varphi_x(t)\,dt \int_0^\infty \frac{t^{n+2}}{(n+2)\,!}\,\varphi_x''(t)\,dt$$
$$\leqslant \int_0^\infty \frac{t^{n+2}}{(n+2)\,!}\,\varphi_x(t)\,dt \int_0^\infty \frac{t^n}{n\,!}\,\varphi_x(t)\,dt = \frac{f^{(n+2)}(x)}{(n+2)\,!}\,\frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}.$$

Donc $\mathcal{L}(\varphi)$ appartient à $\mathcal{H}$.

$\mathscr{H}$ étant stable par limites croissantes, et toute fonction logarithmiquement convexe sur $]0, \infty[$, intégrable au voisinage de 0, décroissante, étant limite croissante de fonctions du type de la fonction φ précédente, on voit que si

$$\mu \in \mathscr{I} \qquad \text{et} \qquad \mu(\{0\}) = 0$$

alors $\mathscr{L}\mu \in \mathscr{H}$.

D'autre part les constantes positives appartiennent à $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}$ est un cône convexe, on a donc

$$\mathscr{L}(\mathscr{I}) \subset \mathscr{H}.$$

• $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(\mathscr{I})$:

Soit f un élément de $\mathscr{H}$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose

$$\forall t > 0 \quad \mathrm{L}_k(t) = \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.$$

On va raisonner en plusieurs étapes.

a) L_k *est logarithmiquement convexe :*

$$\begin{aligned}(\operatorname{Log} \mathrm{L}_k)''(t) &= \frac{(k+1)}{t^2} + \frac{2k}{t^3}\frac{f^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}\right)}{f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)} \\ &\quad - \left[\frac{k}{t^2}\frac{f^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}\right)}{f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)}\right]^2 + \left(\frac{k}{t^2}\right)^2\frac{f^{(k+2)}\left(\frac{k}{t}\right)}{f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)} \\ &\geqslant \frac{(k+1)}{t^2} + \frac{2k}{t^3}\frac{f^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}\right)}{f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)} \\ &\quad + \left[\frac{f^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}\right)}{f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)}\right]^2\left(-\frac{k^2}{t^4} + \frac{k^2}{t^4}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right) \\ &\geqslant \left[\frac{\sqrt{k+1}}{t} + \frac{f^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}\right)}{f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)}\frac{k}{t^2\sqrt{k+1}}\right]^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

b) L_k *est décroissante :*

Supposons d'abord $f(0)$ fini. Alors

$$f(x) = \int e^{-tx}\, d\mu(t)$$

avec μ bornée.

On en déduit facilement

$$\lim_{t \to 0} f^{(k)}(t) \, . \, t^{k+1} = 0$$

et donc

$$\lim_{t \to \infty} L_k(t) = 0.$$

L_k étant convexe positive (d'après *a*)), L_k est décroissante. Dans le cas général, on approche la fonction f par $f_h (h > 0)$ où

$$f_h(x) = f(x + h).$$

f_h appartient aussi à $\mathscr{H}$ et $f_h(0)$ est fini, d'où le résultat. Notons alors α la fonction croissante normalisée sur $\mathbf{R}_+$ telle que

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, d\alpha(t)$$

(où $d\alpha$ représente la mesure de Stieltjes associée à α).

c) α *est une fonction concave sur* $]0, \infty[$:

En effet, d'après [12], p. 290,

$$\forall t > 0 \quad \lim_{k \to \infty} \int_0^t L_k(u)\, du = \alpha(t) - \alpha(0_+).$$

c) découle donc de *b*).

En particulier α est absolument continue et il existe φ positive sur $]0, \infty[$, localement intégrable sur $[0, \infty[$, décroissante, et il existe $a \geqslant 0$ de sorte que :

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \varphi(t)\, dt + a.$$

D'après [12], p. 288,

$$\lim_{k \to \infty} L_k(t) = \varphi(t)$$

en tout $t > 0$ où φ est continue et donc sur le complémentaire d'un ensemble dénombrable.

D'après le théorème de Helly, il existe une suite extraite (k_n) telle que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{L}_{k_n}(t) = \psi(t)$$

pour tout t de $]0, \infty[$.

Alors ψ est logarithmiquement convexe d'après a) et $f = \mathscr{L}\mu$ avec $\mu = a\delta + \psi\, dt$. f étant non nulle, μ est non nulle.

1.3. Éléments de (H) à densité continue sur $\mathbf{R}_+$.

Soit g une fonction positive, continue sur $[0, \infty[$, non identiquement nulle. Soit μ la mesure à densité $\tilde{g}$ où

$$\tilde{g}(t) = g(t) \quad \text{si} \quad t \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{g}(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0.$$

Nous allons donner des conditions nécessaires et (ou) suffisantes portant sur g pour que μ appartienne à (H) et faire la relation avec la propriété de logarithme convexité. Nous donnons d'abord une condition nécessaire et suffisante qui est l'adaptation au cas de $\mathbf{R}_+$ d'une condition donnée pour les noyaux symétriques par J. Deny dans [2].

