

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RENÉ REULOS

## **Recherches sur la théorie des corpuscules**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 5 (1954), p. 455-568

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1954\\_\\_5\\_\\_455\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1954__5__455_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## RECHERCHES SUR LA THÉORIE DES CORPUSCULES

par René REULOS.

---

*L'histoire des Sciences montre que les progrès de la Science ont été constamment entravés par l'influence tyrannique de certaines conceptions que l'on avait fini par considérer comme des dogmes. Pour cette raison, il convient de soumettre périodiquement à un examen très approfondi les principes que l'on avait fini par admettre sans plus les discuter... En tous les cas, il est certainement utile de reprendre le problème très difficile de l'interprétation de la mécanique ondulatoire, afin de voir si celle qui est actuellement orthodoxe est vraiment la seule que l'on puisse adopter.*

LOUIS DE BROGLIE.

Cette pensée, qui vient en conclusion d'une conférence récente <sup>(1)</sup> du fondateur de la mécanique ondulatoire, est propre à encourager les initiatives nouvelles, et fournit à notre étude l'introduction que nous cherchions.

(1) 31 octobre 1952. Centre international de Synthèse.

---

## CHAPITRE PREMIER

### PREMIÈRE PARTIE.

#### CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR L'ESPACE UNIVERSEL ET LA THÉORIE DES CHAMPS

La théorie que nous nous proposons d'exposer, concerne la mécanique classique et ondulatoire des corpuscules. Elle est dominée par l'idée relativiste, d'après laquelle l'espace réel est un espace à quatre dimensions. Il ne peut donc exister de vecteurs à trois composantes. Ceux que nous rencontrons et que nous considérons comme tels, sont en réalité « détachés » de symbolismes relatifs à l'espace à quatre dimensions. Il est intéressant pour ce qui suit, de voir comment les formules vectorielles bien connues, viennent se placer dans des formules tensorielles plus complètes, adaptées à l'espace d'univers. *La force de CORIOLIS*, d'apparence si classique, apparaît ainsi comme une nécessité relativiste. *La formule de LORENTZ* s'intègre dans le même formalisme. L'équation tensorielle du mouvement d'une charge électrique ponctuelle dans un système de référence en rotation, résulte de cette analogie et donne directement une forme relativiste et rigoureuse du *théorème de LARMOR*, ainsi qu'une explication très simple des phénomènes gyromagnétiques.

Enfin, et toujours dans le même ordre d'idée, il apparaît, d'une étude sur les quaternions, que les systèmes différentiels, qui régissent la propagation des champs et des potentiels électromagnétiques, représentent une extension à l'Univers, des conditions de CAUCHY, qui définissent les fonctions analytiques du plan.

#### § 1. — L'espace métrique de la Relativité.

Le développement de la mécanique de Galilée, de Copernic et de Newton, montre que toutes les grandeurs de la nature peuvent être rattachées à trois grandeurs fondamentales : longueur, temps, masse, indépendantes les unes des autres.

La longueur est une grandeur vectorielle, susceptible de se décomposer en trois grandeurs scalaires, suivant trois directions arbitrairement choisies. Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des systèmes de coordonnées cartésiennes, et des systèmes d'axes orthogonaux. Le temps se présente comme une grandeur à part, qui varie d'une manière indépendante de toute contrainte extérieure, et toujours dans le même sens.

Un événement tel que le passage d'un mobile en un point donné, est déterminé par la connaissance des trois coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  de ce point et par celle de l'instant  $t$  auquel a eu lieu ce passage. Tout ensemble de quatre valeurs  $x_1, x_2, x_3, t$  peut être considéré comme représentant les coordonnées d'un vecteur généralisé. Cet espace vectoriel comprend un sous-espace métrique, dans lequel on peut mesurer une longueur dans une direction oblique par rapport aux axes  $Ox_1, x_2, x_3$  tandis que la mesure de la longueur d'une direction oblique entre  $x_1$ , ou  $x_2$  ou  $x_3$  d'une part, et  $t$  d'autre part, est dépourvue de sens. Le temps  $t$  s'exprime en secondes, unité commode, définie arbitrairement. Les astronomes expriment les longueurs en années de lumière. Inversement, on peut exprimer le temps en centimètre lumière, ce qui est bien peu ! mais cette unité rationalisée a l'avantage de rattacher l'unité de temps à l'unité de longueur, et de lui donner de ce fait la dimension d'une longueur. Nous l'appellerons  $x_0 = ct$ ,  $c$  étant la vitesse de la lumière en centimètres par seconde. Nous pouvons aussi introduire la longueur  $x_4 = ix_0$  dont le sens apparaît clairement lorsqu'on exprime avec ces unités les équations de l'électromagnétisme. On s'aperçoit alors que  $x_4$  joue le même rôle que les variables d'espace  $x_1, x_2, x_3$  de sorte qu'en particulier, l'équation de propagation prend la forme simple et symétrique

$$\sum_1^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} = 0.$$

Cette règle étant générale, pour toutes les équations de l'électromagnétisme qui se laissent ainsi intégrer dans des formes parfaitement symétriques, il est impossible de ne pas voir que  $x_4$  a les mêmes propriétés que  $x_1, x_2, x_3$  et que le groupe  $x_1, x_2, x_3, x_4$  constitue un *espace métrique*. La longueur d'un élément de longueur  $ds$  dans une direction oblique, a pour expression

$$ds^2 = \sum_1^4 dx_k^2.$$



L'extension aux quatre dimensions, des propriétés de l'espace métrique à trois dimensions, conduit à postuler que le carré de l'élément de longueur  $ds$  reste invariant dans un changement d'axes, or un changement d'axes qui permet de passer d'un système d'axes orthogonaux à un autre système d'axes orthogonaux, est une transformation orthogonale. L'invariance du  $ds^2$  dans les transformations linéaires orthogonales, constitue le principe de base de la théorie de la relativité, et la transformation de Lorentz n'est autre qu'une transformation orthogonale particulièrement simple.

Cette découverte qui — nous venons de le dire — est la clef de voûte de la théorie de la relativité a des conséquences d'une très grande portée.

La métrique induite dans l'ancien espace à trois dimensions représente les phénomènes *indépendants du temps*. C'est le cas des problèmes statiques, c'est aussi celui des régimes permanents.

## § 2. — Vecteurs d'univers.

Comme conséquence de ces considérations, il ne peut exister que des vecteurs à quatre composantes et la plupart des scalaires ne sont de ce fait que les quatrièmes composantes de *quadrivecteurs*<sup>(2)</sup>. L'exemple le plus typique est le potentiel scalaire  $A_0$  de la théorie électro-magnétique, avec lequel on forme la quantité  $A_4 = iA_0$  qui est la quatrième composante du potentiel vecteur d'univers  $A$ , de composantes  $A_1 A_2 A_3 A_4$ , tandis que le potentiel vecteur classique en constitue la composante d'espace.

**Invariants.** — Existe-t-il des scalaires purs? Existe-t-il des vecteurs à trois dimensions, dépourvus de scalaires associés?

Un scalaire apparaîtra certainement comme « pur », lorsque sa définition le rattache symétriquement aux quatre dimensions. Il apparaît alors clairement qu'un véritable scalaire ne représente pas la quatrième composante d'un vecteur. Par exemple, le carré  $ds^2$  de l'élément linéaire, soit  $ds^2 = \sum_1^4 dx_k^2$  est bien un scalaire pur.

Il en est de même de la *quantité d'électricité*, grandeur qui se

<sup>(2)</sup> Ne pas confondre le quadrivecteur de la relativité (Einstein) avec le quadrivecteur des mathématiciens, dont les 4 composantes sont des vecteurs.

présente à nous directement, sans que rien ne semble devoir la rattacher au temps plutôt qu'à l'espace. Par contre, il en est tout autrement de la *densité électrique*, dont la définition fait intervenir l'élément de volume  $dx_1 dx_2 dx_3$ , mettant en évidence par son absence l'élément  $dx_4$ . Ainsi, la densité électrique est rattachée d'une manière préférentielle à la quatrième dimension, et se présente donc comme la quatrième composante d'un quadrivecteur, qui est — on le sait — le *vecteur courant*. La véritable manière de différencier un scalaire pur d'une composante de vecteur, est de lui faire subir un changement de système de référence. La composante du vecteur se trouve altérée par cette transformation, tandis que le scalaire pur doit rester invariant.

**Vecteur axial et vecteur polaire, tenseur antisymétrique.** — Des vecteurs comme le champ magnétique  $\vec{H}$  (vecteur axial) et le champ électrique  $\vec{E}$  (vecteur polaire) n'ont pas de quatrième composante connue, mais l'un et l'autre dérivent du vecteur potentiel d'univers  $A$  au moyen des relations

$$(1) \quad \begin{aligned} F_{23} &= H_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 & F_{41} &= iE_1 = \partial_4 A_1 - \partial_1 A_4 \\ F_{31} &= H_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 & F_{42} &= iE_2 = \partial_4 A_2 - \partial_2 A_4 \\ F_{12} &= H_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 & F_{43} &= iE_3 = \partial_4 A_3 - \partial_3 A_4 \end{aligned} \quad (2)$$

(avec  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ )

Donc,  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$  représentent « la composante d'espace » et « la composante de temps » d'un tenseur antisymétrique

$$(3) \quad F_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{vmatrix}$$

lequel est bien un tenseur d'univers.

On voit à l'examen de ce tableau quelle est l'origine du *vecteur axial* et du *vecteur polaire*. Le vecteur axial est un vecteur à trois dimensions, formé à l'aide des trois composantes  $F_{ik}$  d'un tenseur antisymétrique,  $i$  et  $k$  étant pris parmi les indices 1, 2, 3, il est donc sensible à l'orientation du trièdre  $Ox_1 x_2 x_3$ , la permutation de deux

axes ayant pour effet de changer  $F_{ik}$  en  $-F_{ik}$ . Le vecteur polaire est formé avec les  $F_{ik}$  qui restent, c'est-à-dire les  $F_{ik} = -F_{ik}$ . Il est insensible à la disposition des axes, c'est-à-dire à l'orientation du trièdre  $Ox_1x_2x_3$ .

Nous conserverons encore le nom de vecteur, ou, lorsqu'il y a ambigüité, le nom de vecteur d'espace (ou de trivecteur) à une grandeur orientée, parce qu'il est commode de conserver cette définition physique du vecteur, mais il est bien entendu que les composantes d'un tenseur antisymétrique ne sont pas de vrais vecteurs. En effet, un vecteur doit conserver sa longueur dans une transformation orthogonale normée, comme le sont les transformations de la relativité, et en particulier, la transformation de Lorentz. Les tenseurs antisymétriques sont transformés par des règles différentes, qui sont celles de la multiplication de la matrice opérante du tenseur, par la matrice opératrice de la transformation orthogonale en question. Un tenseur qui possède des éléments nuls dans un système d'axes ne possède plus cette propriété particulière dans un système d'axes quelconques. C'est ainsi qu'un champ purement électrique dans un système de référence (les composantes magnétiques étant toutes nulles), acquiera une composante magnétique dans tout autre système de référence.

Examinée sous ce jour, une longueur  $X$  à laquelle on associe un temps représente un quadrivecteur de composantes  $x_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ).

Il en est de même de la vitesse  $V = \frac{dX}{dt}$ , dérivée par rapport au temps de ce vecteur, et de composantes  $V_k = \frac{dX_k}{dt}$  avec  $V_4 = ic$ .

Il n'en est plus ainsi de l'accélération  $\vec{\Gamma}$  qui est un trivecteur, de la classe des vecteurs polaires, composante spatio-temporelle du tenseur  $T_{ik} = \partial_k V_i - \partial_i V_k$  soit

$$(4) \quad \begin{aligned} T_{14} &= i\Gamma_1 = \partial_4 V_1 - \partial_1 V_4 \\ T_{24} &= i\Gamma_2 = \partial_4 V_2 - \partial_2 V_4 \\ T_{34} &= i\Gamma_3 = \partial_4 V_3 - \partial_3 V_4 \end{aligned}$$

alors que le rotationnel  $R$  de composantes

$$(5) \quad \begin{aligned} T_{23} &= R_1 = \partial_2 V_3 - \partial_3 V_2 \\ T_{31} &= R_2 = \partial_3 V_1 - \partial_1 V_3 \\ T_{12} &= R_3 = \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1 \end{aligned}$$

représente le vecteur axial adjoint, l'ensemble de ces deux trivecteurs constituant le tenseur antisymétrique

$$(6) \quad T_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & R_3 & -R_2 & \frac{i}{c} \Gamma_1 \\ -R_3 & 0 & R_1 & \frac{i}{c} \Gamma_2 \\ R_2 & -R_1 & 0 & \frac{i}{c} \Gamma_3 \\ -\frac{i}{c} \Gamma_1 & -\frac{i}{c} \Gamma_2 & -\frac{i}{c} \Gamma_3 & 0 \end{vmatrix}$$

### § 3. — Orientation des axes, permutations.

Représentons symboliquement l'espace à quatre dimensions par un tétraèdre, de sommets  $A_1 A_2 A_3 A_4$ . Pour l'orienter, nous devons d'abord choisir arbitrairement un sommet, par exemple  $A_4$ , que nous distinguons de ce fait des trois autres. Nous y plaçons un observateur qui peut orienter les sommets 1, 2, 3, de deux façons possibles, selon qu'il verra tourner vers la droite ou vers la gauche, un mobile parcourant dans l'ordre 1, 2, 3, le triangle joignant les trois sommets. Ce choix arbitraire étant effectué, il lui restera à orienter les côtés  $A_4 A_1$ ,  $A_4 A_2$ ,  $A_4 A_3$  dans les directions qui s'éloignent de  $A_4$  ou dans celles qui y convergent. Cela fait deux possibilités indépendantes du choix du sens de rotation sur la face 1, 2, 3.

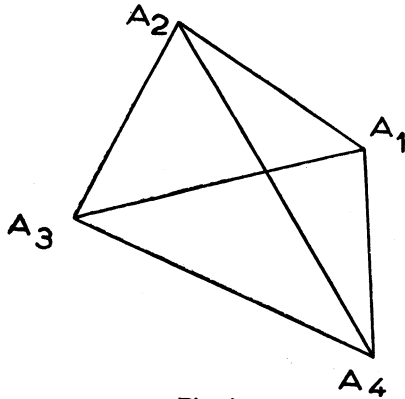


Fig. 1.

L'observateur pourrait aussi chercher à orienter les trois autres faces, comme la première, mais il est facile de constater qu'il se heurterait à des contradictions. Donc, il devra conserver le premier mode, qui fait jouer à l'indice 4 un rôle à part. Ce raisonnement est basé non pas sur les propriétés d'une figure géométrique dans l'espace à trois dimensions, mais plutôt sur les propriétés du nombre quatre,

et l'hypothèse fondamentale que les quatre dimensions sont disposées symétriquement les unes par rapport aux autres. De ce fait, il acquiert une portée qui nous aide à comprendre pourquoi dans l'espace métrique et isotrope à quatre dimensions, il faut choisir une variable privilégiée, laquelle de ce fait, se distingue des trois autres. Il est tout indiqué de choisir pour cela la quatrième dimension  $x_4 = ict$ . Le temps joue donc nécessairement un rôle à part, et se « dilate » dans une transformation de Lorentz alors que les variables d'espace se contractent, de manière à *conserver l'élément d'hyper-volume*  $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ .

Ainsi se trouvent expliquées beaucoup de particularités de l'hyper-espace de la relativité, dont en particulier l'existence des vecteurs axiaux et des vecteurs polaires, qui s'associent par couple, pour former des tenseurs antisymétriques.

#### § 4. — Le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace à quatre dimensions.

Les formules de l'électromagnétisme comportent fréquemment l'emploi des notions du produit scalaire ou du produit vectoriel de deux vecteurs (travail, force de Coriolis, force de Lorentz, vecteur de Poynting, etc...). Or d'après l'analyse qui précède, ces vecteurs ne constituent qu'une partie d'un symbolisme plus complet (quadrivecteurs ou tenseurs antisymétriques) de l'espace à quatre dimensions. Les produits en question ne devraient être que des fragments d'expressions plus adaptées à l'espace universel.

**Produit scalaire.** — La généralisation de la notion de produit scalaire à l'espace à quatre dimensions est immédiate :  $A_1 A_2 A_3 A_4$ ,  $B_1 B_2 B_3 B_4$ , sont les composantes de deux vecteurs A et B, on obtient le produit scalaire généralisé, en ajoutant un terme d'indice 4 aux termes d'indices 1, 2, 3. On a ainsi

$$\mathcal{P} = \sum_1^4 A_k B_k$$

mais si l'un au moins des deux vecteurs d'espace provient d'un tenseur antisymétrique, au lieu de provenir d'un quadrivecteur, la généralisation en question n'est plus possible. C'est précisément le cas du travail, car la force est selon la conception classique, le produit d'une

accélération par une masse, et nous avons vu que l'accélération est un vecteur d'espace type polaire, et provient d'un tenseur. Le travail n'est donc pas issu d'un produit scalaire généralisé. Nous verrons plus loin dans quel formalisme il trouve sa place.

**Produit vectoriel.** — Dans l'espace à trois dimensions, le produit vectoriel  $\vec{A} \wedge \vec{B}$  d'un vecteur  $\vec{B}$  par un vecteur  $\vec{A}$  a pour composantes

$$\begin{aligned} P_1 &= A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ P_2 &= A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ P_3 &= A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned}$$

Il résulte d'une transformation linéaire sur les composantes de  $B$ , qui a pour matrice

$$(1) \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & -A_3 & A_2 \\ A_3 & 0 & -A_1 \\ -A_2 & A_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Effectivement, on obtient la matrice représentative du vecteur  $\vec{A} \wedge \vec{B}$  en multipliant le vecteur  $\vec{B}$  sous sa forme matricielle normale (opérande) — une seule colonne et trois lignes — par la matrice  $|A|$  sous la forme (1), qui peut être considérée comme la forme tensorielle associée au vecteur  $\vec{A}$ , en tant qu'opérateur multiplicatif. On a donc

$$(2) \quad \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -A_3 & A_2 \\ A_3 & 0 & -A_1 \\ -A_2 & A_1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix}.$$

La Force de Coriolis s'écrit ainsi

$$(3) \quad \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & R_3 & -R_2 \\ R_3 & 0 & R_1 \\ R_2 & -R_1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} mv_1 \\ mv_2 \\ mv_3 \end{vmatrix}.$$

$F_1 F_2 F_3$  étant les composantes de la force  $\vec{F}$ ,  $v_1 v_2 v_3$  étant les composantes de la vitesse  $\vec{v}$  d'un corpuscule de masse  $m$ , en mouvement dans un système de référence accéléré, le vecteur  $\vec{R}$ , de composantes  $R_1, R_2, R_3$ , étant le rotationnel des vitesses d'entraînement.

La formule (3) est contenue dans la formule d'univers

$$(4) \quad \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & R_3 & -R_2 & -\frac{i}{c} \Gamma_1 \\ -R_3 & 0 & R_1 & -\frac{i}{c} \Gamma_2 \\ R_2 & -R_1 & 0 & -\frac{i}{c} \Gamma_3 \\ \frac{i}{c} \Gamma_1 & \frac{i}{c} \Gamma_2 & \frac{i}{c} \Gamma_3 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} mv_1 \\ mv_2 \\ mv_3 \\ imc \end{vmatrix}$$

dans laquelle le vecteur d'univers  $F$ , qui représente la force généralisée, est égal au produit du vecteur d'univers quantité de mouvement, par le tenseur antisymétrique impulsion-quantité de mouvement.

En explicitant, en posant  $F_4 = iF_0 = \frac{i\mathcal{F}}{c}$ , en séparant les parties réelles de la partie imaginaire, on a :

$$(5) \quad \vec{F} = m\vec{\Gamma} + m\vec{v} \wedge \vec{R}, \quad \mathcal{F} = m\vec{\Gamma} \cdot \vec{v}, \quad (6)$$

on reconnaît dans (5) la force de Galilée et la force de Coriolis, cette dernière apparaît ainsi comme une nécessité de la symétrie relativiste. (6) nous montre que la puissance  $\mathcal{F}$  n'est pas un scalaire mais le produit par  $c$  de la quatrième composante de la force.

#### Formules de Lorentz précession de Larmor gyro-magnétisme.

Si on remplace la vitesse d'entraînement  $V$  par le vecteur *impulsion potentielle*  $\frac{A}{c}$  (ainsi nommé parce qu'il est formé à partir du potentiel d'univers  $A$  et qu'il a les dimensions d'une impulsion), la masse  $m$  du corpuscule par sa charge  $e$ , le tenseur  $T_{ik}$  (6 § 2) se change en  $\frac{1}{c}F_{ik}$  (3 § 2) la formule (4) devient

$$\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} e\frac{v_1}{c} \\ e\frac{v_2}{c} \\ e\frac{v_3}{c} \\ ie \end{vmatrix}$$

soit avec les notations vectorielles

$$(8) \quad \vec{F} = e\vec{E} + e\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{H}, \quad \mathcal{P} = e\vec{E} \cdot \vec{v}, \quad (9)$$

on reconnaît dans (8), la force de Coulomb et la force de Lorentz. C'est pourquoi l'équation de la dynamique pour les corpuscules électrisés, qui s'écrit du point de vue classique, et dans les systèmes galiléens

$$m\vec{\Gamma} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{H}\right)$$

peut prendre la forme tensorielle plus générale

$$mT_1 = \frac{e}{c} T_2, \quad (10)$$

$T_1$  et  $T_2$  étant les tenseurs mécaniques et électromagnétiques des formules (4) et (6), équation qui se décompose en les deux équations vectorielles

$$\vec{R} = \frac{e}{mc} \vec{H}, \quad \vec{\Gamma} = \frac{e}{m} \vec{E}.$$

Ces expressions constituent la forme relativiste et rigoureuse du théorème de LARMOR. Elles montrent que le mouvement d'une particule matérielle de masse  $m$ , de charge  $e$ , dans un système de référence tournant par rapport aux axes de Galilée, à la vitesse  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{R}$ , et en présence d'un champ magnétique  $\vec{H}$ , est le même que si le système ne tournait pas, à condition de compenser l'effet de la rotation par une valeur convenablement choisie du champ magnétique, soit

$$\vec{H} = \frac{mc}{e} \vec{R} = \frac{2mc}{e} \vec{\omega}$$

$\omega$  est la *précession de LARMOR*.

Il faut en outre compenser l'accélération d'entraînement (force centrifuge) qui se présente comme un champ gravifique axifuge, à l'aide d'un champ électrique

$$\vec{E} = \frac{m}{e} \vec{\Gamma}.$$

Le théorème de Larmor ne tient pas compte du champ électrique



compensateur, et c'est la raison pour laquelle on le considère comme approché. Ce théorème est généralement appliqué aux mouvements des électrons à l'intérieur de l'atome, lorsqu'on perturbe ce mouvement par un champ magnétique. L'étude qui précède montre que le mouvement reste inchangé, à condition de le rapporter à un système tournant par rapport aux axes de Galilée, à la vitesse de précession

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \frac{e}{mc} \vec{H}, \text{ à condition également que l'on puisse ne pas tenir}$$

compte du champ « gravifique » axifuge produit par l'accélération d'entraînement. Lorsque le champ magnétique est de dix mille Gauss, ce qui est déjà une valeur élevée, la vitesse de précession correspond à une fréquence de 48 mégacycles, ce qui est relativement peu, car, si l'on fait passer l'axe de rotation par le centre de l'atome, il en résulte, du fait des faibles dimensions de l'atome, une accélération centrifuge négligeable par rapport aux forces coulombiennes mises en jeu.

Dans le cas d'une pièce en matière conductrice que l'on fait tourner, les électrons libres sont chassés à la périphérie et le champ « gravifique » axifuge est compensé automatiquement par un champ électrique de

$$\text{direction opposée, et satisfaisant à la condition requise } \vec{E} = \frac{m}{e} \vec{\Gamma}, \text{ de}$$

manière à ce que l'équilibre soit atteint et que le travail nécessaire pour déplacer un électron libre d'un point à l'autre de la substance reste nul. On voit que dans ce cas, un champ magnétique approprié fera disparaître la perturbation due à la rotation *et les mouvements intra-atomiques seront absolument ce qu'ils seraient dans une substance immobile, et sans champ magnétique.* Dans ce cas là, la solution est rigoureuse.

D'autre part, puisque le champ magnétique  $\vec{H}$  suffit pour supprimer la perturbation due à la rotation, on en déduit que ces deux causes ont des effets égaux et opposés, c'est-à-dire, que la rotation  $\vec{\omega}$  et le champ  $\vec{H}$  produiront des effets identiques. *Ainsi, le gyro-magnétisme se trouve du même coup expliqué.*

Cette théorie gyro-magnétique a été ébauchée en 1944, dans un article aux *Cahiers de physique*, qui, par suite des vicissitudes de cette publication, parut seulement en 1947, au dernier numéro d'un périodique qui devait connaître une longue éclipse. Nous avons mis en évidence le parallélisme parfait qui existe entre un volant de masses, et un courant électrique circulaire, entre un gyroscope placé dans

un système tournant (terre) et un solénoïde placé dans un champ magnétique, entre un moment cinétique et un moment magnétique : analogie qui préparait déjà la nouvelle interprétation du Spin, laquelle sera précisée au chapitre II, § 3.

### § 5. — Matrices et nombres complexes.

La théorie des vecteurs prend une forme particulièrement simple dans l'espace euclidien à *deux dimensions*, c'est-à-dire dans le plan, grâce à la théorie des nombres complexes. Comme nous avons en vue l'étude des vecteurs de l'espace à *quatre dimensions*, nous allons la présenter sous une forme susceptible d'une généralisation immédiate.

Soient donc deux axes rectangulaires  $Ox_1, Ox_2$  du plan,  $x_1$  et  $x_2$  les coordonnées d'un point M, B un vecteur de composantes  $b_1$  et  $b_2$ . Nous allons lui faire subir une transformation linéaire, par les formules

$$(1) \quad \begin{aligned} c_1 &= a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ c_2 &= a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{aligned}$$

que nous pouvons écrire en notations matricielles

$$(2) \quad \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$$

la matrice opératrice peut s'écrire

$$(3) \quad |a| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} + a_{21} \\ a_{21} + a_{12} & 2a_{22} \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} \\ a_{21} - a_{12} & 0 \end{vmatrix}$$

La première matrice de 3 est *symétrique*, nous lui imposons de représenter le produit d'une quantité scalaire par la matrice unité. Il faut donc que l'on ait

$$(4) \quad a_{11} = a_{22} = a_1 \quad a_{12} = -a_{21} = -a_2 \quad (5)$$

moyennant quoi, elle se réduit à la forme diagonale

$$(6) \quad |a_1| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

tandis que la deuxième matrice s'écrit  $ea_2$

avec 
$$e = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Il est facile de constater que la matrice  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  représente l'opérateur identique, qui ne change pas l'opérande, tandis que la matrice (7) représente l'opérateur rotation de l'angle  $\frac{\pi}{2}$ , qui fait tourner un vecteur d'un quart de tour, sans changer sa valeur, de sorte que si on l'applique deux fois de suite, on a  $e^2 = -1$ , c'est à ce titre que l'on peut poser  $e = \sqrt{-1}$ . L'opérateur matriciel peut donc s'écrire

$$A = a_1 = ea_2.$$

Si on effectue la multiplication tensorielle (2), on a

$$|c| = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ a_2 b_2 - a_1 b_1 \end{vmatrix} \quad (8)$$

On peut poser  $a_1 = A \cos \theta$   $a_2 = A \sin \theta$  (avec  $A^2 = a_1^2 + a_2^2$ ) 8 s'écrit

$$c = A \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} \quad (9)$$

On voit que la transformation en question fait tourner le vecteur B d'un angle  $\theta$  et en multiplie la longueur par A. La longueur du vecteur A est son module, tandis que  $\theta$ , qui représente l'angle que fait ce vecteur avec l'axe des  $x$  est son argument.

On peut écrire également

$$b_1 = B \cos \varphi \quad b_2 = B \sin \varphi$$

on verrait alors que l'opérateur matriciel ainsi défini, donne un vecteur C dont le module est égal au produit AB des modules, tandis que l'argument est égal à la somme  $\theta + \varphi$  des arguments.

Les vecteurs opérateurs et opérandes jouent encore des rôles différents. Cette dissymétrie disparaît du fait que l'on peut associer au vecteur B la même forme matricielle à deux lignes deux colonnes et deux composantes distinctes, et que le produit de ces matrices

donne précisément la matrice associée au vecteur C, dans le même formalisme. On a en effet

$$(10) \quad \begin{vmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} c_1 &= a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ c_2 &= a_2 b_1 + a_1 b_2 \end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$C = c_1 + ec_2 = (a_1 + ea_2)(b_1 + eb_2) \quad (11)$$

Le polynôme du second membre se développe comme un polynôme algébrique, parce que l'addition des matrices est associative.

Il suffira d'écrire chaque fois  $e^2 = -1$ , et on retrouve la théorie classique des imaginaires.

### Les fonctions analytiques à deux dimensions.

Cette représentation des nombres complexes par des matrices est intéressante dans son application à la théorie des fonctions analytiques dans l'espace à deux dimensions, par suite de la clarté qu'elle apporte sur la question, et des généralisations qu'elle permet, dans l'espace à quatre dimensions.

Soient

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ X_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (12)$$

deux fonctions de  $x_1$  et  $x_2$  qui sont supposées représenter les composantes d'un vecteur X fonction d'un vecteur  $x$ . Si on donne à  $x$  l'accroissement  $dx$  de composantes  $dx_1$  et  $dx_2$ , il en résulte pour X l'accroissement  $dX$ , de composantes  $dX_1$  et  $dX_2$  et on a

$$\begin{vmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{vmatrix} \quad (13)$$

soit

$$|dX| = \left| \frac{dX}{dx} \right| \times |dx| \quad (14)$$

Si l'on veut que le terme  $\frac{dX}{dx}$  qui peut être considéré comme la dérivée d'un vecteur, soit un vecteur du même type, c'est-à-dire un nombre complexe, il faut annuler la composante symétrique, et

aligner la diagonale principale, suivant le processus déjà utilisé, ce qui nous donne

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad (15)$$

On reconnaît les conditions de CAUCHY.

Ces conditions peuvent s'écrire également

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

$$\text{ou} \quad \begin{vmatrix} \partial_1 & -\partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

(avec  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ ), ou encore

$$\nabla f = (\partial_1 + i\partial_2)(f_1 + if_2) = 0 \quad (18)$$

ce qui équivaut à donner à l'opérateur vectoriel  $\nabla$  de composantes  $\partial_1, \partial_2$ , les propriétés d'un nombre complexe.

Le but de cet étude est de fournir un modèle sur qui puisse être généralisé sans difficulté aux espaces à trois et quatre dimensions. L'emploi des matrices le permet aisément, il suffit d'augmenter le nombre des lignes et des colonnes.

Chose curieuse, la théorie des vecteurs du plan euclidien ne se généralise pas dans l'espace euclidien à trois dimensions. La théorie des vecteurs n'est qu'une adaptation bâtarde de la théorie des quaternions, c'est la raison pour laquelle elle est insuffisante. D'ailleurs elle nécessite en fait quatre dimensions : trois pour la composante vectorielle, et une pour la composante scalaire. C'est pourquoi elle définit deux produits : le produit vectoriel et le produit scalaire, qui sont les composantes d'un vecteur d'univers ou d'un quaternion. Son grand défaut est d'être une théorie de l'espace à quatre dimensions et de ne pas l'admettre. C'est donc dans l'espace à quatre dimensions que l'on doit remplacer la théorie des vecteurs ; et la théorie des quaternions fournit alors un fil conducteur très intéressant.

#### Vecteurs, Tenseurs et quaternions.

Nous transposons, en le généralisant, le processus développé au paragraphe précédent.

Soit B un vecteur d'univers, de composantes  $b_1 b_2 b_3 b_4$ . Opérons sur ce vecteur la transformation linéaire la plus générale

$$\begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} \quad (19)$$

puis décomposons cette matrice en une matrice symétrique et une matrice antisymétrique, imposons à la première d'avoir tous ses éléments nuls en dehors de la diagonale principale, et alignons celle-ci, cela nous donne

$$(20) \quad \begin{aligned} a_{12} + a_{21} &= 0 & a_{14} + a_{41} &= 0 \\ a_{23} + a_{32} &= 0 & a_{24} + a_{42} &= 0 \\ a_{31} + a_{13} &= 0 & a_{34} + a_{43} &= 0 \end{aligned}$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = \varepsilon_0 a_4 \quad (\text{avec } \varepsilon_0 = \pm 1)$$

posons alors

$$(21) \quad \begin{aligned} a_{23} &= -a_{32} = \varepsilon_1 a_1 & a_{14} &= -a_{41} = \varepsilon_2 a_1 \\ a_{31} &= -a_{13} = \varepsilon_1 a_2 & a_{24} &= -a_{42} = \varepsilon_2 a_2 \\ a_{12} &= -a_{21} = \varepsilon_1 a_3 & a_{34} &= -a_{43} = \varepsilon_3 a_3 \end{aligned}$$

de manière à n'avoir plus que quatre coefficients qui peuvent être pris parmi les quatre composantes d'un vecteur A. Ceci posé, la transformation 19 s'écrit (en prenant par exemple  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = +1$ )

$$(22) \quad \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 & a_4 & a_3 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & a_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix}$$

et nous la définirons comme étant le *produit généralisé* du vecteur d'univers B par le vecteur d'univers A. Cette définition contient à la fois celle du *produit scalaire* et celle du *produit vectoriel*, rencontrés dans les applications. En réalité, le vecteur B n'est pas multiplié par le vecteur A, mais par la *matrice quaternaire*, associée au vecteur A, et obtenue à l'aide des quatre composantes de ce vecteur, par le processus déjà défini.

