

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN ESCASSUT

***T*-filtres, ensembles analytiques et transformation  
de Fourier *P*-adique**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 25, n° 2 (1975), p. 45-80

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1975\\_\\_25\\_2\\_45\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_45_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# **T-FILTRES, ENSEMBLES ANALYTIQUES ET TRANSFORMATION FOURIER P-ADIQUE**

par **Alain ESCASSUT**

## **INTRODUCTION**

On sait que tout élément non nul et non quasi-minoré d'une algèbre de Krasner  $H(D)$  sans idempotent non trivial est strictement annulé par un filtre monotone percé (théorèmes II.7 et II.8 de [3]), de sorte que l'étude de l'analyticité au sens de Motzkin [10] d'un infraconnexe  $D$  d'un corps  $K$  algébriquement clos, ultramétrique complet se ramène à l'étude des filtres monotones percés de  $D$  qui possèdent la propriété d'annuler strictement un élément de  $H(D)$ . On cherchera donc à caractériser ces filtres par des propriétés géométriques concernant la répartition des trous de  $D$ .

Les applications de ce résultat sont nombreuses et nous montrerons ici comment on peut résoudre le problème de la non injectivité de la transformation de Fourier  $p$ -adique posé par B. de Mathan, grâce à une transposition très originale du problème, obtenue par Yvette Amice. Dans un article ultérieur, nous utiliserons également ces résultats pour caractériser les algèbres  $H(D)$  noethériennes et intègres.

## **I. CARACTERISATION DES FILTRES STRICTEMENT ANNULATEURS**

Par soucis de concision, nous utiliserons sans les redéfinir certaines expressions déjà définies dans [2] et [3] auxquelles nous renverrons le lecteur chaque fois qu'il sera nécessaire, notamment en ce qui concerne la définition et les propriétés des fonctions  $v(f, \mu)$  et  $w(f, \mu)$ . Précisons à ce sujet que l'on note  $| \cdot |$  la valeur absolue

de  $K$  et que l'on choisit une fonction logarithme notée  $\log$ , de base  $p > 1$ , qui définit une valuation  $v$  de  $K$  par  $v(x) = -\log |x|$ .

Dans [3], on a pu mettre en évidence l'importance des filtres monotones sur un infraconnexe  $D$ , pour l'étude des éléments non quasi-minorés.

La proposition I.6 nécessite l'introduction de l'expression  $\gamma(A, q)$  que nous allons définir et étudier.

### 1. Définition de $\gamma_D(A, q)$ .

Soit  $D$  un infraconnexe de diamètre  $R$ . Soit  $A$  un disque non circonférencié de diamètre  $r \leq R$  tel que  $A \cap D \neq A$ , et  $A \subset \underline{D}$ .

Soit  $\epsilon(A, q)$  l'ensemble des polynômes unitaires de degré  $q$  dont les zéros appartiennent tous à  $A - A \cap D$ .

si  $A \cap D \neq \emptyset$ , soit  $\gamma_D(A, q) = r^q \inf_{P \in \epsilon(A, q)} \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D}$

si  $A \cap D = \emptyset$ , soit  $\gamma_D(A, q) = 1$ .

Par définition, tout polynôme unitaire  $P$  de degré  $q$  dont les zéros appartiennent tous aux trous de  $D$  inclus dans  $A$  vérifie donc :

$$\left| \frac{1}{P(x)} \right| \geq \frac{\gamma_D(A, q)}{r^q} \quad \text{pour tout } x \in A \cap D.$$

Nous allons maintenant calculer  $\gamma_D(A, q)$  en fonction des trous de  $D$  inclus dans  $A$ . Nous établirons d'abord le lemme suivant.

**I.1. LEMME.** — Soit  $D$  un infraconnexe et soit  $A$  un disque non circonférencié de diamètre  $r$  tel que  $A \cap D \neq D$ ,  $A \cap D \neq \emptyset$  et  $A \subset \underline{D}$ . Soit  $q \in \mathbb{N}$  et soit  $P \in \epsilon(A, q)$ . Soient  $T_1, \dots, T_n$  les trous de  $D$  contenant au moins un zéro de  $P$ , soit  $\rho_i$  le diamètre de  $T_i$ , soit  $a_i \in T_i$  et soit  $p_i$  la somme des ordres de multiplicité des zéros de  $P$  appartenant au trou  $T_i$ . Alors il existe  $l \leq n$  tel que

$$\alpha) : \sup_{x \in A \cap D} (v(P(x))) = v_{a_l}(P, -\log \rho_l) \text{ et l'on a}$$

$$\beta) : \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} = \frac{1}{\rho_l^{p_l} \prod_{k \neq l} |a_k - a_l|^{p_k}} .$$

*Preuve.* — La première assertion est évidente si tous les zéros de  $P$  appartiennent à un même trou  $T_{a_l}$  car dans ce cas on a  $v(P(x)) = v_{a_l}(P, v(x - a_l))$  pour tout  $x \in T_{a_l}$  et d'autre part  $v_{a_l}(P, \mu) \leq v_{a_l}(P, -\log \rho_l)$  pour tout  $\mu \leq -\log \rho_l$ , de sorte que  $v_{a_l}(P, -\log \rho_l) \geq v(P(x))$  pour tout  $x \in A \cap D$  donc

$$v_{a_l}(P, -\log \rho_l) \geq + \log \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D}$$

et comme on a trivialement

$$v_{a_l}(P, -\log \rho_l) = \lim_{\substack{|x - a_l| \rightarrow \rho_l \\ x \in A \cap D}} v(P(x)) \leq \log \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} ,$$

on a bien  $\log \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} = v_{a_l}(P, -\log \rho_l)$ . Nous allons en déduire la 1<sup>ère</sup> assertion dans le cas général grâce au théorème de Mittag-Leffler ([8] et [12]). En effet il est clair que  $\frac{1}{P}$  admet une décomposition

unique de la forme  $\sum_{i=1}^n h_i$  telle que  $h_i \in K(CT_i)$ . Alors d'après le

théorème de Mittag-Leffler, on a  $\left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} = \sup_{1 \leq i \leq n} \|h_i\|_{A \cap D}$  et il

existe un entier  $l \leq n$  tel que  $\left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} = \|h_l\|_{A \cap D}$  donc d'après ce

qui précède  $\log \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} = v_{a_l}(P, -\log \rho_l)$ .

Il est maintenant immédiat d'établir la seconde assertion. Pour plus de simplicité, supposons les points  $a_i$  indexés de façon telle que  $l = 1$  et que  $|a_i - a_1| \leq |a_j - a_1|$  pour  $1 < i < j$ . Enfin notons

$$|a_2 - a_1| = \dots = |a_{m_1} - a_1| = d_1 ,$$

$$|a_{m_1+1} - a_1| = \dots = |a_{m_2} - a_1| = d_2 ,$$

$$|a_{m_q-1+1} - a_1| = \dots = |a_n - a_1| = d_q \quad \text{et soit} \quad m_q = n .$$

Alors on sait ([9] et lemme I.1 de [3]) que

$$v_{a_1}(P, -\log \rho_1) = -p_1 \log \rho_1 - \sum_{j=1}^{q-1} \left( \sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} p_i \log d_j \right),$$

ce qui nous donne, par exponentiation et en utilisant la relation  $\alpha$ ) déjà obtenue :

$$\left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} = \left( \frac{1}{\rho_1} \right)^{p_1} \prod_{j=1}^{q-1} \left( \prod_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} \left( \frac{1}{d_j} \right)^{p_i} \right).$$

Or il est clair que cette dernière relation est équivalente à la relation  $\beta$ ) et s'obtient en remplaçant dans  $\beta$ ) les expressions  $|a_k - a_l|$  par les nombres  $d_j$  correspondants, définis ci-dessus. La relation  $\beta$ ) est donc établie.