Proposition 3. — *Sont équivalents :*

i) $\mu \in (\mathrm{H})$.

ii) $\forall t \geqslant 0, \quad g(t) \leqslant g(0)$ et

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall 0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n$$

$$(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} g(a_n - a_{n-1}) & g(a_n - a_{n-2}) & \ldots & g(a_n - a_1) & g(a_n) \\ g(0) & g(a_{n-1} - a_{n-2}) & \ldots & g(a_{n-1} - a_1) & g(a_{n-1}) \\ 0 & g(0) & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & g(a_2 - a_1) & \\ 0 & 0 & \ldots & g(0) & g(a_1) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

g étant continue, il est facile de voir que la première partie de v) de la proposition 1 est équivalente à

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \forall 0 < a_1 < \cdots < a_n, \qquad \exists \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1} \geqslant 0 :$$

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad g(a_i) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j g(a_i - a_j)$$

et $g(a_n) \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j g(a_n - a_j)$, ou encore équivalente à

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall 0 < a_1 < \cdots < a_n \quad \exists \alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n \geqslant 0 :$$
$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad g(a_i) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j g(a_i - a_j),$$

ce qui est évidemment équivalent à la positivité des déterminants. En outre, si μ appartient à (H), avec les notations précédentes, $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \leqslant 1$ $\left(\text{puisque } \int d\nu_\omega \leqslant 1\right)$ et, en particulier, $\alpha_1 \leqslant 1$ c'est-à-dire $g(a_1) \leqslant g(0)$. Donc $g(t) \leqslant g(0)$ pour tout t. Réciproquement, si $g(t) \leqslant g(0)$ pour tout t, on a évidemment $\mu([n, n + 1[) \leqslant g(0)$ et donc cette propriété jointe à la positivité des déterminants implique que μ appartient à (H).

Corollaire 4. — *Si* μ *appartient à* (H),

$$\forall t, s \geqslant 0 \qquad g(0)g(t + s) \geqslant g(t)g(s).$$

En particulier

$$\forall t \geqslant 0 \qquad g(t) > 0.$$

Corollaire 5. — *Soit* ν *une mesure positive sur* $\mathbf{R}$ *non nulle, à support dans* $\mathbf{R}_+$ *et à densité* k. *On suppose* k *continue sur* $]0, \infty[$. *Pour tout* $h > 0$, *on note* ν_h *la mesure de densité* k_h *définie par*

$$k_h(t) = k(t + h) \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0 \ \textit{et} \ k_h(t) = 0 \ \textit{si} \ t < 0.$$

Sont équivalents :

i) $\forall h > 0$, $\nu_h \in$ (H).

ii) k *est logarithmiquement convexe sur* $]0, \infty[$ *et décroissante.*

En effet, si i) est vérifié, d'après le corollaire 4, $\forall t, s \geqslant 0$ $\forall h > 0$ $k(h)\, k(t + s + h) \geqslant k(t + h)k(s + h)$ et

$$k(t + h) \leqslant k(h),$$

ce qui implique ii).

D'autre part, si ii) est vérifié, k_h est logarithmiquement convexe décroissante sur $]0, \infty[$ et il suffit donc d'appliquer le Théorème 2.

COROLLAIRE 6. — *Supposons* g *continûment dérivable sur* $[0, \infty[$ *et* μ *appartenant à* (H). *Alors la fonction*

$$h(x) = g(x)e^{-\frac{g'(0)}{g(0)}x}$$

est une fonction convexe croissante. En particulier

$$g(x) \geqslant g(0)e^{\frac{g'(0)}{g(0)}x}$$

En effet, d'après la Proposition 3, pour $0 < a_1 < a_2 < a_3$

$$\begin{vmatrix} g(a_3 - a_2) & g(a_3 - a_1) & g(a_3) \\ g(0) & g(a_2 - a_1) & g(a_2) \\ 0 & g(0) & g(a_1) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Ce déterminant étant nul pour $a_3 = a_2$, sa dérivée par rapport à a_3 est positive pour $a_3 = a_2$, c'est-à-dire

$$- g'(0)g(0)g(a_2) - g(0)g(a_1)g'(a_2 - a_1) + g'(0)g(a_1)g(a_2 - a_1) + g(0)^2g'(a_2) \geqslant 0$$

ce qui donne

$$\forall \alpha, \beta > 0, \qquad h'(\alpha + \beta)h(0) - h(\alpha)h'(\beta) \geqslant 0.$$

Faisant tendre β vers 0, on obtient

$$h'(\alpha) \geqslant 0 \quad \text{et donc } h \text{ croissante}$$

et minorant $h(\alpha)$ par $h(0)$, on obtient

$$h'(\alpha + \beta) \geqslant h'(\beta)$$

c'est-à-dire h convexe.

Remarque. — En fait, g étant une fonction positive sur $]0, \infty[$, la propriété (g est logarithmiquement convexe sur $]0, \infty[$) équivaut à ($\forall c \in \mathbf{R}$ $ge^{c\cdot}$ est convexe sur $]0, \infty[$).