Nous pouvons considérer la matrice de ce dernier comme la somme des quatre matrices  $e_1a_1$ ,  $e_2a_2$ ,  $e_3a_3$ ,  $e_4a_4$  avec

$$(23) \quad e_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad e_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$e_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad e_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

et écrire

$$(24) \quad a = e_1a_1 + e_2a_2 + e_3a_3 + e_4a_4.$$

Nous suivons pour fil conducteur le problème plan (à deux dimensions), et nous associons au vecteur B la matrice quaternaire

$$(25) \quad B = e_1b_1 + e_2b_2 + e_3b_3 + e_4b_4.$$

Le produit de B par A nous donne la matrice C. Il est remarquable que dans ce cas encore, nous obtenions précisément la matrice quaternaire associée au vecteur C, soit

$$(26) \quad C = e_1c_1 + e_2c_2 + e_3c_3 + e_4c_4.$$

Les composantes de C s'obtiennent ainsi directement en faisant les produits algébriques des expressions (24) et (25), et en remplaçant les produits des matrices  $e_ie_k$  par leurs valeurs. On a la table de multiplication

		multiplicande			
		$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
	$e_1$	$-e_4$	$-e_3$	$e_2$	$e_1$
	$e_2$	$e_3$	$-e_4$	$-e_1$	$e_2$
	$e_3$	$-e_2$	$e_1$	$-e_4$	$e_3$
	$e_4$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$+e_4$

(27)

qui est précisément celle qui lie les bases des *quaternions* d'HAMILTON, inventés par le général physicien, pour généraliser la théorie des nombres complexes.

En conclusion, à tout quadrivecteur, on peut associer une matrice quaternaire, qui n'est autre qu'un quaternion. Cette correspondance entre un vecteur et un quaternion n'est pas affectée par la multipli-

cation de ces deux êtres par une même matrice quaternaire, c'est-à-dire par un quaternion, et le quaternion obtenu dans le second cas correspond encore au vecteur obtenu dans le premier cas. Cette propriété s'étend aux changements d'axes de coordonnées, à conditions que, en généralisation de ce qui se passe dans le problème à deux dimensions, ce changement d'axes soit obtenu à l'aide d'une transformation linéaire dont l'opérateur soit un quaternion.

## § 6. — Fonctions Analytiques de l'espace universel.

Quand il s'agit de définir les fonctions analytiques de la variable hyper-complexe quaternionnienne, les deux définitions fournies à propos du problème à deux dimensions, se généralisent dans des voies différentes :

On peut former le tenseur dérivée  $D = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|$  suivre le mécanisme précédent, pour ne lui conserver que quatre composantes, ce qui implique l'annulation de la composante symétrique d'une part, et l'alignement de la diagonale principale d'autre part, soit :

$$(28) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3}$$

$$(29) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \quad \text{d'autre part.}$$

On obtient ainsi les équations définissant la *fonction analytique* « de première espèce » dans l'espace à quatre dimensions.

On peut aussi annuler l'expression

$$(30) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_4} & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_4} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{\partial}{\partial x_4} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{vmatrix} = 0$$

[c. f. *comptes Rendus de l'Ac. des Sciences*, 1<sup>er</sup> mai 1939, page 1391, formule (4)].



ou, ce qui revient au même, l'expression

$$(31) \quad \begin{vmatrix} \partial_1 & \partial_3 & -\partial_2 & \partial_1 \\ -\partial_3 & \partial_1 & \partial_1 & \partial_2 \\ \partial_2 & -\partial_1 & \partial_1 & \partial_3 \\ -\partial_1 & -\partial_2 & -\partial_3 & \partial_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f_1 & f_3 & -f_2 & f_1 \\ -f_3 & f_1 & f_1 & f_3 \\ f_2 & -f_1 & f_1 & f_2 \\ -f_1 & -f_2 & -f_3 & f_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou encore l'expression

$$(32) \quad (e_1\partial_1 + e_2\partial_2 + e_3\partial_3 + e_4\partial_4)(e_1f_1 + e_2f_2 + e_3f_3 + e_4f_4) = 0$$

ou plus simplement

$$\nabla f = 0 \quad (33)$$

$\nabla$  étant l'opérateur vectoriel ou quaternionien, de composantes  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ ,  $f$  étant le quaternion de composantes  $f_k$ .

Si l'on pose  $f_k = A_k + iB_k$ , pour  $k = 1, 2, 3$  et

$$f_4 = U + iV,$$

si on revient en outre au temps en posant  $x_4 = ict$ , et si enfin on adopte les notations vectorielles classiques, on voit que les équations 30 à 33 prennent la forme

$$(34) \quad \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{rot } \vec{A} &= -\vec{\text{grad}} U & \text{div } \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{rot } \vec{B} &= \vec{\text{grad}} V & \text{div } \vec{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations représentent la propagation d'une onde vectorielle comportant une composante transversale et une composante longitudinale, elles comprennent comme cas particulier :

D'une part les ondes *irrotationnelles*, et longitudinales, qui sont des ondes de gradient, ayant pour équations

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\text{grad}} V \\ \text{div } \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (36) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} U \\ \text{div } \vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

(les ondes 35 et 36 étant indépendantes et représentant deux solutions du même système).

D'autre part, les ondes sans divergence, et *transversales*, qui sont des ondes de rotations, ayant pour équations

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \text{rot } \vec{A} & \text{div } \vec{A} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\text{rot } \vec{B} & \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

et qui ne sont autre que les équations de Maxwell, auxquelles obéissent les champs électromagnétiques.

Les équations 34 et à fortiori les équations 35, 36 et 37, sont à l'équation de d'Alembert.

$$(37) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2},$$

ce que les conditions de Cauchy (15) sont à l'équation de Laplace

$$(38) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0,$$

dans l'espace à deux dimensions.

*En conclusion: les champs électro-magnétiques sont des fonctions analytiques de seconde espèce de l'espace à quatre dimensions.*

**Quaternion complexe, double conjugaison.**

Soit  $Q = e_1 A_1 + e_2 A_2 + e_3 A_3 + e_4 A_4$  un quaternion. Nous appelons avec Hamilton quaternion conjugué, le quaternion

$$Q^* = -e_1 A_1 - e_2 A_2 - e_3 A_3 + e_4 A_4$$

et dont la matrice est la transposée de celle de  $Q$ , soit  $Q^* = Q^\sim$ . Nous avons la relation bien connue

$$QQ^* = \sum_1^4 A_k^2 \quad \text{qui donne un scalaire.}$$

Lorsque les composantes  $A_k$  sont des nombres complexes à deux dimensions de la forme

$$A_k = a_k + ib_k$$

il existe de ce fait une autre conjugaison qui opère cette fois sur la base  $i$  on a

$$Q^\star = e_1 A_1^\star + e_2 A_2^\star + e_3 A_3^\star + e_4 A_4^\star$$

On peut associer ces deux conjugaisons, ce qui donne le quaternion doublement conjugué

$$Q^{**} = -e_1 A_1^* e_2 A_2^* - e_3 A_3^* + e_4 A_4^*.$$

Le produit d'un quaternion par le quaternion doublement conjugué et par  $i$ , soit

$$iQ^{**}Q = C = e_1 C_1 + e_2 C_2 + e_3 C_3 + e_4 C_4$$

donne un quaternion dont les trois composantes d'espace sont réelles (puisque égales à leurs conjuguées), on a

$$\begin{aligned} C_1 &= i[(A_1^* A_1 - A_1^* A_4) + (A_2^* A_3 - A_3^* A_2)] \\ C_2 &= i[(A_1^* A_2 - A_2^* A_4) + (A_3^* A_1 - A_1^* A_3)] \\ C_3 &= i[(A_1^* A_3 - A_3^* A_4) + (A_1^* A_2 - A_2^* A_1)] \\ C_4 &= iC_0 = i(A_1^* A_1 + A_2^* A_2 + A_3^* A_3 + A_4^* A_4) \end{aligned}$$

Le vecteur associé à ce quaternion se rencontrera au chapitre I, fonction 49 et au § 9 du chapitre IV, formule 13, dans la représentation du vecteur *courant d'énergie*, en mécanique ondulatoire.

## CHAPITRE PREMIER

### DEUXIÈME PARTIE

## LES COUPLES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Cette étude a été entreprise pour permettre d'interpréter, par correspondance entre les formes issues de la théorie classique du champ électromagnétique et celles que l'on obtient à partir de la conception de l'onde associée au corpuscule, les tenseurs d'interaction qui apparaissent dans l'équation des ondes associées aux corpuscules chargés, en présence du champ électro-magnétique. L'auteur montre que les champs et les polarisations sont des grandeurs de même nature, et produisent les mêmes effets, comme le champ gravifique et l'accélération dans la Relativité Généralisée. Il existerait aussi une interaction potentiel-courant et une interaction potentiel-champ, qui expliqueraient simplement les couples de radiation, dont la réalité paraît aujourd'hui établie. Une étude parallèle au raisonnement classique qui conduit au Tenseur de Maxwell, a permis de former un vecteur densité de moment cinétique, manifestation macroscopique du Spin et un tenseur de couples superficiels, tout à fait analogue au vecteur densité d'impulsion, et au tenseur densité de tension superficielle. Comme pour leurs homologues classiques, ce vecteur et ce tenseur s'intègrent dans un Tenseur d'Univers.

### § 7. — Le tenseur d'interaction champ-polarisation.

Lorsqu'une substance aimantée, dont l'intensité d'aimantation est représentée par le vecteur  $\vec{J}$ , est placée dans un champ magnétique  $\vec{H}$ , chaque élément de volume  $d\tau$  de cette substance est soumis au couple

$$(40) \quad d\vec{C} = \vec{J} \wedge \vec{H} d\tau$$

il possède en outre l'énergie

$$(41) \quad d\mathcal{E} = -\vec{J} \cdot \vec{H} d\tau.$$

Ces deux formules appartiennent à l'espace à trois dimensions. Si les idées exprimées au § 4 sont exactes, des deux formules doivent être contenues dans une forme plus large, appartenant à l'Espace Universel. On serait tenté d'intégrer  $\vec{H}$  et  $\vec{J}$  dans des formules tensorielles du type 3 rencontrées au § 2, et d'ajouter dans les cases vides de ces tenseurs les termes électriques correspondants, mais le résultat des essais effectués dans cette voie paraît dépourvu de sens. Par contre, on s'aperçoit aisément que les formules (40) et (41) s'intègrent dans la formule tensorielle unique

$$(42) \quad d \begin{vmatrix} \mathcal{E} & c_3 & -c_2 & c_1 \\ -c_3 & \mathcal{E} & c_1 & c_2 \\ c_2 & -c_1 & \mathcal{E} & c_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & \mathcal{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & H_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & H_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & J_3 & -J_2 & J_1 \\ -J_3 & 0 & J_1 & J_2 \\ J_2 & -J_1 & 0 & J_3 \\ -J_1 & -J_2 & -J_3 & 0 \end{vmatrix} d\tau$$

qui représente le produit de deux quaternions. Le quaternion C représente alors le *tenseur couple-énergie*.

Le cas de la substance polarisée électriquement se traite d'une manière identique. Si  $\vec{\Pi}$  est la polarisation,  $\vec{E}$  le champ électrique, le couple et l'énergie sont donnés par le tenseur-quaternion

$$(43) \quad \begin{vmatrix} \mathcal{E} & c_3 & -c_2 & c_1 \\ -c_3 & \mathcal{E} & c_1 & c_2 \\ c_2 & -c_1 & \mathcal{E} & c_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & \mathcal{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & E_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & E_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & \Pi_3 & -\Pi_2 & \Pi_1 \\ -\Pi_3 & 0 & \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_2 & -\Pi_1 & 0 & \Pi_3 \\ -\Pi_1 & -\Pi_2 & -\Pi_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Lorsque la substance possède à la fois une polarisation électrique et une polarisation magnétique (aimantation), qu'elle est en outre soumise à un champ qui possède à la fois une composante électrique E et une composante magnétique H, on aura

$$d \begin{vmatrix} \mathcal{E} & c_3 & -c_2 & c_1 \\ -c_3 & \mathcal{E} & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 & \mathcal{E} & c_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & \mathcal{E} \end{vmatrix} + i d \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{F}_3 & -\mathcal{F}_2 & \mathcal{F}_1 \\ -\mathcal{F}_3 & 0 & \mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_2 & \mathcal{F}_1 & 0 & \mathcal{F}_3 \\ -\mathcal{F}_1 & -\mathcal{F}_2 & -\mathcal{F}_3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} E & \Pi_3 - iE_3 & -(H_2 - iE_2) & H_1 - iE_1 \\ -(H_3 - iE_3) & 0 & H_1 - iE_1 & H_2 - iE_2 \\ H_2 - iE_2 & H_1 - iE_1 & 0 & H_3 - iE_3 \\ -(H_1 - iE_1) & -(H_2 - iE_2) & -(H_3 - iE_3) & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & J_3 + i\Pi_3 & -(J_2 + i\Pi_2) & J_1 + i\Pi_1 \\ J_3 + i\Pi_3 & 0 & J_1 + i\Pi_1 & J_2 + i\Pi_2 \\ J_2 + i\Pi_2 & -(J_1 + i\Pi_1) & 0 & J_3 + i\Pi_3 \\ -(J_1 + i\Pi_1) & -(J_2 + i\Pi_2) & -(J_3 + i\Pi_3) & 0 \end{vmatrix} d\tau.$$

Soit  $\sigma = \psi \varphi^*$  avec  $\varphi = \mathfrak{J} + i\mathfrak{I}$ ,  $\psi = \mathfrak{H} + i\mathfrak{E}$ ,  $\sigma = c + i\mathfrak{L}$  tenseurs quaternion, et  $c_i = \mathfrak{E}_i$ .

Le premier tenseur du premier membre (réel) est le tenseur couple-énergie, des formules (42) et (43). Le second (imaginaire), sera interprété au § 9 comme pouvant représenter un flux d'énergie rayonnante et d'impulsion, — les notions de polarisation électrique et magnétique ayant été préalablement élargies, — suivant les conceptions développées au § 8. Le tenseur complexe 44 sera appelé « *Tenseur d'interaction Champ-Polarisation* ».

### § 8. — Les champs et les polarisations.

Le champ magnétique a les dimensions d'une aimantation. Si on multiplie l'aimantation par  $4\pi$ , on obtient un vecteur qui se compose avec le champ magnétique (lequel produit l'aimantation) pour donner le vecteur induction, lequel se comporte comme un champ magnétique. Il en résulte que le vecteur  $\vec{H} = 4\pi\vec{\mathfrak{J}}$  a toutes les propriétés d'un champ magnétique, et en particulier celle d'engendrer une force électro-motrice par variation de son flux à travers un circuit. Il doit en être de même du vecteur aimantation  $\vec{\mathfrak{J}}$  qui n'en diffère que par le coefficient  $4\pi$ . Par suite du choix de ce coefficient, l'aimantation considérée comme champ magnétique s'exprime en Gauss.

Inversement, le vecteur  $\vec{\mathfrak{J}} = -\frac{\vec{H}}{4\pi}$  (qui s'exprime en unités d'aimantation) et le vecteur  $\mathfrak{H}' = -\frac{\vec{E}}{4\pi}$  (qui s'exprime en unités de polarisation électrique), doivent avoir les propriétés de ces vecteurs et se composer respectivement avec l'aimantation et la polarisation, dans le calcul des couples.

Pour s'en assurer, il suffit de calculer l'énergie mutuelle de deux solénoïdes, ou plus généralement, de deux systèmes de courant que nous appellerons  $S_1$  et  $S_2$ , en considérant le champ magnétique de l'un d'eux comme un milieu aimanté avec une intensité égale au produit du champ par le coefficient  $\frac{-1}{4\pi}$ , ce milieu étant soumis au champ magnétique du second.

Si  $\vec{H}_1$  est le champ magnétique associé au système  $S_1$ ,  $\vec{H}_2$  le champ

magnétique associé au système  $S_2$ , l'élément de volume  $d\tau$  peut être considéré :

Soit comme possédant l'aimantation  $\vec{J}_2 = \frac{-\vec{H}_2}{4\pi}$  et soumis à l'action du champ  $\vec{H}_1$ , soit comme possédant l'aimantation  $\vec{J}_1 = \frac{-\vec{H}_1}{4\pi}$  et soumis à l'action du champ  $\vec{H}_2$ .

Dans les deux cas, l'énergie d'interaction a pour expression

$$(45) \quad dW = \frac{1}{4\pi} \vec{H}_1 \vec{H}_2 d\tau.$$

On en déduira l'énergie d'interaction des deux systèmes, par une intégration à tout l'espace, *les forces et les couples sont alors déterminés.*

Le calcul classique consiste à composer les deux champs  $\vec{H}_1$  et  $\vec{H}_2$  pour avoir le champ résultant  $\vec{H}_1 + \vec{H}_2$ . L'énergie localisée vaut alors

$$dW = \frac{(\vec{H})^2}{8\pi} d\tau = \frac{(\vec{H}_1 + \vec{H}_2)^2}{8\pi} d\tau = \left( \frac{H_1^2}{8\pi} + \frac{H_2^2}{8\pi} + \frac{\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2}{4\pi} \right) d\tau.$$

En intégrant à tout l'espace, le premier terme du dernier membre donne l'énergie localisée appartenant au système  $S_1$ . Le deuxième donne l'énergie du système  $S_2$ . Le troisième terme, qui varie avec les positions mutuelles des deux systèmes, représente l'énergie mutuelle due à l'interaction de  $S_1$  et de  $S_2$ . C'est précisément celle que nous venons de calculer<sup>(3)</sup>.

Le cas de l'interaction électrostatique de deux systèmes électrisés  $S_1$  et  $S_2$ , produisant l'un et l'autre des champs électriques  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  auxquels sont associées les polarisations  $\vec{\Pi}_1$  et  $\vec{\Pi}_2$ , se traite de la même façon.

En conclusion, nous postulons, comme un principe fondamental de l'électro-magnétisme, que *le champ électrique et la polarisation électrique d'une part, le champ magnétique et la polarisation magnétique ou aimantation d'autre part, ont la même nature physique et produisent les mêmes effets, tout comme le champ gravifique et l'accélération selon la relativité généralisée.*

(3) Il est également possible de faire jouer aux champs composants  $H_k$  des rôles symétriques en leur associant les polarisations  $-H_k/8\pi$  et en faisant réagir chaque champ sur les polarisations associées aux autres champs. La réaction de chaque champ composant sur la polarisation qui lui est associée, donnerait les termes classiques  $H_k^2/8\pi$  de l'énergie localisée.

**Courant de déplacement, équation de Maxwell-Ampère.**

Si  $\vec{j}$  est le vecteur courant, le théorème d'Ampère peut prendre la forme différentielle

$$\text{rot } \vec{H} = 4\pi \vec{j}.$$

Or un courant électrique peut être produit :

Soit par l'existence dans un milieu conducteur, d'un champ électrique ne dérivant pas d'un potentiel (courant-fermé).

Soit par une variation dans la répartition des charges électriques, c'est-à-dire par la variation d'une polarisation électrique  $\vec{\Pi}$  (courant ouvert). On peut alors écrire

$$(46) \quad \vec{j} = -\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \text{ u. e. s. } = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \text{ u. e. m.}$$

(C'est ce qui se passe lorsque les armatures d'un condensateur plan se déchargent à travers un diélectrique dont l'isolement est imparfait.)

Si le champ magnétique et la polarisation ont réellement la même nature, il correspond au champ électrique  $\vec{E}$  la polarisation  $\vec{\Pi} = -\vec{E}/4\pi$  et le vecteur courant

$$\vec{j} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ u. e. s. } \quad \text{ou} \quad \vec{j} = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ u. e. m.}$$

dans lequel on reconnaît le courant dit « de déplacement » (\*) et le théorème d'Ampère s'écrit sous la forme généralisée

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j} = \text{rot } \vec{H}$$

qui n'est autre que l'une des deux équations de Maxwell.

(\*) Ce mot de « courant de déplacement » correspond au modèle mécanique de Maxwell aujourd'hui périmé, il représentait un déplacement d'éther. Cette expression prête aujourd'hui à confusion et devrait être abandonnée. Il serait plus rationnel de réserver le nom de courant tout court au vecteur  $-\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}$  et de préciser qu'il y a « courant de déplacement » lorsqu'il y a effectivement *déplacement de quelque chose*, c'est-à-dire *d'électricité*. Cela reviendrait à intervertir les notations, mais ces nouvelles notations seraient beaucoup plus claires et ne prêterait pas à confusion.



L'équation ci-dessus peut d'ailleurs s'écrire

$$(47) \quad \vec{j} = -\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} + \text{rot } \vec{j}$$

formule qui explique qu'une aimantation puisse venir ajouter ses effets à ceux du courant électrique véritable, pour la formation du potentiel-vecteur électrique<sup>(5)</sup>.

### § 9. — Le tenseur d'énergie radiante.

Le champ, considéré en tant que champ électrique ou magnétique, peut-il réagir sur lui-même, considéré cette fois comme polarisation électrique ou magnétique ? Pour répondre à cette question, il suffit de considérer l'expression (44), et d'admettre que le vecteur  $\vec{j} + i\vec{\Pi}$  représente la polarisation complexe  $\frac{1}{4\pi}(\vec{H} + i\vec{E})$  associée au champ complexe  $\vec{\psi} = \vec{H} + i\vec{E}$ . On obtient ainsi le tenseur-quaternion

$$|C| = i|R| = |H - iE| \times |\vec{j} + i\vec{\Pi}| = -\frac{1}{4\pi} |H - iE| \times |H + iE| = \frac{1}{4\pi} |H - iE|^2 \times |H + iE|^2$$

soit avec les notations de la fin du § 5

$$(48) \quad R = \frac{1}{8\pi i} \psi^{**} \psi$$

R a pour composantes (39, § 5)

$$(49) \quad \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{8\pi i} (\psi_2^* \psi_3 - \psi_3^* \psi_2) = \frac{1}{4\pi} (E_2 H_3 - E_3 H_2) \\ R_2 &= \frac{1}{8\pi i} (\psi_3^* \psi_1 - \psi_1^* \psi_3) = \frac{1}{4\pi} (E_3 H_1 - E_1 H_3) \\ R_3 &= \frac{1}{8\pi i} (\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1) = \frac{1}{4\pi} (E_1 H_2 - E_2 H_1) \\ R_4 &= i\varepsilon = -\frac{1}{8\pi i} (\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3) \quad \text{soit} \quad \varepsilon = \frac{1}{8\pi} \sum_1^3 (E_k^2 + H_k^2) \end{aligned}$$

$\varepsilon$  représentant la densité d'énergie électromagnétique.

Soit  $\vec{R}$  le vecteur de composantes  $R_1 R_2 R_3$ , il a les dimensions d'un

<sup>(5)</sup> Voir une application de la théorie de Dirac, dans « L'électron Magnétique » théorie de Dirac, p. 173, L. de Broglie, Hermann, 1934.

*courant d'impulsion*, tandis que le vecteur  $\vec{cR}$  qui n'est autre que le *Vecteur de Poynting*, représente le *courant d'énergie radiante*. Le vecteur couple, qui représente la partie réelle des trois premières composantes du quaternion  $C = iR$ , est *nul*, parce que le champ et la polarisation ont même direction.

*Le tenseur quaternion  $R$  représente donc le tenseur d'énergie radiante.*

### § 10. — La densité et la polarisation.

Il est bien connu que la densité cubique de charge magnétique  $\rho$  est égale à la divergence de l'aimantation. Au champ magnétique  $\vec{H}$  correspond également, d'après le théorème de Poisson, la densité magnétique  $\rho = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{H}$  soit  $\rho = \operatorname{div} \left( -\frac{\vec{H}}{4\pi} \right)$ , ce qui est tout à fait normal, puisque  $-\frac{\vec{H}}{4\pi}$  représente — selon nous — une aimantation.

Le même raisonnement s'applique à la polarisation électrique et, au champ électrique, de sorte que la *densité* d'électricité peut être définie comme étant représentée par la *divergence de la polarisation* électrique.

Dans ces conditions, la question de la réalité ou de la non réalité des charges magnétiques nous paraît vide de sens. Ces dernières sont tout aussi réelles que les charges électriques, si l'on a convenu de définir les unes et les autres par les formules

$$(50) \quad \rho_e = \operatorname{div} \vec{I} \quad \rho_m = \operatorname{div} \vec{J} \quad (51)$$

En conclusion des raisonnements développés aux §§ 8, 9, 10, l'identité de nature physique entre les champs et les polarisations, apporte de l'ordre et de l'unité dans le formalisme qui constitue l'armature de la théorie électromagnétique.

### § 11. — Le tenseur d'interaction potentiel-courant.

Considérons un courant électrique réparti dans l'espace, et soumis à l'action d'un champ électromagnétique dérivant d'un potentiel scalaire  $U$  et d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$ . Soit  $\rho$  la densité électrique

en chaque point de l'espace et  $\vec{j}$  le vecteur courant. L'énergie de ce système se compose :

1° De l'énergie potentielle localisée avec la densité

$$(52) \quad d\mathcal{E}_i = \rho U d\tau.$$

2° De l'énergie cinétique du courant, dont l'expression s'obtient immédiatement par *symétrie relativiste*. En effet, si  $A_k$  sont les composantes du potentiel vecteur,  $j_k$  celles du vecteur courant, on a  $A_i = iU$ . On a d'autre part  $j_i = i\rho$ , et (51) s'écrit

$$(53) \quad d\mathcal{E}_i = -A_i j_i d\tau.$$

Cette expression ne saurait exister seule et se complète nécessairement d'une expression du type

$$(54) \quad d\mathcal{E}_k = -A_k j_k$$

de sorte qu'il correspond au potentiel vecteur la densité d'énergie

$$(55) \quad d\mathcal{E} = -\vec{A} \cdot \vec{j}.$$

La formule (55) ci-dessus, est susceptible d'applications intéressantes.

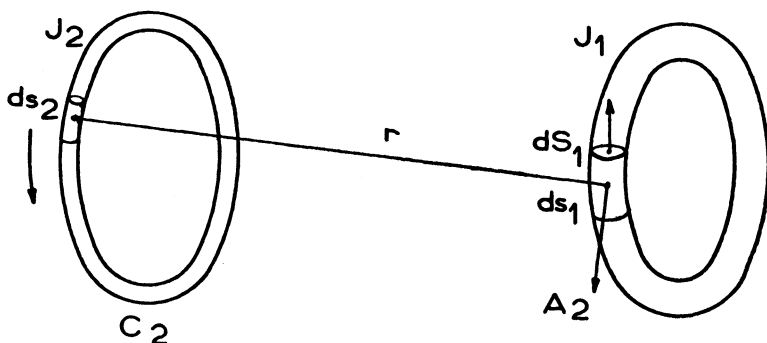


Fig. 2.

Si  $J_1$  est le courant total à travers un circuit fermé  $C_1$ , c'est aussi le flux du vecteur  $\vec{j}$  dans le tube de forces représenté par le conducteur  $C_1$ , (fig. 2) de sorte que l'énergie par élément de longueur  $ds_1$  soumis à l'action d'un potentiel vecteur  $\vec{A}_2$  vaut

$$d\mathcal{E} = -J_1 \vec{A}_2 \cdot \vec{ds}_1.$$

Si  $\vec{A}_2$  est produit par un circuit inducteur  $C_2$ , parcouru par le courant  $J_2$ , on a en chaque point P de l'espace

$$A_2 = - \int_{c_2} \frac{J_2 \vec{ds}_2}{r}$$

$r$  étant la distance de l'élément  $ds$  au point P.

L'énergie mutuelle des deux circuits vaut alors

$$(56) \quad \mathcal{E} = - J_1 J_2 \int_{c_1} \int_{c_2} \frac{\vec{ds}_1 \vec{ds}_2}{r}.$$

On retrouve ainsi une formule bien connue<sup>(6)</sup>, par une voie essentiellement relativiste.

Est-il possible d'aller plus loin dans cette voie? Nous allons voir que oui. En effet, l'énergie mutuelle d'un courant et d'un potentiel vecteur étant donnée par la formule

$$(57) \quad d\mathcal{E} = - \sum_k A_k J_k d\tau$$

les forces et les couples électromagnétiques doivent pouvoir s'exprimer aussi à l'aide des courants. Comme d'autre part, la formule (56) a la même forme que les formules (41) et (43) relatives à l'énergie répartie, due à l'interaction *champ magnétique-aimantation*, ou *champ électrique-polarisation*, les dérivations suivant les différents degrés de liberté doivent faire apparaître des forces et des couples de même forme, et l'on doit également associer au système *courant-potentiel*, un tenseur quaternion « couple-énergie », qui s'écrira

$$(58) \quad dC = d \begin{vmatrix} \mathcal{E} & C_3 & -C_2 & C_1 \\ -C_3 & \mathcal{E} & C_1 & C_2 \\ C_2 & -C_1 & \mathcal{E} & C_3 \\ -C_1 & -C_2 & -C_3 & \mathcal{E} \end{vmatrix} \stackrel{\text{partie réelle de}}{=} - \begin{vmatrix} iU & A_3 & -A_2 & A_1 \\ -A_3 & iU & A_1 & A_2 \\ A_2 & -A_1 & iU & A_3 \\ -A_1 & -A_2 & -A_3 & iU \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i\rho & J_3 & -J_2 & J_1 \\ -J_3 & i\rho & J_1 & J_2 \\ J_2 & -J_1 & i\rho & J_3 \\ -J_1 & -J_2 & -J_3 & i\rho \end{vmatrix} d\tau$$

avec

$$(59) \quad \begin{cases} dC_1 = J_2 A_3 - J_3 A_2 \\ dC_2 = J_3 A_1 - J_1 A_3 \\ dC_3 = J_1 A_2 - J_2 A_1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad d\vec{C} = \vec{J} \wedge \vec{A} d\tau$$

$$(60) \quad dC_4 = d\mathcal{E} = (-A_1 J_1 - A_2 J_2 - A_3 J_3 + \rho U) d\tau.$$

Le couple donné par les formules (59) ne paraît pas avoir été prévu ni observé. Est-il une simple vue de l'esprit, ou constitue-t-il

(6) V. p. exemple Bruhat, Traité d'électricité, p. 197.

un effet inconnu de l'électromagnétisme? Il est intéressant d'appliquer la formule en question à un problème simple tel que celui des couples de radiation. On sait que les ondes élastiques à polarisation circulaires transportent non seulement une densité de quantité de mouvement, mais encore une densité de moment cinétique. La quantité de mouvement peut être cédée à des obstacles qui absorbent l'onde ou qui la renvoient en sens inverse et fait apparaître en échange une *pression de radiation*. Le moment cinétique de l'onde peut aussi être cédé à des obstacles qui détruisent l'onde, ou à des analyseurs qui en détruisent la rotation ou la font tourner en sens inverse. Ces dispositifs reçoivent en échange une densité superficielle de couple que l'on appelle le *couple de radiation*.

Dans la théorie électromagnétique, le champ électrique d'onde le frappant un obstacle absorbant ou réfléchissant, produit un courant qui réagit sur le champ magnétique pour donner naissance à la pression de radiation. Par contre le couple de radiation dont l'existence paraît maintenant acquise, demeurerait *inexplicable*, parce qu'un élément de courant ne pouvait être soumis qu'à une force mais pas à un couple.

Nous verrons au § 13 que la formule (59) paraît combler cette lacune, donne la valeur correcte du couple de radiation et prévoit l'existence d'une densité de moment cinétique dont elle fournit en outre l'expression.

## § 12. — Les équations générales de l'électromagnétisme.

L'identité de nature qui existe — selon nous — entre le champ électrique et la polarisation d'une part, entre le courant électrique et la dérivée par rapport au temps d'une polarisation, d'autre part, nous a permis de compléter le théorème d'Ampère, et d'obtenir l'équation de Maxwell, celle qui lui correspond.