Le calcul de  $\gamma_D(T, q)$  se déduit maintenant de façon évidente du lemme I.1.

**I.2. THEOREME.** — Soit  $D$  un infraconnexe et soit  $A$  un disque non circonférencié tel que  $A \subset \underline{D}$  et  $A \cap D \neq \emptyset$ . Soit  $(T_i)_{i \in I}$  la famille des trous de  $D$  inclus dans  $A$  et pour tout  $i \in I$ , soit  $a_i \in T_i$ . Alors pour tout  $q \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\gamma_D(A, q) = r^q \sup_{\substack{j=1, \dots, s \\ i_1, \dots, i_s \in I \\ p_1 + \dots + p_s = q \\ s \leq q}} \frac{1}{\rho_{i_1}^{p_1} \prod_{k \neq 1} |a_{i_k} - a_{i_1}|^{p_k}}.$$

*Preuve.* — En effet, lorsque  $P$  parcourt  $\epsilon(A, q)$ ,  $s$  parcourt  $[1, q] \cap \mathbb{N}$ , et pour chaque valeur fixée de  $s$ ,  $p_1, \dots, p_s$  prennent toutes les valeurs telles que  $\sum_{j=1}^s p_j = q$ ,  $(i_1, \dots, i_s)$  parcourt  $I^s$  et  $j$  parcourt  $(1, s) \cap \mathbb{N}$ .

En particulier, si  $A$  ne contient qu'un seul trou  $T$  de  $D$ , de diamètre  $\rho$ , on a :

$$\gamma_D(A, q) = \left( \frac{R}{\rho} \right)^q.$$

De même si l'ensemble des trous de  $D$  inclus dans  $A$  est une famille de trous contigus de diamètre  $\rho$ ,

$$\gamma_D(A, q) = \left(\frac{R}{\rho}\right)^q.$$

Si  $D$  admet par exemple deux trous,  $T_1$  et  $T_2$  de diamètres respectifs  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , de distance  $d$ , alors

$$\gamma_D(A, q) = r^d \inf_{p_1 + p_2 = q} \left( \min \left( \frac{1}{\rho^{p_1} d^{p_2}}, \frac{1}{\rho^{p_2} d^{p_1}} \right) \right)$$

## 2. Propriétés de $\gamma_D(A, q)$ .

**I.3. PROPOSITION.** — Soit  $D$  un infraconnexe et soit  $A$  un disque non circonférencié tel que  $A \subset \underline{D}$ ,  $A \cap D \neq \emptyset$ ,  $A \cap \partial D \neq \emptyset$  et soit  $r$  le diamètre de  $A$ . Soit  $h \in K(D)$ ,  $h = \frac{P}{Q}$  où  $Q$  est unitaire et a tous ses zéros dans  $A - A \cap D$ , et  $P$  est unitaire et a tous ses zéros dans  $A$ . Soit  $q = \deg Q - \deg P$ . On suppose  $q \geq 0$ . Alors :

$$r^q \|h\|_{D \cap A} \geq \gamma_D(A, q). \quad (1)$$

*Preuve.* — Soit  $(a, b)$  un couple (zéro, pôle) de  $h$  tel que  $|a - b|$  soit minimal.  $h$  n'a donc aucun zéro dans le disque non circonférencié  $\Delta$  de centre  $a$ , de rayon  $|a - b|$ .

Soit  $h_1 = h \frac{x - a}{x - b}$ . Nous allons montrer que

$$\|h_1\|_{D \cap A} \leq \|h\|_{D \cap A}. \quad (2)$$

Alors nous en déduirons qu'il existe un polynôme  $R$  de degré  $q$  ayant tous ses zéros dans  $A - A \cap D$ , tel que :

$$\left\| \frac{1}{R} \right\|_{D \cap A} \leq \|h\|_{D \cap A}, \quad (3)$$

et le résultat (1) sera établi car par hypothèse on a :

$$r^q \left\| \frac{1}{R} \right\|_{D \cap A} \geq \gamma_D(A, q).$$

Montrons donc (2). Soit  $h = \frac{P_1}{Q_1}$  sous sa forme irréductible unitaire. Remarquons d'abord que

$$\|h_1\|_{D-\Delta \cap D} \leq \|h\|_{D-\Delta \cap D}, \quad \text{car}$$

$$\left| \frac{x-b}{x-a} \right| \leq 1 \quad \text{pour} \quad |x-a| \geq |a-b|.$$

Or  $h_1$  n'ayant pas de pôle dans  $\Delta$ , (car  $|a-b|$  est minimal), son dénominateur irréductible  $Q_1$  y est constant en valeur absolue. On a donc

$$\|h_1\|_{\Delta} = \frac{\|P_1\|_{\Delta}}{\|Q_1\|_{\Delta}}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} -\log \|h_1\|_{\Delta} &= -\log \|P_1\|_{\Delta} + \log \|Q_1\|_{\Delta} \\ &= v_a(P_1, v(a-b)) - v_a(Q_1, v(a-b)) = v_a(h_1, v(a-b)). \end{aligned}$$

Soit  $\theta_1(x) = \frac{x-a}{x-b}$ . Alors :

$$v_a(h_1, v(a-b)) = v_a(h, v(a-b)) + v_a(\theta_1, v(a-b)),$$

or  $v_a(\theta_1, v(a-b)) = 0$ .

Donc  $v(h_1, v(a-b)) = v_a(h, v(a-b))$ .

Donc  $-\log \|h_1\|_{\Delta} = v_a(h, v(a-b))$ .

Mais il est connu que  $v_a(h, v(a-b)) \geq -\log \|h\|_{\Delta}$  car

$$v_a(h, v(a-b)) = -\log \left( \frac{\|P\|_{\Delta}}{\|Q\|_{\Delta}} \right) \geq -\log \left\| \frac{P}{Q} \right\|_{\Delta}.$$

Donc la relation (2) est montrée. Alors soit  $n$  le degré de  $P$ . On voit qu'après  $n$  opérations semblables, on obtient une fraction  $h_n$  qui est de la forme  $\frac{1}{R}$ , d'où la relation (3).

Nous allons maintenant définir une variété particulière de filtres monotones percés appelés T-filtres, dont nous montrerons ensuite qu'ils sont caractérisés par la propriété d'annuler strictement certains éléments analytiques.

### 3. Définition d'un T-filtre.

Les filtres monotones sur un infraconnexe fermé borné ont été introduits dans [3] (II, § 2) pour caractériser les éléments  $f$  non quasi-minorés de  $H(D)$ , ([2] IV), c'est-à-dire tels qu'il existe une suite  $a_n$  de  $D$  sans point adhérent tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$ .