2. FAMILLES DE NOYAUX DE HUNT

Nous donnons d'abord une proposition généralisant le lemme 1, p. 47 de [10].

Proposition 7. — *Soit* $(P_t)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe de Feller* (1) *sur un espace localement compact* Ω *et soit* μ *une mesure positive sur* $\mathbf{R}$, *à support dans* $\mathbf{R}_+$ *telle que*

$$\sup_{n\geq 0} \mu([n, n+1[) < \infty.$$

Alors si pour tout f *de* $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)$ *et tout* x *de* Ω $t \to P_t f(x)$ *est intégrable par rapport à* dt *sur* $\mathbf{R}_+$ *et si* $x \to \int_0^\infty P_t f(x)\, dt$ *est continue (resp. appartient à* $\mathcal{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$*), alors pour tout* f *de* $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)$ *et pour tout* x *de* Ω $t \to P_t f(x)$ *est intégrable par rapport à* μ *sur* $\mathbf{R}_+$ *et* $x \to \int_0^\infty P_t f(x)\, d\mu(t)$ *est continue (resp. appartient à* $\mathcal{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$*).*

Soit, en effet, f appartenant à $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)$ et positive. Il existe g de $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)$ et positive avec

$$f(x) + 1 \leq g(x) \quad \text{pour} \quad x \in \operatorname{Supp} f.$$

Il existe donc $\eta > 0$ et $\eta \leq 1$ tel que

$$f \leq \frac{1}{\eta} \int_0^\eta P_t g\, dt.$$

Il existe donc h appartenant à $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)$ et positive (par exemple $h = g\eta^{-1}$) tel que

$$f \leq \int_0^1 P_t h\, dt.$$

Alors

$$\int 1_{[n,\, n+1[}(t)\, P_t f\, d\mu(t) \leq \left(\int_n^{n+2} P_t h\, dt\right) \mu([n, n+1[).$$

Or la série de terme général $\int_n^{n+2} P_t h\, dt$ est, par hypothèse, uniformément convergente sur tout compact de Ω (respectivement uniformément convergente). Donc

$$x \to \int P_t f(x)\, d\mu(t)$$

est une fonction finie continue (respectivement appartient à $\mathcal{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$).

On déduit de cette proposition, le théorème suivant (à rapprocher du Théorème 2, p. 53 de [10]) :

(1) En fait, l'hypothèse de contraction n'est pas nécessaire pour cette proposition, comme on le voit d'après la démonstration.

THÉORÈME 8. — *Soit* V *un noyau de Hunt sur un espace localement compact* Ω, *de semi-groupe associé* $(P_t)_{t\geq 0}$. *Soit* μ *un élément de* (H). *Alors, pour tout* f *de* $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)$,

$$x \in \Omega \to \int P_t f(x)\, d\mu(t)$$

est définie et appartient à $\mathcal{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$. *L'opérateur ainsi défini sur* $\mathcal{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$, *de domaine* $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)$, *est un noyau de Hunt sur* Ω *dont le plus petit prolongement fermé est* $H_\mu(\hat{V})$ (*ou* $\hat{V}$ *est le plus petit prolongement fermé de* V) [2].

Soit $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ la famille résolvante associée à μ et $(\mu_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe associé.

$$Q_t f = \int P_s f\, d\mu_t(s)$$

définit un semi-groupe de Feller de résolvante

$$S_\lambda f = \int P_s f\, d\varepsilon_\lambda(s).$$

Or ε_λ converge en croissant vaguement vers μ. Donc si $f \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}(\Omega)$ et $f \geq 0$, $S_\lambda f$ converge en croissant vers

$$Wf(x) = \int P_s f(x)\, d\mu(s).$$

Wf appartenant à $\mathcal{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)$ d'après la proposition 7,

$$\forall f \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}(\Omega) \quad \lim_{\lambda \to 0} S_\lambda f = Wf \quad \text{uniformément}$$

(d'après le lemme de Dini). On en déduit que W est un noyau de Hunt et la suite du théorème est conséquence des définitions de 0.3.

Remarques. — *a*) Soient μ_1 et μ_2 appartenant à (H). Soit $(\mu^2_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe associé à μ^2. Alors d'après ce qui précède $\mu_1 \odot \mu_2 = \int \mu^2_t\, d\mu_1(t)$ (intégrale vague) est défini et appartient à (H). On voit que

$$H_{\mu_1 \odot \mu_2} = H_{\mu_1} \circ H_{\mu_2}$$

[2] Avec certaines des méthodes utilisées dans la partie 3, on peut démontrer que le domaine de $H_\mu(\hat{V})$ est $\left\{ f \in \mathcal{C}^0_{\mathbf{R}}(\Omega)\,;\ \lim_{\lambda \to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t f\, d\mu(t) \text{ existe pour la convergence uniforme} \right\}$ et $H\mu(\hat{V})$ est défini par la limite sur son domaine. La démonstration paraîtra dans le prochain volume du Séminaire de Théorie du Potentiel de Paris (Lectures, notes, Springer).

et il est facile de montrer que si V est un noyau de Hunt

$$H_{\mu_1 \odot \mu_2}(\hat{V}) = H_{\mu_1}(H_{\mu_2}(\hat{V})).$$

b) Une conséquence des théorèmes 2 et 8 est que l'ensemble des fonctions de la forme $f\left(\frac{1}{z}\right)$, où f est un élément de $\mathcal{H}$, « opère » sur les noyaux de Hunt.