Inversement, l'autre équation de Maxwell, celle qui correspond au phénomène de l'induction, ne doit-elle pas être complétée par un terme représentant un courant de magnétisme? Oui, serons-nous tenté de répondre, car le vecteur  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  représente un courant de magnétisme, et il est tout aussi indiqué de le compléter par un vecteur courant magnétique, que de compléter le vecteur  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  par un

vecteur courant électrique. Les théoriciens ne sont pas de cet avis, car selon eux, le courant magnétique n'a pas d'existence réelle et il ne semble pas que l'on ait réussi à en produire. Nous répondons à cette objection en construisant une machine qui reproduit dans le domaine du magnétisme, l'expérience que ROWLAND avait réalisée dans celui de l'électricité, et dont le fonctionnement constitue une vérification du théorème

$$(62) \quad \text{rot } \vec{E} = 4\pi \vec{j}$$

qui est une conséquence de notre théorie et une transposition du théorème d'Ampère.

Pour cela, faisons tourner un disque aimanté à sa périphérie,

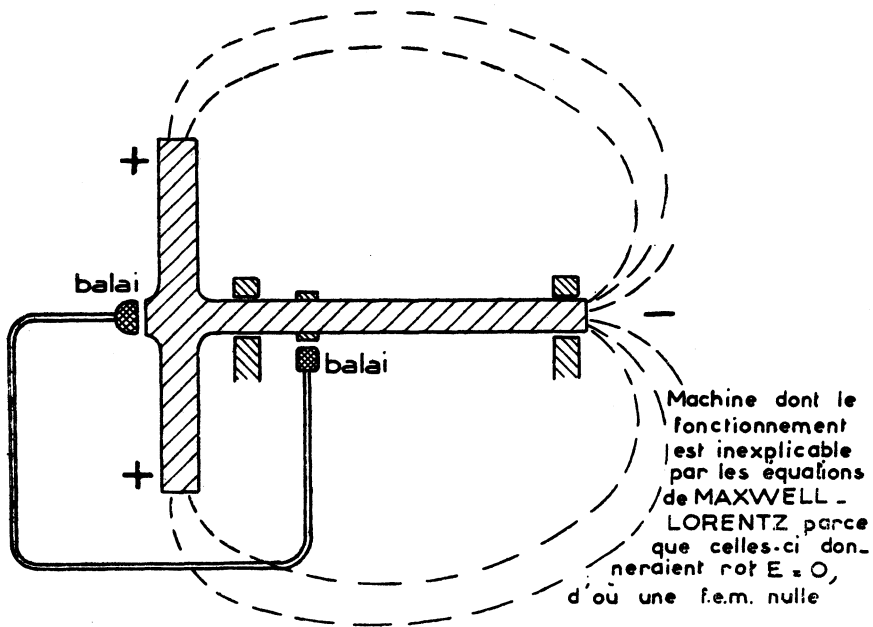


Fig. 3.

l'aimantation étant dirigée radialement. Rejetons le deuxième pôle sur l'axe, constitué par une substance ferro-magnétique. Selon le théorème que nous prétendons vérifier, expérimentalement, un circuit conducteur qui boucle le courant magnétique, est soumis à une force électromotrice égale au produit par  $4\pi$  du courant de charges magnétiques qui le traverse (fig. 3).

*Dans le cadre de la théorie classique de Maxwell-Lorentz, le fonction-*

nement de cette machine reste inexplicable, puisque le flux à travers le circuit est constant, et que de ce fait, aucune force électromotrice ne devrait être observée. On pourrait toutefois décomposer les phénomènes en actions élémentaires produites par les courants ouverts qui composent ce courant fermé et permanent, on observerait pour chaque élément de magnétisme en mouvement, des variations de flux et des forces électromotrices élémentaires, que l'on pourrait composer, mais on aboutirait à un paradoxe, car d'une part, les f. é. m. ajoutent leurs effets, tandis que les variations de flux se compensent pour aboutir à un flux constant. On n'aurait donc plus le droit de composer des champs élémentaires, ceux-ci devant garder leur individualité afin de conserver leurs fluctuations dont l'effet doit rester observable. D'ailleurs, si ce raisonnement qui nous paraît assez troublant, était jugé satisfaisant, il n'y aurait pas de raison pour ne pas l'employer également en électricité, et le théorème d'Ampère sur le courant électrique n'aurait pas plus sa raison d'être que le théorème qui lui correspond, relativement au courant magnétique, dont la réalité physique nous paraît certaine.

#### Les potentiels magnétiques.

Prenons la contre-partie du point de vue classique, et supposons que nous nous placions dans des conditions telles que nous n'ayons aucune charge ni aucun courant électrique, mais seulement des charges et des courants de magnétisme. Les équations de Maxwell prennent la forme

$$(63) \quad \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \text{rot } \vec{H} & \text{div } \vec{E} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - 4\pi \vec{j}_m &= -\text{rot } \vec{E} & \text{div } \vec{H} &= 4\pi \rho_m. \end{aligned}$$

La transposition des raisonnements classiques permet de faire dériver ces deux champs d'un potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}_m$  et d'un potentiel scalaire magnétique  $U_m$  au moyen des formules

$$(64) \quad \begin{aligned} \vec{E} &= \text{rot } \vec{A}_m \\ \vec{H} &= -\text{grad } U_m + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} \end{aligned}$$

$\vec{A}_m$  et  $U_m$  vérifiant la relation

$$(65) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial U_m}{\partial t} - \text{div } \vec{A}_m = 0.$$

Dans le cas purement électrique, nous avons le courant électrique  $\vec{J}_e$ , le potentiel scalaire  $\vec{A}_m$ , le potentiel scalaire  $U_e$  et les relations de Maxwell-Lorentz

$$\begin{aligned}
 (66) \quad & \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} & \text{Div } \vec{H} = 0 & \text{Groupe de Maxwell.} \\
 & \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{J}_e = \text{rot } \vec{H} & \text{Div } \vec{E} = 4\pi \rho_e & \\
 & \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} U_e - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial t} \\
 (67) \quad & \vec{H} = \text{rot } \vec{A}_e & \text{Groupe de Lorentz.} \\
 & \frac{1}{c} \frac{\partial U_e}{\partial t} + \text{div } \vec{A}_e = 0
 \end{aligned}$$

Dans le cas général, qui présente un grand intérêt théorique, comme nous le verrons par la suite, et qui est la superposition de ces deux cas particuliers extrêmes, quelles sont les équations générales?

Ces équations inconnues admettent nécessairement comme solutions particulières d'une part celles des équations (63) à (65), d'autre part celles des équations (66) et (67). Ces conditions sont vérifiées par les équations

$$(68) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{J}_e = \text{rot } \vec{H} \quad \text{Div } \vec{E} = 4\pi \rho_e \quad (70)$$

$$(69) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - 4\pi \vec{J}_m = -\text{rot } \vec{E} \quad \text{Div } \vec{H} = 4\pi \rho_m \quad (71)$$

$$(72) \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} U_e - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} - \text{rot } \vec{A}_e$$

$$(73) \quad \vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}} U_m + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial t} - \text{rot } \vec{A}_m$$

$$(74) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial U_e}{\partial t} + \text{div } \vec{A}_m = 0$$

$$(75) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial U_m}{\partial t} - \text{div } \vec{A}_e = 0.$$



Ces équations peuvent prendre la symétrie relativiste en posant

$$x_4 = ict, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \partial_4 = -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \psi_k = (H_k + iE_k), \quad \psi_4 = 0, \\ J_k = (J_e + iJ_m)_k \quad \text{avec} \quad (J_e)_4 = i\rho_e, \quad (J_m)_4 = -\rho_m, \quad J_4 = -\rho_m + i\rho_e, \\ \varphi_k = -(A_e + iA_m)_k, \quad (A_e)_4 = iU_e, \quad (A_m)_4 = -U_m, \quad \varphi_4 = \frac{1}{4\pi}(U_m + iU_e),$$

on obtient alors le système

$$\begin{aligned} (76) \quad & \partial_4 \psi_1 - \partial_1 \psi_4 + \partial_2 \psi_3 - \partial_3 \psi_2 = 4\pi J_1 \\ & \partial_4 \psi_2 - \partial_2 \psi_4 + \partial_3 \psi_1 - \partial_1 \psi_3 = 4\pi J_2 \\ & \partial_4 \psi_3 - \partial_3 \psi_4 + \partial_1 \psi_2 - \partial_2 \psi_1 = 4\pi J_3 \\ (79) \quad & \partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3 + \partial_4 \psi_4 = 4\pi J_4 \\ (80) \quad & \partial_4 \varphi_1 + \partial_1 \varphi_4 + \partial_2 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_2 = \psi_1 \\ & \partial_4 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_4 + \partial_1 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_1 = \psi_2 \\ & \partial_4 \varphi_3 + \partial_3 \varphi_4 + \partial_2 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_2 = \psi_3 \\ (83) \quad & \partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3 - \partial_4 \varphi_4 = -\psi_4 \end{aligned}$$

Nous considérons pour le moment, les équations (68) à (75) ou (76) à (83), comme représentant les équations générales de l'électro-magnétisme microscopique, équations qui peuvent donner naissance à deux systèmes plus simples :

L'un s'appliquant à un monde dans lequel le magnétisme n'existerait pas à l'état pur, mais qui comporterait des courants et des charges électriques et qui correspondrait au monde physique microscopique, tel qu'on se l'imaginait avant la découverte des moments magnétiques des corpuscules.

L'autre qui concerne des systèmes dans lesquels on a mis en jeu des courants de magnétisme, tandis que la présence de charges et de courants électriques a été soigneusement évitée. Les phénomènes qui correspondent ainsi à ces cas extrêmes, que nous qualifions de « purement électriques » ou de « purement magnétiques » sont appelés aux tenseurs habituels de la théorie électro-magnétique, sous sa forme relativiste, tandis que les phénomènes mixtes, mettent en œuvre des tenseurs, sommes de deux tenseurs complémentaires, et qui constituent de ce fait des quaternions à termes complexes.

Puisque le Potentiel Vecteur participe aux interactions mécaniques, il n'est pas seulement un potentiel, mais un champ, *il doit*

*donc être déterminé.* Pour satisfaire à cette condition, nous admettrons que le Potentiel Vecteur a ses quatre composantes nulles à l'infini. L'onde plane pouvant être considérée comme obtenue à partir d'une onde sphérique dont le rayon augmente indéfiniment, nous déterminerons les potentiels dans l'onde plane, en prenant la limite vers laquelle tendent les potentiels associés à l'onde sphérique, lorsqu'une portion de celle-ci tend à devenir une portion d'onde plane.

Si l'on veut se rendre compte à quel point le théorème d'Ampère et le théorème complémentaire que nous proposons, dans la transposition magnétique qui lui correspond, sont dépendants l'un de l'autre, il suffit de considérer que notre roue nous permet de vérifier expérimentalement les deux théorèmes.

Si nous lançons du courant électrique dans le circuit, nous faisons apparaître une *force magnéto-motrice* donnée par le *théorème d'Ampère*, et la roue se met à tourner en fournissant par tour un travail égal au produit de cette force magnéto-motrice par la charge magnétique de la roue. Si nous coupons le courant en laissant tourner la roue par suite de son énergie cinétique emmagasinée, le courant de magnétisme qui continue à se maintenir, fait apparaître le long du circuit électrique qui boucle ce courant, une force électromotrice qui, comme nous l'avons vu, est égale au produit par  $4\pi$  du courant de magnétisme, représenté par la roue en mouvement. On a ainsi l'image de deux courants fermés qui se bouclent réciproquement : un courant d'électricité et un courant de magnétisme.

Ainsi, inutiles à l'ingénieur, les potentiels magnétiques sont intéressants pour le théoricien, car ils permettent de combler une lacune de la théorie électro-magnétique, et donnent des équations qui fourniront une correspondance utile avec celles que nous obtiendrons plus loin à l'aide de la théorie des corpuscules.

### § 13. — Pression et couple de radiation dans la conception ondulatoire.

Nous allons d'abord étudier la réflexion d'une onde électro-magnétique plane, à polarisation rectiligne, sur un miroir plan puis, nous traitons le cas d'une onde à polarisation elliptique, se réfléchissant sur un réseau plan formé d'éléments conducteurs, enfin, nous superposons ces deux dispositifs, pour obtenir un miroir inversant le sens de la polarisation.

Nous obtenons simultanément la pression de radiation et le couple de radiation.

a) *Miroir plan.*

Considérons le trièdre trirectangle  $Oxyz$ . Plaçons dans le plan  $yOz$  une plaque d'un métal bon conducteur d'électricité (argent, cuivre, aluminium), et faisons tomber sur elle une onde électromagnétique

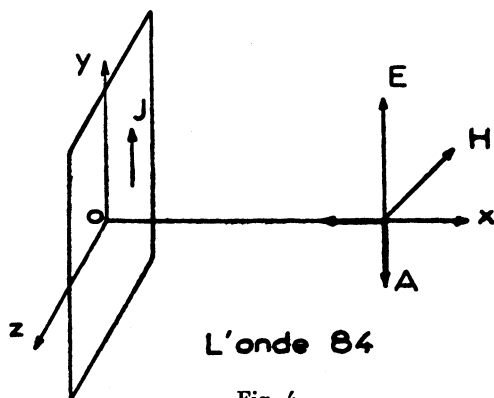


Fig. 4.

plane, perpendiculaire à l'axe des  $x$  (c'est-à-dire parallèle au plan du miroir) et venant de la direction des  $x$  positifs (fig. 3).

Soit

$$\begin{aligned}
 (84) \quad & E_x = 0 \quad E_y = a \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \quad E_z = 0 \\
 & H_x = 0 \quad H_y = 0 \quad H_z = -a \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \\
 & A_x = 0 \quad A_y = -a \frac{\omega}{c} \sin \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \quad A_z = 0 \quad U = 0
 \end{aligned}$$

l'équation de cette onde, qui est une solution des équations de Maxwell-Lorentz (66), (67), répondant aux conditions requises.

Le champ électrique de cette onde mettra les électrons en mouvement dans le miroir et produira ainsi un courant parallèle au champ électrique, dont la densité aura pour expression

$$(85) \quad J_x = 0 \quad J_y = J \cos \omega t \quad J_z = 0.$$

Nous supposons que le courant est en phase avec le champ électrique, parce que le miroir est un système apériodique. Nous verrons d'ailleurs que le courant (85) a bien la phase qui convient.

Ceci posé, nous allons d'abord étudier isolément le rayonnement produit par le courant (85) circulant dans la plaque.

Chaque élément de surface  $ds = dy dz$  de la plaque est donc assimilable au courant électrique élémentaire de composantes

$$(87) \quad j_x = 0 \quad j_y = J_y dy dz \quad j_z = 0$$

qui se comporte comme un *doublet* théorique et émet une onde sphérique. L'enveloppe de toutes ces ondes sphériques est une onde plane.

C'est donc l'onde

$$(88) \quad \begin{aligned} E_x &= 0 & E_y &= -a' \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) & E_z &= 0 \\ H_x &= 0 & H_y &= 0 & H_z &= a \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \end{aligned}$$

que nous devons essayer et qui se propage en sens inverse de notre onde incidente, c'est-à-dire vers les  $x$  positifs.

Nous devons avoir une autre onde, symétrique de la première par rapport à la plaque, et qui représente le rayonnement de la plaque sur l'autre face. Cette onde s'écrira donc

$$(89) \quad \begin{aligned} E_x &= 0 & E_y &= -a' \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) & E_z &= 0 \\ H_x &= 0 & H_y &= 0 & H_z &= a \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \end{aligned}$$

Nous avons choisi la phase de manière à n'introduire aucune discontinuité de part et d'autre de la plaque pour le champ électrique, du fait que le courant de densité magnétique est nul. Nous avons donc réservé la discontinuité au champ magnétique, et la valeur du courant qui circule dans la plaque se trouve alors déterminé par le théorème d'Ampère. Pour ne pas compliquer le problème dans une voie qui nous éloignerait du but que nous poursuivons, nous supposons que la plaque est infiniment conductrice, et que de ce fait, le champ électrique est nul à l'intérieur de la plaque et de chaque côté de celle-ci, à son voisinage immédiat, lorsque l'on tient compte du champ de l'onde incidente qui apporte l'énergie nécessaire à la radiation secondaire de la plaque. La superposition des solutions (84), (88), (89), montre que l'on doit avoir  $a' = a$ . De plus, le théorème d'Ampère appliqué à un rectangle allongé dont les petits côtés traversent la plaque et dont les grands côtés de longueur  $l$  sont

parallèles à celle-ci, infiniment voisins de la surface, d'un côté comme de l'autre, et perpendiculaire au courant (*fig. 5*), nous donne la relation  $2Hl = 4\pi J l$ , soit

$$(90) \quad a = 2\pi J l.$$

Dans ces conditions, la radiation secondaire émise par le courant en arrière du miroir, interfère avec l'onde incidente qui traverse le miroir pour la *détruire totalement* et c'est par ce mécanisme que le miroir forme écran et ne laisse passer aucune énergie. L'énergie de

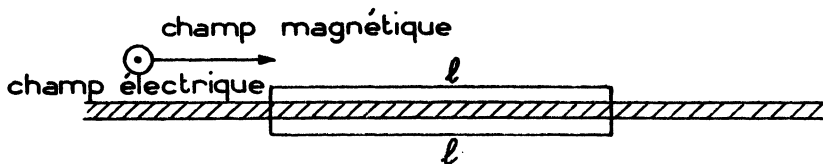


Fig. 5.

l'onde incidente est donc renvoyée intégralement dans la direction de laquelle elle vient.

Le calcul des réactions du champ magnétique de l'onde incidente sur le courant est très simple. Chaque élément de surface  $ds$  du miroir est le siège du courant  $Jds$ , il est soumis à la *force de LAPLACE*

$$(91) \quad d\vec{F} = \vec{J} ds \wedge \vec{H} = 2 \frac{1}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H} ds = 2 \frac{\vec{E}}{c} ds$$

parce que  $\vec{J}$  a pour mesure  $\frac{H}{2\pi}$ , pour direction  $\vec{E}$ , et que  $E = H$ .

On retrouve ainsi la *pression de radiation de la théorie classique*. Il n'y a pas de *couple de radiation* parce que le potentiel vecteur est parallèle au courant.

#### b) Miroir analyseur-polariseur.

Nous constituons notre miroir à l'aide de lames métalliques juxtaposées, mais sans contact conducteur, de manière qu'elles restent isolées électriquement. Nous supposons de plus que leur largeur reste très faible devant la longueur d'onde, de manière que le courant soit obligatoirement dirigé dans le sens des lames, que nous appelons *l'axe* du miroir analyseur, polariseur.

Lorsque l'axe est dirigé suivant  $Ox$ , la théorie précédente reste inchangée. Ce même miroir reste par contre sans réaction sur une onde polarisée suivant  $Oz$ , parce qu'aucun courant ne peut circuler

dans le miroir perpendiculairement aux fentes qui ont été pratiquées, et l'onde le traverse comme une substance transparente.

Que se passe-t-il maintenant si l'on fait tomber sur le miroir une onde à polarisation elliptique, composée de l'onde incidente précédente, d'amplitude  $a$ , et d'une onde en quadrature, d'amplitude  $b$ , représentée par l'équation

$$\begin{aligned}
 (92) \quad & E_x = 0 & E_y = a \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) & E_z = b \sin \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \\
 & H_x = 0 & H_y = b \sin \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) & H_z = -a \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \\
 & U = 0 & A_x = 0 & A_y = -a \frac{c}{\omega} \sin \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \\
 & & & A_z = b \frac{c}{\omega} \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right).
 \end{aligned}$$

Solution des équations 66 et 67, qui sont suffisantes en l'absence de courant de magnétisme.

On a toujours

$$J_z = 0, \quad J_y = J \cos \omega t$$

et

$$a = 2\pi J.$$

La *pression de radiation* est exercée par l'onde  $O_1$  représentée par les composantes  $A_y E_y H_z$  des équations (92). elle a déjà été calculée, et elle est donnée par la formule (91).

L'onde  $O_2$  représentée par les composantes  $A_z E_x H_y$  ne donne lieu à

aucune force parce que son champ magnétique est parallèle au courant  $J_y$  qui circule dans le réseau.

Par contre, en vertu des formules (59) du § 11, le potentiel vecteur  $\vec{A}$  de l'onde  $O$  agit sur le courant  $\vec{J}$  d'abscisse  $x = 0$  pour donner le *couple de radiation*

$$(93) \quad dC_x = J_y A_z dy dz = \frac{c}{4\pi} \frac{ab}{\omega} (2 \cos^2 \omega t) ds$$

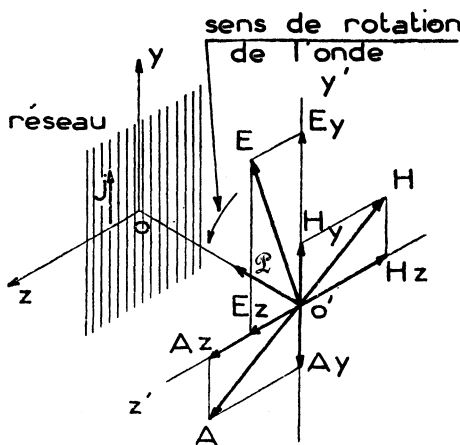


Fig. 6.

dont la valeur moyenne est

$$(94) \quad dC_x = \frac{c}{4\pi} \frac{ab}{\omega} ds.$$

Son sens correspond au sens de rotation de l'onde.

Si on disposait un miroir parallèle au réseau, en arrière de celui-ci et à une distance  $\frac{\lambda}{2}$  ( $\lambda$  longueur d'onde), on renverrait cette onde qui traverserait une seconde fois l'analyseur, et viendrait se composer avec la composante réfléchie sur le réseau-miroir, à la sortie de ce

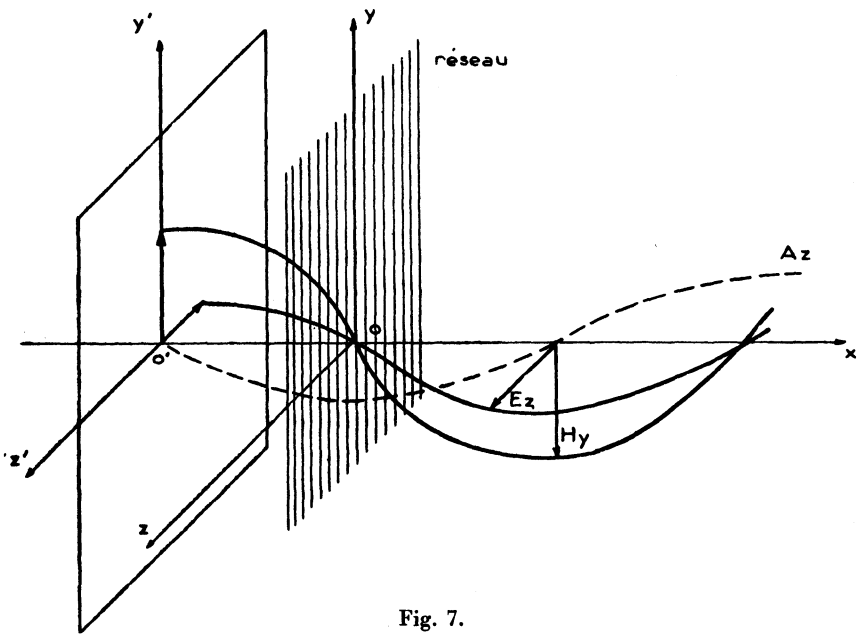


Fig. 7.

dernier. D'après les raisonnements qui précèdent, cette onde réfléchie sur le second miroir aura pour expression

$$E_z = b \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} + \frac{\lambda}{c} \right)$$

$$H_y = -b \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} - \frac{\lambda}{c} \right)$$

La réflexion inversera le sens du champ magnétique, par suite du théorème d'Ampère, le champ électrique ne subit pas

de discontinuité parce qu'il n'y a pas de courant de magnétisme. La différence de marche introduite par le trajet aller et retour est de  $x = \lambda$ . On a d'autre part  $\frac{\lambda}{c} = T$ , période, et  $\omega T = 2\pi$  de sorte que  $\omega \frac{\lambda}{c} = 2\pi$  et l'on a

$$(95) \quad \begin{aligned} E_z &= b \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) & A_z &= b \frac{c}{\omega} \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \\ H_y &= -b \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \end{aligned}$$

onde qui se compose avec (89) pour donner une onde tournant dans le même sens que l'onde incidente, mais en réalité en *sens inverse*, puisque le sens de propagation a été inversé par la réflexion.

On remarquera que le potentiel vecteur de l'onde réfléchie est égal à la composante suivant  $Ox$  du potentiel vecteur de l'onde incidente, de sorte que son action sur le courant qui circule dans le réseau donne naissance à un deuxième couple égal au premier. En d'autres termes, il faut fournir la même densité de moment de couple pour polariser, rectilignement une onde à polarisation elliptique, et pour la repolariser, suivant une ellipse de même forme, tournant en sens inverse.

Si on introduit le vecteur de Poynting  $\vec{\mathcal{E}} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H}$  dont la valeur moyenne est  $\mathcal{E} = \frac{c}{8\pi} (a^2 + b^2)$ , la formule (94) s'écrit

$$(96) \quad C_x = \frac{c}{8\pi} (a^2 + b^2) \frac{2ab}{a^2 + b^2} \frac{1}{\omega} = \frac{\mathcal{E}}{\omega} \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

*Les ondes élastiques à polarisation elliptique transportent une densité d'impulsion et une densité de moment d'impulsion, et leur dépolarisation ou leur destruction donne lieu à l'apparition d'un couple de radiation qui est fourni précisément par la formule (96), tandis que leur réflexion produit une pression de radiation donnée par la formule 91, dans laquelle  $c$  est remplacé par la vitesse  $V$  de l'Onde.*

*La théorie électro-magnétique donne facilement la pression de radiation, et le tenseur des tensions superficielles, mais elle restait muette en ce qui concerne le couple, parce qu'elle ne prévoyait pas d'interaction du type couple. Cependant, M. Émile Henriot eut l'intuition que ce couple devait exister et il rassembla dans son bel*



ouvrage « *Les couples de radiation* »<sup>(8)</sup> toutes les indications qui pouvaient être favorables à cette thèse. Il forma, à partir des tenseurs de l'électro-magnétisme, un tenseur antisymétrique à 24 composantes, dont quatre seulement sont distinctes, qui représenterait le tenseur des densités superficielles de couples, auxquelles il donna le nom de « momentors » et de « torques ». Il y discutait également des possibilités de vérifications expérimentales. Dans un autre ordre d'idée, M. Kastler avait montré<sup>(9)</sup> que le couple de radiation était prévu par la théorie quantique et avait discuté de la possibilité de mettre en évidence le phénomène. La difficulté provenait de la faiblesse des couples, mais il semble bien qu'après les expériences de Richard A. Beth.<sup>(10)</sup> qui opérait sur la lumière polarisée circulairement, dont le sens de rotation était inversé par la traversée d'une lame demi-onde, la réalité du phénomène puisse être considérée comme acquise.

#### § 14. — L'interaction champ-potentiel et la densité d'impulsion de moments.

Il est possible d'éliminer le courant entre la formule (58<sup>bis</sup> § 11)

$$58^{\text{bis}} \quad \vec{C} = \vec{J} \wedge \vec{A}$$

qui donne la *densité cubique de couple* et l'équation de Maxwell (66, § 12) qui généralise le théorème d'Ampère, de sorte que le couple se trouve exprimé au moyen d'une *interaction Champ-Potentiel*.

On a d'après (66, § 12)

$$\vec{J} = \frac{1}{4\pi} \left( \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

et 58<sup>bis</sup> s'écrit

$$\vec{C} = \frac{1}{4\pi} \left( \vec{H} \wedge \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{A} \right).$$

(8) *Memorial des Sciences Physiques*, fascicule XXX, Gauthier-Villars, 1936.

(9) Société des Sciences Physiques et Naturelles. Bordeaux 28 janvier 1932.

(10) *Physical Review* 45 (1934) p. 296, 48 (1935) p. 471, 49 (1936) p. 411 et 50 (1936) p. 115.

Nous avons d'abord

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \wedge \vec{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \wedge \vec{E}$$

et d'après (67a, § 12)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}} U$$

de sorte que

$$\vec{C} = \frac{1}{4\pi} (\overrightarrow{\text{rot}} H \wedge \vec{A} + \vec{E} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} U) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{A}) \right].$$

Nous allons d'abord chercher à transformer le premier terme entre parenthèses, que nous appelons  $\sigma_1$ , en une *densité superficielle*. Celui-ci s'écrit

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) A_3 - \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) A_2 + E_2 \frac{\partial U}{\partial x_3} - E_3 \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \sigma_2 &= -A_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - A_3 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + E_2 \frac{\partial U}{\partial x_1} - E_3 \frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Cherchons à mettre ce terme sous la forme d'une *différentielle exacte*, afin de pouvoir passer par une intégration, d'une *densité en volume* à une *densité superficielle*. Ajoutons lui le terme identiquement nul

$$\frac{\partial}{\partial x_1} A_1 H_1 - A_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} - H_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_1}$$

nous pouvons l'écrire

$$\begin{aligned} (107) \\ \sigma_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 H_1 - A_2 H_2 - A_3 H_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} A_2 H_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} A_3 H_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} U E_3 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} U E_2 + \left[ \left( H_2 \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + H_2 \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - A_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \right) \right] \\ &\quad - \left[ H_1 \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) + U \left( \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right) \right]. \end{aligned}$$

*Le premier terme entre crochets de la seconde ligne est nul. Pour s'en rendre compte, transformons d'abord les deux premiers termes*

qui le composent, (et qui ont été mis entre parenthèse). Pour cela, nous remarquons d'abord que

$$\vec{H} \wedge \vec{H} = \vec{H} \wedge \vec{\text{rot}} A = 0$$

ce qui nous donne, en projetant sur  $Ox$

$$\begin{aligned} H_2 \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + H_1 \frac{\partial A_3}{\partial x_1} &= H_2 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + H_3 \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 H_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} A_1 H_3 - H_1 \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

nous remplaçons donc les deux premiers termes entre parenthèses, par une différentielle exacte, et un terme qui, ajouté au troisième donne

$$A_1 \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right) = 0.$$

Le deuxième terme entre crochets peut être mis sous la forme d'une différentielle exacte parce que

$$-\text{div } \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t}$$

(d'après la condition de Lorentz 67 c, § 12) et que

$$-\left( \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial H_1}{\partial t}$$

d'après la première des équations du groupe Maxwell-Faraday (66 a, § 12). Ce terme s'écrit donc

$$H_1 \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial x_1} + U \frac{1}{c} \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} U H_1$$

et 107 devient

$$\begin{aligned} (108) \\ C_1 = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 H_1 - A_2 H_2 - A_3 H_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_2 H_1 + A_1 H_2 - U E_3) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} (A_3 H_1 + A_1 H_3 + U E_2) \right] + \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (U H_1 + A_2 E_3 - A_3 E_2) \right]. \end{aligned}$$

Soit  $C_1$  le terme de la première ligne,  $C_1'$  l'autre, portons d'abord notre attention sur le premier terme. Si  $S$  est la surface qui limite

un volume  $V$ , le couple engendré par ce terme, agissant sur la matière contenue dans  $V$ , vaudra

(109)

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{4\pi} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 H_1 - A_2 H_2 - A_3 H_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_2 H_1 + A_1 H_2 - U E_3) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} (A_3 H_1 + A_1 H_3 + U E_2) + \frac{\partial}{\partial t} (U H_1 + A_2 E_3 - A_2 E_2) \right] d\tau.$$

Soit  $dS$  l'élément de surface,  $\vec{n}$  le vecteur unitaire, de projection  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , normal à cet élément, on a d'après le théorème de Green

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{4\pi} \int [\alpha_1 (A_1 H_1 - A_2 H_2 - A_3 H_3) + \alpha_2 (A_2 H_1 + A_1 H_2 - U E_3) \\ + \alpha_3 (A_3 H_1 + A_1 H_3 + U E_2)] ds$$

ajoutons et retranchons  $2\alpha_1 A_1 H_1$

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{4\pi} \int [-\alpha_1 (A_1 H_1 + A_2 H_2 + A_3 H_3) + \alpha_1 A_1 H_1 + \alpha_2 A_2 H_1 + \alpha_3 A_3 H_1 \\ + \alpha_1 (A_1 H_1 + \alpha_2 A_1 H_2 + \alpha_3 A_1 H_3)] ds$$

soit

(110)

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{4\pi} \int [H_1 (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3) + A_1 (\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3) \\ - \alpha_1 (A_1 H_1 + A_2 H_2 + A_3 H_3) + U (\alpha_3 E_2 - \alpha_2 E_3)] ds.$$

$$(111) \quad \mathcal{C}_1 = \frac{1}{4\pi} \int [H_1 \vec{A} \cdot \vec{n} + A_1 \vec{H} \cdot \vec{n} - \alpha_1 \vec{A} \cdot \vec{H} - U (\alpha_3 E_2 - \alpha_2 E_3)] ds.$$

Nous avons donc le tenseur de *densité superficielle de couple*

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{4\pi} [H_1 \vec{A} \cdot \vec{n} + A_1 \vec{H} \cdot \vec{n} - \alpha_1 \vec{A} \cdot \vec{H} - U (\alpha_3 E_2 - \alpha_2 E_3)]$$

$$(112) \quad \mathcal{R}_2 = \frac{1}{4\pi} [H_2 \vec{A} \cdot \vec{n} + A_2 \vec{H} \cdot \vec{n} - \alpha_2 \vec{A} \cdot \vec{H} - U (\alpha_1 E_3 - \alpha_3 E_2)]$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{1}{4\pi} [H_3 \vec{A} \cdot \vec{n} + A_3 \vec{H} \cdot \vec{n} - \alpha_3 \vec{A} \cdot \vec{H} - U (\alpha_2 E_1 - \alpha_1 E_2)]$$

Si la surface unité est prise perpendiculairement à l'axe des  $x_1$ , nous avons  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 0$ , nous obtenons trois composantes que nous appelons  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{31}$ , en considérant les surfaces unitaires

perpendiculaires aux deux autres axes, nous obtenons les six autres composantes  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{23}$ , et  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$ ,  $\sigma_{33}$ .