Rappelons qu'un *filtre décroissant* de  $K$  est un filtre qui admet une base de la forme  $D_n = d_n - \bigcap_{i=1}^{\infty} d_i$  où  $(d_n)$  est une suite de disques strictement décroissante. De même on appelle *filtre décroissant*  $\mathcal{F}$  d'un infraconnexe  $D$  l'intersection avec  $D$  d'un filtre décroissant de  $K$  sécant à  $D$ . On note  $\Delta(\mathcal{F})$  l'ensemble  $\bigcap_{d \in \mathcal{F}} \underline{d}$  et on appelle *centre* de  $\mathcal{F}$  tout point de  $\Delta(\mathcal{F})$ ; enfin on appellera ici *plage* de  $\mathcal{F}$  l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathcal{F}) = \Delta(\mathcal{F}) \cap D$ .

De même on appelle *filtre croissant* de  $K$  un filtre image d'un filtre décroissant  $\mathcal{F}$  de  $K$  par une inversion centrée en un centre de  $\mathcal{F}$ ; on appelle *filtre croissant* d'un infraconnexe  $D$  l'intersection avec  $D$  d'un filtre croissant de  $K$ . Enfin si un filtre  $\mathcal{F}$  croissant de  $D$  est l'image par une inversion  $\mathcal{J}$  d'un filtre décroissant  $\mathcal{F}'$  de  $\mathcal{F}(D)$ , on appellera *plage* de  $\mathcal{F}$  l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathcal{F}) = \mathcal{J}(\mathcal{P}(\mathcal{F}'))$ .

Pratiquement, tout filtre croissant  $\mathcal{F}$  d'un infraconnexe  $D$  admet une base de la forme  $D_n = (A - d_n) \cap D$ , où  $A$  est un disque non circonférencié et où  $d_n$  est une suite strictement croissante de disque inclus dans  $A$  telle que  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} d_n$ . Alors  $\mathcal{P}(\mathcal{F}) = (C A) \cap D$ .

Pour tout  $a \in K$  et  $r \in \mathbb{R}^+$ , on notera  $C(a, r)$  le cercle  $\{x \in K / |x - a| = r\}$ .

Nous dirons qu'une suite de cercles  $C(a_n, r_n)$  de  $K$  est *décroissante* si  $|a_{n+1} - a_n| < r_n$  et si  $r_{n+1} < r_n$ . Il est clair qu'un filtre décroissant de  $K$  peut être associé à une suite décroissante de cercles  $C_n = C(a_n, r_n)$  en considérant la suite  $d_n = \underline{C_n}$  et en notant  $\mathcal{F}$  le filtre décroissant admettant pour base la suite  $D_n = d_n - \bigcap_{i=1}^{\infty} d_i$ . Nous dirons que la suite  $C_n$  *décrit* le filtre.

De même on définit de façon évidente une *suite croissante* de cercles de  $K$  à laquelle on associe un filtre croissant.



Nous dirons qu'un cercle  $C$  de  $K$  est un *cercle percé d'un fermé borné*  $D$  si  $C$  contient au moins un trou de  $D$ . De même nous dirons qu'une classe de  $C$  est percée si elle contient au moins un trou de  $D$ .

Soit  $D$  un infraconnexe. On appelle *T-filtre décroissant* un filtre percé, décroissant, défini par une *suite décroissante de cercles percés*  $c_m$  de rayons respectifs  $d_m$  vérifiant la propriété suivante :  $c_m$  admet au moins un nombre fini  $k(m)$  de classes  $\Gamma_{m,i}$ ,  $1 \leq i \leq k(m)$  ; il existe des entiers  $q_{m,i}$ ,  $1 \leq i \leq k(m)$  ; si l'on pose

$$\gamma_m = \sup_{1 \leq i \leq k(m)} \gamma_D(\Gamma_{m,i}, q_{m,i}), \quad q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} q_{m,i},$$

on a la relation

$$(T) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m \prod_{j=1}^{m-1} \left( \frac{d_m}{d_j} \right)^{q_j} = 0.$$

De même on appelle *T-filtre croissant* un filtre percé inverse d'un T-filtre décroissant.

La définition d'un T-filtre croissant peut être interprétée de la façon suivante : un T-filtre croissant est un filtre percé croissant défini par une suite croissante de cercles percés concentriques  $c_m$  de rayons respectifs  $d_m$  vérifiant la propriété suivante :  $c_m$  admet au moins un nombre fini  $k(m)$  de classes  $\Gamma_{m,i}$ ,  $1 \leq i \leq k(m)$  ; il existe des entiers  $q_{m,i}$ ,  $1 \leq i \leq k(m)$  ; si l'on pose

$$\gamma_m = \sup_{i=1, \dots, k(m)} \gamma_D(\Gamma_{m,i}, q_{m,i}), \quad q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} q_{m,i},$$

on a la relation

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m \prod \left( \frac{d_j}{d_m} \right)^{q_m} = 0.$$

*Remarque 1.* — On peut résumer dans les deux cas la condition portant sur la limite par

$$(T) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ -\log \gamma_m + \sum_{j=1}^{m-1} q_j |\log d_m - \log d_j| \right] = +\infty.$$

*Remarque 2.* — Il est bon de remarquer que l'existence d'un T-filtre à centre est équivalente à l'existence d'une suite "convenable" de disques vérifiant la condition (\*) définie dans [11] par E. Motzkin et P. Robba. Cette équivalence découle en effet du théorème I.2. de façon immédiate.

#### 4. Propriété $\varphi(\mathfrak{F})$ .

Nous allons maintenant traduire la définition d'un T-filtre sous une forme qui facilitera la démonstration ultérieure de la propriété : tout T-filtre de D annule strictement des éléments de  $H(D)$ .

DEFINITION. — Soit  $\mathfrak{F}$  un filtre monotone percé d'un infraconnexe fermé borné D et soit  $Q_m$  une suite de polynômes unitaires de degrés  $q_m$ . Nous dirons que la suite  $Q_m$  possède la propriété  $\varphi(\mathfrak{F})$ , s'il existe une suite de cercles  $C_m$  de rayons  $d_m$ , décrivant le filtre percé  $\mathfrak{F}$ , tels que pour tout m les zéros de  $Q_m$  appartiennent à  $C_m \cap CD$  et tels que la suite

$$\lambda_m = \|Q_m\|_{C_m} \cdot \left\| \frac{1}{Q_m} \right\|_{C_m \cap D} \quad \text{satisfasse}$$

$$(T') \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [-\log \lambda_m + \sum_{j=1}^{m-1} q_j |\log d_m - \log d_j|] = +\infty.$$

Pour pouvoir caractériser les T-filtres par l'existence d'une suite de polynômes possédant la propriété  $\varphi(\mathfrak{F})$ , nous établirons d'abord le lemme I.4.