On peut associer ainsi à un noyau de Hunt donné tout un cône convexe de noyaux de Hunt contenant les puissances fractionnaires de ce noyau.

c) Le théorème 8 étend le théorème VIII.4.1. de [4].

d) Rappelons que d'après les résultats de [3] et [4], si $\mu \in (H)$ et est à densité, H_μ se prolonge de $\{z ; \mathcal{R}e z \geqslant 0\} \cup \infty$ dans le même ensemble et, V étant un noyau de Hunt,

$$H_\mu(\sigma_e(\hat{V})) = \sigma_e(H_\mu(\hat{V}))$$

où σ_e désigne le spectre étendu.

3. FAMILLES DE POTENTIELS ABSTRAITS

Nous allons donner un théorème qui étend partiellement le théorème 8 au cas de potentiels abstraits.

THÉORÈME 9. — *Soit* X *un espace de Banach et* V *un potentiel abstrait sur* X *de semi-groupe associé* $(P_t)_{t \geqslant 0}$. *Soit* μ *un élément de* (P). *On suppose que*

$$\mu = \nu + g(t)\, dt$$

ou ν *est une mesure bornée à support dans* $\mathbf{R}_+$ *et* g *est une fonction à variation bornée sur* $\mathbf{R}$, *à support dans* $\mathbf{R}_+$ *(on note* dg *la mesure de Stieltjes associée à* g*).*

Soit W *l'opérateur défini par*

$$Wx = \lim_{\lambda \to 0+} \int e^{-\lambda t} P_t x \, d\mu(t)$$

avec pour domaine l'ensemble des x *pour lesquels la limite existe dans* X.

Alors

1) W *est un potentiel abstrait et* $W = H_\mu(V)$;

2) $D(W) \supset D(V)$ *et*

$$\forall x \in D(V),\ Wx = \lim_{t\to\infty}\Big(g(t)P_t Vx + \int 1_{[0,t]}(u)P_u(x)\,d\mu(u)\Big)$$

3) W *est le plus petit prolongement fermé de sa restriction à* D(V).

4) $D(W) = \Big\{x;\ \lim_{\lambda\to 0}\int e^{-\lambda t}P_t x\,d\mu(t)$ *existe faiblement*$\Big\}$.

5) $D(W) = \Big\{x;\ \int P_t x\,dg(t) \in D(V)\Big\}$ *et*

$$Wx = \int P_t x\,d\nu(t) + V\Big[\int P_t x\,dg(t)\Big].$$

Remarquons, avant d'entreprendre la démonstration, que les éléments de $\mathscr{I}$ vérifient les hypothèses faites sur μ et donc, une conséquence du théorème est que les fonctions $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, pour f appartenant à $\mathscr{H}$, « opèrent » sur les potentiels abstraits. D'autre part, dans le cas particulier où $\nu = 0$ et $g = 1$ sur $\mathbf{R}_+$, la définition de W est la définition habituelle du potentiel V et 4) est connu.

La démonstration va se faire en plusieurs étapes.

Nous noterons $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ la famille résolvante associée à μ, $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ la famille résolvante de $(P_t)_{t\geq 0}$ et

$$S_\lambda x = \int P_t x\,d\varepsilon_\lambda(t).$$

a) Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}_+$ telle que $F(t) = \int_0^t f(u)\ du$ soit bornée. Soit $(\Phi_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, à support dans $\mathbf{R}_+$, comprises entre 0 et 1 avec

Φ_n indépendante de n sur $[0, 2]$,

$\Phi_n(x) = 1$ si $x \in [2, n]$, $\Phi_n(x) = 0$ si $x \geqslant n + 2$,

$$|\Phi_n'(x)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout } x.$$

On a

$$\varepsilon_\lambda = \nu + g - \lambda\nu * \varepsilon_\lambda - \lambda g * \varepsilon_\lambda$$

Donc

$$\int(F\Phi_n)'\,d\varepsilon_\lambda = \int(F\Phi_n)'\,d\nu - \int F\Phi_n\,dg - \int(F\Phi_n)'\ d(\nu * \lambda\varepsilon_\lambda) + \int(F\Phi_n)\ dg * \lambda\ d\varepsilon_\lambda.$$