Nous avons pour  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 0$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{4\pi} (A_1 H_1 - A_2 H_2 - A_3 H_3)$$

$$\sigma_{21} = \frac{1}{4\pi} (A_1 H_2 + A_2 H_1 - U E_3)$$

$$\sigma_{31} = \frac{1}{4\pi} (A_1 H_3 + A_3 H_1 + U E_2)$$

pour  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = 0$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{4\pi} (A_1 H_2 + A_2 H_1 + U E_3)$$

$$(113) \quad \sigma_{22} = \frac{1}{4\pi} (A_2 H_2 - A_3 H_3 - A_1 H_1)$$

$$\sigma_{32} = \frac{1}{4\pi} (A_2 H_3 + A_3 H_2 - U E_1)$$

et pour  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,

$$\sigma_{13} = \frac{1}{4\pi} (A_1 H_3 + A_3 H_1 - U E_2)$$

$$\sigma_{23} = \frac{1}{4\pi} (A_2 H_3 + A_3 H_2 + U E_1)$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{4\pi} (A_3 H_3 - A_1 H_1 - A_2 H_2).$$

Il est intéressant de comparer notre tenseur au Tenseur de Maxwell (interprété par Max ABRAHAM), et connu également sous le nom de « Tenseur Impulsion-Énergie ».

Nous rappelons que ce tenseur s'obtient à partir de la Force de Laplace et de Coulomb, exercée par un champ électro-magnétique sur un élément de courant. On élimine le courant entre cette relation et les Équations de Maxwell-Lorentz, à l'aide de calculs assez subtils, dans lesquels on cherche à faire apparaître des différentielles exactes, et qui rappellent beaucoup celui que nous venons de faire,

On obtient d'une part une certaine densité cubique de force, qui est la dérivée par rapport au temps d'une certaine densité cubique

de quantité de mouvement, et d'autre part, une densité superficielle de force qui a pour composantes

$$(114) \quad T_k = \frac{1}{4\pi} \left[ E_k \vec{E} \cdot \vec{n} + H_k \vec{H} \cdot \vec{n} - \frac{1}{2} \alpha_k (E^2 + H^2) \right]$$

qui peut s'écrire

$$(115) \quad T_k = \frac{1}{4\pi} (E_k \vec{E} \cdot \vec{n} + H_k \vec{H} \cdot \vec{n}) - \alpha_k \varepsilon$$

tandis que (112) peut se mettre sous la forme

$$(116) \quad \mathfrak{R}_k = \frac{1}{4\pi} (H_k \vec{A} \cdot \vec{n} + A_k \vec{H} \cdot \vec{n}) - \alpha_k W + U(\vec{n} \wedge \vec{E})_k$$

dont l'analogie avec la densité superficielle de couple (112) est frappante, et le sera encore davantage lorsque l'on saura que la quantité  $W = \vec{A} \cdot \vec{H}$  représente une densité d'énergie au même titre que  $\varepsilon = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$ , toutefois, (114) diffère de (112) par la présence du terme  $U(\vec{n} \wedge \vec{E})$  qui donne lieu dans le tenseur (113) à la présence de termes antisymétriques, mais un tenseur des couples n'est pas astreint à la condition des moments comme le tenseur des tensions, et de ce fait, la condition de symétrie ne s'impose pas.

Le tenseur (113) permet de résoudre d'une manière élégante et très générale les problèmes de *couples de radiation*, tout comme le tenseur (114) permet de résoudre les problèmes de *pression de radiation*.

Considérons l'onde à polarisation elliptique 92. A la place du miroir, plaçons une surface *absorbante*. La pression de radiation vaut d'après (105) avec  $\alpha_1 = 1$   $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$$p_{11} = \frac{1}{8\pi} (E_2^2 + E_3^2 + H_2^2 + H_3^2) = -\varepsilon$$

$\varepsilon$  étant la densité d'énergie.

Le couple de radiation vaut d'après (117) et (92)

$$(115) \quad C_{11} = -\frac{1}{4\pi} (A_2 H_2 + A_3 H_3) = -\frac{c}{4\pi} \frac{ab}{\omega}$$

Considérons maintenant le couple produit par la densité cubique  $C'$  dont la composante suivant  $Ox$  vaut

$$C'_1 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} (UH_1 + A_2E_3 - A_3E_2)$$

cette expression, qui n'est pas réductible à une action superficielle, nous montre que la densité vectorielle, dont la composante suivant  $Ox$ , vaut

$$(116) \quad S_1 = \sigma_{41} = \frac{1}{4\pi c} (UH_1 + A_2E_3 - A_3E_2)$$

a le caractère d'une *densité cubique de moment cinétique*, parce que sa dérivée par rapport au temps représente une densité cubique de couple.

$\rho_{41}$  représente aussi une densité superficielle de la même grandeur, dans l'hyper-espace de la relativité, parce que l'élément de volume  $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$  de l'espace tridimensionnel représente aussi un élément d'hyper-surface de l'espace relativiste. Nous l'écrirons  $d\sigma_4$ , parce qu'on l'obtient à partir de l'élément d'hyper-volume en supprimant la dimension d'indice 4.

Il en est de même des deux autres composantes

$$(117) \quad S_2 = \sigma_{42} = \frac{1}{4\pi c} (UH_2 + A_3E_1 - A_1E_3)$$

$$(118) \quad S_3 = \sigma_{43} = \frac{1}{4\pi c} (UH_3 + A_1E_2 - A_2E_1)$$

de cette densité.

Les densités de couples superficiels multipliés par un élément de temps, donnent un élément d'impulsion de moment, qui a la même nature qu'un moment cinétique, de sorte que la densité superficielle de couple est aussi une densité hypersuperficielle de moment cinétique-impulsion de moment, tout comme les termes précédents. A l'élément de surface  $d\sigma_1 = dx_2 dx_3$ , correspond l'élément d'hyper-surface  $d\sigma_1 = dx_2 dx_3 dx_4$ , et à l'élément  $d\sigma_2$ , correspond plus généralement l'élément d'hyper-surface  $d\sigma_2 = \frac{dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{dx_1}$  et les trois composantes  $\rho_{rs}$  ( $r = 1, 2, 3$ , et  $S = 1, 2, 3$ ), de la densité hypersuperficielle d'impulsion de moment correspondante. Les termes contenant l'indice 4 sont les termes de densité de moment cinétique. Cela fait en tout 16 termes dont 10 distincts, qui sont les compo-

santes du tenseur que nous appellerons le *tenseur de spin*, en donnant ce nom à une densité continue de moments cinétiques. La théorie quantique prévoyant les mêmes effets, à partir de la notion de spin, il nous paraît naturel de donner le même nom aux mêmes phénomènes. Nos calculs nous ont permis de déterminer les éléments des trois premières lignes, il nous reste à déterminer les éléments  $\rho_{41}$ ,  $\rho_{42}$ ,  $\rho_{43}$ ,  $\rho_{44}$ , de la quatrième.

### § 15. — Le vecteur flux d'énergie cinétique.

Le vecteur  $S$  joue dans notre tenseur le rôle que joue le vecteur de Poynting dans le tenseur d'Univers d'impulsion. Or ce dernier s'obtient (§ 9) en formant le tenseur quaternion d'interaction, produit du tenseur quaternion *champ électro-magnétique*, par le tenseur quaternion *polarisation* qui lui est associé, en multipliant le tout par 4 et en prenant la partie imaginaire du tenseur quaternion antisymétrique ainsi obtenu. La quatrième composante du flux d'énergie est représentée par l'élément réel qui figure aux quatres cases de la diagonale principale du tenseur quaternion d'interaction. La même règle, appliquée à l'interaction *Potentiel-Champ électromagnétique* nous donne le tenseur suivant

$$|H_k - iE_k| \times |A_k| \quad \text{avec} \quad A_4 = iU$$

dont les composantes imaginaires sont précisément  $S_1 S_2 S_3$ , tandis que les 4 éléments identiques de la diagonale principale nous donnent un salaire ayant pour partie réelle

$$W = -(A_1 H_1 + A_2 H_2 + A_3 H_3).$$

Il est facile de vérifier que le quadrivecteur  $R$  de composantes

$$R_1 = cS_1 \quad R_2 = cS_2 \quad R_3 = cS_3 \quad R_4 = -iW$$

vérifie l'équation de conservation

$$(119) \quad \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \frac{\partial R_2}{\partial x_2} + \frac{\partial R_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial R_4}{\partial x_4} = \frac{\partial W}{\partial t}$$

analogue à celle que vérifie le quadrivecteur courant d'énergie.

Que représente la quantité  $W$  qui se conserve ainsi? Électricité?... Autre forme d'énergie?... Nous admettrons que  $W$  est la *densité*



d'énergie cinétique de rotation, et que le vecteur  $R$ , de composantes  $R_1, R_2, R_3$ , représente le *vecteur courant* de cette énergie.

Ceci posé, nous allons pouvoir terminer l'écriture de notre tenseur dont nous ne possédons que les trois premières lignes. Nous avons déjà

$$\sigma_{14} = iS_1 \quad \sigma_{24} = iS_2 \quad \sigma_{34} = iS_3$$

nous posons  $\sigma_{44} = iS_4 = -\rho$ , hypothèse parallèle à celle qui conduit à écrire le terme homologue du tenseur d'impulsion, terme qui représente, on le sait, la densité d'énergie due au champ électromagnétique. Il ne nous reste plus qu'à déterminer  $\sigma_{41} \sigma_{42} \sigma_{43}$ .

Nous avons le choix entre les déterminations

$$\pm \sigma_{14} \quad \pm \sigma_{24} \quad \pm \sigma_{34}.$$

Nous n'avons pas les mêmes raisons de prendre la détermination symétrique, (positive), qui s'imposait pour les termes représentant les tensions véritables. Par contre, ces termes contenant les composantes d'un produit vectoriel, lesquels présentent, du fait de leur signe — un caractère antisymétrique, nous prenons la détermination négative (antisymétrique). Nous obtenons ainsi le tenseur de spin de la planche II, que l'on comparera au tenseur de la planche I, obtenu par une méthode parallèle, et avec lequel l'analogie est très marquée. Il est plus difficile de le comparer au Tenseur d'Henriot à trois indices et 64 éléments, (planche III) mais il semble toutefois qu'il y ait moyen d'accorder les deux théories.

APPLICATION. — En appliquant ces résultats à l'onde électromagnétique plane à polarisation elliptique de la formule (92), on obtient le vecteur courant d'énergie cinétique

$$R_1 = \frac{1}{4\pi c} (E_2 A_3 - E_3 A_2) = \frac{c}{4\pi} \frac{ab}{\omega}$$

$$R_2 = 0 \quad R_3 = 0.$$

Lorsque l'onde tombe sur un obstacle qui l'absorbe, la destruction du flux d'énergie cinétique fait apparaître une densité de couple de valeur égale, qui a été obtenue au § 14, formule (115).

La densité d'énergie cinétique vaut

$$W = -\frac{1}{4\pi} (A_1 H_1 + A_2 H_2 + A_3 H_3) = \frac{c}{4\pi} \frac{ab}{\omega}$$

*elle est égale au couple de radiation, tout comme la densité d'énergie totale est égale à la pression de radiation.*

### § 16. Courants permanents.

Le cas d'une plaque parcourue par une nappe de courants permanents est facile à traiter, mais pour que le problème corresponde à une réalité physique, il faut disposer parallèlement à cette plaque une autre plaque destinée à assurer le retour du courant, et étudier les phénomènes entre les deux nappes de courant. Il en est de même de l'élément de courant qui ne peut exister isolément, et qui est remplacé par une spire.

Si l'une des plaques  $P'$  est parallèle au plan des  $x_2x_3$ , en arrière et à la distance 1 de celui-ci. Si l'autre plaque  $P$  est également parallèle à ce plan, en avant et à la même distance, si les plaques sont parcourues par des courants uniformes parallèles à l'axe des  $x_2$ , dont la densité superficielle vaut  $J'_2 = -\frac{a}{4\pi}$  pour  $P'$  et  $J_2 = \frac{a}{4\pi}$  pour  $P$ , si l'on suppose enfin que ces plaques ont des dimensions très grandes par rapport à 1 (pour ne pas avoir à tenir compte de la perturbation due aux bords), le problème est le même que celui du potentiel scalaire du condensateur plan, dont les armatures portent respectivement des charges superficielles  $-\sigma = -\frac{\alpha}{4\pi}$  et  $\sigma = \frac{\alpha}{4\pi}$ , et le potentiel vecteur a pour composantes

$$A_1 = 0 \quad A_2 = ax_1 \quad A_3 = 0$$

le champ magnétique  $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$  a pour composantes

$$H_1 = 0 \quad H_2 = 0 \quad H_3 = a.$$

La spire  $C$  parcourue par le courant  $I$ , dans le sens positif, placée dans le plan  $x_1x_3$ , est soumise au couple de composantes

$$\Gamma_1 = I \int_C A_3 dx_2 - A_2 dx_3 = -aI \int_C x_1 dx_3 = -aIS_{13} = -IS_{13}H_3 \quad \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$$

$S_{13}$  étant la surface de la spire (ou sa projection sur le plan  $x_1Ox_3$  si elle n'est pas contenue dans ce plan). On retrouve encore le résultat correct, mais le problème est moins simple qu'il ne le paraît sur ces quelques exemples, car d'une part il n'a pas été possible à l'auteur de montrer l'équivalence entre « l'effet potentiel » et le moment des

forces de Laplace par rapport à un point (il est même facile de mettre cette correspondance en défaut dans des problèmes de courants permanents comme il est possible de mettre en défaut le théorème de Poynting); d'autre part, si cet effet était une simple conséquence de la loi de Laplace, il n'expliquerait pas le couple de radiation. Malgré l'incertitude qui règne encore sur cette question, les résultats obtenus nous ont paru mériter d'être exposés.

### § 17. L'interaction courant-champ et l'interaction courant-potentiel.

L'interaction courant-champ peut se mettre sous la forme

$$(120) \quad |F_k + iR_k| = |H_k + iE_k| \times |J_k|$$

$$\text{avec} \quad F_i = i\mathcal{E} \quad iR_i = K, \quad J_i = ip$$

on a ainsi

$$(121) \quad \begin{aligned} F_1 &= J_2 H_3 - J_3 H_2 + \rho E_1 & R_1 &= J_2 E_3 - J_3 E_2 + \rho H_1 \\ F_2 &= J_3 H_1 - J_1 H_3 + \rho E_2 & R_2 &= J_3 E_1 - J_1 E_3 + \rho H_2 \\ F_3 &= J_1 H_2 - J_2 H_1 + \rho E_3 & R_3 &= J_1 E_2 - J_2 E_1 + \rho H_3 \end{aligned}$$

$$(122) \quad \mathcal{E} = J_1 E_1 + J_2 E_2 + J_3 E_3 \quad K = J_1 H_1 + J_2 H_2 + J_3 H_3$$

$$(123) \quad \vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{H} + \rho \vec{E} \quad \vec{R} = \vec{J} \wedge \vec{E} + \rho \vec{H}$$

l'expression 130 a été déjà rencontrée dans la formule (9), ch. iv, § 1, elle représente la puissance fournie par le champ au courant, tandis que 130-132 représentent la force de Lorentz et de Coulomb. Que signifient les termes  $K$  et  $\vec{R}$ ? Ils sont identiques, par leur forme aux termes du quadrivecteur d'énergie cinétique radiante et il suffirait pour les interpréter, et pour interpréter du même coup les termes réels antisymétriques, et le terme imaginaire diagonal du tenseur 127, d'admettre que *le courant l'électrique et le potentiel vecteur*, d'une part, *la densité électrique et le potentiel scalaire* d'autre part, *sont des grandeurs ayant la même nature physique, et qui produisent les mêmes effets*, bien qu'ayant des dimensions différentes dont le rapport est le carré d'une longueur. Si  $A$  est le potentiel,  $J$  le courant correspondant exprimés l'un et l'autre dans le système C. G. S., si on appelle  $\alpha^2$  le rapport inconnu  $J/A$ ,  $\alpha$  a la dimension  $L^{-2}$ . Ce coefficient étant lié à la nature profonde des choses, doit s'exprimer nécessairement en fonction des constantes fondamentales de la phy-

sique (soit  $e$ ,  $\hbar$ ,  $c$ ). Il doit contenir en outre une grandeur caractérisant le champ électromagnétique, et qui, en raison des exigences dimensionnelles doit être une masse. Ce ne peut donc être que la masse  $m_0$  du photon. Or il existe deux combinaisons qui donnent une grandeur de dimensions  $L^{-1}$ , c'est d'une part  $\frac{m_0 c^2}{e^2}$ , d'autre part  $\chi = \frac{m_0 c}{\hbar}$ . Le rapport de ces deux quantités vaut  $\hbar c / e^2 = 137$ ).

Le coefficient  $4\pi$  pourrait encore intervenir. Disons tout de suite que, comme nous le verrons au cours de cette étude, la théorie corpusculaire donne  $\alpha = \frac{1}{4\pi} \chi^2$ . Comme dans le cas du champ électromagnétique (ou photonique),  $m_0$  est assez faible pour échapper à toute mesure,  $\alpha = 0$ , et le courant électrique correspondant au potentiel vecteur est toujours nul. Il ne résulte de ce fait aucune incidence mesurable, de cette proposition sur la théorie électromagnétique; par contre, cette conception relative à la nature de l'onde, apportera — comme nous le verrons — de l'unité dans la théorie quantique des champs, et facilite le raccord de la notion de champ avec le concept abstrait de l'onde  $\psi$  de la mécanique ondulatoire.

En conclusion, il existerait théoriquement trois types d'interaction.

1° Champ-polarisation, = Champ-champ = Polarisation-polarisation.

2° Champ-courant = Champ-potentiel.

3° Potentiel-courant = Potentiel-potentiel = Courant-courant.

Ces interactions ne sont pas indépendantes, l'une d'entre elles de ces grandeurs (par exemple le courant), pouvant être éliminée au profit des autres, à l'aide des équations qui lient les champs, les courants et les potentiels.

TABLEAU I

LE TENSEUR DES DENSITÉS D'IMPULSIONS  
ET DE QUANTITÉS DE MOUVEMENT ÉLECTROMAGNÉTIQUES

(Maxwell. Max Abraham.)

$F_{23} = \frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{2}[(E_1^2 - E_2^2 - E_3^2) + (H_1^2 - H_2^2 - H_3^2)]$	$E_2 E_1 + H_2 H_1$	$E_3 E_1 + H_3 H_1$	$i(E_2 H_3 - E_3 H_2)$
	$E_1 E_2 + H_1 H_2$	$\frac{1}{2}[(E_2^2 - E_3^2 - E_1^2) + (H_2^2 - H_3^2 - H_1^2)]$	$E_3 E_2 + H_3 H_2$	$i(E_3 H_1 - E_1 H_3)$
	$E_1 E_3 + H_1 H_3$	$(E_2 E_3 + H_2 H_3)$	$\frac{1}{2}[(E_1^2 - E_2^2 - E_3^2) + (H_1^2 - H_2^2 - H_3^2)]$	$i(E_1 H_2 - E_2 H_1)$
	$-(E_2 H_3 - E_3 H_2)$	$-(E_3 H_1 - E_1 H_3)$	$-(E_1 H_2 - E_2 H_1)$	$-\frac{1}{2}[(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) + (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2)]$

Les colonnes correspondent aux tensions sur la même hypersurface. La quatrième colonne correspond à l'élément de volume de l'espace tridimensionnel. (Les éléments de surface sont  $ds_1 = dx_2 dx_3 dx_4$ ,  $ds_2 = dx_3 dx_1 dx_4$ ,  $ds_3 = dx_1 dx_2 dx_4$ ,  $ds_4 = dx_1 dx_2 dx_3$ .)

Les trois premières lignes correspondent aux projections de la même tension suivant les axes  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$ , et aux trois composantes de l'impulsion, et elles sont fournies par le calcul. La quatrième ligne a été choisie pour compléter ce tenseur. Contrairement à l'usage nous avons adopté pour cette ligne une disposition antisymétrique, à cause du caractère antisymétrique des composantes  $E_i H_j - E_j H_i$ .

## TABLEAU II

LE TENSEUR DES DENSITÉS D'IMPULSION DE MOMENTS  
ET DE MOMENTS CINÉTIQUES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

(RENÉ REULOS)

$$\sigma_{rs} = \frac{1}{4\pi} \begin{vmatrix} A_1H_1 - A_2H_2 - A_3H_3 & A_1H_2 + A_2H_1 + UE_3 & A_1H_3 + A_2H_1 - UE_2 & i(A_2E_3 - A_3E_2 + UH_1) \\ A_1H_2 + A_2H_1 - UE_3 & A_2H_2 - A_3H_3 - A_1H_1 & A_2H_3 + A_3H_2 - UE_1 & i(A_3E_1 - A_1E_3 - UH_2) \\ A_1H_3 + A_2H_1 + UE_2 & A_2H_3 + A_3H_2 - UE_1 & A_3H_3 - A_1H_1 - A_2H_2 & i(A_1E_2 - A_2E_1 - UH_3) \\ -i(A_2E_3 - A_3E_2 + UH_1) & -i(A_3E_1 - A_1E_3 - UH_2) & -i(A_1E_2 - A_2E_1 - UH_3) & -(A_1H_1 + A_2H_2 + A_3H_3) \end{vmatrix}$$

Les colonnes correspondent au même élément de surface  $d\sigma_{rs}$  d'indice  $s$ , les lignes correspondent à la composante suivant l'axe des  $x_r$ . Les trois premières lignes ont été fournies par le calcul, la quatrième a été complétée pour obtenir un tenseur d'univers, nous avons adopté la disposition antisymétrique à cause du caractère antisymétrique du terme  $A_rE_s - A_sE_r$ , mais, comme pour le tenseur des tensions et des impulsions, la disposition symétrique pourrait être utilisée.

**TABLEAU III**  
**LE TENSEUR DES MOMENTORS ÉLECTROMAGNÉTIQUES**  
 (Émile Henriot.)

$$\begin{array}{c}
 |M_{krs}| = \\
 \text{(pour } k = 2)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccc}
 M_{211} & M_{212} & \frac{1}{4\pi} (A_2 H_3 + A_3 H_2 - A_1 H_1) & M_{214} \\
 M_{221} & M_{222} & \frac{1}{4\pi} (-A_2 H_1 - A_1 H_2 + i U E_3) & M_{224} \\
 M_{231} & M_{232} & \frac{1}{4\pi} (-A_3 H_1 - A_1 H_3 - i U E_2) & M_{234} \\
 M_{241} & M_{242} & \frac{1}{4\pi} [i(A_2 E_3 - A_3 E_2) - U H_1] & M_{244}
 \end{array} \right|$$

Le tenseur d'Émile Henriot comporte trois indices. A chaque valeur d'un des indices choisi arbitrairement, correspond un tableau représentatif. Nous avons écrit celui qui a trait à la valeur 2 de l'indice  $k$ . Les composantes  $M_{213}$ ,  $M_{223}$  et  $M_{233}$  sont données par cet auteur dans son ouvrage déjà cité. Il est intéressant de comparer les tableaux II et III. Les termes sont très voisins, et la différence est assez faible pour que l'on puisse espérer mettre d'accord les deux théories.

## CHAPITRE II

### MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP DE FORCES

Nous supposons d'abord que le corpuscule est chargé, que le champ est électromagnétique, que le système de référence est galiléen. Guidés par des considérations de symétrie relativiste, nous retrouvons rapidement des résultats connus, et qui servent de base à ce qui suit.

Dans une étude plus large, nous supposons que le système *n'est pas galiléen*, qu'il existe en chaque point une vitesse et une accélération d'entraînement, qu'il existe de plus un champ gravifique.

Les champs électromagnétiques et les champs de gravitation-inertie présentent de telles analogies que l'auteur est amené à les développer et à écrire pour ces derniers, des équations de forme maxwelienne, valables dans les systèmes accélérés. Il est ainsi possible d'associer le moment cinétique à un « champ pseudo-magnétique », d'origine à la fois cinématique et gravifique, et d'obtenir une nouvelle interprétation du « spin ».

#### § 1. — Mouvement d'une particule électrisée, dans un champ électromagnétique, dans un système de référence galiléen.

Considérons un corpuscule de charge  $e$ , de masse  $m$  en mouvement dans un champ électromagnétique dérivant d'un potentiel scalaire  $U$  et d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$ . Soit  $c$  la vitesse de la lumière,  $v$  celle du corpuscule, on a la relation fondamentale

$$(1) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$m_0$  étant la « masse au repos » du corpuscule lorsque  $\vec{v} = 0$ . En



élevant les deux membres au carré, en les multipliant par  $c$  et en ajoutant, on a

$$(2) \quad m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2.$$

Introduisons les notations d'univers, plus symétriques et souvent plus suggestives, soient  $x_1 x_2 x_3$  les coordonnées d'espace et  $x_4 = ict$  la quatrième dimension,  $t$  le temps,  $i = \sqrt{-1}$ .  $v$ ,  $A$ , sont alors des vecteurs d'univers et admettent ainsi une quatrième composante imaginaire. On a en effet

$$(3) \quad v_i = \frac{dx_i}{dt} = ic \quad A_i = iU$$

et l'équation (2) s'écrit

$$(4) \quad P^2 + m_0^2 c^2 = 0 \quad \text{avec} \quad P^2 = \sum_1^4 P_k^2 \quad \text{et} \quad P_k = mv_k \quad (4')$$

soit

$$(5) \quad |P| = \pm im_0 c$$

elle exprime simplement que le quadrivecteur  $P = mv$  conserve sa longueur au cours du mouvement.

L'énergie du corpuscule a pour expression

$$(6) \quad W = mc^2 + eU$$

$eU$  étant l'énergie potentielle due à la présence du champ électrique. Cette relation peut s'écrire

$$\frac{iW}{c} = imc + \frac{e}{c} iU$$

elle a les dimensions d'une *impulsion* dont elle représente la quatrième composante. Elle peut s'écrire d'après (3)

$$(7) \quad p_i = mv_i + \frac{e}{c} A_i$$

cette relation ne saurait exister isolément, elle entraîne donc l'existence des trois relations analogues

$$(8) \quad p_1 = mv_1 + \frac{e}{c} A_1$$

$$(9) \quad p_2 = mv_2 + \frac{e}{c} A_2$$

$$(10) \quad p_3 = mv_3 + \frac{e}{c} A_3.$$

Le vecteur  $\vec{\mathcal{E}}_e = \frac{e}{c} \vec{A}$  représente ainsi une « *impulsion potentielle* » qui accompagne l'énergie potentielle et ces deux grandeurs s'intègrent dans un même quadrivecteur. Nous appelons le vecteur  $\vec{\mathcal{A}} = \frac{\vec{A}}{c}$  « *potentiel d'impulsion* ».

On déduit des relations (7) à (10) les relations

$$(11) \quad P_t = mv_t = p_t - \frac{e}{c} A_t \quad P_i = imc = \frac{i}{c} (W - eU) \quad (12)$$

La relation (2) s'écrit alors

$$(13) \quad \frac{1}{c^2} (W - eU)^2 - \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 = m_0^2 c^2$$

ou en coordonnées d'univers

$$(14) \quad \sum_i \left( p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0$$

Elle exprime, comme (5) que le quadrivecteur  $P = mv$  conserve sa longueur au cours du mouvement. A ce titre elle peut être considérée comme une « *intégrale première* » ou plus précisément un *invariant* du mouvement relativiste du point matériel.

## § 2. — Mouvement d'un corpuscule chargé, dans un champ de forces électro-magnétique et gravifique, dans un système de référence non galiléen.

Considérons un système de référence S que nous supposons être galiléen et que nous prenons comme « système fixe ». Soit un autre système de référence T (que l'on peut assimiler à un solide rigide), et qui ne subit que les déformations dues aux effets de la relativité. Nous le supposons mobile par rapport au premier, entraîné d'un mouvement varié, de sorte que ce système de référence n'est pas galiléen.

Il existe donc dans ce système mobile un *champ de vitesses* d'entraînement  $\vec{V}$ , un *champ de rotationnel* des vitesses d'entraînement, soit  $\vec{\mathcal{R}}$ , et un *champ d'accélération* d'entraînement  $\vec{\Gamma}$ , champs que l'on peut définir soit à partir du système fixe, dans le système d'unités qui leur est associé, soit dans le système mobile, en utilisant en

chaque point des unités locales. En fait, les phénomènes que l'on étudie en physique corpusculaire n'intéressent qu'un domaine assez restreint pour que cette question de variation des unités d'un point à l'autre du système accéléré n'ait généralement pas à intervenir.

Nous supposons qu'il existe en outre un champ électrique  $\vec{E}$ , et un champ magnétique  $\vec{H}$ , dérivant tous deux d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  et d'un potentiel scalaire  $U$ , au moyen des formules bien connues

$$(15) \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} U - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad (16)$$

Nous supposons de plus qu'il existe un champ gravifique  $\vec{g}$  dérivant du potentiel scalaire  $\Theta$ , cela plutôt pour la forme, car les interactions dues au champ gravifique sont négligeables à l'échelle corpusculaire. On a donc

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Theta \quad \text{rot } \vec{g} = 0.$$

On sait que le champ gravifique se compose avec l'accélération d'entraînement pour donner un champ gravifique apparent

$$\vec{G} = \vec{g} - \vec{\Gamma}$$

de sorte que les champs  $\vec{G}$  et  $\vec{R}$  seront définis par les relations

$$(17) \quad \vec{G} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Theta - \frac{\partial \vec{\mathcal{V}}}{\partial t} \quad \vec{R} = \text{rot } \vec{\mathcal{V}} \quad (18)$$

équations qui correspondent aux équations (15) et (16), et qui entraînent l'équation

$$(19) \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{G}$$

obtenue en dérivant l'équation (18), et tenant compte de 17.

L'analogie entre les équations (17), (18), (19), et celles de l'électro-magnétisme est évidente. Cette correspondance serait encore plus étroite si l'on changeait d'unités en multipliant  $\vec{V}$  et  $\vec{R}$  par  $c$  pour introduire de ce fait des unités de même dimensions. Soit donc

$$(20) \quad \vec{V} = c\vec{\mathcal{V}}$$

(potentiel vecteur de gravitation-inertie), et

$$(21) \quad \vec{K} = c \vec{R}$$

(champ *pseudo-magnétique* de gravitation-inertie).

Les équations (17), (18) et (19) s'écrivent alors

$$(22) \quad \vec{G} = - \overrightarrow{\text{grad}} \theta - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad \vec{K} = \text{rot } \vec{V} \quad (23)$$

$$(24) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = - \text{rot } \vec{G}$$

tout à fait identiques à (15), (16) et à l'équation bien connue de MAXWELL-FARADAY (qui exprime la loi de l'induction <sup>(12)</sup>).

Pour connaître le mouvement du corpuscule dans cet ensemble de champs, il faut établir la forme relativiste de la force exercée sur le corpuscule. Il suffit pour cela d'admettre que l'impulsion potentielle possède une composante de *gravitation-inertie* qui a pour expression

$$\mathcal{P}_g = m\mathcal{V}$$

$\mathcal{V}$  quadrivecteur dont la composante d'espace est  $\vec{V}$  dont la quatrième composante est  $\mathcal{V}_4 = ic$ , de sorte que l'impulsion potentielle totale a pour expression

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_g = m\mathcal{V} + e\mathcal{A}$$

(avec  $\mathcal{A} = \frac{A}{c}$ , composante électrique du potentiel d'impulsion), et pour quatrième composante

$$\mathcal{P}_4 = i\mathcal{G} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_e + \mathcal{G}_g = \frac{1}{c} (m\theta + eU) \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = \frac{U}{c}.$$

Ceci posé, nous savons qu'un corpuscule électrisé en mouvement dans un champ électromagnétique de composante électrique  $\vec{E}$ , de composante magnétique  $\vec{H}$ , dérivant du potentiel scalaire  $U$ , subit la force de Lorentz, qui peut s'écrire

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} eU - \vec{v} \wedge \text{rot } \frac{e}{c} \vec{A}$$

soit

$$\vec{F} = - c \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{G}_e - \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{\mathcal{P}}_e.$$

(12) René Reulos « Champ électromagnétique et champ d'accélération ». Cahiers de physique n° 31-32, p. 83 à 91, et « rotations et magnétisme ». Comptes rendus de l'Ac. des Sciences 27 juin 1947. En application de cette théorie, l'auteur a entrepris la construction d'une pompe à liquide, fonctionnant sur le principe de la machine de Gramme.