I.4. LEMME. — Soit D un infraconnexe ; soit C un cercle de K et tel que  $C \cap CD \neq \emptyset$ , et  $C \subset \underline{D}$ . Soient  $h \in K(D)$  telle que  $h(x) \neq 0$  pour tout  $x \in C$ . Soient  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  les classes de C contenant des pôles de h. Soit R le dénominateur d'une forme irréductible de h et pour tout  $i = 1, \dots, k$ , soit  $Q_i$  le plus grand diviseur unitaire de R dont les zéros appartiennent à  $\Gamma_i$ . Alors, on a :

$$\|h\|_{C \cap D} \left\| \frac{1}{h} \right\|_C = \sup_{1 \leq i \leq k(m)} \left\| \frac{1}{Q_i} \right\|_{\Gamma_i \cap D} \|Q_i\|_{\Gamma_i}.$$

*Preuve.* — Soit  $h_i = Q_i h$  alors  $h_i$  n'a aucun pôle ni zéro dans  $\Gamma_i$  et l'on a donc  $|h_i(x)| = \text{Cte}$  pour  $x \in \Gamma_i$  ([3], ). Par conséquent  $\|h\|_{\Gamma_i \cap D} \cdot \left\| \frac{1}{h} \right\|_{\Gamma_i} = \left\| \frac{1}{Q_i} \right\|_{\Gamma_i \cap D} \cdot \|Q_i\|_{\Gamma_i}$ . D'autre part,  $h$  n'admet pas de zéro dans  $C$  et l'on a donc  $\left\| \frac{1}{h} \right\|_{\Gamma_i} = \left\| \frac{1}{h} \right\|_C$  quel que soit  $i = 1, \dots, k$ . Enfin comme les pôles de  $h$  appartiennent à  $\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$ , on a

$$\sup \|h\|_{\Gamma_i \cap D} = \|h\|_{C \cap D}$$

d'où le lemme I.4.

**I.5. LEMME.** — *Un filtre monotone  $\mathfrak{F}$  est un T-filtre si et seulement s'il existe une suite de polynômes unitaires  $Q_m$  satisfaisant la propriété  $\varphi(\mathfrak{F})$ .*

*Preuve.* — Gardons les notations de la définition et plaçons-nous pour démonstration dans le cas d'un filtre percé décroissant.

Supposons qu'il existe une suite de polynômes  $Q_m$  de degré  $q_m$  possédant la propriété  $\varphi(\mathfrak{F})$ , et soient  $(\Gamma_{m,i})_{1 \leq i \leq k(m)}$  les classes du cercle  $C_m$  qui contiennent des zéros de  $Q_m$ ; supposons que  $Q_m$  se factorise sous la forme  $Q_m = \prod_{i=1}^{k(m)} Q_{m,i}$  où les zéros de  $Q_{m,i}$  appartiennent à  $\Gamma_{m,i}$ , et soit  $q_{m,i} = \deg(Q_{m,i})$ . Alors on a trivialement  $\lambda_m \geq \gamma_m = \sup_{1 \leq i \leq k(m)} \gamma_D(\Gamma_{m,i}; q_{m,i})$  ce qui prouve en considérant la famille des couples  $(\Gamma_{m,i}; q_{m,i})$  que  $\mathfrak{F}$  est un T-filtre car la propriété  $\varphi(\mathfrak{F})$  implique a fortiori

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [-\log \gamma_m + \sum_{j=1}^{m-1} q_j |\log d_m - \log d_j|] = +\infty.$$

Réciproquement, supposons que  $\mathfrak{F}$  soit un T-filtre défini par une famille  $(\Gamma_{m,i}; q_{m,i})_{1 \leq i \leq k(m)}$  satisfaisant la relation (T). Pour tout couple  $(m, i)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq k(m)$ ) soit  $Q_{m,i} \in \epsilon(\Gamma_{m,i}; q_{m,i})$  tel que

$$\left\| \frac{1}{Q_{m,i}} \right\|_{\Gamma_{m,i} \cap D} < 2d_m^{q_{m,i}} \gamma(\Gamma_{m,i}; q_{m,i}).$$

Alors, soit  $Q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} Q_{m,i}$  ; soit  $C_m$  le cercle de rayon  $d_m$  de  $K$  contenant les classes  $(\Gamma_{m,i})_{1 \leq i \leq k(m)}$  et soit  $\lambda_m = \|Q_m\|_{C_m} \cdot \left\| \frac{1}{Q_m} \right\|_{C_m \cap D}$ .

On sait grâce au lemme I.4. que

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \sup_{1 \leq i \leq k(m)} \|Q_{m,i}\|_{\Gamma_{m,i}} \left\| \frac{1}{Q_{m,i}} \right\|_{\Gamma_{m,i} \cap D} \\ &= d_m^{q_{m,i}} \left\| \frac{1}{Q_{m,i}} \right\|_{\Gamma_{m,i} \cap D} \leq 2\gamma_D(\Gamma_{m,i}, q_{m,i}), \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite  $Q_m$  possède la propriété  $\varphi(\mathcal{F})$  et le lemme I.5. est établi.

## 5. Propriété caractéristique des T-filtres.

**I.6. PROPOSITION.** — *Un filtre percé monotone est strictement annulateur si et seulement si c'est un T-filtre.*

*Preuve.* — Montrons d'abord que si un filtre percé monotone est strictement annulateur, alors c'est un T-filtre.

Rappelons encore qu'une assertion voisine de celle-ci a été établie par E. Motzkin et P. Robba dans [11]. Mais nous ne pouvons l'utiliser ici pour montrer que tout filtre strictement annulateur est un T-filtre car elle ne concerne que des filtres percés qui ont un centre, ce qui n'est pas forcément le cas de ceux que nous devons considérer ici. Nous établirons ensuite la *reciproque* de cette propriété, ce qui permettra ultérieurement de résoudre le problème de l'intégrité de  $H(D)$  ainsi que les conditions que  $D$  doit vérifier pour que  $H(D)$  soit noethérienne, mais aussi de compléter les résultats obtenus par E. Motzkin et P. Robba [11] : la condition (\*) suffisante, pour que  $D$  soit analytique est aussi nécessaire et ceci quelle que soit la caractéristique  $p$  du corps des restes de  $K$ .

Nous allons faire la démonstration pour un filtre *décroissant*, ce qui est évidemment suffisant pour déduire le résultat dans le cas général.

Soit  $\mathcal{F}$  un filtre percé décroissant auto-annulateur de diamètre  $R_0$ . Soit  $I$  l'intervalle  $[-\log T, -\log R_0[$ . On peut choisir  $f \in H(D)$  tel que la fonction  $w_{\mathcal{F}}(f, \cdot)$  associée vérifie

$$\lim_{\mu \rightarrow -\log R_0} w_{\mathcal{F}}(f, \mu) = +\infty, \quad \text{et}$$

$$w_{\mathcal{F}}(f, \mu) < +\infty \quad \text{quel que soit } \mu \in I.$$

Soit  $(\nu_m)$  la suite des valeurs de  $I$  pour lesquelles  $w_{\mathcal{F}}(f, \cdot)$  admet des sauts de pente  $s_m$ .

Soit  $n_m = w_{\mathcal{F}}'(f, \nu_m)$  la dérivée à droite de  $w_{\mathcal{F}}(f, \cdot)$  au point  $\nu_m$ .