Soit Φ la fonction égale à Φ_n sur $]-\infty, 2]$ et à 1 sur $[2, \infty[$. Par convergence dominée, dg étant une mesure bornée, on obtient,

$$\int (f\Phi + F\Phi')\, d\varepsilon_\lambda = \int (f\Phi + F\Phi')\,(d\nu - d\nu * \lambda\, d\varepsilon_\lambda) \\ - \int F\Phi\, dg + \int F\Phi\, dg * \lambda\, d\varepsilon_\lambda$$

soit

$$\int f\, d\varepsilon_\lambda = \Big[-\int F\Phi'\, d\varepsilon_\lambda + \int f(1-\Phi)\, d\varepsilon_\lambda \\ + \int (f\Phi + F\Phi')\, d\nu - \int F\Phi\, dg\Big] \\ + \Big[\int F\Phi\, dg * \lambda\, d\varepsilon_\lambda - \int (f\Phi + F\Phi')\, d\nu * \lambda\, d\varepsilon_\lambda\Big].$$

ε_λ convergeant vaguement vers μ, le premier crochet converge quand λ tend vers 0 et le second crochet est majoré uniformément en λ.

Donc

$$\lim_{\lambda \to 0} \int \lambda f\, d\varepsilon_\lambda = 0;$$

b) Supposons que, outre les conditions *a*) sur f, $F = F_1 + r$ avec $r \in \mathbf{C}$ et $\int_0^t F_1(u)$ du borné.

Alors il est facile de voir que, si $x \geqslant 0$,

$$\int_0^t (f\Phi)(x+y)\, dy \quad \text{et} \quad \int_0^t (F_1\Phi)(x+y)\, dy \quad \text{sont bornés.}$$

Alors, d'après *a*), pour $x \geqslant 0$,

$$\int (F_1\Phi)(x+y)\lambda\, d\varepsilon_\lambda(y) \quad \text{et} \quad \int (f\Phi)(x+y)\lambda\, d\varepsilon_\lambda(y)$$

convergent vers 0 quand λ tend vers 0.

D'autre part, Φ' étant à support compact

$$\int (F\Phi')(x+y)\, d\varepsilon_\lambda(y)$$

converge quand λ tend vers 0.

Enfin

$$\int \Phi\, dg * \lambda\, d\varepsilon_\lambda = g(\infty) \int \lambda\, d\varepsilon_\lambda - \int \Phi'\, g * \lambda d\varepsilon_\lambda.$$

Φ' étant à support compact $\int \Phi'(x+y)\, d\varepsilon_\lambda(y)$ converge quand λ tend vers 0 et donc $\int \Phi'\, g * \lambda d\varepsilon_\lambda$ tend vers 0.

D'autre part

$$\lim_{x \to 0+} \int e^{-tx}\, d\mu(t) = \infty$$

si et seulement si $\int \lambda\, d\varepsilon_\lambda = 1$ pour tout λ.

Or

$$\lim_{x \to 0+} x \int e^{-tx}\, d\mu(t) = g(\infty).$$

Donc, si $g(\infty) \neq 0, \int \lambda\, d\varepsilon_\lambda = 1$ et donc, dans tous les cas,

$$\forall \lambda, \quad g(\infty) \int \lambda\, d\varepsilon_\lambda = g(\infty).$$

Finalement on obtient que

$$\lim_{\lambda \to 0} \int f\, d\varepsilon_\lambda$$

existe et vaut

$$- \int F\Phi'\, d\mu - \int f(1 - \Phi)\, d\mu + \int (f\Phi + F\Phi')\, d\nu$$
$$- \int F\Phi\, dg + rg(\infty) = \int f\, d\nu - \int F_1\, dg.$$

c) Soit $x \in D(V)$ $\alpha > 0$ et $x^* \in X^*$. On pose

$$f(t) = \langle P_t(x - \alpha R_\alpha x), x^* \rangle.$$

On a alors

$$F(t) = \langle - P_t R_\alpha x, x^* \rangle + \langle R_\alpha x, x^* \rangle.$$

Posons alors

$$r = \langle R_\alpha x, x^* \rangle \quad F_1(t) = \langle - P_t R_\alpha x, x^* \rangle$$
$$\int_0^t F_1(u)\, du = \langle P_t R_\alpha V x, x^* \rangle - \langle R_\alpha V x, x^* \rangle.$$

On peut donc appliquer *b*) et on obtient

$$\lim_{\lambda \to 0} \int \langle P_t(x - \alpha R_\alpha x), x^* \rangle\, d\varepsilon_\lambda(t) = \int \langle P_t(x - \alpha R_\alpha x), x^* \rangle\, d\nu(t)$$
$$+ \int \langle P_t R_\alpha x, x^* \rangle\, dg(t).$$

Donc, pour tout x de $D(V)$ et tout $\alpha > 0$

$S_\lambda(x - \alpha R_\alpha x)$ converge faiblement (et donc, aussi, fortement) quand λ tend vers 0 vers

$$\int P_t(x - \alpha R_\alpha x)\, d\nu(t) + \int (P_t R_\alpha x)\, dg(t).$$

Or $\overline{(I - \alpha R_\alpha)(D(V))} \supset \overline{(I - \alpha R_\alpha)(X)} = \overline{D(V)} = X$.