Dans le cas où le système de référence n'est pas galiléen. l'impulsion potentielle possède une composante de « gravitation-inertie »  $\mathcal{F}_g$ , on doit évidemment introduire celle-ci aux côtés de la composante électromagnétique  $\mathcal{F}_e$ . On a ainsi

$$\vec{F} = -c \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{F} - \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{\mathcal{F}}.$$

Soit en remplaçant  $\mathcal{F}$  et  $\vec{\mathcal{F}}$  par leurs valeurs respectives

$$(25) \quad \vec{F} = e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{H} \right) + m \left( \vec{G} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{K} \right).$$

Formule déjà rencontrée au ch. 1, qui associe les forces de COULOMB et celles de NEWTON-GALILÉE, les forces de LORENTZ-LAPLACE et celles de CORIOLIS.

L'introduction de la composante de gravitation-inertie, de l'impulsion potentielle, permet de compléter 11, 12, 13, 14, du § 2, lesquelles s'écrivent alors

$$(26) \quad P_e = m\mathcal{V}_e = p_e - \wedge e - m\mathcal{V}_e$$

$$(27) \quad P_t = imc = \frac{i}{c} (W - eU - m\theta)$$

$$(28) \quad \frac{1}{c^2} (W - eU - m\theta)^2 - \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} - m\vec{\mathcal{V}} \right)^2 = m_0^2 C^2$$

$$(29) \quad \sum_i \left( p_i - \frac{e}{c} A_i - mV_e \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0$$

Ces deux équations (28) (29) généralisent les formules (13) et (14), et peuvent être considérées comme les invariants du mouvement d'un corpuscule chargé, dans un système de référence non galiléen, en présence d'un champ gravifique, d'un champ d'accélération d'entraînement, d'un rotationnel des vitesses d'entraînement d'un champ électrique et d'un champ magnétique.

Ces raisonnements sont basés sur l'hypothèse assez intuitive, qui consiste à admettre que le vecteur  $\mathcal{F} = m\mathcal{V}$  représente effectivement une impulsion potentielle, hypothèse qui aboutit à la formule (25). Leur principal intérêt est à la fois de justifier une hypothèse que l'on se propose d'utiliser (sous la forme de la formule (28) et d'intégrer la force de Coriolis dans un schéma relativiste. Nous avons par ailleurs poussé plus loin cette théorie, afin de l'asseoir sur les bases plus larges d'un principe variationnel (action stationnaire), mais les développements de cette étude (qui est maintenant

au point) sortent du cadre de cet exposé, consacré à l'*aspect ondulatoire* de la théorie des corpuscules,

On sait qu'il n'est pas possible de définir des unités de longueur et de temps dans toute l'étendue d'un système de référence lorsque celui-ci n'est pas galiléen. Dans ce cas, un système d'unités n'est donc valable qu'en un point donné et dans un domaine infiniment petit entourant ce point, mais il le reste pratiquement dans un domaine relativement étendu, pourvu que les variations de la vitesse d'entraînement à l'intérieur de ce domaine restent faibles devant celle de la lumière.

Les raisonnements que nous avons utilisés ne mettant en jeu que des opérations infinitésimales, ceux-ci ne sont pas altérés par le caractère *local* des grandeurs en question.

### § 3. — Sur les équations de la gravitation

Cette étude, qui précise les idées exposées dans les pages précédentes, n'a pas d'incidence sur la théorie qui sera développée aux chapitres suivants.

L'idée de construire une théorie de la gravitation calquée sur la théorie électromagnétique n'est pas récente, mais elle s'est heurtée à des difficultés qui tiennent en particulier à la présence d'énergie négative, et c'est pourquoi la Relativité d'Einstein s'est généralisée dans une autre direction.

Cet échec prouve simplement que la gravitation n'est pas formellement identique à l'électromagnétisme, et que ce problème est plus difficile ; mais il n'est pas dit que *l'électromagnétisme et la gravitation* ne présentent pas malgré tout *des points communs*. C'est cet aspect de la question qui constitue le but de l'étude qui suit. Nous nous proposons d'établir des équations de forme Maxwellienne qui semblent convenir aux phénomènes de gravitation. Cette étude vient ainsi compléter les résultats du paragraphe précédent, et réunir dans un même système d'équations *linéaires*, les phénomènes d'inertie et ceux qui sont dus à la gravitation. *Une théorie linéaire de la gravitation — même si elle n'est qu'approchée — présente l'avantage de pouvoir s'introduire — aux côtés de la théorie électromagnétique — dans le cadre de la mécanique ondulatoire.*

L'analogie qui existe entre la loi de Newton et la loi de Coulomb permet d'écrire l'équation

$$(33) \quad \operatorname{div} \vec{G} = -4\pi e^2 \delta$$

$\vec{G}$  étant le champ gravifique, exprimé en unités C. G. S.,  $\epsilon^2 = 6,67 \cdot 10^{-8}$ , étant la constante de Cavendish,  $\delta$  étant la densité exprimée en grammes par centimètre cube. Le signe — provient du fait que les masses sont toujours positives et s'attirent.

$\vec{G}$  dérivant d'un potentiel newtonien  $\theta$ , on a  $\vec{G} = -\vec{\text{grad}} \theta$  et  $\text{div } G = -\Delta\theta$  d'où l'équation

$$(34) \quad \Delta\theta = 4\pi\epsilon^2\delta.$$

Ces équations ont une forme statique qui se traduit par l'absence de la variable temps. En régime dynamique, il convient d'introduire la quatrième dimension, afin de rester dans l'esprit de la théorie de la relativité, et d'écrire (34) sous la forme

$$(35) \quad \square \theta = 4\pi\epsilon^2\delta.$$

L'intérêt pratique de cette équation est très faible, car les courants de masse susceptibles de provoquer des champs assez importants pour différencier les résultats calculés à partir de (34) de ceux prévus à partir de (35) existent à peine à l'échelle astronomique. Par contre son intérêt théorique est beaucoup plus important.

L'existence de (35) laisse prévoir des équations du type Maxwellien. Considérons (33), elle exprime le théorème de Gauss. En effet, si  $S$  est une surface fermée,  $D$  le domaine intérieur à cette surface, si  $ds$  est un élément de surface,  $\vec{ds}$  un vecteur ayant  $ds$  pour mesure, et disposé suivant la normale à la surface, suivant une direction positive,  $d\tau$  un élément de volume, on a

$$(36) \quad \iint_S \vec{G} \vec{ds} = -4\pi\epsilon^2 \iiint_D \delta d\tau$$

Soit  $\vec{v}$  la vitesse du fluide (ou du solide) de densité  $\delta$ , on a d'autre part

$$(37) \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \delta d\tau = - \iint_S \delta \vec{v} \vec{ds}$$

qui exprime la *conservation* de la masse, (c'est-à-dire de l'énergie). On en déduit, en comparant (36) et (37)

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{G} \vec{ds} = 4\pi\epsilon^2 \iint_S \delta \vec{v} \vec{ds}$$

soit

$$\iint \left( \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} - 4\pi\epsilon^2 \delta \vec{v} \right) ds = 0$$

soit 
$$\operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} - 4\pi\epsilon^2 \delta \vec{v} \right) = 0,$$

soit encore 
$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial t} - 4\pi\epsilon^2 \delta \vec{v} = \operatorname{rot} c \vec{K}$$

$c \vec{K}$  étant un vecteur indéterminé pour le moment. Cette équation peut s'écrire

$$(38) \quad \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} - 4\pi\epsilon^2 \delta \vec{v} \right) = \operatorname{rot} \vec{K}$$

qui est du type Maxwell-Ampère.

Existe-t-il une équation du type Maxwell-Faraday? soit

$$(24) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \vec{G}$$

Nous avons vu que cette équation (24) existe effectivement lorsque  $\vec{G}$  représente un champ d'accélération. Il est tout à fait dans l'esprit de la relativité de supposer que cette équation reste valable lorsque le champ gravifique est produit par des masses.

Les équations (24) et (38) entraînent l'existence d'un potentiel vecteur  $\vec{V}$  et d'un potentiel scalaire  $\theta$ ,  $\vec{G}$  et  $\vec{K}$  en dérivent à l'aide des relations

$$\vec{G} = - \operatorname{grad} \theta - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad \vec{K} = \operatorname{rot} \vec{V}$$

qui ne sont autres que (22) et (23). En transposant des calculs bien connus, on obtient en outre

$$(39) \quad \square \vec{V} = 4\pi\delta\epsilon^2 \frac{\vec{v}}{c}$$

$$(40) \quad \square \theta = 4\pi\delta\epsilon^2$$

et l'équation adjointe

$$(41) \quad \operatorname{div} \vec{V} + \frac{1}{c} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

(40) n'est autre chose que (35) dont nous avons reconnu la nécessité, (39) est inséparable de (40) puisque  $i\theta$  est la 4<sup>e</sup> composante du quadri-vecteur  $\vec{F}$ .



Si on admet que le champ d'accélération et le champ gravifique ont la *même nature* et se combinent en un seul et même champ apparent  $\vec{G}$  qui agit sur les masses pour se manifester par la force  $\vec{F} = m\vec{G}$ , on doit admettre que le champ pseudo-magnétique  $\vec{K}$  a la même nature également, qu'il soit produit par un rotationnel de vitesses d'entraînement ou par un mouvement de masses matérielles, que le potentiel vecteur  $\vec{F}$  produit par un déplacement de masses a lui aussi la même nature que s'il est dû à une vitesse d'entraînement, et cela, quelles que soient les participations respectives de la gravitation et de l'inertie. Il en résulte alors que *la formule de Coriolis*

$$\vec{\mathcal{F}} = m\vec{G} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{K}$$

reste valable.

Cette théorie, qui repose sur des bases assez raisonnable a des conséquences intéressantes.

D'abord, un astre en rotation, possède un moment cinétique  $\vec{S}$  qui n'est pas très bien connu parce qu'on ignore la répartition des densités, mais dont on possède un bon ordre de grandeur. Cet astre en rotation produit un champ pseudo-magnétique facile à calculer. Il suffira de former la quantité  $f = \epsilon^2 \delta$  que l'on assimilera à une densité électrique et le calcul sera le même que celui du champ magnétique dans le problème électrique. Cela revient au fond à assimiler formellement le moment d'inertie à un moment magnétique. Toutefois les unités ne sont pas comparables à cause du coefficient  $\epsilon^2$  qui provient du fait que *l'unité de masse a été déterminée d'après la loi de l'inertie et non d'après la loi de Newton*. Si  $\vec{S}$  est le moment cinétique, le champ au point M aura la forme bien connue du champ de doublet, à condition de le multiplier par le coefficient  $\epsilon^2$ .

On a pour la composante radiale

$$K_r = 2K \cos \alpha$$

et pour la composante tangentielle

$$(42) \quad K_t = K \sin \alpha \quad \text{avec} \quad K = \frac{S\epsilon^2}{cr^3}$$

O étant l'origine,  $\alpha$  étant l'angle que fait  $\vec{OM}$  avec  $\vec{S}$ .

On a pour la Terre, dans le système C.G.S.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2,8 \cdot 10^{-4}, & \varepsilon^2 &= 6,67 \cdot 10^{-8}, \\ S &= 7,1 \cdot 10^{40}, & r &= 6,37 \cdot 10^8.\end{aligned}$$

Soit à la surface de la Terre  $K = 6,12 \cdot 10^{-4}$ , et le champ polaire a pour valeur  $K_p = 2K = 1,22 \cdot 10^{-3}$  unités pseudo-magnétiques d'inertie.

Si on divise les expressions ci-dessus par  $\varepsilon$ , on obtient les champs en unités gravitationnelles, définies à l'aide de la loi de Newton comme les unités électromagnétiques sont définies à l'aide de la loi de Coulomb. On trouve pour le champ polaire

$$K_p = 5,1 \text{ gauss.}$$

Si on divise la valeur 42 par  $c$ , on obtient une valeur du champ en radians par seconde, et une vitesse angulaire  $\omega = R/2$ , on a

$$R_p = \omega_2 = 2 \frac{K_p}{c} = R \frac{S\varepsilon^3}{c^2 r^3} \quad \text{d'où} \quad \omega = 2,04 \cdot 10^{-14}$$

qui correspond à une période de 11 millions d'années.

Le plan d'oscillation du pendule de Foucault placé au pôle est donc entraîné à la vitesse angulaire  $\omega$  par rapport aux étoiles. Cette précession qui n'est pas à l'échelle de la vie humaine est tout à fait impossible à observer.

Si cet effet n'a aucune importance pratique, il est d'une grande importance théorique, car il montre que la notion de *direction fixe* est liée à l'ensemble de la matière stellaire<sup>(13)</sup>.

*Un système n'est donc galiléen en un point que si le champ gravifique et le champ pseudo-magnétique sont nuls.*

On sait que le champ magnétique terrestre a pour valeur au pôle  $H_p = 0,61$  gauss. Il est remarquable que ces deux champs soient presque du même ordre de grandeur, et dans un rapport  $\beta$  voisin de 8. Ce rapport est aussi celui du moment cinétique de la Terre, et de son moment magnétique, exprimés tous deux dans des unités appartenant au même système, et de mêmes dimensions. Cette remarque nous rapproche des idées de SHUSTER et de H. A. à WILSON qui revenaient en fait à confondre le champ *pseudo-magnétique*, que nous

<sup>(13)</sup> Ces conclusions rejoignent celles de la Relativité Généralisée, sous sa forme classique (Einstein, quatre conférences sur la relativité, p. 89, Gauthier-Villars, 1925).

venons de définir, avec le *champ magnétique* <sup>(14)</sup>. Cette théorie séduisante puisqu'elle aurait expliqué l'énigme du champ magnétique terrestre, a suscité des expériences qui n'ont pas été favorables. D'autre part, cette correspondance souvent parfaite, et toujours inévitable entre les grandeurs et équations de l'électro-magnétisme, d'une part, de la gravitation et l'inertie, d'autre part, ne laisse prévoir aucune interférence entre ces deux groupes de phénomènes, qui semblent encore étrangers et irréductibles.

Ces considérations nous aideront à comprendre le spin. Nous avons montré <sup>(15)</sup> qu'un gyroscope placé dans un champ de rotation se comporte comme un courant fermé, placé dans un champ magnétique.

En particulier, si  $\vec{S}$  est son moment cinétique, si  $\vec{R}$  est le champ de rotation, il est soumis à un couple qui a pour expression

$$(43) \quad \vec{C} = \vec{S} \wedge \vec{R}.$$

Il possédera de même une énergie relative

$$(43 \text{ bis}) \quad W = \vec{S} \cdot \vec{R}.$$

Formules analogues à celles concernant le courant de moment magnétique  $\vec{M}$ , placé dans un champ  $H$ , soit

$$\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{H} \quad \text{et} \quad W = \vec{M} \cdot \vec{H}.$$

De même qu'il peut exister un moment magnétique élémentaire sans rotation d'électricité (le moment magnétique existant à l'état pur comme la charge électrique), de même on conçoit qu'un moment cinétique puisse exister lui aussi à l'état pur, sans rotation de masses en mouvement.

#### § 4. Résumé schématique et symétrisé des résultats obtenus.

1° Il existe deux groupes de grandeur : le groupe électro magnétique et le groupe de gravitation inertie. On peut établir une correspondance formelle entre chaque grandeur d'un groupe et une

<sup>(14)</sup> Voir l'intéressant article de P.M.S. Blackett, The Magnetic field of massive rotating bodies. Nature, 159, 1947, page 601-658. Voir également « A negative experiment relating to magnetism and the earth rotation » by P.M.S. BLACKETT, F.R.S. — Série A. Mathematical and Physical Science, n° 897, vol. 245, p. 309-310, 16 déc. 1952.

<sup>(15)</sup> René Reulos, Cahiers de physique n° 31-32 Janvier 48, p. 88 à 91.

grandeur convenablement choisie de l'autre groupe, de sorte qu'une grandeur appartenant à un groupe peut être considérée en quelque sorte comme l'image de l'autre.

2° Il existe deux champs de quadrivecteurs  $\mathcal{A} = \frac{A}{c}$  et  $\mathcal{V} = \frac{V}{c}$  qui représentent les deux composantes de l'impulsion potentielle (rapportée à l'unité de charge et à l'unité de masse).

3° Si on appelle  $\pi_i$  les composantes  $\frac{1}{c} (mV_i + eA_i)$  de l'impulsion potentielle. On a l'invariant du mouvement relativiste

$$\sum_{i=1}^{i=4} (p_i - \mathcal{P}_i)^2 + m_0^2 c^2 = 0$$

et l'expression de la force agissante (qui donne en outre l'expression de la puissance dépensée par le milieu)

$$\frac{d}{dt}(mv) = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{vmatrix}$$

avec

$$f_{ik} = \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned} \text{soit } eH_1 + mK_1 &= f_{23} = -f_{32} & i(eE_1 + mG_1) &= f_{14} = -f_{41} \\ eH_2 + mK_2 &= f_{31} = -f_{13} & i(eE_2 + mG_2) &= f_{24} = -f_{42} \\ eH_3 + mK_3 &= f_{12} = -f_{21} & i(eE_3 + mG_3) &= f_{34} = -f_{43} \\ f_{11} &= f_{22} = f_{33} = f_{44} = 0. \end{aligned}$$

4° Les équations de l'électromagnétisme se transposent dans la théorie de la gravitation, lorsque le système de référence est galiléen. Il existe toutefois une différence importante qui provient du fait qu'il n'y a pas de masses négatives et que *les masses positives, donc de même signe s'attirent*. Cette différence nous a obligés à changer le signe des termes contenant la densité dans les équations des champs et des potentiels, tout en les conservant dans la formule Lorentz-Coriolis. On obtient les équations

$$(44) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} - 4\pi e^2 \vec{\delta v} = \text{rot } \vec{K}.$$

$$(45) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \vec{G}.$$

$$(46) \quad \operatorname{div} \vec{G} = -4\pi\epsilon^2\delta \quad \operatorname{div} \vec{K} = 0. \quad (47)$$

$$(48) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\operatorname{grad}} \theta + \vec{G} = 0.$$

$$(49) \quad \operatorname{rot} \vec{V} - \vec{K} = 0.$$

$$(50) \quad \operatorname{div} \vec{V} + \frac{1}{c} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

avec la formule d'interaction.

$$(51) \quad \vec{\mathcal{F}} = \left( \vec{G} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{K} \right) \delta d\tau \quad (\text{et } \tau \text{ élément de volume}).$$

Si on effectue dans ces équations le changement de variable

$$(52) \quad \delta' = i\epsilon\delta \quad \vec{G}' = \frac{\vec{G}}{i\epsilon} \quad \vec{K}' = \frac{\vec{K}}{i\epsilon}, \quad V' = \frac{V}{i\epsilon} \quad \theta' = \frac{\theta}{i\epsilon} \quad \text{avec } i^2 = -1$$

on peut écrire ces équations sous la forme

$$(53) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{G}'}{\partial t} + 4\pi\delta'\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{K}'.$$

$$(54) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{K}'}{\partial t} = - \operatorname{rot} \vec{G}'.$$

$$(55) \quad \operatorname{div} \vec{G}' = 4\pi\delta' \quad \operatorname{div} \vec{K}' = 0 \quad (56)$$

$$(57) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} + \vec{\operatorname{grad}} \theta' + \vec{G}' = 0.$$

$$(58) \quad \operatorname{rot} \vec{V}' - \vec{K}' = 0 \quad \operatorname{div} \vec{V}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \theta'}{\partial t} = 0 \quad (59)$$

$$(60) \quad \vec{\mathcal{F}} = \left( \vec{G}' + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{K}' \right) \delta' d\tau$$

qui sont cette fois identiques aux équations de l'électromagnétisme et entrent dans le schéma symétrisé de Minkowski, avec des notations

semblables. Les grandeurs correspondantes de l'électromagnétisme et de la gravitation-inertie ont alors même dimension.

Lorsque les champs ne sont pas entièrement dus à des masses agissantes, en mouvement dans un système de référence galiléen, les équations (44) et (46) issues du théorème de Gauss ne sont plus exactes, parce qu'un champ d'accélération a généralement une divergence positive. Toutes les autres équations restent valables.

## CHAPITRE III

### RECHERCHE DE L'ÉQUATION DES ONDES ASSOCIÉES

#### Le système algébrique et le système différentiel.

Nous associons au mouvement des corpuscules deux systèmes d'équations :

1° Un système d'équations algébriques qui définit deux champs de quadrivecteurs, d'ailleurs indéterminés. Lorsque ces équations sont satisfaites, il en est de même de l'intégrale première du mouvement relativiste, en théorie non quantifiée.

2° Un système différentiel qui lie les champs en question et qui contient la constante  $\hbar$ .

L'ensemble de ces deux groupes d'équations semble résoudre le problème de l'onde associée au corpuscule.

#### § 3. — Le tenseur orthogonal.

$v$  étant la vitesse d'un corpuscule (de composantes  $v_1, v_2, v_3, v_4 = ic$ ), nous associons à son mouvement le tenseur quaternion

$$(1) \quad R = \left( \sum_1^4 v_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} v_4 & v_3 & -v_2 & v_1 \\ -v_3 & v_4 & v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 & v_4 & v_3 \\ -v_1 & -v_2 & -v_3 & v_4 \end{vmatrix} = \left( \sum_1^4 v_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{R}$$

obtenu d'après le schéma déjà rencontré au ch. I, et que nous rappelons pour mémoire.

Soit  $\mathcal{R}_{kl}$  son terme général, on a d'une part

$$\mathcal{R}_{kl} = -\mathcal{R}_{lk} = \varepsilon v_r$$

avec permutation des indices d'espace 1, 2, 3 soit

$$\mathcal{R}_{12} = -\mathcal{R}_{21} = \varepsilon v_3 \quad \mathcal{R}_{23} = -\mathcal{R}_{32} = \varepsilon v_1 \quad \mathcal{R}_{31} = -\mathcal{R}_{13} = \varepsilon v_2$$

on a d'autre part  $\mathcal{R}_{k4} = -\mathcal{R}_{4k} = \varepsilon' v_k$ .

Enfin, sur la diagonale principale

$$\mathcal{R}_{ll} = \varepsilon'' v_l = \varepsilon'' i c \quad (l = 1, 2, 3, 4)$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ , sont indépendants et peuvent prendre arbitrairement les valeurs  $+1$  ou  $-1$ , ce qui fait 8 combinaisons différentes qui correspondent à l'orientation des axes d'espace, à l'orientation de la 4<sup>e</sup> dimension, et au signe  $+$  ou  $-$  de l'ensemble du tenseur. Tout cela n'est qu'une question de convention sans importance pour ce qui suit, nous avons choisi arbitrairement  $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = +1$

$i$  est la base des nombres complexes affectée à la quatrième dimension par la relation  $x_4 = ict$  avec  $i^2 = -1$ .

Si  $\tilde{R}$  est le tenseur transposé de  $R$ ,  $R^{-1}$  le tenseur inverse, on vérifie facilement que

$$(2) \quad R \tilde{R} = 1$$

ce qui prouve que  $\tilde{R} = R^{-1}$ , c'est-à-dire que le tenseur  $R$  est *orthogonal*, parce que son inverse est égal à son transposé. On a aussi  $R^* = \tilde{R}$  ( $R^*$  étant le tenseur conjugué de  $R$ ).

Nous avons d'autre part

$$\left( \sum_1^4 v_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{i\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{ic\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{im_0 c}$$

$m$  étant la masse du corpuscule,  $m_0$  sa masse au repos.

On en déduit, en posant

$$P_k = mv_k \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad \text{avec} \quad P_4 = imc$$

$$(3) \quad R = \frac{1}{im_0 c} \begin{vmatrix} P_4 & P_3 & -P_2 & P_1 \\ -P_3 & P_4 & P_1 & P_2 \\ P_2 & -P_1 & P_4 & P_3 \\ -P_1 & -P_2 & -P_3 & P_4 \end{vmatrix}$$

Nous supposons que le corpuscule se meut dans un champ électromagnétique dérivant du potentiel scalaire  $U$ , du potentiel vecteur  $\vec{A}$ , nous supposons de plus que les potentiels de gravitation-inertie



$\tilde{V}$  et  $\Theta$  sont nuls ou négligeables. On a d'après (11) ou (26) (chapitre II)  $P_t = mv_t = p_t - \frac{e}{c} A_t$  et d'après (12) ou (27)

(chapitre II)  $P_4 = mv_4 = imc = \frac{i}{c} (W - eU)$

s'écrit alors

$$(4) \quad R = \frac{1}{m_0 c} \begin{vmatrix} \frac{i}{c}(W - eU) & \left(p_3 - \frac{e}{c} A_3\right) & -\left(p_2 - \frac{e}{c} A_2\right) & \left(p_1 - \frac{e}{c} A_1\right) \\ -\left(p_3 - \frac{e}{c} A_3\right) & \frac{i}{c}(W - eU) & \left(p_1 - \frac{e}{c} A_1\right) & \left(p_2 - \frac{e}{c} A_2\right) \\ \left(p_2 - \frac{e}{c} A_2\right) & -\left(p_1 - \frac{e}{c} A_1\right) & \frac{i}{c}(W - eU) & \left(p_3 - \frac{e}{c} A_3\right) \\ -\left(p_1 - \frac{e}{c} A_1\right) & -\left(p_2 - \frac{e}{c} A_2\right) & -\left(p_3 - \frac{e}{c} A_3\right) & \frac{i}{c}(W - eU) \end{vmatrix}$$

Tous ces tenseurs sont hermitiens. La relation d'orthogonalité  $RR^\sim = 1$  s'écrit ainsi

$$(5) \quad \frac{1}{c^2} (W - eU)^2 - \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}\right)^2 = m_0^2 c^2$$

qui n'est autre que la formule (13) I déjà rencontrée et qui constitue l'équation fondamentale du mouvement du corpuscule chargé, dans un champ électromagnétique.

#### § 4. — Le système algébrique.

Soit alors  $\varphi$  un vecteur d'univers absolument arbitraire,  $\psi$  le vecteur transformé par l'opérateur linéaire  $R$ , on a

$$(6) \quad \psi = R\varphi,$$

$\psi$  est associé au mouvement du corpuscule parce que les coefficients de la matrice  $R$  de la transformation sont les composantes de la quantité du mouvement du corpuscule. La transformation inverse s'écrit

$$(7) \quad \varphi = R^\sim \psi.$$

En effet, nous avons vu (2) que

$$(2) \quad RR^\sim - 1 = 0$$

en vertu des lois de la mécanique relativiste, et que de ce fait  $R \sim = R^{-1}$ .

Nous pouvons écrire plus généralement

$$(8) \quad \lambda^{-1} \psi = R \varphi$$

$$(9) \quad \lambda \varphi = R \sim \psi$$

avec  $\lambda \lambda^{-1} = 1$ ,  $\lambda$  pouvant être réel ou complexe (dans ce dernier cas, le produit des modules reste égal à 1, les arguments sont opposés). Bien que l'indétermination règne pour le moment sur les vecteurs  $\varphi$  et  $\psi$ , on doit considérer qu'ils ne sont pas indépendants l'un de l'autre et que la loi qui les lie est également celle qui assure la conservation du quadrivecteur quantité de mouvement, dans la mécanique relativiste.

Les équations (8) et (9) peuvent être développées et mises sous une forme algébrique ; (8) s'écrit alors

$$(10) \quad \begin{aligned} i\lambda^{-1} m_0 c \psi_1 &= P_4 \varphi_1 + P_3 \varphi_2 - P_2 \varphi_3 + P_1 \varphi_4 \\ i\lambda^{-1} m_0 c \psi_2 &= P_4 \varphi_2 + P_1 \varphi_3 - P_3 \varphi_1 + P_2 \varphi_4 \\ i\lambda^{-1} m_0 c \psi_3 &= P_4 \varphi_3 + P_2 \varphi_1 - P_1 \varphi_2 + P_3 \varphi_4 \\ i\lambda^{-1} m_0 c \psi_4 &= -P_1 \varphi_1 - P_2 \varphi_2 - P_3 \varphi_3 + P_4 \varphi_4 \end{aligned}$$

et en notations vectorielles

$$(11) \quad \begin{aligned} i\lambda^{-1} m_0 c \psi &= P_4 \vec{\varphi} + \vec{P} \varphi_4 - \vec{P} \wedge \vec{\varphi} \\ i\lambda^{-1} m_0 c \psi_4 &= -\vec{P} \cdot \vec{\varphi} + P_4 \varphi_4 \end{aligned}$$

9 s'écrit

$$(12) \quad \begin{aligned} i\lambda m_0 c \varphi_1 &= P_4 \psi_1 - P_3 \psi_2 + P_2 \psi_3 - P_1 \psi_4 \\ i\lambda m_0 c \varphi_2 &= P_4 \psi_2 - P_1 \psi_3 + P_3 \psi_1 - P_2 \psi_4 \\ i\lambda m_0 c \varphi_3 &= P_4 \psi_3 - P_2 \psi_1 + P_1 \psi_2 - P_3 \psi_4 \\ i\lambda m_0 c \varphi_4 &= P_1 \psi_1 + P_2 \psi_2 + P_3 \psi_3 + P_4 \psi_4 \end{aligned}$$

Soit en notations vectorielles

$$(13) \quad \begin{aligned} i\lambda m_0 c \vec{\varphi} &= P_4 \vec{\psi} - \vec{P} \psi_4 + \vec{P} \wedge \vec{\psi} \\ i\lambda m_0 c \varphi_4 &= \vec{P} \cdot \vec{\psi} + P_4 \psi_4 \end{aligned}$$

En conclusion, nous associons au mouvement du corpuscule un double champ vectoriel. Ce champ vérifie les équations (2) (8) (9) qui prennent les formes algébriques (5) (10) et (12) et les formes vectorielles (11) et (13).

Ce double champ de quadrivecteurs n'est pas à proprement parler

une *fonction d'onde* et les équations (8) et (9) ne peuvent être considérées comme les équations cherchées parce que ce sont des *équations algébriques*, qu'elles sont en nombre insuffisant, et laissent de ce fait les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  indéterminées. De plus, ces fonctions ne présentent aucun caractère périodique, enfin, ces équations contiennent les composantes du quadrivecteur quantité du mouvement, terme qui doit évidemment disparaître des coefficients des équations générales cherchées. En effet, les coefficients en question ne doivent contenir tout au plus que les coordonnées.

Ainsi apparaît clairement le sens des équations (8) et (9) : et des équations équivalentes. *Elles représentent la contribution apportée à la mécanique ondulatoire par la conception corpusculaire classique de la mécanique relativiste.*

Il est visible qu'il leur manque un système différentiel fonctions  $p_i$  des  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$  et des  $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$  qui leur apporterait l'élément périodique fondamental, apanage de la mécanique ondulatoire. Ces équations permettraient en outre d'éliminer les  $p$  entre leur propre système et le système précédent, et de résoudre le problème de la détermination de l'équation aux dérivées partielles de l'onde associée.

### § 5. — Le système différentiel.

Pour introduire cet élément périodique, nous nous plaçons d'abord dans le cas du corpuscule neutre, ou chargé, en l'absence de champ extérieur, nous admettrons que les vecteurs  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions circulaires du temps. Nous supposons en outre, que lorsque le corpuscule est immobile, la fréquence est donnée par la relation fondamentale

$$(14) \quad W_0 = h\nu = \hbar\omega$$

$\nu$  fréquence,  $\omega$  pulsation,  $W_0$  étant l'énergie propre du corpuscule,  $m_0$  la masse au repos, en d'autres termes, les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  satisfont aux équations différentielles.

$$(15) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} W_0 \right) \varphi_k = 0 \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} W_0 \right) \psi_k$$

Nous supposons en outre que les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont les compo-

santes de champs uniformes, ce qui se traduit par les équations

$$(16) \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} = 0 \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} = 0.$$

Ces hypothèses traduisent au fond, l'idée primitive de Louis de Broglie.

Lorsque le corpuscule est animé d'une vitesse  $\bar{v}$ , il faut transformer (15) et (16) et chercher leurs expressions dans un système de référence animé par rapport au premier d'une vitesse  $\bar{v}' = -\bar{v}$ . Ce changement doit s'opérer suivant la transformation de Lorentz. On arrive plus simplement à ce résultat par des considérations de symétrie relativiste. En notations d'univers, (15) s'écrit avec  $W_0 = m_0 c^2$ ,  $x_4 = ict$

$$(17) \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial x_4} = \frac{m_0 c}{\hbar} \psi_k \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_4} = \frac{m_0 c}{\hbar} \varphi_k$$

d'autre part, si  $\bar{v}$  est le quadrivecteur vitesse, de composantes

$$v_l = \frac{dx_l}{dt} \text{ on a } v_4 = ic \quad im_0 c = m_0 v_4 \quad \text{et} \quad m_0 c = -im_0 v_4$$

(17) s'écrit alors

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_4} = -\frac{im_0 v_4}{\hbar} \psi_k \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_4} = -\frac{im_0 v_4}{\hbar} \varphi_k \quad (18).$$

Considérons maintenant le système plus général

$$(18) \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} = -\frac{im}{\hbar} v_l \psi_k \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = -\frac{im}{\hbar} v_l \varphi_k$$

il est facile de voir que dans le système propre de la particule, il se réduit aux équations (15) et (16), puisque  $m$  devient  $m_0$  et que  $v_1 v_2 v_3$  s'annulent.