Les points de  $I$  où la fonction  $w_{\mathcal{F}}(f, \cdot)$  n'est pas dérivable sont isolés et d'autre part grâce à [3], on sait que la fonction  $w_{\mathcal{F}}(f, \cdot)$  est concave sur tout intervalle  $[\nu_m, \nu_{m+1}[$ . Il en résulte que la dérivée  $w_{\mathcal{F}}'(f, \mu)$  vérifie, en tout point de  $[\nu_m, \nu_{m+1}[$  où elle existe,  $w_{\mathcal{F}}'(f, \mu) \leq n_m$ . On en déduit immédiatement que

$$w_{\mathcal{F}}(f, \mu) \leq w_{\mathcal{F}}(f, \nu_m) + n_m(\mu - \nu_m),$$

quel que soit  $\mu \in [\nu_m, \nu_{m+1}[$ .

Donc, en effectuant une telle opération  $m$  fois, on obtient la relation

$$w_{\mathcal{F}}(f, \mu) \leq w_{\mathcal{F}}(f, \nu_1) + n_1(\nu_2 - \nu_1) + \cdots + n_{m-1}(\nu_m - \nu_{m-1}) + n_m(\mu - \nu_m). \quad (1)$$

D'autre part, on sait que

$$n_j \leq n_{j-1} + s_j, \quad (2)$$

car la fonction  $w_{\mathcal{F}}(f, \cdot)$  est concave sur l'intervalle  $[\nu_{j-1}, \nu_j[$ . Alors (1) et (2) nous donnent

$$w_{\mathcal{F}}(f, \mu) \leq w_{\mathcal{F}}(f, \mu_1) + s_1(\mu - \nu_1) + \cdots + s_m(\mu - \nu_m).$$

Soit  $A = w_{\mathcal{F}}(f, \mu_1)$ . On a la relation

$$w_{\mathcal{F}}(f, \mu) \leq A + \sum_{j=1}^{j=m} s_j(\mu - \nu_j), \quad (3)$$

quel que soit  $\mu$  tel que  $\nu_m \leq \mu \leq \nu_{m+1}$ .

Nous allons maintenant fixer  $m = m_0$ .

Soit  $D_m$  une base canonique de  $\mathcal{H}$ . Soit  $\mu_m = -\log(\text{diam}(D_m))$ . Soit  $m'_0$  assez grand pour que  $\mu_{m'_0} < \nu_{m_0}$ . Soit  $a_{m_0} \in D_{m'_0+1}$ . Soit  $c_{m_0}$  l'ensemble des  $x \in D$  tel que  $v(a_{m_0} - x) = \nu_{m_0}$ . Nous nous proposons d'étudier  $|f(x)|$  pour  $x \in c_{m_0}$ . Pour cela nous allons considérer une fraction rationnelle  $h \in H(D)$  telle que

$$v(f(x) - h(x)) > \inf_{\mu \leq \nu_{m+1}} w_{\mathcal{F}}(f, \mu) \quad \text{pour tout } x \in D,$$

et telle que  $w_{\mathcal{F}}(f, \mu) = w_{\mathcal{F}}(h, \mu)$  quel que soit  $\mu \leq \nu_{m+1}$ ,

(on sait que  $h$  existe d'après la proposition I.5 de [3].

On voit que  $w_{\mathcal{F}}(h, \cdot)$  admet au point  $\nu_{m_0}$  le même saut de pente  $s_{m_0}$  que  $w_{\mathcal{F}}(f, \cdot)$  puisque ces fonctions ont même valeur au voisinage du point  $\nu_{m_0}$ .

Donc la différence entre le nombre de pôles de  $h$  et le nombre de zéros de  $h$  sur le cercle  $c_{m_0}$  est égale à  $s_{m_0}$  d'après [3] et d'après la définition de  $w_{\mathcal{F}}(f, \cdot)$  [on a en effet  $w_{\mathcal{F}}(h, \nu_m) = v(h_a, \nu_m)$ ].

Soient  $\Gamma_{m_0,1}; \dots; \Gamma_{m_0,k(m_0)}$  les classes du cercle  $c_{m_0}$  dans lesquelles  $h$  admet plus de pôles que de zéros. Soit  $q_{m_0,i}$  la différence entre le nombre des pôles et le nombre des zéros de  $h$  dans  $\Gamma_{m_0,i}$ . Alors

$$q_{m_0} = q_{m_0,1} + \dots + q_{m_0,k(m_0)} \geq s_{m_0}. \quad (4)$$

Factorisons  $h$  sous la forme

$$h = h_{m_0,i} \cdot g_{m_0,i},$$

où  $h_{m_0,i}$  admet pour numérateur le polynôme unitaire des zéros de  $h$  dans  $\Gamma_{m_0,i}$  et pour dénominateur le polynôme unitaire de pôles de  $h$  dans  $\Gamma_{m_0,i}$ .

soit, quel que soit  $m$ ,  $d_m = p^{-\nu_m}$ .

Alors, on a d'après I.3.

$$\|h_{m_0,i}\|_{\Gamma_{m_0,i} \cap D} \geq \frac{\gamma_D(\Gamma_{m_0,i}, q_{m_0,i})}{(d_{m_0})^{q_{m_0,i}}}. \quad (5)$$

Evaluons  $w_{\mathfrak{F}}(h_{m_0,i}, \nu_{m_0})$ . Rappelons que

$$w_{\mathfrak{F}}(h_{m_0,i}, \nu_{m_0}) = v((h_{m_0,i})_{a_{m_0}}, \nu_{m_0}) ;$$

soit  $a_{m_0,i} \in \Gamma_{m_0,i}$ . Alors  $v(a_{m_0,i} - a_{m_0}) = \nu_{m_0}$ .

Donc, d'après la proposition I.6. ii) de [3].

$$v((h_{m_0,i})_{a_{m_0}}, \nu_{m_0}) = v((h_{m_0,i})_{a_{m_0,i}}, \nu_{m_0}) ,$$

or, 
$$v((h_{m_0,i})_{a_{m_0,i}}, \nu_{m_0}) = -q_{m_0,i} \nu_{m_0} .$$

D'où

$$w_{\mathfrak{F}}(h_{m_0,i}, \nu_{m_0}) = -q_{m_0,i} \nu_{m_0} . \quad (6)$$

D'où

$$w_{\mathfrak{F}}(g_{m_0,i}, \nu_{m_0}) = w_{\mathfrak{F}}(h, \nu_{m_0}) + q_{m_0,i} \nu_{m_0} . \quad (7)$$

D'autre part,  $g_{m_0,i}$  n'ayant ni pôle ni zéro dans  $\Gamma_{m_0,i}$ , alors quel que soit  $x \in \Gamma_{m_0,i}$ , on a

$$v(g_{m_0,i}(x)) = v((g_{m_0,i})_{a_{m_0}}, \nu_{m_0}) = w_{\mathfrak{F}}(g_{m_0,i}, \nu_{m_0}) .$$

Alors, grâce à (7), quel que soit  $x \in \Gamma_{m_0,i}$ , on a

$$\begin{aligned} v(h(x)) &= v(g_{m_0,i}(x)) + v(h_{m_0,i}(x)) = w_{\mathfrak{F}}(h, \nu_{m_0}) + q_{m_0,i} \nu_{m_0} + \\ &\quad + v(h_{m_0,i}(x)) . \end{aligned} \quad (8)$$

Mais grâce à (3) et (4), on a

$$w_{\mathfrak{F}}(h, \nu_{m_0}) \leq A + \sum_{j=1}^{m_0-1} q_j(\nu_{m_0} - \nu_j) .$$

D'où

$$v(h(x)) \leq A + \left( \sum_{j=1}^{m_0-1} q_j(\nu_{m_0} - \nu_j) \right) + q_{m_0,i} \nu_{m_0} + v(h_{m_0,i}(x)) ,$$

quel que soit  $x \in \Gamma_{m_0,i}$ .