On en déduit donc que

$H_\mu(V)$ *est un potentiel abstrait* et

$$\forall x \in D(V)\ \forall \alpha > 0$$
$$H_\mu(V)(x - \alpha R_\alpha x) = \int P_t(x - \alpha R_\alpha x)\, d\nu(t) + \int P_t R_\alpha x\, dg(t).$$

d) Soit $x \in D(V)$. $\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha x = Vx$. $H_\mu(V)$ étant fermé, on voit, d'après le théorème de Lebesgue, que

$$D[H_\mu(V)] \supset D(V) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in D(V),$$
$$H_\mu(V)x = \int P_t x\, d\nu(t) + \int P_t Vx\, dg(t)$$

soit, par intégration par parties,

$$\forall x \in D(V)\ \ H_\mu(V)x = \lim_{t \to \infty} \left[g(t) P_t Vx + \int 1_{[0,t]}(u) P_u x\, d\mu(u) \right].$$

e) D'autre part

$$S_\lambda x = \int P_t x\, d\varepsilon_\lambda(t)$$

et donc

$$S_\lambda(D(V)) \subset D(V).$$

Par conséquent

$$[I + \lambda H_\mu(V)](D(V)) \supset [I + \lambda H_\mu(V)][I - \lambda S_\lambda](D(V)) = D(V).$$

Il résulte alors immédiatement de propriétés générales ([4]) que $H_\mu(V)$ *est le plus petit prolongement fermé de sa restriction à* $D(V)$.

Notons maintenant W_1 l'opérateur de domaine

$$\left\{ x;\ \int P_t x\, dg(t) \in D(V) \right\}$$

et défini par

$$W_1 x = \int P_t x\, d\nu(t) + V\left[\int P_t x\, dg\,(t) \right].$$

Notons W_2 l'opérateur de domaine

$$\left\{ x;\ w - \lim_{\lambda \to 0} \int e^{-\lambda t} P_t x\, d\mu(t) \ \text{ existe} \right\}$$

et défini par cette limite sur son domaine (où w^- désigne les limites faibles).

f) Posons, pour $\lambda > 0$, D_λ l'opérateur

$$D_\lambda x = \int e^{-\lambda t} P_t x \, d\mu(t).$$

$$\begin{aligned} D_\lambda(x - S_1 x) &= \int e^{-\lambda t} P_t x \, d\mu(t) - \iint e^{-\lambda t} P_{t+s} \, x d\varepsilon_1(s) \, d\mu(t) \\ &= \int e^{-\lambda t} P_t x \, d\mu(t) - \int e^{-\lambda t} P_t x \, d\mu(t) + \int e^{-\lambda t} P_t x \, d\varepsilon_1(t) \\ &+ \iint (e^{-\lambda(t+s)} - e^{-\lambda t}) P_{t+s} x \, d\mu(t) \, d\varepsilon_1(s) \end{aligned}$$

(d'après l'égalité $\mu = \varepsilon_1 + \varepsilon_1 * \mu$).

Donc

$$\begin{aligned} [D_\lambda(x - S_1 x) - S_1 x] = &- \int (1 - e^{-\lambda t}) P_t x \, d\varepsilon_1(t) \\ &- \iint e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda s}) P_{t+s} x \, d\mu(t) \, d\varepsilon_1(s). \end{aligned}$$

Or $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_1^{*n}$.

Donc $|\mu| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_1|^{*n}$.

Soit $N = \mathscr{L}|\varepsilon_1|$ et $M = \mathscr{L}|\mu|$, on a

$$M \leqslant \frac{N}{1 - N} \qquad \text{et,}$$

$$\|D_\lambda(x - S_1 x) - S_1 x\| \leqslant [(1 - N(\lambda)) + N(\lambda)]\|x\| = \|x\|,$$

soit $\|D_\lambda(I - S_1) - S_1\| \leqslant 1$.

Supposons maintenant que x appartienne à $D(V)$. D'après la formule obtenue en *d*),

$$H_\mu(V)x = \lim_{\lambda \to 0} \Big[\int P_t x \, d\nu(t) + \int R_\lambda P_t x \, dg(t)\Big].$$

$$\|(1 - e^{-\lambda t}) R_\lambda P_t x\| \leqslant 2(1 - e^{-\lambda t})\|Vx\| \leqslant 2\|Vx\|$$

Donc, d'après le théorème de Lebesgue

$$H_\mu(V)x = \lim_{\lambda \to 0} \Big[\int e^{-\lambda t} P_t x \, d\nu(t) + \int e^{-\lambda t} R_\lambda P_t x \, dg(t)\Big].$$

Or $e^{-\lambda t} R_\lambda P_t x = \int_t^\infty e^{-\lambda s} P_s x \, ds$. Donc, par intégration par parties,

$$H_\mu(V)x = \lim_{\lambda \to 0} D_\lambda x.$$

Ainsi

$$H_\mu(V) | D(V) \subset W.$$

En particulier

$$\forall x \in D(V) \quad \lim_{\lambda \to 0} (D_\lambda(x - S_1 x) - S_1 x) = 0$$

(car $(I - S_1)(D(V)) \subset D(V)$). Donc, d'après l'équicontinuité des opérateurs $[D_\lambda(I - S_1) - S_1]$, on obtient

$$\forall x \in X \quad \lim_{\lambda \to 0} D_\lambda(x - S_1 x) = S_1 x.$$

Or $\operatorname{Im}(I - S_1) = D(H_\mu(V))$. Donc, $H_\mu(V) \subset W$.

g) $W \subset W_2$ est trivial.