Le système (18) apparaît bien comme le système transformé de (15) et (16) dans la transformation de Lorentz, la quatrième équation s'écrit aussi

$$(18') \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{imc^2}{\hbar} \psi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{imc^2}{\hbar} \varphi.$$

Il est d'ailleurs facile d'établir ce résultat directement, et d'une manière plus rigoureuse. Nous passons du système propre du corpuscule à un autre système galiléen animé par rapport au premier d'une vitesse de translation  $-\bar{v}$ . Nous utilisons la *trans-*

formation de Lorentz généralisée (compte tenu du signe négatif de la vitesse), (avec  $\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1$ )

$$(19) \quad \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{v^2} \chi & \frac{v_1 v_2}{v^2} \chi & \frac{v_1 v_3}{v^2} \chi & \frac{v_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{v_2 v_1}{v^2} \chi & 1 + \frac{v_2^2}{v^2} \chi & \frac{v_2 v_3}{v^2} \chi & \frac{v_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{v_3 v_1}{v^2} \chi & \frac{v_3 v_2}{v^2} \chi & 1 + \frac{v_3^2}{v^2} \chi & \frac{v_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-v_1}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-v_2}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-v_3}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ T \end{vmatrix}$$

que nous écrivons symboliquement  $\left| \frac{x_i}{t} \right| = |L| \times \left| \frac{X_i}{T} \right|$ ,  $|L|$  étant la matrice de la transformation de Lorentz. Si  $L^{-1}$  est la matrice inverse,  $-L$  la matrice obtenue en renversant le sens du vecteur vitesse  $v$ , on a

$$L^{-1} = -L$$

Le changement de variables (19) entraîne la relation

$$(20) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial X_i} \\ \frac{\partial \psi}{\partial T} \end{vmatrix} = -L \times \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{vmatrix}$$

qui s'écrit, plus explicitement :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{v^2} \chi & \frac{v_2 v_1}{v^2} \chi & \frac{v_3 v_1}{v^2} \chi & \frac{-v_1}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{v_2 v_1}{v^2} \chi & 1 + \frac{v_2^2}{v^2} \chi & \frac{v_3 v_2}{v^2} \chi & \frac{-v_2}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{v_3 v_1}{v^2} \chi & \frac{v_3 v_2}{v^2} \chi & 1 + \frac{v_3^2}{v^2} \chi & \frac{-v_3}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{v_1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{v_3}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (20')$$

soit en développant, en tenant compte de (15) et de (16), et du fait

que  $X_i$  et  $T$  représentent maintenant les coordonnées dans le système lié au corpuscule :

$$(21) \quad \frac{\partial \psi}{\partial X_1} = \left(1 + \frac{v_1^2}{v^2} \chi\right) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{v_1 v_2}{v^2} \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{v_1 v_3}{v^2} \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{v_1}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

$$(22) \quad \frac{\partial \psi}{\partial X_2} = \frac{v_2 v_1}{v^2} \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \left(1 + \frac{v_2^2}{v^2} \chi\right) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{v_2 v_3}{v^2} \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{v_2}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

$$(23) \quad \frac{\partial \psi}{\partial X_3} = \frac{v_3 v_1}{v^2} \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \left(\frac{v_2 v_3}{v^2} \chi\right) \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \left(1 + \frac{v_3^2}{v^2} \chi\right) \frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{v_3}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

$$(24) \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} = \frac{v_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{v_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{v_3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i W_0 \psi}{\hbar}.$$

L'équation (24) s'écrit en multipliant les deux membres par  $m_0$  et compte tenu de la notation (4') du ch. II, soit  $\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = P$

$$(25) \quad P_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + P_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + m \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i m_0^2 c^2}{\hbar} \psi.$$

Cette équation est vérifiée par le système (18), qui n'est autre que (2) ch. II, c'est-à-dire 13 ch. II, laquelle est implicitement contenue dans 6 et 7 ch. III, et vérifiée par hypothèse, car l'équation (25) donne par substitution

$$-P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 + m^2 c^2 = m_0^2 c^2.$$

Il reste à montrer que les trois relations précédentes (21) à (23) sont également vérifiées.

(21) s'écrit en effectuant les substitutions (18) et (18') et en divisant les deux membres par  $\frac{m v_1}{\hbar} \psi$ .

$$-\left(1 + \frac{v_1^2}{v^2} \chi\right) - \frac{v_2^2}{v^2} \chi - \frac{v_3^2}{v^2} \chi + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0.$$

Soit 
$$\chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1.$$

On vérifierait que (22) et (23) sont également satisfaites dans les mêmes conditions.

Lorsque le corpuscule est *chargé* et soumis à l'influence d'un *champ électromagnétique* dérivant d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$ , son énergie est accrue de l'énergie potentielle  $eU$ , c'est donc la quantité  $W = mc^2 + eU$  qui doit entrer dans la formule fondamentale (15), cette expression s'écrit alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} (m_0 c^2 + eU) \psi \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\frac{i}{\hbar} \left( m_0 v_i + \frac{e}{c} A_i \right) \psi.$$

Il en est de même de (18) qui s'écrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\frac{i}{\hbar} \left( m v_i + \frac{e}{c} A_i \right) \psi.$$

Cette équation appartient au système général

$$(26) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\frac{i p_i}{\hbar} \psi \quad \text{avec bien entendu} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{i p_i}{\hbar} \varphi \quad (26')$$

et 
$$p_i = m v_i + \frac{e}{c} A_i.$$

Lorsqu'il se superpose un champ de gravitation inertie dérivant du potentiel d'impulsion défini par le vecteur  $V$  de composantes  $V_1 V_2 V_3 V_4$  avec  $V_i = i\Theta$  ( $\Theta$  potentiel scalaire).

$$(27) \quad p_i = m v_i + \frac{e}{c} A_i + \frac{m}{c} V_i$$

La quatrième équation de 27 peut s'écrire

$$(28) \quad W = mc^2 + eU + m\Theta.$$

Le système (26) peut se mettre sous la forme opérationnelle commode

$$(29) \quad p_l = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_l}$$

avec, pour  $l = 4$

$$(30) \quad W = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Système considéré comme un *principe* fondamental de la méca-

nique ondulatoire, et comme tel, posé *a priori*. L'étude qui précède rattache ce système aux idées primitives de Planck et d'Einstein, et à l'hypothèse de base de la première théorie de Louis de Broglie,

En portant (29) et (30) dans (27) et (28) on obtient le système

$$(31) \quad P_i = mv_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i - mVe$$

$$(32) \quad P_4 = imc = \frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{c} (eU + m\Theta)$$

qui est fondamental dans notre théorie, car d'une part, il remplace les opérations de base de la mécanique ondulatoire et il a été obtenu par voie déductive à partir de l'hypothèse du début du § 5, ch. III (formules 15 et 16), d'autre part, *il est valable dans les systèmes non galiléens et introduit de ce fait la relativité généralisée en mécanique ondulatoire.*

## FORMULE D'EINSTEIN ET FORMULE DE LOUIS DE BROGLIE

La formule d'Einstein

$$W = h\nu = \frac{h}{\tau} \quad (35)$$

$W$  énergie,  $\nu$  fréquence,  $\tau$  période, *ne saurait exister seule*, en vertu de la symétrie relativiste de l'espace-temps. Elle peut en effet s'écrire

$$(36) \quad p_4 = \frac{iW}{c} = -\frac{h}{i\tau} = \frac{h}{\Lambda_4}$$

Or  $p_4$  est la quatrième composante du quadrivecteur impulsion  $p$ , d'autre part,  $\lambda_4$  doit être considéré comme la quatrième composante d'un quadrivecteur  $\lambda$ . La relation (36) appelle donc trois autres relations du type

$$(37) \quad p_i = \frac{h}{\Lambda_i} \quad (\text{avec } i = 1, 2, 3,)$$

$$\text{soit vectoriellement} \quad \vec{p} = \frac{h}{\vec{\Lambda}} \quad (38)$$

Cette relation vectorielle définit une longueur d'onde vectorielle  $\vec{\lambda}$ , elle contient en valeur absolue la relation scalaire de Louis de Broglie



La relation (37), plus complète, est valable pour  $i = 1, 2, 3, 4$ , elle s'écrit plus simplement

$$(38) \quad p = \frac{h}{\Lambda}$$

$p$  et  $\Lambda$  étant alors des *quadrivecteurs d'univers*. Les trois premières composantes traduisent la relation de Louis de Broglie, la quatrième traduit la relation d'Einstein.

*Ainsi, la relation d'Einstein et la relation de Louis de Broglie, seraient la composante de temps et la composante d'espace d'une seule et même relation entre deux quadrivecteurs d'univers.*

## CHAPITRE IV

### LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES ONDES POUR LES CORPUSCULES CHARGÉS DANS LES SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE NON GALILÉENS — NOUVELLES NORMES

On obtient les équations générales des ondes pour les corpuscules chargés en éliminant les composantes  $P_z$  de la quantité de mouvement entre les deux systèmes d'équations, de manière à obtenir un système linéaire qui ne contienne plus que les fonctions d'onde, les variables de position (espace et temps), et les dérivées partielles du premier ordre des fonctions d'onde, par les variables en question

Il est possible de former à partir de ces équations un *vecteur d'univers* dont les composantes soient des *formes bilinéaires* des composantes des deux fonctions d'onde, et qui vérifie une *équation de conservation*. Les trois premières composantes de ce vecteur ont ainsi le caractère d'un *vecteur courant* et la quatrième composante, celui d'une *densité*. Bien que cette densité ait la forme d'une densité classique, de *probabilité de présence*, nous avons des raisons sérieuses de considérer qu'elle représente une *densité d'énergie*, nous sommes alors à même d'analyser le mécanisme énergétique de l'onde, et nous cherchons ailleurs le *courant et la densité d'électricité*.

#### § 6. — Les équations des ondes pour les corpuscules chargés.

En conclusion de l'étude qui précède, le système d'équations des ondes associées aux corpuscules chargés, en mouvement dans un champ électromagnétique, dérivant d'un potentiel vecteur d'univers  $A$  (dont la quatrième composante a pour expression  $A_4 = iU$ ,  $U$  potentiel scalaire), dans un système de référence non galiléen est donc formée :

D'une part par l'un ou l'autre des systèmes équivalents (10) (12) (algébrique) ou (11) (13) (vectoriel), ch. III.

D'autre part par le système différentiel (31) et (32) ch. III.

Autrement dit, le système des ondes associées est représenté par

l'un ou l'autre des systèmes (10) (12) ou (11) (13) en posant dans ces expressions

$$(1) \quad P_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} - \mathcal{P}_i \quad \text{avec, selon les notations du § 2, ch. II}$$

$$(2) \quad \mathcal{P}_i = m\mathcal{V}_i + \frac{e}{c} A_i \text{ (impulsion potentielle) et } \mathcal{P}_a = \frac{i}{c} (eU + m\theta)$$

soit en notations vectorielles

$$(3) \quad \vec{P} = i\hbar \vec{\nabla} - \vec{\mathcal{P}} \quad \text{et} \quad P, \text{ déjà défini}$$

(nous rappelons que  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur vectoriel de composantes)

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et que l'on a} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \text{rot } \vec{A}.$$

on obtient pour le système (10) II

(5)

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} im_0 c \psi_1 &= (i\hbar \partial_4 - \mathcal{P}_1) \varphi_1 + (i\hbar \partial_1 - \mathcal{P}_1) \varphi_4 - (i\hbar \partial_2 - \mathcal{P}_2) \varphi_3 + (i\hbar \partial_3 - \mathcal{P}_3) \varphi_2 \\ \lambda^{-1} im_0 c \psi_2 &= (i\hbar \partial_4 - \mathcal{P}_2) \varphi_2 + (i\hbar \partial_1 - \mathcal{P}_1) \varphi_3 + (i\hbar \partial_2 - \mathcal{P}_2) \varphi_4 - (i\hbar \partial_3 - \mathcal{P}_3) \varphi_1 \\ \lambda^{-1} im_0 c \psi_3 &= (i\hbar \partial_4 - \mathcal{P}_3) \varphi_3 - (i\hbar \partial_1 - \mathcal{P}_1) \varphi_2 + (i\hbar \partial_2 - \mathcal{P}_2) \varphi_1 + (i\hbar \partial_3 - \mathcal{P}_3) \varphi_4 \\ \lambda^{-1} im_0 c \psi_4 &= (i\hbar \partial_4 - \mathcal{P}_4) \varphi_4 - (i\hbar \partial_1 - \mathcal{P}_1) \varphi_1 - (i\hbar \partial_2 - \mathcal{P}_2) \varphi_2 - (i\hbar \partial_3 - \mathcal{P}_3) \varphi_3 \end{aligned}$$

et pour le système (12) II

(6)

$$\begin{aligned} \lambda im_0 c \varphi_1 &= (i\hbar \partial_4 - \mathcal{P}_1) \psi_1 - (i\hbar \partial_1 - \mathcal{P}_1) \psi_4 + (i\hbar \partial_2 - \mathcal{P}_2) \psi_3 - (i\hbar \partial_3 - \mathcal{P}_3) \psi_2 \\ \lambda im_0 c \varphi_2 &= (i\hbar \partial_4 - \mathcal{P}_2) \psi_2 - (i\hbar \partial_1 - \mathcal{P}_1) \psi_3 - (i\hbar \partial_2 - \mathcal{P}_2) \psi_4 + (i\hbar \partial_3 - \mathcal{P}_3) \psi_1 \\ \lambda im_0 c \varphi_3 &= (i\hbar \partial_4 - \mathcal{P}_3) \psi_3 + (i\hbar \partial_1 - \mathcal{P}_1) \psi_2 - (i\hbar \partial_2 - \mathcal{P}_2) \psi_1 - (i\hbar \partial_3 - \mathcal{P}_3) \psi_4 \\ \lambda im_0 c \varphi_4 &= (i\hbar \partial_4 - \mathcal{P}_4) \psi_4 + (i\hbar \partial_1 - \mathcal{P}_1) \psi_1 + (i\hbar \partial_2 - \mathcal{P}_2) \psi_2 + (i\hbar \partial_3 - \mathcal{P}_3) \psi_3 \end{aligned}$$

En groupant autrement les différents termes de (5), on aurait

(7)

$$\begin{aligned} \hbar(\partial_4 \varphi_1 + \partial_3 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_3 + \partial_1 \varphi_4) &= \lambda^{-1} m_0 c \psi_1 + i(\mathcal{P}_4 \varphi_1 + \mathcal{P}_3 \varphi_2 - \mathcal{P}_2 \varphi_3 + \mathcal{P}_1 \varphi_4) \\ \hbar(\partial_4 \varphi_2 + \partial_1 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_4) &= \lambda^{-1} m_0 c \psi_2 + i(\mathcal{P}_4 \varphi_2 + \mathcal{P}_1 \varphi_3 - \mathcal{P}_3 \varphi_1 + \mathcal{P}_2 \varphi_4) \\ \hbar(\partial_4 \varphi_3 + \partial_2 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_4) &= \lambda^{-1} m_0 c \psi_3 + i(\mathcal{P}_4 \varphi_3 + \mathcal{P}_2 \varphi_1 - \mathcal{P}_1 \varphi_2 + \mathcal{P}_3 \varphi_4) \\ \hbar(\partial_4 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3 - \partial_1 \varphi_4) &= -\lambda^{-1} m_0 c \psi_4 - i(\mathcal{P}_1 \varphi_1 + \mathcal{P}_2 \varphi_2 + \mathcal{P}_3 \varphi_3 - \mathcal{P}_4 \varphi_4) \end{aligned}$$

on obtient de même pour le système (6)

(8)

$$\begin{aligned} i\hbar(\partial_4 \psi_1 - \partial_3 \psi_2 + \partial_2 \psi_3 - \partial_1 \psi_4) &= \lambda m_0 c \varphi_1 + i(\mathcal{P}_4 \psi_1 - \mathcal{P}_3 \psi_2 + \mathcal{P}_2 \psi_3 - \mathcal{P}_1 \psi_4) \\ i\hbar(\partial_4 \psi_2 - \partial_1 \psi_3 + \partial_3 \psi_1 - \partial_2 \psi_4) &= \lambda m_0 c \varphi_2 + i(\mathcal{P}_4 \psi_2 - \mathcal{P}_1 \psi_3 + \mathcal{P}_3 \psi_1 - \mathcal{P}_2 \psi_4) \\ i\hbar(\partial_4 \psi_3 - \partial_2 \psi_1 + \partial_1 \psi_2 - \partial_3 \psi_4) &= \lambda m_0 c \varphi_3 + i(\mathcal{P}_4 \psi_3 - \mathcal{P}_2 \psi_1 + \mathcal{P}_1 \psi_2 - \mathcal{P}_3 \psi_4) \\ i\hbar(\partial_4 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3 + \partial_1 \psi_4) &= \lambda m_0 c \varphi_4 - i(\mathcal{P}_1 \psi_1 + \mathcal{P}_2 \psi_2 + \mathcal{P}_3 \psi_3 + \mathcal{P}_4 \psi_4) \end{aligned}$$

Ces équations prennent la forme vectorielle

(9)

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + i \operatorname{rot} \vec{\varphi} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} i \varphi_i + \frac{1}{\hbar} (\mathcal{P}_i \vec{\varphi} - \vec{\mathcal{P}} \wedge \vec{\varphi} + \vec{\mathcal{P}} \varphi_i) = -i \lambda^{-1} \frac{m_0 c}{\hbar} \vec{\psi}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_i) - i \operatorname{div} \vec{\varphi} - \frac{1}{\hbar} (\vec{\mathcal{P}} \vec{\varphi} - \mathcal{P}_i \varphi_i) = -\lambda^{-1} \frac{m_0 c}{\hbar} (i \psi_i)$$

(10)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + i \operatorname{rot} \vec{\psi} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} i \psi_i + \frac{e}{c \hbar} (\mathcal{P}_i \vec{\psi} + \vec{\mathcal{P}} \wedge \vec{\psi} - \vec{\mathcal{P}} \psi_i) = i \lambda \frac{m_0 c}{\hbar} \vec{\varphi}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + i \operatorname{div} \vec{\psi} + \frac{e}{c \hbar} (\vec{\mathcal{P}} \vec{\psi} + \mathcal{P}_i \psi_i) = \lambda \frac{m_0 c}{\hbar} (i \varphi_i).$$

### § 7. — Comparaison avec les Équations de Proca, de Bureau, de Louis de Broglie.

Nous avons donné à nos équations, la forme condensée (8) § 4. Nous pouvons en former une autre, destinée à les rapprocher de celles de M. Alexandre Proca. Nous nous plaçons dans un système de référence galiléen, nous avons  $\mathcal{P}_k = \epsilon A_k$  (avec  $\epsilon = \frac{e}{c}$ ), nous posons  $A_k = \frac{\epsilon}{\hbar} A_k$ ,

$$(a) \quad |F_{rs}| = \begin{vmatrix} \varphi_4 & \varphi_3 & -\varphi_2 & \varphi_1 \\ -\varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & -\varphi_1 & \varphi_4 & \varphi_3 \\ -\varphi_1 & -\varphi_2 & -\varphi_3 & \varphi_4 \end{vmatrix} \quad (b) \quad |G_{rs}| = \begin{vmatrix} \psi_4 & -\psi_3 & \psi_1 & -\psi_1 \\ \psi_3 & \psi_4 & -\psi_1 & -\psi_2 \\ -\psi_2 & \psi_1 & \psi_4 & -\psi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \end{vmatrix}$$

soit d'après (a), (b) et (6) et (7)

$$(5') \quad G_{rs} = \psi_k = (\partial_k - i A_k) \varphi_k + (\partial_k - i A_k) \varphi_4 - (\partial_r - i A_r) \varphi_s + (\partial_s - i A_s) \varphi_r$$

$$(6') \quad F_{rs} = \varphi_k = (\partial_k - i A_k) \psi_k + (\partial_k - i A_k) \psi_4 + (\partial_r - i A_r) \psi_s - (\partial_s - i A_s) \varphi_r.$$

Les équations (5) et (6) prennent alors la forme

$$(5'') \quad (\partial_r - i A_r) F_{rs} = \lambda^{-1} x \psi_s$$

$$(6'') \quad (\partial_r - i A_r) G_{rs} = \lambda x \varphi_s$$

en posant

$$x = \frac{m_0 c}{\hbar}$$

à condition que ces équations (5'') et (6'') soient accompagnées de (a) et (b), ou de (5'') et (6'') qui les explicitent également.

Rappelons que les équations de Proca <sup>(17)</sup> contiennent quatre fonctions d'onde, s'obtiennent à partir d'une fonction de Lagrange, posée à priori, et s'écrivent (formule 21, p. 351 article cité), soit :

$$(c) \quad (\partial_r + iA_r)F_{rs} = k^2\psi_s^*$$

que l'on peut mettre sous la forme conjuguée

$$(c^*) \quad (\partial_r - iA_r)G_{rs} = k^2\psi_s$$

(parce que, dans sa théorie  $G_{rs} = F_{rs}^*$ ) M. Proca appelle  $A$  et  $k$  les quantités que nous appelons  $A$  et  $\kappa$ , mais il pose

$$(d) \quad F_{rs}^* = G_{rs} = (\partial_r - iA_r)\psi_s - (\partial_s - iA_s)\psi_r,$$

que l'on peut encore écrire

$$(d^*) \quad G_{rs}^* = F_{rs} = (\partial_r + iA_r)\psi_s^* - (\partial_s + iA_s)\psi_r^*.$$

Les équations (5'') et (6'') sont très condensées, mais elles exigent d'être explicitées par les équations (5') et (6'), qui expriment la même chose, et qui sont les unes et les autres, des transpositions de (5) et (6), de sorte que cette forme ne s'impose pas dans notre théorie, et paraît même artificielle. Nous l'avons établie pour permettre une comparaison avec les équations de M. Proca, avec lesquelles elle présente une analogie, mais elle s'en éloigne en d'autres points car d'une part, nous avons deux vecteurs  $\varphi$  et  $\psi$ , deux tenseurs  $F_{rs}$  et  $G_{rs}$  et deux équations distinctes 5'' et 6'', au lieu d'un seul vecteur  $\psi$ , d'un seul tenseur (puisque  $G_{rs}$  est le conjugué de  $F_{rs}$ ) et d'une seule équation (puisque  $c^*$  est conjuguée de  $c$ ).

Si l'on suppose  $A=0$ , si l'on sépare les parties réelles des parties imaginaires, on obtient les équations « classiques » de Florent Bureau, si l'on annule  $\psi_i$  et la composante imaginaire de  $\varphi$ , on obtient les « équations du photon » de Louis de Broglie.

## § 8. — Comparaison avec les équations de Dirac.

Il est intéressant de comparer nos équations avec celles de Dirac. Nous nous plaçons dans un système de référence galiléen. Afin d'éviter un encombrement excessif des formules, et de faire tenir

<sup>(17)</sup> Alexandre Proca, « Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs ». Journal de Physique et du Radium, n° 8, p. 347 à 353, 1936.

celles-ci dans les limites qui nous sont imposées par le format de cette publication, nous posons

$$\alpha = \frac{m_0 c}{\hbar}, \quad \delta_r = \delta_r + i \frac{e}{c\hbar} A_r \quad (r=1, 2, 3), \quad \text{avec} \quad \delta_r = \frac{\partial}{\partial x_r}, \quad \delta_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

et

$$\delta_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ieU}{c\hbar} \quad \text{avec} \quad A_4 = iU.$$

Soient d'autre part  $\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , les matrices de Dirac. On peut former la matrice

$$T = \alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2 + \alpha_3 \delta_3 + \delta_0 + \alpha_4 \alpha$$

et écrire l'équation de Dirac sous la forme

$$|T| \times |\psi| = 0$$

avec

$$T = \begin{vmatrix} \delta_0 + \alpha & 0 & \delta_2 & \delta_1 - i\delta_2 \\ 0 & \delta_0 + \alpha & \delta_1 - i\delta_2 & -\delta_3 \\ \delta_3 & \delta_1 + i\delta_2 & \delta_0 - \alpha & 0 \\ \delta_1 - i\delta_2 & -\delta_3 & 0 & \delta_0 - \alpha \end{vmatrix}$$

Nous avons dans les mêmes conditions

$$|\psi| = |R| \times |\varphi| \quad |\varphi| = |R^*| \times |\psi|$$

avec

$$R = \frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \delta_0 & i\delta_3 & -i\delta_2 & i\delta_1 \\ -i\delta_3 & \delta_0 & i\delta_1 & i\delta_2 \\ i\delta_2 & -i\delta_1 & \delta_0 & i\delta_3 \\ -i\delta_1 & -i\delta_2 & -i\delta_3 & i\delta_0 \end{vmatrix}$$

Il est intéressant de comparer les matrices  $R$  et  $T$ . Au premier abord, l'ordonnance de la matrice  $R$  apparaît plus clairement que celle de la matrice  $T$  qui présente des cases surchargées (les deux diagonales), et des cases vides. De plus, on remarque que dans  $T$ , le facteur imaginaire  $i$  n'est plus l'apanage de la quatrième dimension (conception relativiste que l'on devrait abandonner), et qu'il affecte la variable  $x_2$  tandis que  $x_1$  et  $x_3$  sont réels.

On passe de l'ordonnance  $R$  à l'ordonnance  $T$  en permutant les cases d'indices 2 et 3, en vidant les cases d'indice 2 de leurs termes, que l'on vient ajouter en surcharge sur la deuxième diagonale, en plaçant le terme  $\alpha$  sur la diagonale principale, avec des signes appropriés. La dissymétrie de ce tenseur par rapport aux différentes variables montre que cette disposition n'est pas la seule possible.

Effectivement on a le choix entre un certain nombre de combinaisons possibles, mais on peut montrer que leur choix n'a pas d'effet sur les prévisions observables de la théorie.

§ 10. — Interprétation physique des fonctions d'Onde.  
Conservation de l'énergie, nouvelles normes.

Quel est le sens physique de l'onde associée au corpuscule ? Dans les premières théories (L. de Broglie, Shrödinger, Gordon). L'onde  $\psi$  était scalaire et complexe, de sorte qu'il était naturel de former la quantité conjuguée  $\psi^*$ , et le produit  $D = \psi\psi^*$ , *quantité essentiellement réelle et positive*. On peut lui adjoindre un vecteur

$$\vec{C} = \frac{\hbar}{2im} (\psi \overrightarrow{\text{grad}} \psi^* - \psi^* \overrightarrow{\text{grad}} \psi)$$

tel que  $\rho$  et  $\vec{C}$  vérifient une *équation de conservation*

$$(11) \quad \frac{\partial D}{\partial t} + \text{div } \vec{C} = 0$$

analogue à celle qui lie en hydraulique le *courant fluide* et la *densité* qui représente  $D$  et  $\vec{C}$  ? S'il y a une chose qui se conserve c'est, avant tout, le corpuscule (à moins qu'il ne se désintègre !). On a donc imaginé dès le début que  $D$  représentait la *densité de probabilité de présence*, c'est-à-dire que dans l'espace  $d\tau$  la probabilité de trouver le corpuscule est  $Dd\tau$  quantité nécessairement plus petite que l'unité. Comme si on cherche le corpuscule en explorant l'espace on a la *certitude* de le retrouver, c'est-à-dire une probabilité égale à l'unité, on doit avoir

$$\int_{\text{espace}} D d\tau = 1$$

relation qui nous permettra de *normer* la fonction  $\psi$ . Nous remarquerons toutefois que *ce n'est pas à nous à décider ce que représente la fonction  $\psi$ , et ce choix — qui a été adopté dans toutes les théories ondulatoires — ne peut-être maintenu que sous réserve des développements ultérieurs de la théorie.*

Dans la théorie de Dirac, on a 4 fonctions d'onde  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ , un

raisonnement analogue nous montre que l'on a encore l'équation II en posant

$$\varphi = \sum_1^4 \psi_h \psi_k^* \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= -c(\psi_1^* \psi_4 + \psi_2^* \psi_3 + \psi_3^* \psi_2 + \psi_4^* \psi_1) \\ C_2 &= -c(i\psi_1^* \psi_4 - i\psi_2^* \psi_3 + i\psi_3^* \psi_2 - i\psi_4^* \psi_1) \\ C_3 &= -c(\psi_1^* \psi_3 - \psi_2^* \psi_4 + \psi_3^* \psi_1 - \psi_4^* \psi_2) \end{aligned}$$

$C_1, C_2, C_3$  sont les 3 composants d'un vecteur  $\vec{C}$ .

Nous trouverons, nous aussi une *équation de conservation* de forme identique.

Suivant notre point de vue, nous cherchons aussi à former à partir des huit composantes de nos fonctions d'onde vectorielles  $\varphi$  et  $\psi$ , une quantité réelle et positive  $D$  susceptible de représenter l'*intensité* de l'onde, dans une grandeur pour le moment *indéterminée*, c'est-à-dire une *densité* de cette grandeur. Nous devons en outre lui adjoindre un vecteur  $\vec{C}$  représentant le *courant* de la grandeur en question.  $D$  et  $\vec{C}$  vérifieraient encore une équation du type (II) exprimant la *conservation* de la grandeur, sur laquelle nous n'avons fait aucune hypothèse a priori. L'*équation de conservation*, si elle existe, doit se déduire des équations générales (5) et (6) qui définissent les ondes  $\varphi$  et  $\psi$ .

Pour atteindre ce but, nous allons opérer une combinaison entre les équations (5) et (6). Nous achèverons d'abord de les *symétriser*. Nous avons vu en effet dès le début de cette étude, que  $ic$  a été introduit dans nos équations en tant que quatrième composante  $v_4 = dx_4/dt = \dot{x}_4$  du vecteur vitesse  $v$ . Nous remplaçons ainsi  $ic$  par  $v_4$ . Les équations en question contiennent encore le symbole  $i$  en facteur des éléments différentiels  $\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4$ , introduits par le système différentiel (26) et (26').

Ceci posé, nous formons les équations *conjuguées* (5) et (6) obtenues en changeant  $i$  en  $-i$ , là où il reste explicite. Cette opération n'atteint donc pas la quatrième dimension  $x_4$ , ni les dérivées  $\frac{\partial x_4}{dt}$  et  $\frac{\partial}{\partial x_4}$ , et les quatre dimensions de l'espace universel sont traitées de la même façon.

Envisagée sous l'angle des variables physiques (espace tridimensionnel et temps séparé), cette conjugaison apparaît comme la superposition de deux conjugaisons successives, qui n'altèrent pas la validité des équations sur lesquelles elles ont opéré :



1° Le changement de  $c$  en  $-c$ , conjugaison bien connue en relativité, et qui n'altère pas les équations ainsi transformées puisque  $c$  est une constante.

2° La conjugaison proprement dite, c'est-à-dire le changement de  $i$  en  $-i$ , ce que l'on a encore le droit de faire, puisque  $i$  est une base, de sorte que finalement :

$$x_i \quad \text{et les dérivées} \quad \dot{x}_i = ic \quad \text{et} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t}$$

restent inchangées, tandis que les opérateurs  $i\hbar\partial_1$   $i\hbar\partial_2$   $i\hbar\partial_3$   $i\hbar\partial_4$  changent de signe.

Nous multiplions ensuite :

Les équations (5) respectivement : la première par  $\lambda\varphi_1^*$  la seconde par  $\lambda\varphi_2^*$  etc... (voir Tableau I).

Les équations (6) respectivement, la première par  $\lambda^{-1}\psi_1^*$ , la deuxième par  $\lambda^{-1}\psi_2^*$  etc...

Les équations 5\*, la première par  $-\lambda\varphi_1$  etc...

Les équations 6\*, la première par  $-\lambda^{-1}\psi_1$  etc...