Soit  $B = p^{-A}$ . Cette relation s'écrit encore

$$|h(x)| \geq B \left[ \prod_{j=1}^{m_0-1} \left( \frac{d_{m_0}}{d_j} \right)^{q_j} \right] \cdot \left[ \frac{|h_{m_0,i}(x)|}{(d_{m_0})^{q_{m_0,i}}} \right],$$

quel que soit  $x \in \Gamma_{m_0,i}$ .

Alors, grâce à (5)

$$\sup_{x \in \Gamma_{m_0,i}} |h(x)| \geq B \prod_{j=1}^{m_0-1} \left( \frac{d_{m_0}}{d_j} \right)^{q_j} \cdot \gamma_D(\Gamma_{m_0,i}, q_{m_0,i}).$$

Donc

$$\|h\|_{c_{m_0}} \geq \left( \sup_{i=1, \dots, k(m_0)} \gamma_D(\Gamma_{m_0,i}, q_{m_0,i}) \right) B \left( \prod_{j=1}^{m_0-1} \left( \frac{d_{m_0}}{d_j} \right)^{q_j} \right).$$

Alors soit

$$\gamma_{m_0} = \sup_{i=1, \dots, k(m_0)} \gamma_D(\Gamma_{m_0,i}, q_{m_0,i}).$$

Il reste à vérifier que

$$\|f\|_{c_{m_0}} = \|h\|_{c_{m_0}}.$$

Mais c'est évident car

$$\|h\|_{c_{m_0}} \geq p^{-w_{\mathfrak{F}}(h, v_{m_0})},$$

or

$$\|f - h\| < p^{-w_{\mathfrak{F}}(h, v_{m_0})}.$$

Donc  $\|f\|_{c_{m_0}} = \|h\|_{c_{m_0}} > \|f - h\|.$

La première partie de la démonstration est achevée.

En effet,

$$\|f\|_{c_{m_0}} \geq \gamma_{m_0} B \prod_{j=1}^{m_0-1} \left( \frac{d_{m_0}}{d_j} \right)^{q_j},$$

et ceci est vrai pour tout  $m_0$ .

Donc il existe une famille de classes  $\Gamma_{m,i}$  telle que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \gamma_m \left( \prod_{j=1}^{m-1} \left( \frac{d_m}{d_j} \right)^{q_j} \right) \right] = 0.$$



*Donc  $\mathfrak{F}$  est un T-filtre.*

Achevons la démonstration de I.6 en montrant la réciproque de la proposition qui vient d'être établie :

*si  $\mathfrak{F}$  est un T-filtre, alors  $\mathfrak{F}$  est strictement annulateur.*

Nous supposons toujours  $\mathfrak{F}$  décroissant pour la démonstration.

Supposons que  $\mathfrak{F}$  est un T-filtre décroissant de diamètre  $R_0$ . Il existe donc une suite de polynômes unitaires possédant la propriété  $\varphi(\mathfrak{F})$ . Nous terminerons la démonstration du théorème I.6., en établissant le lemme I.6.A.

**I.6.A. LEMME.** — *Soit  $\mathfrak{F}$  un T-filtre et soit une suite de polynômes  $Q_m$  possédant la propriété  $\varphi(\mathfrak{F})$ . Alors il existe une suite croissante d'entiers  $n \rightarrow h(n)$  et il existe une suite de fractions  $\Pi_n \in K(D)$*

*de la forme  $\frac{\phi_n}{\left(\prod_{m=1}^{h(n+1)-1} Q_m\right)}$  (où  $\phi_n \in K[X]$ ) qui converge vers un*

*élément  $\pi \in H(D)$  strictement annulé par  $\mathfrak{F}$  et tel que  $\pi(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{F})$ .*

*Preuve.* — Nous nous bornerons naturellement au cas d'un T-filtre décroissant pour effectuer la démonstration. Soit  $Q_m$  une suite de polynômes unitaires possédant la propriété  $\varphi(\mathfrak{F})$ . Soit une suite de cercles  $C_m$  décrivant  $\mathfrak{F}$ , de rayons  $d_m$  tels que pour tout  $m$  les zéros de  $Q_m$  appartiennent à  $C_m \cap CD$  et tels que la suite

$$\lambda_m = \|Q_m\|_{C_m} \cdot \left\| \frac{1}{Q_m} \right\|_{C_m \cap D}$$

satisfasse la relation (T').

$$\text{Soit} \quad \Delta_m = \underline{C_m} \cap D.$$

$$\text{et soit} \quad D_m = \Delta_m - \mathcal{R}(\mathfrak{F}).$$

Alors  $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est une base canonique de  $\mathfrak{F}$  et pour que l'élément  $\pi$  que nous allons construire soit strictement annulé par  $\mathfrak{F}$ , il suffira d'établir les relations

$$w(\pi, \mu) < +\infty \quad \text{quel que soit} \quad \mu < -\log R_0, \quad (1')$$

$$\|\pi\|_{\Delta_m} < \frac{1}{m}, \quad (2')$$

car (2') montre que  $\pi$  est annulé par  $\mathcal{F}$  et nul sur  $\mathcal{R}(\mathcal{F})$  et grâce à (1') on voit que  $\pi$  est strictement annulé par  $\mathcal{F}$ .

Avant de pouvoir construire effectivement les fractions approchant l'élément  $\pi$  cherché, nous devons établir certaines relations. Pour cela, nous allons d'abord supposer définies une suite d'entiers croissante  $n \rightarrow h(n)$ , ainsi qu'une suite d'entiers croissante  $n \rightarrow l(n)$  telles que

$$h(n) < l(n) < l(n) + 1 = h(n + 1) \quad \text{quel que soit } n.$$

Alors, quel que soit  $m$ , soit

$$R_n = \prod_{m=h(n)}^{l(n)} Q_m.$$

Soit  $a_n \in \Delta_{h(n+2)}$ . Soit  $X_n = x - a_n$ .

Il est clair que

$$|X_n| \leq d_{h(n)} \quad \text{si et seulement si} \quad x \in \underline{\Delta}_{h(n)}.$$

Soit  $R_n(x) = U_n(X_n)$ . Développons  $U_n$ . On a

$$U_n = A_{0,n} + \dots + A_{\tau(n),n} X_n^{\tau(n)}, \quad \text{où}$$

$$\tau(n) = \deg(U_n) = \deg R_n = \sum_{m=h(n)}^{l(n)} q_m.$$

Remarquons la propriété suivante :

Pour tout entier  $\delta$  satisfaisant aux relations

$$0 \leq \delta < \tau(n),$$

$$q_{h(n)} + \dots + q_{j(\delta)-1} + \beta(\delta) = \tau(n) - \delta < q_{h(n)} + \dots + q_{j(\delta)} \quad (\beta(\delta) \geq 0),$$

on a

$$|A_{\delta,n}| \leq (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \times \dots \times (d_{j(\delta)-1})^{q_{j(\delta)-1}} \times (d_{j(\delta)})^{\beta(\delta)}. \quad (3')$$

En effet, ceci tient à ce que le coefficient d'ordre  $\delta$  de  $U_n$  est obtenu comme somme de produits de  $\tau(n) - \delta$  zéros de  $U_n$ , chacun étant naturellement compté autant de fois que son ordre de multiplicité.