Soit $x \in D(W_2)$. $\int (I - \lambda R_\lambda) e^{-\lambda t} P_t x \, dg(t)$ appartient à $D(V)$ et

$$V\Big[\int (I - \lambda R_\lambda) e^{-\lambda t} P_t x \, dg(t)\Big] + \int e^{-\lambda t} P_t x \, d\nu(t) = D_\lambda x$$

(d'après un calcul déjà fait, $V(I - \lambda R_\lambda)$ étant égal à R_λ). Le graphe de V étant fermé est fermé aussi pour les topologies faibles. On en déduit que x appartient à $D(W_1)$ et

$$W_1 x = W_2 x.$$

Donc

$$W_2 \subset W_1.$$

h) Supposons que x appartienne à $D(W_1)$.

$$V\Big[\int P_t(x - \lambda R_\lambda x) \, dg(t)\Big] = R_\lambda \int P_t x \, dg(t).$$

Or $x - \lambda R_\lambda x$ appartient à $D(V) \subset D(H_\mu(V))$ et, d'après *d*)

$$[H_\mu(V)](x - \lambda R_\lambda x) = \int P_t(x - \lambda R_\lambda x) \, d\nu(t) + R_\lambda \int P_t x \, dg(t).$$

$H_\mu(V)$ étant fermé, on voit que

$$x \in D[H_\mu(V)] \qquad \text{et} \qquad H_\mu(V)x = \int P_t x \, d\nu(t) + V\Big[\int P_t x \, dg(t)\Big].$$

Donc

$$W_1 \subset H_\mu(V).$$

Finalement, $W = W_1 = W_2 = H_\mu(V)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarques. — *a*) Il peut se faire que μ appartienne à (H) et que l'opérateur W défini par la formule du théorème ne soit pas de domaine dense. C'est le cas par exemple si

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n,$$

X étant l'adhérence, dans l'ensemble des fonctions uniformément continues et bornées sur $\mathbf{R}_+$, muni de la norme infini, de l'ensemble des fonctions f uniformément continues et bornées telles que

$$\int_0^t f(u)\, du \quad \text{soit bornée,}$$

et

$$P_t f(x) = f(x+t).$$

Il est facile de voir que $(P_t)_{t \geqslant 0}$ est associé à un potentiel abstrait sur X.

Or

$$\forall f \in \overline{D(W)} \quad \lim_{\lambda \to 0} \lambda \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} f(n) = 0.$$

Par conséquent, $\cos(2\pi.)$ appartient à X et non à $\overline{D(W)}$.

b) Si μ vérifie les hypothèses du théorème et si en outre ν est à densité, pour le prolongement canonique de H_μ,

$$H_\mu[\sigma_e(W)] = \sigma_e(H_\mu(W)).$$

Remarquons que si μ vérifie les hypothèses du théorème, H_μ est nécessairement fini sur $\{z;\ \mathcal{R}e z \geqslant 0 \text{ et } z \neq 0\}$.

Nous allons, pour terminer, appliquer certaines méthodes précédentes, pour préciser un résultat de [5]. Nous adoptons désormais les notations suivantes : Soit μ une mesure positive non nulle sur $\mathbf{R}$ à support dans $\mathbf{R}_+$, telle que

$$\int \frac{1}{1+t}\, d\mu(t) < \infty.$$

Soit H la fonction

$$H(z) = \int \frac{z}{tz+1}\, d\mu(t).$$

Soit X un espace de Banach et V un opérateur sur X, fermé, de domaine dense, d'ensemble résolvant contenant $]-\infty, 0[$ et tel que $\sup_{\lambda > 0} \|(I + \lambda V)^{-1}\| < \infty$.

Dans [5], nous avons défini $H(V)$ comme le plus petit prolongement fermé de l'opérateur défini sur $D(V)$ par

$$\int V(I+\lambda V)^{-1}x\, d\mu(\lambda)$$

et montré que $H(V)$ vérifiait les mêmes propriétés que V. On a alors le résultat suivant :

Théorème 10. — $H(V) = s\text{-}\lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} \int V[I+(\lambda+\varepsilon)V]^{-1}\, d\mu(\lambda)$ (notation signifiant que $D(H(V))$ est l'ensemble des x pour lesquels $\int V[I+(\lambda+\varepsilon)V]^{-1}\, d\mu(\lambda)$ converge quand λ tend vers 0 et $H(V)$ est défini par cette limite sur son domaine).