Puis nous ajoutons membre à membre les 16 équations. *Les termes d'interaction potentielle disparaissent*, et nous obtenons l'équation scalaire unique à fonctions d'onde réelles et positives, qui s'écrit :

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} C_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} C_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} C_3 + \frac{\partial}{\partial x_4} C_4 = 0$$

avec

$$(13)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= ick\{\lambda^{-1}[(\psi_2\psi_1^* - \psi_3\psi_2^*) + (\psi_4\psi_1^* - \psi_1\psi_4^*)] + \lambda[(\varphi_3\varphi_2^* - \varphi_2\varphi_3^*) + (\varphi_4\varphi_1^* - \varphi_1\varphi_4^*)]\} \\ C_2 &= ick\{\lambda^{-1}[(\psi_3\psi_1^* - \psi_1\psi_3^*) + (\psi_4\psi_2^* - \psi_2\psi_4^*)] + \lambda[(\varphi_1\varphi_3^* - \varphi_3\varphi_1^*) + (\varphi_4\varphi_2^* - \varphi_2\varphi_4^*)]\} \\ C_3 &= ick\{\lambda^{-1}[(\psi_1\psi_2^* - \psi_2\psi_1^*) + (\psi_4\psi_3^* - \psi_3\psi_4^*)] + \lambda[(\varphi_2\varphi_1^* - \varphi_1\varphi_2^*) + (\varphi_4\varphi_3^* - \varphi_3\varphi_4^*)]\} \end{aligned}$$

quantités essentiellement réelles parce qu'elles sont égales à leurs conjuguées. Ces trois formules sont contenues dans la formule vectorielle unique

$$(14) \quad \vec{C} = ick[\lambda^{-1}(\vec{\psi} \wedge \vec{\psi}^*) + \vec{\psi}\psi_4^* + \vec{\psi}^*\psi_4] + \lambda(\vec{\varphi}^* \wedge \vec{\varphi} + \vec{\varphi}^*\varphi_4 - \vec{\varphi}\varphi_4^*)].$$

On a en outre pour la quatrième composante

$$(15)$$

$$C_4 = ick[\lambda^{-1}(\psi_1\psi_1^* + \psi_2\psi_2^* + \psi_3\psi_3^* + \psi_4\psi_4^*) + \lambda(\varphi_1\varphi_1^* + \varphi_2\varphi_2^* + \varphi_3\varphi_3^* + \varphi_4\varphi_4^*)].$$

Le quadrivecteur  $C$  n'est défini qu'à un facteur constant près, que

**TABLEAU I**  
**FORMATION DE L'ÉQUATION DE CONSERVATION**  
(dans un système de référence non galiléen).

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \lambda \lambda^{-1} im_0 c \varphi_1^* \psi_1 = [\varphi_1^*(i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \varphi_1 + \varphi_1(i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \varphi_4 - \varphi_1^*(i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \varphi_3 + \varphi_1^*(i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \varphi_2] \lambda \\
 \lambda \lambda^{-1} im_0 c \varphi_2^* \psi_2 = [\varphi_2^*(i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \varphi_2 + \varphi_2(i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \varphi_3 + \varphi_2^*(i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \varphi_4 - \varphi_2^*(i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \varphi_1] \lambda \\
 \lambda \lambda^{-1} im_0 c \varphi_3^* \psi_3 = [\varphi_3^*(i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \varphi_3 - \varphi_3(i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \varphi_2 + \varphi_3^*(i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \varphi_1 + \varphi_3^*(i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \varphi_4] \lambda \\
 \lambda \lambda^{-1} im_0 c \varphi_4^* \psi_4 = [\varphi_4^*(i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \varphi_4 - \varphi_4(i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \varphi_1 - \varphi_4^*(i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \varphi_2 - \varphi_4^*(i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \varphi_3] \lambda \\
 \\
 \lambda^{-1} \lambda im_0 c \psi_1^* \varphi_1 = [\psi_1^*(i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \psi_1 - \psi_1^*(i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \psi_4 + \psi_1^*(i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \psi_3 - \psi_1^*(i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \psi_2] \lambda^{-1} \\
 \lambda \lambda^{-1} im_0 c \psi_2^* \varphi_2 = [\psi_2^*(i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \psi_2 - \psi_2^*(i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \psi_3 - \psi_2^*(i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \psi_4 + \psi_2^*(i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \psi_1] \lambda^{-1} \\
 \lambda \lambda^{-1} im_0 c \psi_3^* \varphi_3 = [\psi_3^*(i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \psi_3 + \psi_3^*(i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \psi_2 - \psi_3^*(i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \psi_1 - \psi_3^*(i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \psi_4] \lambda^{-1} \\
 \lambda \lambda^{-1} im_0 c \psi_4^* \varphi_4 = [\psi_4^*(i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \psi_4 + \psi_4^*(i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \psi_1 + \psi_4^*(i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \psi_2 + \psi_4^*(i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \psi_3] \lambda^{-1} \\
 \\
 -\lambda \lambda^{-1} im_0 c \varphi_1^* \psi_1^* = [-\varphi_1(-i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \varphi_1^* - \varphi_1(-i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \varphi_4^* + \varphi_1(-i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \varphi_3^* - \varphi_1(-i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \varphi_2^*] \lambda \\
 -\lambda \lambda^{-1} im_0 c \varphi_2^* \psi_2^* = [-\varphi_2(-i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \varphi_2^* - \varphi_2(-i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \varphi_3^* - \varphi_2(-i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \varphi_4^* + \varphi_2(-i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \varphi_1^*] \lambda \\
 -\lambda \lambda^{-1} im_0 c \varphi_3^* \psi_3^* = [-\varphi_3(-i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \varphi_3^* + \varphi_3(-i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \varphi_2^* - \varphi_3(-i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \varphi_1^* - \varphi_3(-i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \varphi_4^*] \lambda \\
 -\lambda \lambda^{-1} im_0 c \varphi_4^* \psi_4^* = [-\varphi_4(-i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \varphi_4^* + \varphi_4(-i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \varphi_1^* + \varphi_4(-i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \varphi_2^* + \varphi_4(-i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \varphi_3^*] \lambda \\
 \\
 -\lambda \lambda^{-1} im_0 c \psi_1^* \varphi_1^* = [-\psi_1(-i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \psi_1^* + \psi_1(-i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \psi_4^* - \psi_1(-i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \psi_3^* + \psi_1(-i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \psi_2^*] \lambda^{-1} \\
 -\lambda^{-1} \lambda im_0 c \psi_2^* \varphi_2^* = [-\psi_2(-i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \psi_2^* + \psi_2(-i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \psi_3^* + \psi_2(-i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \psi_4^* - \psi_2(-i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \psi_1^*] \lambda^{-1} \\
 -\lambda^{-1} \lambda im_0 c \psi_3^* \varphi_3^* = [-\psi_3(-i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \psi_3^* - \psi_3(-i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \psi_2^* + \psi_3(-i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \psi_1^* + \psi_3(-i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \psi_4^*] \lambda^{-1} \\
 -\lambda^{-1} \lambda im_0 c \psi_4^* \varphi_4^* = [-\psi_4(-i\hbar d_4 - \mathcal{E}_4) \psi_4^* - \psi_4(-i\hbar d_1 - \mathcal{E}_1) \psi_1^* - \psi_4(-i\hbar d_2 - \mathcal{E}_2) \psi_2^* - \psi_4(-i\hbar d_3 - \mathcal{E}_3) \psi_3^*] \lambda^{-1}
 \end{array} \right.$$

en ajoutant membre à membre, en multipliant par le facteur  $\frac{2}{2\hbar}$

$$0 = icd_4 \left\{ \lambda (\varphi_1 \varphi_1^* + \varphi_2 \varphi_1^* + \varphi_3 \varphi_2^* + \varphi_4 \varphi_1^*) + \lambda^{-1} (\psi_1 \psi_1^* + \psi_2 \psi_2^* + \psi_3 \psi_3^* + \psi_4 \psi_4^*) \right\} + d_1 \left\{ \lambda ic [(\varphi_3 \varphi_2^* - \varphi_2 \varphi_3^*) - (\varphi_1 \varphi_4^* - \varphi_4 \varphi_1^*)] + d_2 \left\{ -\lambda^{-1} ic [(\psi_1 \psi_3^* - \psi_3 \psi_1^*) - (\psi_2 \psi_4^* - \psi_4 \psi_2^*)] + d_3 \left\{ -\lambda^{-1} ic [(\psi_2 \psi_1^* - \psi_1 \psi_2^*) - (\psi_3 \psi_4^* - \psi_4 \psi_3^*)] \right. \right.$$

équation différentielle homogène, qui ne contient plus les termes d'impulsion potentielle, qui est de ce fait indépendante de l'existence d'un champ magnétique, ou du caractère non galiléen du système de référence.

On peut l'écrire  $d_1 \mathcal{C}_1 + d_2 \mathcal{C}_2 + d_3 \mathcal{C}_3 + d_4 \mathcal{C}_4 = 0$ , soit encore  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div } \vec{\mathcal{C}}$  (car  $icd_4 = \frac{\partial}{\partial t}$ ), avec  $\mathcal{C}_i = i\rho$ ,  $\rho$  densité de substance,  $\vec{\mathcal{C}} = \vec{\rho v}$ , courant de transport,  $v$  vitesse de la substance qui est supposée se conserver.  $\rho$  et  $\vec{\mathcal{C}}$  sont des quantités réelles, parce qu'elles sont égales à leurs conjuguées.

nous avons appelé  $ck$ , nous réservant de déterminer  $k$  par la suite. On a d'autre part

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t}$$

l'équation (12) s'écrit alors, en posant  $C_i = icD$  (soit  $D = \frac{1}{ic} D_i$ )

$$(16) \quad \frac{\partial D}{\partial t} = \text{div. } \vec{C}.$$

Cette expression a la forme d'une *équation de conservation*. Elle définit la « *densité* »

$$(17) \quad D = k \sum_1^4 (\lambda^{-1} \psi_i \psi_i^* + \lambda \varphi_i \varphi_i^*)$$

(d'un « fluide » dont la nature n'a pas encore été interprétée), et le *vecteur courant*  $\vec{C}$  définissant l'écoulement de ce « fluide ».

Nous avons vu que  $D$  et  $C$  ne sont définis qu'à un facteur près, et c'est sur ce facteur indéterminé que l'on joue pour ajuster la fonction d'onde à la norme adoptée. On peut toujours prendre  $k = 1$  et définir les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  par les conditions de normalisation. On aura toutefois avantage à rattacher  $\varphi$  et  $\psi$  au système d'unité adopté, et à cet effet, on ajustera la constante  $k$ . D'autre part  $\lambda$  constitue un autre facteur indéterminé.

On peut poser  $k = k'\lambda$ , 14 et 15 deviennent

$$(18) \quad D = k' \sum_1^4 (\psi_i \psi_i^* + \lambda^2 \varphi_i \varphi_i^*).$$

$$(19) \quad \vec{C} = ick' [(\vec{\psi} \wedge \vec{\psi}^* + \vec{\psi}^* \psi - \vec{\psi} \psi^*) + \lambda^2 (\vec{\varphi}^* \wedge \vec{\varphi} + \vec{\varphi}^* \varphi - \vec{\varphi} \varphi^*)].$$

Que représente donc ce « fluide » dont on a défini la densité et le vecteur courant?

Si  $D$  représentait une *densité de probabilité de présence* et si  $e$  était la charge du corpuscule,  $\varphi = eD$  représenterait une densité probable de charge électrique. Conserverons-nous à  $D$  l'interprétation que lui donnent toutes les théories ondulatoires?

Nous avons déjà remarqué que le fait que  $D$  obéisse à un théorème de conservation n'était pas un indice suffisant pour *imposer* l'interprétation actuelle. Nous pensons qu'une interprétation correcte de  $D$  doit se conserver dans la théorie électromagnétique. Or, on possède, dans le théorème de POINTING une relation de conservation tout à

*fait analogue.* En effet, si  $\vec{E}$  est le champ électrique,  $\vec{H}$  le champ magnétique, on peut former la fonction d'onde complexe

$$(20) \quad \vec{\psi} = \vec{H} + i\vec{E}$$

directeur d'espace, qui est la représentation vectorielle du tenseur antisymétrique, « champ électro-magnétique » et le théorème de Poynting à la forme 10 bis en posant

$$(21) \quad D = \frac{1}{8\pi} \vec{\psi} \cdot \vec{\psi}^* \quad \text{et} \quad \vec{C} = \frac{ic}{8\pi} (\vec{\psi} \wedge \vec{\psi}^*) \quad (22)$$

$\vec{E}$  et  $\vec{H}$  étant exprimés en *Gauss*. Si on exprimait ces champs en unités « rationalisées » (dans lesquelles l'aimantation et le champ magnétique d'une part, la polarisation et le champ électrique d'autre part, possèdent les mêmes unités), on aurait

$$D = 2\pi \vec{\psi} \cdot \vec{\psi}^* \quad \text{et} \quad \vec{C} = 2\pi ic (\vec{\psi} \wedge \vec{\psi}^*).$$

Ces expressions sont contenues dans (18) et (19), se confondraient avec celles-ci dans les trois éventualités suivantes :

1° La contribution des  $\varphi_k$  au bilan énergétique est négligeable, par suite de la faible valeur de  $\lambda$  (constante encore indéterminée, mais que l'on pourra considérer effectivement comme étant tout à fait faible, dans le cas du photon).

2° La contribution des  $\psi_k$ , tout en occupant une place importante, *éventuellement égale*, a passé inaperçue dans les problèmes macroscopiques de la théorie électromagnétique, et on ne doit pas en tenir compte dans le « raccordement » des expressions 22 à 24 d'une part, 18 et 19 d'autre part.

3° Les  $\varphi_k$  et les  $\psi_k$  apportent des contributions égales au bilan énergétique total, dans les hypothèses qui ont permis l'établissement du théorème de Poynting, de sorte que l'on obtiendrait un résultat global correct en abandonnant la contribution des  $\varphi_k$  et en doublant celle des  $\psi_k$  ce qui conduirait à prendre pour  $k'$  une valeur moitié.

Dans les deux premiers cas, on retrouverait 21 et 22 avec  $k' = \frac{1}{8\pi}$ , 23 et 24 avec  $k' = 2\pi$ .

Dans le troisième cas, on retrouverait 21 et 22 avec  $k' = \frac{1}{16\pi}$ , 23 et 24 avec  $k' = \pi$ .

Le développement de cette théorie nous permettra de discuter de ces trois possibilités. Nous verrons que dans les cas qui nous intéressent, il y a *équpartition de l'énergie entre les  $\varphi_k$  et les  $\psi_k$* , mais ce

résultat intéressant, tout en permettant la troisième interprétation, n'exclut pas la seconde. Seules, les conséquences que l'on peut en tirer permettraient donc de choisir entre deux déterminations dont l'une est le double de l'autre. Nous lui conservons sous réserve, la valeur classique  $\frac{1}{8\pi}$ .

L'expression D de la formule 18 représente donc une *densité d'énergie*, alors que le vecteur C de la formule 19 représente un courant d'énergie, complétant l'expression classique du *vecteur de Poynting*.

*Il apparaît dès maintenant que c'est en énergie probable qu'il faut normer la densité. Nous chercherons donc ailleurs le vecteur courant de probabilité de présence, et le vecteur courant électrique. Des indices encore plus convaincants viendront par la suite confirmer cette manière de voir.*

Lorsque  $\lambda$  est imaginaire pur ou complexe, le calcul précédent reste valable, à condition que  $\lambda$  ne change pas de signe par conjugaison. Si par exemple,

$$(17) \quad \lambda = z(z + i\beta) \quad \lambda^{-1} = \rho^{-1}(z - i\beta) \quad \text{avec } z^2 + \beta^2 = 1$$

il faudra conjuguer les équations non seulement par rapport à  $i$  mais par rapport à  $\beta$ . Cette précaution prise, le calcul reste inchangé.

Pour  $\lambda$  imaginaire pur, on prendra pour R un nombre également imaginaire qui peut être simplement  $i$ , et on obtient encore pour D une quantité réelle.

Pour  $\lambda$  complexe, D et C ne sont plus réels mais *complexes*, l'équation de conservation se décomposera en *deux équations* entre parties réelles, on obtient ainsi pour densités.

D'une part,

$$(18) \quad D_1 = \sum_1^4 (\psi_i \psi_i^* + \rho^2 (z^2 - \beta^2) \varphi_i \varphi_i^*) \quad D_2 = z\beta \sum_1^4 (\varphi_i \varphi_i^*) \quad (19)$$

On a de même les deux courants correspondants  $C_1$  et  $C_2$  avec les mêmes coefficients.

$$\text{Posons} \quad \delta_1 = \sum_1^4 \psi_i \psi_i^* \quad \delta_2 = \sum_1^4 \varphi_i \varphi_i^*$$

$$18^{bis} \quad D_1 = \delta_1 + \rho^2 (z^2 - \beta^2) \delta_2 \quad D_2 = z\beta \delta_2 \quad 19^{bis}$$

Comme  $\delta_2$  vérifie séparément une équation de conservation, il en

sera de même de  $\partial_1$  (d'après 18<sup>bis</sup>). On en déduit que les énergies des  $\varphi$  et des  $\psi$  sont indépendantes, on déduit de 18<sup>bis</sup> que la présence de la composante imaginaire  $\beta$  a pour effet d'*abaisser* l'énergie  $D_2$  en fournissant une contribution *soustractive*.

### § 11. — La répartition de l'énergie.

Si les formes (5) (6) ou (7) (8) du chapitre III sont symétriques par rapport à  $\psi$  et à  $\varphi$ , les fonctions d'ondes, solutions de ces équations, n'ont aucune raison de l'être. Il est intéressant de comparer les contributions des  $\varphi$  et des  $\psi$  dans le bilan total de l'énergie, lequel s'obtient à l'aide de la formule 17 du § 9.

Nous appelons  $D_1$  et  $D_2$  les densités énergétiques dues aux ondes  $\varphi$  et  $\psi$ , nous avons

$$(29) \quad D_1 = k \sum_1 \varphi_k^* \varphi_k \quad \text{et} \quad D_2 = k \sum_1 \psi_k^* \psi_k \quad (30)$$

Les énergies provenant des deux fonctions d'ondes ont respectivement pour expressions

$$(31) \quad \mathcal{E}_1 = k \int_{\text{espace}} D_1 d\tau \quad \mathcal{E}_2 = k \int_{\text{espace}} D_2 d\tau \quad (32)$$

( $d\tau = d_1 d_2 d_3$ , élément de volume de l'espace à quatre dimensions, avec  $d_k = dx_k$ ).

Pour comparer (31) et (32), nous formons  $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ . Pour cela, nous nous adressons aux équations (5) et (6) qui ont déjà servi à établir la formule (17) § 9, mais nous les combinant autrement, de manière à obtenir  $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$  au lieu de  $\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1$ , tout en cherchant encore — si possible — à éliminer les potentiels d'impulsion. Nous obtenons  $\psi_k^* \psi_k$  en multipliant la  $k^{\text{ième}}$  équation (5) III par  $\psi_k^*$ , ce qui nous donne les quatre équations

(33)

$$\lambda^{-1} \frac{m_0 i c}{\hbar} \psi_1^* \psi_1 = i \psi_1^* (\partial_4 \varphi_1 + \partial_1 \varphi_4 + \partial_3 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_3) - \psi_1^* (\mathcal{P}_1 \varphi_1 + \mathcal{P}_1 \varphi_4 + \mathcal{P}_3 \varphi_2 - \mathcal{P}_2 \varphi_3)$$

$$\lambda^{-1} \frac{m_0 i c}{\hbar} \psi_2^* \psi_2 = i \psi_2^* (\partial_4 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_4 + \partial_1 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_1) - \psi_2^* (\mathcal{P}_1 \varphi_2 + \mathcal{P}_2 \varphi_4 + \mathcal{P}_1 \varphi_3 - \mathcal{P}_3 \varphi_1)$$

$$\lambda^{-1} \frac{m_0 i c}{\hbar} \psi_3^* \psi_3 = i \psi_3^* (\partial_4 \varphi_3 + \partial_3 \varphi_4 + \partial_2 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_2) - \psi_3^* (\mathcal{P}_1 \varphi_3 + \mathcal{P}_3 \varphi_4 + \mathcal{P}_2 \varphi_1 - \mathcal{P}_1 \varphi_2)$$

$$\lambda^{-1} \frac{m_0 i c}{\hbar} \psi_4^* \psi_4 = -i \psi_4^* (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3 - \partial_4 \varphi_4) + \psi_4^* (\mathcal{P}_1 \varphi_1 + \mathcal{P}_2 \varphi_2 + \mathcal{P}_3 \varphi_3 - \mathcal{P}_4 \varphi_4)$$

Il nous reste à former les quatre expressions  $\varphi_k^* \varphi_k$ , mais, comme les  $\varphi_k$  et les  $\varphi_k^*$  sont des nombres complexes, leurs produits sont commutatifs, de sorte que nous pouvons tout aussi bien former les quatre  $\varphi_k \varphi_k^*$ . Les  $\varphi_k^*$  nous sont données par le système conjugué de 8. Nous adopterons la même conjugaison qu'au § 10, c'est-à-dire celle qui change  $i$  en  $-i$  sauf dans la quatrième dimension  $x_4 = ict$  qui n'est pas affectée par cette conjugaison, ni sa dérivée  $v_4 = dx_4/dt = ic$ . S'il en était autrement,  $x_4$  subirait un traitement spécial, qui marquerait d'une façon privilégiée la quatrième dimension. C'est la raison pour laquelle  $ic$  ne change pas de signe (tout comme dans le calcul de l'énergie), ni  $\partial_4$ , lorsqu'on passe du système 8 au système conjugué. Nous obtenons ainsi les  $\varphi_k \varphi_k^*$  au moyen des formules

(34)

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{m_0 ic}{\hbar} \varphi_1 \varphi_1^* &= i\varphi_1(\partial_4 \psi_1^* - \partial_1 \psi_4^* + \partial_2 \psi_3^* - \partial_3 \psi_2^*) + \varphi_1(\mathcal{P}_4 \psi_1^* - \mathcal{P}_1 \psi_4^* + \mathcal{P}_2 \psi_3^* - \mathcal{P}_3 \psi_2^*) \\ -\lambda \frac{m_0 ic}{\hbar} \varphi_2 \varphi_2^* &= i\varphi_2(\partial_4 \psi_2^* - \partial_2 \psi_4^* + \partial_3 \psi_1^* - \partial_1 \psi_3^*) + \varphi_2(\mathcal{P}_4 \psi_2^* - \mathcal{P}_2 \psi_4^* + \mathcal{P}_3 \psi_1^* - \mathcal{P}_1 \psi_3^*) \\ -\lambda \frac{m_0 ic}{\hbar} \varphi_3 \varphi_3^* &= i\varphi_3(\partial_4 \psi_3^* - \partial_3 \psi_4^* + \partial_1 \psi_2^* - \partial_2 \psi_1^*) + \varphi_3(\mathcal{P}_4 \psi_3^* - \mathcal{P}_3 \psi_4^* + \mathcal{P}_1 \psi_2^* - \mathcal{P}_2 \psi_1^*) \\ -\lambda \frac{m_0 ic}{\hbar} \varphi_4 \varphi_4^* &= i\varphi_4(\partial_1 \psi_1^* + \partial_2 \psi_2^* + \partial_3 \psi_3^* + \partial_4 \psi_4^*) + \varphi_4(\mathcal{P}_1 \psi_1^* + \mathcal{P}_2 \psi_2^* + \mathcal{P}_3 \psi_3^* + \mathcal{P}_4 \psi_4^*) \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à ajouter membre à membre les systèmes (33) et (34) pour avoir l'expression cherchée. Le résultat se simplifie considérablement du fait que les termes d'impulsion potentielle disparaissent, et que d'autre part, les termes différentiels se laissent grouper par paires, pour donner des différentielles totales exactes. Nous avons souligné dans ces formules, les termes qui correspondent au produit  $\varphi_i \psi_i$ . Toutefois, pour que des produits tels que  $\psi_k \partial_r \varphi_s + \varphi_s \partial_r \psi_k$  représentent des différentielles totales, il faut les multiplier par l'élément différentiel de la variable correspondante, ce qui nous conduit à multiplier tout l'ensemble par l'élément d'hyper-volume  $d_1 d_2 d_3 d_4$ . On a ainsi

(35)

$$\begin{aligned} \left( \lambda \sum_1^4 \psi_k^* \psi_k - \lambda^{-1} \sum_1^4 \varphi_k^* \varphi_k \right) d_1 d_2 d_3 d_4 &= \frac{h}{m_0 c} \{ (\psi_1^* \varphi_1 + \psi_2^* \varphi_2 + \psi_3^* \varphi_3 + \psi_4^* \varphi_4) d_1 d_2 d_3 \\ &\quad + [(\psi_1^* \varphi_4 - \psi_4^* \varphi_1) + (\psi_2^* \varphi_3 - \psi_3^* \varphi_2)] d_2 d_3 d_4 \\ &\quad + [(\psi_2^* \varphi_4 - \psi_4^* \varphi_2) + (\psi_3^* \varphi_1 - \psi_1^* \varphi_3)] d_3 d_1 d_4 \\ &\quad + [(\psi_3^* \varphi_4 - \psi_4^* \varphi_3) + (\psi_1^* \varphi_2 - \psi_2^* \varphi_1)] d_1 d_2 d_4 \} \end{aligned}$$

En intégrant dans l'hyper-espace, puis en dérivant les deux membres de cette relation par rapport à  $x_i$ , en tenant compte de ce que  $\delta_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ , on obtient la relation

$$\begin{aligned}
 (36) \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 &= \int_{\text{espace}} \left( \lambda \sum_k \psi_k^* \psi_k - \lambda^{-1} \sum_k \varphi_k^* \varphi_k \right) d_1 d_2 d_3 \\
 &= -\frac{ih}{m_0 c^2} \frac{d}{dt} \int_{\text{surface}} (\psi_1^* \varphi_1 + \psi_2^* \varphi_2 + \psi_3^* \varphi_3 + \psi_i^* \varphi_i) d_1 d_2 d_3 \\
 &\quad + \frac{\hbar}{m_0 c} \left\{ \int_{\text{surface}} [(\psi_1^* \varphi_i - \psi_i^* \varphi_1) + (\psi_2^* \varphi_3 - \psi_3^* \varphi_2)] d_2 d_3 \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\text{surface}} [(\psi_2^* \varphi_i - \psi_i^* \varphi_2) + (\psi_3^* \varphi_1 - \psi_1^* \varphi_3)] d_3 d_1 \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\text{surface}} [(\psi_3^* \varphi_i - \psi_i^* \varphi_3) + (\psi_1^* \varphi_2 - \psi_2^* \varphi_1)] d_1 d_3 \right\}
 \end{aligned}$$

qui répond au but cherché.

En particulier, dans le cas des champs *statiques*, l'intégrale de volume du second membre s'annule. D'autre part, comme nous le verrons, les solutions statiques des champs que nous aurons l'occasion de rencontrer, associés à des particules, diminuent rapidement d'intensité en fonction de la distance  $r$  à cette particule, (supposée être génératrice du champ), suivant une loi de la forme  $\frac{e^{-\lambda r}}{r}$  ou  $\frac{e^{-\lambda r}}{r^2}$ , il en résulte que les flux représentés par les trois dernières intégrales, s'annulent lorsqu'on les évalue à travers une sphère de rayon infini, de sorte que le second membre de la formule (36) est nul, et que, de ce fait, *les  $\varphi$  et les  $\psi$  fournissent des contributions énergétiques égales*. Ce remarquable résultat sera vérifié plus loin dans un cas particulier.

## § 12. — Rôle de la constante $\lambda$ .

La présence de la constante  $\lambda$  marque seulement la possibilité d'exprimer  $\varphi$  dans une autre unité que  $\psi$  et de ce fait, aucune valeur numérique ne s'impose pour elle à priori.

Dans ces conditions, le plus simple paraît être de prendre  $\lambda = 1$ , ce qui donne à  $\varphi$  les dimensions de  $\psi$  c'est-à-dire celles d'une *densité d'énergie à la puissance 1/2*, soit  $M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}$ , dimensions qui sont



aussi celles du champ électromagnétique, de l'aimantation et de la polarisation.  $\varphi$  et  $\psi$  appartiennent alors au système C. G. S. et s'expriment en Gauss, s'ils sont définis par les formules (23) et (24) § 10, chapitre IV.

Si on donne à  $\lambda$  une autre valeur numérique, on introduit de ce fait un coefficient, et  $\varphi$  n'appartient plus au système C. G. S. Il n'en est plus de même si on rattache  $\lambda$  aux grandes constantes de la physique.  $\lambda$  possède alors des dimensions propres et  $\varphi$  change de dimensions. De plus, il sera possible (et cela n'est pas évident pour le moment) de lui trouver des valeurs telles que  $\varphi$  s'exprime alors de nouveau dans le système C. G. S. dans les unités correspondantes à des grandeurs de même dimensions.

Pour  $\lambda = \alpha = \frac{m_0 c}{h}$ , dont les dimensions sont  $L^{-1}$ , le vecteur  $\varphi$  prend les dimensions d'un potentiel vecteur d'univers, soit  $M^{1/2} L^{1/4} T^{-1}$  (exprimé en unités électro-magnétiques).

Pour  $\lambda = s = \frac{eh}{m_0 c}$ , de dimensions  $M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$  le vecteur  $\varphi$  prend les dimensions  $L^{-3}$  qui sont celles d'une densité de courant, d'une « substance » ou « grandeur » qui, pour le moment, n'est pas incompressible, dont les dimensions sont égales à zéro (ce qui donne au courant les dimensions d'une vitesse). Cette unité, que l'on pourrait qualifier de « normalisée » vaut donc  $\frac{m_0 c}{eh}$  gauss, soit  $\frac{m_0 c}{eh}$  gauss pour le champ mesonique, et une quantité non mesurable et peut-être nulle pour le champ photonique.

Enfin, et plus généralement, on pourrait prendre  $\lambda = 1$  et normer de ce fait  $\varphi$  et  $\psi$ , sur la base énergétique, puis effectuer sur ces champs un changement d'unités de rapport  $\alpha$ ,  $\alpha^{-1}$ , ou  $\lambda_0$ , ce qui nous donnerait un système d'équations entre les potentiels vecteurs, les champs, les courants d'électricité et les courants normalisés. Nous reviendrons sur cette question lorsque les développements ultérieurs auront permis d'établir sur ce point, une correspondance avec la théorie classique.

### § 13. Densité et courant d'électricité.

Nous avons vu au § 16 du ch. I que si l'on voulait pouvoir interpréter tous les termes du tenseur d'interaction potentiel-courant, *il fallait attribuer au potentiel vecteur la nature physique du courant électrique.*

L'analogie qui existe entre les équations 76-83 § 12 ch. I, de la théorie électromagnétique et les équations 7 et 8 § 6 ch. IV de la mécanique ondulatoire, confirme ce point de vue et nous laisse supposer que l'une des ondes  $\varphi$  et  $\psi$  aurait peut être elle aussi la nature physique du courant électrique; la correspondance est parfaite en l'absence d'interaction, à condition de dissymétriser les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  en posant comme dans 76-83  $\psi_i = 0$ , en posant en outre  $\lambda = \frac{m_0 c}{\hbar}$  et  $J = \frac{1}{4\pi} \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi$ .

Cette parfaite correspondance nous donne le coefficient de proportionnalité entre le potentiel vecteur et le courant de dimensions  $L^{-2}$ , dont l'existence a été pressentie au § 16 ch. I. mais que la théorie classique était impuissante à fournir.

Cette hypothèse est très audacieuse car elle marque un retour à la notion microscopique d'électricité fluide continue, tandis que dans la théorie ondulatoire actuelle, la charge est une grandeur attachée au corpuscule, et la densité électrique a un sens essentiellement probabiliste, lié directement à la probabilité de présence, par un facteur numérique. Elle diffère de la « réinterprétation des termes de masse » Louis de Broglie <sup>(18)</sup> par le fait que la « densité mésonique » de Louis de Broglie n'a pas la nature physique de la densité électrique, parce que la « charge mésonique » n'a pas la nature physique de la « charge photonique » qui dans cette théorie représenterait la *charge électrique*. Plus précisément, la « charge photonique » serait la source d'un champ électrique, tandis que la « charge mésonique » engendrerait un champ mésonique, de sorte que si une charge photonique et une charge mésonique sont en présence, la charge photonique agit sur la charge mésonique par l'intermédiaire de son champ électrique, tandis que la charge mésonique dont le champ s'évanouit à faible distance ne réagit sensiblement pas sur la charge électrique.

De notre point de vue, il n'y a pas de « charges photoniques » ponctuelles, mais, seulement des *densités d'électricité*, grandeurs

<sup>(18)</sup> Louis de Broglie comptes rendus Ac. des Sciences, t. 229, p. 404 et Portugaliae mathematica, 8, 1949, p. 37.

scalaires liées au potentiel scalaire mésonique, et quantifiées par une intégrale d'espace comme l'action est quantifiée par une intégrale curviligne.

Le courant et la densité sont des grandeurs complexes. La partie réelle est formée des trois composantes du courant électrique (potentiel vecteur électrique classique) et de la densité magnétique (potentiel scalaire magnétique non classique). La partie imaginaire est formée des trois composantes du courant magnétique (potentiel vecteur magnétique non classique) et de la densité électrique (potentiel scalaire électrique classique).

#### § 14. Formation de l'équation du second ordre, comparaison avec l'équation de Gordon.

Si on effectue la substitution I ch. IV, (c'est-à-dire 31 et 32 ch. III) dans 4 ch. II, on trouve une équation de Gordon généralisée

$$(39) \quad \sum_1^4 (i\hbar \partial_k - \mathcal{P}_k)^2 - m_0^2 c^2.$$

Si on effectue cette même substitution dans les équations linéaires 10 et 12 III (algébriques) ou 11 et 13 III (vectorielles), on trouve le système 5 et 6 IV ou 7 et 8 IV (algébrique) ou 9 et 10 IV (vectoriel).