Donc  $|A_{\delta,n}|$  est majoré par le produit des  $\tau(n) - \delta$  plus grands zéros de  $U_n$ . Evaluons ce produit. Si  $\xi_m$  est un zéro de  $Q_m$ , alors

$\xi_m - a_n$  est un zéro de  $U_n$  et  $|\xi_m - a_n| = d_m$ . D'où le résultat ci-dessus.

Nous allons utiliser (3') pour établir une relation très importante. Mais nous allons tout d'abord définir la fraction  $F_n$ .

Soit  $\sigma(n)$  un entier satisfaisant à la relation  $0 < \sigma(n) < \tau(n)$  et soit  $t(n)$  tel que

$$q_{h(n)} + \dots + q_{t(n)-1} < \tau(n) - \sigma(n) \leq q_{h(n)} + \dots + q_{t(n)},$$

$$q_{h(n)} + \dots + q_{t(n)-1} + \alpha_n = \tau(n) - \sigma(n).$$

$$\text{Soit } S_n(X_n) = A_{\sigma(n)+1,n} X_n^{\sigma(n)+1} + A_{\sigma(n)+2,n} X_n^{\sigma(n)+2} + \dots + A_{\tau(n),n} X_n^{\tau(n)}.$$

$$\text{Soit } G_n(X_n) = \frac{S_n(X_n)}{U_n(X_n)} \quad \text{et soit } F_n(x) = G_n(X_n).$$

$$\text{Enfin, soit } \pi_n = \prod_{i=1}^n F_i.$$

Pour faire apparaître  $\pi_n$  sous la forme annoncée au lemme I.6.A, il suffit évidemment de poser  $\theta_n(x) = S_n(X_n)$  et  $\phi_n(x) = \prod_{i=1}^n \theta_i(x)$ .

Pour montrer que la suite  $\pi_n$  converge dans  $H(D)$ , il faut disposer d'une bonne majoration de  $|1 - F_n(x)|$  sur le complémentaire par rapport à  $D$  de  $\Delta_{h(n)}$ , où  $|F_n(x)|$  est égal à 1.

Nous allons établir la relation (4') : *quel que soit*  $x \in D - \Delta_{h(n-1)}$ , *on a*

$$|1 - F_n(x)| \leq \left( \frac{d_{h(n)}}{|x - a_n|} \right)^{\sigma(n)} \leq \left( \frac{d_{h(n)}}{d_{h(n-1)}} \right)^{\sigma(n)}. \quad (4')$$

Cette relation va être établie à partir de la proposition suivante :

$$\text{Soient } 0 \leq \delta_1 < \delta_2 < \tau(n).$$

*Alors, quel que soit*  $X_n$  *tel que*  $|X_n| > d_{h(n)}$ , *on a :*

$$\begin{aligned} |X_n|^{\delta_1} \cdot (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \cdot \dots \cdot (d_{j(\delta_1)-1})^{q_{j(\delta_1)-1}} \cdot (d_{j(\delta_1)})^{\beta(\delta_1)} &< \dots \\ &< |X_n|^{\delta_2} \cdot (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \cdot \dots \cdot (d_{j(\delta_2)-1})^{q_{j(\delta_2)-1}} \cdot (d_{j(\delta_2)})^{\beta(\delta_2)}. \end{aligned}$$

En effet, les  $d_m$  en facteur dans chaque membre de l'inégalité, sont par hypothèse, inférieurs à  $|X_n|$ . Alors, la somme des puissances de  $|X_n|$  et des  $d_m$  étant la même dans chaque membre, le plus grand de ces termes est celui qui a la plus forte puissance de  $|X_n|$ .

Donc, en utilisant la proposition qui vient d'être établie et (3') pour tout  $X_n$  tel que  $|X_n| > d_{h(n)}$  et pour tout  $\delta \leq \sigma(n)$ , on a

$$|X_n|^\delta |A_{\delta,n}| < |X_n|^\delta (d_{l(n)})^{q_{h(n)}} \dots (d_{j(\delta)-1})^{q_{j(\delta)-1}} \cdot (d_{j(\delta)})^{\beta(\delta)} \leq \\ \leq |X_n|^{\sigma(n)} \cdot (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \dots (d_{t(n)-1})^{q_{t(n)-1}} \cdot (d_{t(n)})^{\alpha_n}.$$

Ce qui montre que, pour tout  $X_n$  tel que  $|X_n| > d_{h(n)}$ , on a

$$|(U_n - S_n)(X_n)| \leq \sup_{0 < \delta \leq \sigma(n)} (|A_{\delta,n}| \cdot |X_n|^\delta) \leq \\ \leq |X_n|^{\sigma(n)} (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \dots (d_{t(n)-1})^{q_{t(n)-1}} \cdot (d_{t(n)})^{\alpha_n}.$$

Or les  $d_m$  sont inférieurs à  $d_{h(n)}$  pour  $h(n) < m \leq t(n)$ . Donc, finalement, quel que soit  $X_n$  tel que  $|X_n| > d_{h(n)}$  on a

$$|(U_n - S_n)(X_n)| \leq |X_n|^{\sigma(n)} (d_{h(n)})^{\tau(n) - \sigma(n)}.$$

Or, d'autre part, il est évident que quel que soit  $|X_n| > d_{h(n)}$ , on a

$$|U_n(X_n)| = |X_n|^{\tau(n)},$$

car les zéros de  $U_n$  sont en valeur absolue inférieurs à  $d_{h(n)}$ . D'où le résultat suivant :

Quel que soit  $X_n$  tel que  $|X_n| > d_{h(n)}$ , on a

$$|1 - G_n(X_n)| \leq \left( \frac{d_{h(n)}}{|X_n|} \right)^{\tau(n) - \sigma(n)},$$

ce qui est équivalent à la relation (4') lorsque  $x \notin \Delta_{h(n)}$ .

Nous allons établir maintenant une majoration de  $|S_n(X_n)|$  lorsque  $|X_n| \leq d_{h(n)}$ .

Rappelons que d'après (3') on a

$$|X_n|^\delta |A_{\delta,n}| \leq |X_n|^\delta (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \dots (d_{j(\delta)-1})^{q_{j(\delta)-1}} \cdot (d_{j(\delta)})^{\beta(\delta)}.$$

Mais les termes de  $S_n$  vérifient tous  $\delta \geq \sigma(n) + 1$ . Donc

$$|X_n|^\delta |A_{\delta,n}| \leq |X_n|^{\sigma(n)+1} \cdot |X_n|^{\delta - \sigma(n) - 1} \cdot (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \cdot \dots \cdot (d_{j(\delta)-1})^{q_{j(\delta)-1}} \cdot (d_{j(\delta)})^{\beta(\delta)}.$$

Rappelons maintenant que les  $d_m$  considérés vérifient  $d_m < d_{h(n)}$  et que par hypothèse  $|X_n| \leq d_{h(n)}$ . Alors, on a

$$|X_n|^\delta |A_{\delta,n}| \leq |X_n|^{\sigma(n)+1} (d_{h(n)})^{\tau(n) - \sigma(n) - 1},$$

quel que soit  $\delta \geq \sigma(n) + 1$ .