Posons

$$\begin{aligned} R_\lambda &= V(I+\lambda V)^{-1} \\ S_\lambda &= H(V)[I+\lambda H(V)]^{-1} \\ D_\varepsilon &= \int R_{\lambda+\varepsilon}\, d\mu(\lambda) \\ M &= \sup_{\lambda>0} \|\lambda R_\lambda\|. \end{aligned}$$

D'après [5], il existe une mesure positive ν_1 avec

$$\int \frac{1}{\lambda}\, d\nu_1(\lambda) < \infty \qquad \text{telle que}$$

$$D_\varepsilon(I-S_1) = \int R_{\varepsilon+\lambda}\, d\mu(\lambda) - \iint R_{\varepsilon+\lambda}R_s\, d\nu_1(s)\, d\mu(\lambda).$$

$$\int R_{\varepsilon+\lambda}\, d\mu(\lambda) = H(R_\varepsilon) = \int R_{\varepsilon+s}\, d\nu_1(s) + \iint R_{\varepsilon+s}R_{\varepsilon+\lambda}\, d\nu_1(s)\, d\mu(\lambda)$$

(car $H(R_\varepsilon)(I+H(R_\varepsilon))^{-1} = \int R_{\varepsilon+s}\, d\nu_1(s)$ par application du calcul symbolique à l'opérateur R_ε).

Donc

$$D_\varepsilon(I-S_1) = \int R_{\varepsilon+s}\, d\nu_1(s) - \iint \varepsilon R_{\varepsilon+s}R_sR_{\varepsilon+\lambda}\, d\nu_1(s)\, d\mu(\lambda).$$

Or

$$\int \frac{1}{\varepsilon+s}\, d\nu_1(s) = \frac{f(\varepsilon)}{f(\varepsilon)+1} \quad \text{avec} \quad f(\varepsilon) = H\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Donc $\|D_\varepsilon(I-S_1) - S_1\| \leqslant \dfrac{M^2}{f(\varepsilon)+1}(1+Mf(\varepsilon) \leqslant M^3.$

On déduit alors facilement de [5], comme dans la démonstration du théorème précédent, que

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \int R_{\lambda+\varepsilon}\, d\mu(\lambda) \supset H(V).$$

Or H (V) est maximal M-codissipatif (au sens de [4]), R_ε est M-codissipatif, donc $H(R_\varepsilon)$ est aussi M-codissipatif (d'après les résultats de [5]) et donc

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} H(R_\varepsilon)$$

est M-codissipatif. D'après la maximalité de H(V)

$$H(V) = s\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \int R_{\lambda+\varepsilon}\, d\mu(\lambda).$$

Cas particulier. — Soit $0 < \alpha < 1$ et μ admettant sur $\mathbf{R}_+$ la densité $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\cdot\dfrac{1}{t^\alpha}\cdot$ Alors $H(z)$ est la fonction z^α. On obtient alors

$$V^\alpha = s\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty V[I + (\lambda+\varepsilon)V]^{-1} \frac{\lambda^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\, d\lambda.$$

Ceci est à rapprocher de la formule donnée dans [8] par H. W. Hövel et U. Westphal, à savoir :

$$V^\alpha = s\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^\infty V[I + \lambda V]^{-1} \frac{\lambda^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\, d\lambda.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Choquet et J. Deny, Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Théorème de dualité et applications, *C. R. Acad. Sc. Paris*, série A, 243 (1956), 764-767.

[2] J. Deny, Le balayage. Communications du séminaire mathématique de l'université de Lund. (1952), 47-61.

[3] J. Faraut, Semi-groupes de mesures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 20 (1970), fasc. 1, 235-301.

[4] F. Hirsch, Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 22 (1972), fasc. 1, 89-210.

[5] F. Hirsch, Intégrales de résolvantes et calcul symbolique, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 22 (1972), fasc. 4, 239-264.

[6] F. Hirsch, Transformation de Stieltjes et fonctions opérant sur les potentiels abstraits. Théorie du Potentiel et Analyse harmonique, *Lecture Notes* N° 404, *Springer.*

[7] F. Hirsch et J.-P. Roth, Opérateurs dissipatifs et codissipatifs invariants sur un espace homogène. Théorie du Potentiel et Analyse harmonique, *Lectures Notes* N° 404, *Springer.*

[8] H. W. Hövel and U. Westphal, Fractional powers of closed operators, *Studia Mathematica*, XLII (1972), 177-195.

[9] G. A. Hunt, Markoff processes and potentials, *Illinois Journal of Math.*, 1 (1957), 44-93 et 316-369, 2 (1958), 151-215.

[10] M. Itô, Sur une famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt donné, *Nagoya Math. J.*, 51 (1973), 45-56.

[11] G. Lion, Familles d'opérateurs et frontière en théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 16 (1966), Fasc. 2, 389-453.

[12] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[13] K. Yosida, Functional analysis, third printing, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

Manuscrit reçu le 16 octobre 1974.

Francis Hirsch,
E.N.S.E.T.
61, avenue du Président-Wilson
94230 Cachan.