On pourrait croire que ces deux systèmes contiennent 37 puisque 10 et 12 (ou 11 et 13) contiennent 28 II, mais il n'en est rien, *car les  $P_k$  ne commutent plus lorsqu'ils sont opérateurs*, sauf dans le cas particulier où le champ électromagnétique extérieur au corpuscule *est nul* ou inefficace (charge nulle). Dans le cas général, nous allons voir que les termes de l'équation 37 sont complétés par des termes additionnels qui ne disparaissent pas des cases des matrices situées en dehors de la diagonale principale, de sorte que l'équation du second ordre n'a plus la simplicité de l'équation (37). Elle ne présenterait donc aucune utilité si les termes en question n'étaient susceptibles de recevoir une *interprétation intéressante*.

Nous avons vu que les équations 8 et 9 ch. III entraînent la relation  $R \sim \cdot R - 1 = 0$ . Lorsque les éléments du tenseur  $R$  ont leur valeur opérationnelle donnée par 31 et 32 ch. III, on voit facilement que des opérations analogues donnent cette fois l'équation

$$(R \sim \cdot R - 1)\varphi = 0 \quad (R \sim \cdot R - 1)\psi = 0.$$

La méthode la plus directe est de former le produit tensoriel

$R \cdot R \sim \varphi$  et  $R \cdot R \sim \psi$  mais il est plus simple de reprendre les bases quaternioniennes  $e_1, e_2, e_3, e_4$  introduites au § 5 du ch. I et d'écrire

$$im_0 cR = e_1 P_1 + e_2 P_2 + e_3 P_3 + e_4 P_4.$$

$e_1, e_2, e_3, e_4$  sont les matrices données par les tableaux 23 du § 5, ch. I, tandis que la table de multiplication de ces matrices est donnée par le tableau 27 § 5 ch. I. On a de plus, du fait du caractère antisymétrique de ces matrices

$$e_1 \sim = -e_1 \quad e_2 \sim = -e_2 \quad e_3 \sim = -e_3 \quad \text{tandis que} \quad e_4 \sim = e_4.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} -m_0^2 c^2 R \sim R \varphi_k &= \{ (e_1 \sim P_1 + e_2 \sim P_2 + e_3 \sim P_3 + e_4 P_4) (e_1 P_1 + e_2 P_2 + e_3 P_3 + e_4 P_4) \} \varphi_k \\ &= \{ (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + e_1 (P_2 P_3 - P_3 P_2) + e_2 (P_3 P_1 - P_1 P_3) + e_3 (P_1 P_2 - P_2 P_1) \\ &\quad + e_4 (P_1 P_4 - P_4 P_1) + e_2 (P_2 P_4 - P_4 P_2) + e_3 (P_3 P_4 - P_4 P_3) \} \varphi_k \end{aligned}$$

et une relation analogue pour les  $\psi_k$ .

On a d'après I ch. IV

$$\begin{aligned} P_r P_s \varphi_k &= (i\hbar \partial_r - \mathcal{P}_r) (i\hbar \partial_s \varphi_k - \mathcal{P}_s \varphi_k) \\ &= -\hbar^2 \partial_r \partial_s \varphi_k - i\hbar \partial_r \mathcal{P}_s \varphi_k - i\hbar \mathcal{P}_r \partial_s \varphi_k + \mathcal{P}_r \mathcal{P}_s \varphi_k \end{aligned}$$

et

$$P_s P_r \varphi_k = -\hbar^2 \partial_s \partial_r \varphi_k - i\hbar \partial_s \mathcal{P}_r \varphi_k - i\hbar \mathcal{P}_s \partial_r \varphi_k + \mathcal{P}_s \mathcal{P}_r \varphi_k$$

d'où

$$\begin{aligned} (P_s P_r - P_r P_s) \varphi_k &= i\hbar [(\partial_r \mathcal{P}_s \varphi_k - \mathcal{P}_s \partial_r \varphi_k) - (\partial_s \mathcal{P}_r \varphi_k - \mathcal{P}_r \partial_s \varphi_k)] \\ (40) \quad (P_s P_r - P_r P_s) \varphi_k &= i\hbar (\partial_r \mathcal{P}_s - \partial_s \mathcal{P}_r) \varphi_k \end{aligned}$$

Lorsque le système de référence est galiléen

$$\mathcal{P}_k = \frac{e}{c} A_k \quad \mathcal{P}_4 = i \frac{e}{c} U_k,$$

U potentiel scalaire et  $A_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) composantes du potentiel vecteur. Rappelons que le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{H}$  vérifient les relations bien connues (64 § 12 ch. I), de sorte que le second membre de (38) représente les 6 composantes du tenseur antisymétrique du champ électromagnétique. En conséquence, on a

$$\begin{aligned} (P_2 P_3 - P_3 P_2) \varphi_k &= i\hbar \frac{e}{c} (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) \varphi_k = i\hbar \frac{e}{c} H_1 \varphi_k \\ (41) \quad (P_3 P_1 - P_1 P_3) \varphi_k &= -i\hbar \frac{e}{c} H_2 \varphi_k \\ (P_1 P_2 - P_2 P_1) \varphi_k &= -i\hbar \frac{e}{c} H_3 \varphi_k \end{aligned}$$

On a de même

$$(42) \quad \begin{aligned} (P_i P_i - P_i P_i) \varphi &= i\hbar \frac{e}{c} (\partial_i A_i - \partial_i A_i) = i\hbar \frac{e}{c} \left( \frac{1}{ic} \frac{\partial A_i}{\partial t} - i \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \\ (P_i P_i - P_i P_i) \varphi &= -\hbar \frac{e}{c} E_i. \end{aligned}$$

Moyennant quoi, l'équation du second ordre (37) s'écrit alors

$$(43) \quad \left[ \sum_i \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i \right)^2 - \frac{m_0 c^2}{\hbar^2} - \frac{e}{c} \hbar \sum_i e_s (E_s + iH_s) \right] \varphi_k = 0$$

(ne pas confondre  $e$  charge électrique, avec  $e_k$  matrice de base des tenseurs-quaternions).

On peut écrire avec les notations du § 7 ch. IV, en multipliant chaque terme par  $(-i)^2$

$$(44) \quad \left[ \sum_i (\partial_r + iA_r)^2 + x^2 + \epsilon \hbar \sum_i e_s (E_s + iH_s) \right] \varphi_k = 0$$

avec une équation analogue pour les  $\psi_k$ .

L'équation obtenue dans les mêmes conditions, à partir de l'équation de Dirac s'écrit

$$(45) \quad \left[ \sum_i (\partial_r + iA_r)^2 + x^2 + \epsilon \hbar \sum_i \beta_s E_s + \epsilon \hbar \sum_i \gamma_s iH_s \right] \psi_k = 0.$$

Nous avons la disposition unique 23 ch. I, tandis que dans la théorie de Dirac, on a le choix entre plusieurs combinaisons. On adopte généralement les matrices unitaires appelées  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  (1). On a ainsi

$$\begin{aligned} \beta_1 = i\alpha_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \beta_2 = i\alpha_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \beta_3 = i\alpha_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \gamma_1 = \alpha_2 \alpha_3 &= \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{vmatrix} & \gamma_2 = \alpha_3 \alpha_1 &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \gamma_3 = \alpha_1 \alpha_2 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On voit qu'il y a une grande parenté entre notre méthode et celle de Dirac, du fait de l'analogie que présentent les tenseurs de base des quaternions et les matrices de Dirac.

L'équation (41) peut prendre une forme intéressante en l'explicitant et en faisant passer au second membre tous les termes qui ne sont pas des différentielles. On a d'abord avec  $\varepsilon = e/c$

$$\sum_i \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} - \varepsilon A_k \right)^2 = \left( \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon U \right)^2 - \sum_i \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} - \varepsilon A_k \right)^2$$

développons-le en tenant compte de la condition de Lorentz  $\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \text{div } A = 0$ , écrivons alors (38) sous sa forme enveloppée, et ne gardons au premier membre que les termes différentiels, en faisant passer les autres au second membre, on obtient l'équation

$$(46) \quad \frac{\hbar^2}{m_0} \left[ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} + \Delta \varphi_k + \frac{2e}{\hbar c} \left( -\frac{U}{c} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + i \sum_r A_r \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_r} \right) \right] \\ = \left[ m_0 c - \frac{e^2}{m_0 c^2} (U^2 - A^2) - \frac{1}{2} \hbar \frac{e}{m_0 c} \sum_r c_r (E_r + i H_r) \right] \varphi_k$$

(ne pas confondre la charge élémentaire  $e$  avec la base  $e_r$ ).

Les deux premiers termes entre crochet, au second membre appartiennent encore à l'équation de Gordon, le premier représente l'énergie propre  $W_0$  au corpuscule, le deuxième peut écrire  $W^2/W_0$ .  $W^2$  étant la somme des carrés des énergies dues au potentiel scalaire et au potentiel-vecteur, par suite de leur action sur la charge  $e$  du corpuscule.

Le troisième terme a aussi les dimensions d'une énergie. Si on le multiplie par la composante  $\psi_k$  de fonction d'onde, cela lui communique des dimensions qui s'ajoutent à celles qu'il possédait en propre. Or nous avons vu (§ 12) que celles-ci dépendent des unités adoptées. Si  $\psi$  est exprimé en unités « normalisées » de dimension  $L^{-3}$ , le terme  $\frac{e\hbar}{m_0 c} \psi_k$  a les dimensions d'un champ et peut être considéré comme tel, d'autant plus que l'on a supposé  $\psi_k = 0$ , tandis que  $-\frac{1}{2} e \frac{\hbar}{m_0 c} \psi_k$  représenterait une polarisation; quant au terme

$$(47) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2} e \frac{\hbar}{m_0 c} | \underset{\substack{\text{quaternion} \\ \text{conjugué}}}{H_k - i E_k} | \times | \underset{\substack{\text{quaternion}}}{\psi_k} |,$$

il ne serait autre que le *tenseur d'interaction champ-polarisation*, déjà rencontré au ch. 1, § 7. Si ce point de vue est juste, *il n'y a pas de différence fondamentale entre le champ électromagnétique et l'onde  $\psi$  de la mécanique ondulatoire*, de sorte que l'onde  $\psi$  d'une part et le champ électromagnétique d'autre part, peuvent participer l'un comme l'autre aux mêmes types d'interaction.

Il reste à interpréter l'onde  $\varphi$ . On obtient dans les mêmes conditions, le terme

$$(48) \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} e \frac{\hbar}{m_0 c} |\mathbf{H}_k - i\mathbf{E}_k| \times_{\substack{\text{quaternion} \\ \text{conjugué}}} |\varphi_k|_{\text{quaternion}}$$

dont la signification paraît évidente :

La composante électrique du vecteur  $\varphi$  donne lieu à deux types d'interaction.

1° Une interaction du type champ-courant (Coulomb-Laplace), par les termes réels du produit

$$(49) \quad 2\pi e \left( \frac{\hbar}{m_0 c} \right)^3 |\mathbf{H}_k + i\mathbf{E}_k| \times |\mathbf{J}_k^e| \quad (\text{tenseurs quaternions}).$$

2° Une interaction du type *champ potentiel* (énergie cinétique radiante), par les termes imaginaires du même produit, soit

$$(50) \quad \frac{1}{2} e \frac{\hbar}{m_0 c} |\mathbf{H}_k - i\mathbf{E}_k| \times |\varphi_k^e| \quad (\text{tenseurs-quaternions}).$$

La composante magnétique  $\varphi^m$  de la fonction d'onde  $\varphi$  donnerait lieu aux phénomènes complémentaires, dont, en particulier, l'action d'un champ électrique sur un courant magnétique.

### § 15. Le moment magnétique, le moment électrique, le spin.

Pour obtenir des grandeurs correspondant à un corpuscule, nous devons normer les ondes  $\varphi$  et  $\psi$  en conséquence. Nous obtenons ce résultat en écrivant que la charge totale du corpuscule est égale à  $e$ , c'est-à-dire,

$$\int_{\text{espace}} \rho \, d\tau = \frac{x^2}{4\pi} \int \varphi \, d\tau = e.$$

Ceci posé, l'expression (47) nous donne l'opérateur *moment magnétique*, dont les composantes sont

$$\mathfrak{M}_i = \frac{1}{2} e \frac{\hbar}{m_0 c} e_i \quad \text{dont la valeur propre est} \quad S = \frac{1}{2} e \frac{\hbar}{m_0 c}.$$

(Les  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont les matrices de base (23) du système de quaternions du § 5 ch. 1.)

Elle fournit en outre l'opérateur *moment électrique* de composantes

$$\mathcal{P}_k = \frac{1}{2} e \frac{ih}{m_0 c} e_k.$$

Pour avoir l'opérateur *moment cinétique*, il suffit de considérer que « l'impulsion potentielle » est due à la vitesse d'entraînement (système de référence non galiléen), le calcul reste le même, mais le terme  $e(H + iE)$  est remplacé par le terme  $m_0(R + i\Gamma)$ , ( $R$  rationnel des vitesses d'entraînement,  $\Gamma$  accélération d'entraînement), de sorte que le terme d'interaction est du type *gyroscopique*, avec l'opérateur *moment cinétique* de composantes

$$S_i = \frac{1}{2} \hbar e_i.$$

Il y aurait encore un *moment gravifique* de même forme. Dans le cas le plus général, comportant à la fois un champ électromagnétique et un système de référence non galiléen, les termes d'interaction s'annulent lorsqu'on a à la fois  $F = \frac{e}{m_0} E$  et  $R = \frac{e}{m_0 c} H$  (précession de Larmor). La précession nucléaire de Félix Bloch se trouve ainsi expliquée. Le même raisonnement est applicable à la théorie de Dirac et donne les mêmes résultats, avec un moment cinétique  $S = \frac{m}{e} m$ .

Le spin peut aussi être abordé par la méthode « classique ». A l'Hamiltonien de Dirac correspond la fonction

$$L = P_i + \sum_1^3 e_i P_i + m_0 c$$

et plus simplement, l'opérateur

$$\mathcal{R} = \sum_1^3 e_i P_i$$

dont on commute le produit avec l'opérateur moment orbital; le défaut de commutation est l'opérateur  $S$  de composantes

$$S_i = \frac{1}{2} \hbar e_i.$$



## § 16. Nouvelle expression de l'énergie.

Nous avons obtenu au § 10 du Ch. IV la formule 17

$$D = k \sum_i (\lambda^{-1} \psi_i \psi_i^* + \lambda \varphi_i \varphi_i^*).$$

Nous avons vu plus loin (§ 12) que  $k$  avait probablement la valeur  $\frac{1}{8\pi}$ .

Si nous exprimons l'onde  $\psi$  en unités de polarisation, si  $\Pi$  est la polarisation associée à l'onde  $\psi$ , si  $J$  est le courant électrique associé à l'onde  $\varphi$ , nous avons

$$\Pi_k = \frac{-1}{4\pi} \psi_k, \quad J_k = \frac{1}{4\pi} \frac{\hbar^2}{m_0^2 c^2} \varphi_k$$

et la densité d'énergie prend la forme

$$D = 4\pi k \Sigma (-\Pi_k \psi_k^* + J_k \varphi_k^*)$$

pour  $k = \frac{1}{8\pi}$ , on a

$$(51) \quad D = \frac{1}{2} (-\Pi_k \psi_k^* + J_k \varphi_k^*).$$

Lorsque  $J$  se réduit à sa composante électrique  $A$  ( $A$  potentiel-vecteur, avec  $A_i = iU$ ,  $U$  potentiel scalaire,  $J_i = i\rho_i$ ,  $\rho$  densité électrique). Si l'on pose en outre  $\psi = H + iE$ , on a

$$(52) \quad D = \frac{1}{8\pi} (H^2 + E^2) + \frac{1}{2} (\rho U + \vec{J} \wedge \vec{A})$$

Comme nous avons vu d'autre part qu'il y a équipartition de l'énergie entre les ondes  $\varphi$  et  $\psi$ , nous avons de ce fait

$$(53) \quad \frac{1}{8\pi} (H^2 + E^2) = \frac{1}{2} (\rho U + \vec{J} \cdot \vec{A}),$$

soit en intégrant à tout l'espace

$$(54) \quad \int \frac{1}{8\pi} (H^2 + E^2) d\tau = \int \frac{1}{2} (\rho U + \vec{J} \cdot \vec{A}) d\tau.$$

Le fait de retrouver au deuxième terme de 52, une expression de forme classique, et de donner une base théorique à l'égalité 54, que l'on constate empiriquement en électrodynamique classique, paraît favorable aux interprétations physiques d'ordres énergétiques et électriques, proposées pour les ondes  $\varphi$  et  $\psi$  associées au corpuscule.

Toutefois la correspondance avec l'électro-magnétisme classique n'est pas parfaite, car dans la théorie classique, si la relation (54) est vérifiée, (sans d'ailleurs que l'on sache pourquoi), on a par contre pour l'énergie

$$(55) \quad W = \frac{1}{8\pi} \int_{\text{espace}} (E^2 + H^2) d\tau = \frac{1}{2} \int (\rho U + JA) d\tau$$

c'est-à-dire l'un ou l'autre mais pas la somme, de sorte que, comme nous l'avons déjà signalé au § 12 ch. iv, le coefficient  $\frac{1}{8\pi}$  ne doit être admis qu'avec réserve. Cependant, ce désaccord ne paraît pas très grave, car les raisonnements qui conduisent aux formules 55 n'ont de sens qu'à l'échelle macroscopique.

## CHAPITRE V

### LE PROBLÈME DE DEUX CORPUSCULES

Une hypothèse simple concernant l'interaction de deux corpuscules, permet de former les champs associés à leur mouvement, et de connaître de ce fait, la polarisation, le courant, le potentiel, l'énergie. Ces équations ont la forme des équations macroscopiques de Maxwell-Lorentz, et permettent de former un modèle d'électron, globule d'énergie qui rappelle le globule de Darwin tout en tenant également des modèles antérieurs à champ soustractif. Le globule correspondant aux corpuscules de masse 0 (photon ou neutrino) et  $2,4 \cdot 10^{-24}$  gramme (méson  $\pi$ ). possède la masse de l'électron.

1. Le champ bicorpusculaire. — Soit  $m_{10}$  la masse au repos du corpuscule  $M_1$  d'indice 1,  $m_{20}$  celle du corpuscule  $M_2$  d'indice 2. Soient  $\varphi^1\psi^1$  et  $\varphi^2\psi^2$  les ondes qui leur sont respectivement associées.

Soit  $\mathcal{P}^{21}$  l'impulsion potentielle exercée par  $M_1$  sur  $M_2$  soit  $\mathcal{P}^{12}$  l'impulsion potentielle exercée par  $M_2$  sur  $M_1$ .

Le principe de l'action et de la réaction, s'il était transposable en mécanique ondulatoire donnerait  $\mathcal{P}^{21} = -\mathcal{P}^{12}$  mais cette relation serait manifestement inexacte car les champs associés aux deux corpuscules varient avec la distance suivant des formules différentes.

Nous admettrons que ce principe se transpose sous la forme également simple

$$(1) \quad \mathcal{P}_r^{12} \varphi_s^2 = - \mathcal{P}_r^{21} \varphi_s^1.$$

Nous formons alors les équations associées aux corpuscules  $M_1$  et  $M_2$ , en tenant compte des impulsions potentielles agissant respectivement sur l'un et l'autre corpuscule. Soient  $\varphi^1$  et  $\psi^1$ ,  $\varphi^2$  et  $\psi^2$  les ondes associées à  $M_1$  et à  $M_2$ , correspondant aux valeurs de  $\lambda$  respectivement égales à  $\lambda_1$  et à  $\lambda_2$ .

Ajoutons membre à membre les équations des deux groupes, relatives à la même composante, en posant

$$\Phi = \varphi' - \varphi'', \quad \Psi = \psi' - \psi''$$

Les termes d'interaction  $\mathcal{L}_r^{12}\varphi_s^2$  et  $\mathcal{L}_r^{21}\varphi_s^1$  disparaissent en vertu de 1 et on obtient les équations

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \begin{array}{l} 4 \quad \partial_4 \Psi'_1 + \partial_1 \Psi'_4 + \partial_3 \Psi'_2 - \partial_2 \Psi'_3 = x_2^2 \varphi_1^2 - x_1^2 \varphi_1^1 \\ 5 \quad \partial_4 \Psi'_3 - \partial_2 \Psi'_4 + \partial_3 \Psi'_1 - \partial_1 \Psi'_3 = x_2^2 \varphi_3^2 - x_1^2 \varphi_3^1 \\ 6 \quad \partial_4 \Psi'_3 - \partial_3 \Psi'_4 + \partial_1 \Psi'_2 - \partial_2 \Psi'_1 = x_2^2 \varphi_3^2 - x_1^2 \varphi_3^1 \\ 7 \quad \partial_1 \Psi'_1 + \partial_2 \Psi'_2 + \partial_3 \Psi'_3 = x_2^2 \varphi_1^2 - x_1^2 \varphi_1^1 \end{array} \\ \text{II} & \begin{array}{l} 8 \quad \partial_4 \Phi_1 + \partial_1 \Phi_4 + \partial_3 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_3 = \Psi'_1 \\ 9 \quad \partial_4 \Phi_2 + \partial_2 \Phi_4 + \partial_1 \Phi_3 - \partial_3 \Phi_1 = \Psi'_2 \\ 10 \quad \partial_4 \Phi_3 + \partial_3 \Phi_4 + \partial_2 \Phi_1 - \partial_1 \Phi_2 = \Psi'_3 \\ 11 \quad \partial_1 \Phi_1 + \partial_2 \Phi_2 + \partial_3 \Phi_3 - \partial_4 \Phi_4 = 0 \end{array} \end{array}$$

(avec  $\Psi_4 = 0$ ).

2. Le champ électromagnétique. — Les équations I et II ont la forme des équations 76 à 83 du § 12 ch. 1, que nous considérons comme les équations générales de l'électromagnétisme.

La correspondance est parfaite à condition de poser

$$(12) \quad J_k = \frac{1}{4\pi} (x_2^2 \varphi_k^2 - x_1^2 \varphi_k^1) \quad \begin{array}{l} \text{courant électrique} \\ \text{(somme des courants composants)} \end{array}$$

avec

$$(13) \quad \rho = \frac{1}{4\pi} (x_2 U_2 - x_1 U_1) \quad \begin{array}{l} \text{densité électrique} \\ \text{(somme des densités composantes)} \end{array}$$

( $U_1$  et  $U_2$  étant les deux potentiels scalaires. Le coefficient  $4\pi$  disparaît lorsque  $\psi$  est exprimé en unités de polarisation.

Le champ électromagnétique classique correspondrait au champ photon meson, avec  $m_{01} = 0$  (masse du photon) et  $m_{02} = 2,4 \cdot 10^{-24}$  gr (masse du méson  $\pi$ ). On aurait alors

$$(14) \quad J_k = x_2^2 \varphi_k^2 \quad \rho = x_2^2 U_2. \quad (15)$$

La densité électrique et le courant électrique ne seraient autres que les produits par le facteur  $\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}$  du potentiel scalaire et du potentiel vecteur mésonique.

3. Globule d'énergie et modèle d'électron. — a) Les fonctions d'onde. — Les équations I et II nous permettent de former un globule

d'énergie, modèle d'électron qui nous paraît plus satisfaisant que celui que l'on peut former avec un seul corpuscule (globule de Darwin). Les équations générales admettent la solution dynamique approchée, valable pour les faibles vitesses du globule, l'indice 1.

Potentiels scalaires

$$U_1 = \frac{-\varepsilon}{r} e^{-\chi_1 r} \quad U_2 = \frac{-\varepsilon}{r} e^{-\chi_2 r} \quad (\text{avec } r^2 = (x_1 - v_1 t)^2 + (x_2 - v_2 t)^2 + (x_3 - v_3 t)^2,$$

$v_1, v_2, v_3$  composantes de la vitesse du globule.

$$U = U_1 - U_2 = \frac{\varepsilon}{r} (e^{-\chi_1 r} - e^{-\chi_2 r})$$

Potentiels vecteurs

$$A_k^1 = \frac{v_k}{c} \frac{\varepsilon}{r} e^{-\chi_1 r} \quad A_k^2 = \frac{v_k}{c} \frac{\varepsilon}{r} e^{-\chi_2 r}, \quad A = A_1 - A_2 = \frac{\varepsilon}{r} \frac{v_k}{c} (e^{-\chi_1 r} - e^{-\chi_2 r}).$$

Densité électrique

$$\rho_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon}{r} \chi_1^2 e^{-\chi_1 r} \quad \rho_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon}{r} \chi_2^2 e^{-\chi_2 r} \quad \rho = \rho_2 - \rho_1 = \frac{\varepsilon}{4\pi r} (\chi_2^2 e^{-\chi_2 r} - \chi_1^2 e^{-\chi_1 r}).$$

Courant électrique

$$\vec{J}_1 = \frac{i}{4\pi} \frac{\varepsilon \vec{v}}{cr} \chi_1^2 e^{-\chi_1 r} \quad \vec{J}_2 = \frac{i}{4\pi} \frac{\varepsilon \vec{v}}{cr} \chi_2^2 e^{-\chi_2 r} \quad \vec{J} = \frac{i}{4\pi} \frac{\varepsilon \vec{v}}{cr} (\chi_2^2 e^{-\chi_2 r} - \chi_1^2 e^{-\chi_1 r}).$$

champ électrique

$$\vec{E}_i = \varepsilon \frac{\vec{r}}{r^2} \left( \chi_i + \frac{1}{r} \right) e^{-\chi_i r} \quad \vec{E} = \frac{\varepsilon}{r} \left[ \left( \chi_2 + \frac{1}{r} \right) e^{-\chi_2 r} - \left( \chi_1 + \frac{1}{r} \right) e^{-\chi_1 r} \right] \frac{\vec{r}}{r^2}$$

champ magnétique

$$\vec{H}_i = \frac{\vec{U}}{c} \wedge \vec{E}_i, \quad \text{soit} \quad \vec{H} = \frac{\vec{U}}{c} \wedge \vec{E}.$$

On a  $\Phi = iA$ ,  $\psi = iE$ .

b) *Quantité totale d'électricité.* — Nous considérerons trois cas, suivant que  $\chi_1$  est nul, très petit sans être tout-à-fait nul, ou possède une valeur mesurable.

Dans le premier cas, la quantité d'électricité totale vaut

$$e = \int \frac{\varepsilon}{r} \chi_2^2 e^{-\chi_2 r} d\tau = -\varepsilon \chi_2 \int_0^\infty r(-\chi_2) e^{-\chi_2 r} d\tau = \varepsilon$$

d'où  $\varepsilon = e$ , charge élémentaire.

Dans le second cas, on trouve une charge nulle parce que la charge électrique due au champ d'indice 1 est égale à  $-e$ . Pour retrouver le résultat précédent, il faudrait intégrer à l'intérieur d'une sphère de rayon fini, donc, si la charge totale est théoriquement nulle, les mesures expérimentales, (qui ont lieu nécessairement à distance finie) et le théorème de Green donneront une charge égale à  $e$ .

Dans le troisième cas, les charges dues aux deux corpuscules, qui sont en quelque sorte « rentrés l'un dans l'autre », se détruisent, et ce modèle nous fournit une image simple du *corpuscule neutre*, lequel serait obligatoirement formé par l'union de deux corpuscules élémentaires, ces derniers étant toujours chargés.

c) *Énergie et masse du globule*. — Doit-on adopter la formule (52), § 16, ch. IV, ou la formule (55)? Le doute vient d'une part du fait que (52) a été établie pour un champ à un seul corpuscule, que (55) appartient à l'électrodynamique classique, et que les raisonnements qui ont permis de l'établir ne sont pas applicables au domaine microscopique. Il semble toutefois que (52) présente plus de garantie <sup>(19)</sup>. Nous verrons en outre que c'est elle qui donne les résultats les plus satisfaisants.

Un calcul facile donne pour l'énergie au repos

$$(15) \quad \begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{8\pi} \int \psi \psi^* d\tau = \frac{1}{4} \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 - x_2} \varepsilon^2 = \frac{1}{4} x_2 \varepsilon^2 \quad (\text{pour } x_1 = 0) \\ W_2 &= \frac{1}{2} \int \rho v d\tau + \frac{1}{2} \int \vec{J} \vec{A} d\tau = \frac{1}{4} \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{4} x_2 \varepsilon^2 \end{aligned}$$

(on a donc  $W_1 = W_2$ , résultat prévu dans le cas du champ à un seul corpuscule et qui se trouve encore vérifié dans le champ à deux corpuscules). On a selon (52)

$$W_0 = \frac{1}{2} \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2} x_2 \varepsilon^2.$$

La masse du globule vaut

$$(16) \quad m_0 = \frac{W_0}{c^2} = \frac{e^2}{2hc} \frac{(m_{02} - m_{01})^2}{m_{02} - m_{01}} = \frac{e}{4hc} m_{02}.$$

<sup>(19)</sup> Il est d'ailleurs facile de reprendre sur les équations I et II les raisonnements du § 10 et d'éliminer les termes d'ordre zéro pour obtenir une équation de conservation des quantités  $\varphi$  et  $\psi$  tout à fait analogue à 15 § 10, et qui peut également prendre la forme 55.

La masse du méson II (corpuscule présumé l'auteur du champ nucléaire) vaut  $m_{02} = 2,4 \cdot 10^{-24}$  gramme.

La masse du globule vaut alors

$$m_0 = 9 \cdot 10^{-28} \text{ gramme}$$

qui est précisément la masse de l'électron.

Si on adapte pour l'évaluation de l'énergie la formule (55), on trouverait une masse moitié.

Le modèle d'électron, globule d'énergie du champ bicorpusculaire, présente des analogies avec les modèles d'électron à champ soustractifs déjà proposés (Bop, Pais, Feynmann, principalement avec celui de Louis de Broglie<sup>(20)</sup>).

Il diffère cependant essentiellement de ce dernier par le fait que l'électron de Louis de Broglie possède une *charge photonique*  $\epsilon_1$ , génératrice du champ photonique (champ électrique classique) et une *charge mésonique*  $\epsilon_2$ , génératrice du champ mésonique. La charge mésonique ne doit pas être confondue avec la charge photonique (qui est la charge électrique classique) car elle engendre un champ mésonique. Les charges électriques  $\epsilon_1$  et mésoniques  $\epsilon_2$  ont en commun le fait que, « *chaque charge d'indice  $i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ), bien que servant seulement de source au champ de même indice, subit l'action du champ total  $1 + 2$*  »<sup>(21)</sup>. Un corpuscule est « neutre » lorsqu'il ne possède pas de charge photonique.

Notre électron est un globule d'énergie dans une onde bicorpusculaire. Nos deux champs constituants n'ont séparément aucun sens physique, seule leur association correspond à une réalité. L'onde monocorpusculaire est formée de deux fonctions d'onde ; l'une, à trois composantes complexes, peut être considérée comme représentant la *polarisation* électromagnétique, l'autre, à trois composantes réelles et une, imaginaire, représenterait le *courant électrique*.

Un *bicorpuscule* est généralement *neutre*, il est *chargé* lorsqu'un des champs constituants se trouve dépourvu de charge du fait que sa densité électrique est nulle. Notre essai aboutit à la conclusion assez inattendue que *l'électricité et le courant électrique seraient une manifestation macroscopique du potentiel mésonique*.

Remarquons que les équations du champ bicorpusculaire ne représentent pas l'onde associée au corpuscule, car elles ne contien-

<sup>(20)</sup> Portugaliæ Mathematica, 8, 1949, p. 37

<sup>(21)</sup> Comptes rendus, Ac. des Sc., t. 229, p. 401-404, 1949 et 229, 1949, p. 640-643.

nent pas l'idée de masse au repos du corpuscule complexe. En effet, la connaissance de celle-ci résulte précisément de la considération d'une solution particulière (sphérique) de ces équations, de sorte qu'il est nécessaire d'associer à la particule de nouvelles fonctions d'onde. Du fait de l'existence du corpuscule, l'énergie est pratiquement concentrée autour de celui-ci, et la densité d'énergie a ainsi un caractère probable. Si les fonctions d'onde sont normées de telle façon que l'énergie de l'onde soit précisément celle du corpuscule, soit

$$\int D d\tau = W$$

la quantité  $\delta = \frac{D}{W}$  représente alors une densité de probabilité de présence et vérifie la condition requise

$$\int \delta d\tau = 1.$$

L'auteur a réuni dans cette étude beaucoup d'idées dont certaines supporteraient d'être poussées plus loin, mais cela eût retardé encore longtemps la publication de ces recherches qui représentent déjà un travail considérable. C'est pourquoi il a préféré les publier telles quelles malgré leur imperfection, quitte à reprendre par la suite les idées qui paraîtraient mériter d'être conservées.

---