D'où la relation : quel que soit  $X_n$  tel que  $|X_n| \leq d_{h(n)}$ , on a

$$|S_n(X_n)| \leq |X_n|^{\sigma(n)+1} (d_{h(n)})^{\tau(n) - \sigma(n) - 1}.$$

Pour simplifier les notations, nous utiliserons de préférence la relation suivante, vraie à fortiori.

*Quel que soit  $X_n$  tel que  $|X_n| \leq d_{h(n)}$ , on a*

$$|S_n(X_n)| \leq |X_n|^{\sigma(n)} (d_{h(n)})^{\tau(n) - \sigma(n)}. \quad (5')$$

*Nous allons maintenant minorer  $|U_n(X_n)|$  lorsque  $|X_n| \leq d_{h(n)}$ .*

Une remarque s'impose d'abord. Comme nous ne considérons  $F_n(x)$  que pour  $x \in D$ , il est évident que nous n'étudierons  $U_n(X_n)$  que pour  $X_n + a_n \in D$ .

Soit  $A_n$  l'ensemble des  $X_n$  tels que  $X_n + a_n \in D$  et tels que  $|X_n| \leq d_{h(n)}$ .

Soit  $V_n(X_n) = Q_m(x)$ , ( $m = h(n), \dots, l(n)$ ).

$$\text{Alors} \quad U_n(X_n) = \prod_{m=h(n)}^{l(n)} V_m(X_n).$$

De plus, quel que soit  $X_n$  tel que  $d_m \leq |X_n| < d_{m+1}$ , on a

$$|V_j(X_n)| = |X_n|^{q_j} \quad \text{pour tout } j > m,$$

$$|V_j(X_n)| = (d_j)^{q_j} \quad \text{pour tout } j < m,$$

et grâce à la propriété  $\varphi(\mathfrak{F})$ ,

$$|V_m(X_n)| \geq \frac{|X_n|^{q_m}}{\lambda_m} \quad \text{d'après le lemme I.4.}$$

Il résulte de ces trois relations, la relation suivante :

Soit  $m$  tel que  $h(n) \leq m \leq l(n)$ . Alors, quel que soit  $X_n \in A_n$  tel que  $d_m \leq |X_n| < d_{m+1}$ , on a

$$|U_n(X_n)| \geq \frac{|X_n|^{(q_{l(n)} + \dots + q_m)} (d_{h(n)}^{q_{h(n)}} \dots (d_{m-1})^{q_{m-1}})}{\lambda_m} \quad (6')$$

Superposons les relation (5') et (6').

Soit  $X_n \in A_n$  tel que  $d_{m+1} < |X_n| \leq d_m$ . D'après (10') et (11'), on a

$$\begin{aligned} |G_n(X_n)| &= \left| \frac{S_n(X_n)}{T_n(X_n)} \right| \leq \\ &\leq \frac{|X_n|^{\sigma(n)} \cdot (d_{h(n)})^{\tau(n) - \sigma(n)} \cdot \lambda_m}{|X_n|^{q_{l(n)} + \dots + q_m} \cdot (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \dots (d_{m-1})^{q_{m-1}}} \end{aligned}$$

Supposons d'abord  $t(n) > m$ .

Alors  $\sigma(n) < q_{l(n)} + \dots + q_m$ . Donc

$$\frac{|X_n|^{\sigma(n)}}{|X_n|^{q_{l(n)} + \dots + q_m}} = \frac{1}{|X_n|^{(q_{t(n)} - \alpha_n) + (q_{t(n)+1} + \dots + q_m)}}.$$

Multiplions numérateur et dénominateur de  $|G_n(X_n)|$  par  $|X_n|^{\tau(n) - \sigma(n)}$ . Majorons au numérateur  $|X_n|$  par  $d_m$  et minorons au numérateur  $|X_n|$  par  $R_0$ . Il vient :

$$|G_n(X_n)| \leq \left[ \prod_{j=h(n)}^{m-1} \left( \frac{d_m}{d_j} \right)^{q_j} \right] \cdot \lambda_m \cdot \left( \frac{d_{h(n)}}{R_0} \right)^{\tau(n) - \sigma(n)} \quad (7')$$

Supposons maintenant  $t(n) \leq m$ .

$$\frac{|X_n|^{\sigma(n)}}{|X_n|^{q_{l(n)} + \dots + q_m}} = |X_n|^{(q_m + \dots + q_{t(n)-1} + \alpha_n)}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur de  $|G_n(X_n)|$  par  $|X_n|^{\tau(n) - \sigma(n)}$ . Nous retrouvons la relation (7') après avoir, de même, majoré  $|X_n|$  au dénominateur par  $d_m$  et minoré au numérateur par  $R_0$ .

La relation (7') est donc vraie quel que soit  $m$  tel que  $h(n) \leq m \leq l(n)$  et quel que soit  $X_n$  tel que

$$d_{m+1} < |X_n| \leq d_m.$$

Cette relation (7') se traduit encore de la façon suivante :

Soit  $m$  tel que  $h(n) \leq m \leq l(n)$ .

Soit  $x \in D_m - D_{m+1}$ . Alors on a (7'')

$$|F_n(x)| \leq \left[ \prod_{j=h(n)}^{m-1} \left( \frac{d_m}{d_j} \right)^{q_j} \right] \lambda_m \left( \frac{d_{h(n)}}{R_0} \right)^{\tau(n) - \sigma(n)} \quad (7'')$$

Etudions maintenant le comportement de  $|G_n(X_n)|$  lorsque  $X_n \in A_{n+1}$ . On voit que  $|X_n| < d_{l(n)}$ .

$$|V_m(X_n)| = (d_m)^{q_m} \quad \text{quel que soit } m \text{ tel que } h(n) \leq m \leq l(n).$$

$$\text{D'où} \quad U_n(X_n) = \prod_{m=h(n)}^{l(n)} (d_m)^{q_m}.$$

D'où, quel que soit  $X_n \in A_{n+1}$ , on a

$$\begin{aligned} |G_n(X_n)| &< \frac{(d_{l(n)}^{\sigma(n)}) (d_{h(n)}^{\tau(n) - \sigma(n)})}{\prod_{m=h(n)}^{l(n)} (d_m)^{q_m}} < \\ &< \prod_{m=h(n)}^{l(n)} \left( \frac{d_{l(n)}}{d_m} \right)^{q_m} \left( \frac{d_{h(n)}}{R_0} \right)^{\tau(n) - \sigma(n)}. \end{aligned} \quad (8')$$

Cette relation se traduit par la relation (8'') :

Quel que soit  $x \in \Delta_{h(n+1)}$  on a

$$|F_n(x)| < \prod_{m=h(n)}^{l(n)} \left( \frac{d_{l(n)}}{d_m} \right)^{q_m} \left( \frac{d_{h(n)}}{R_0} \right)^{\tau(n) - \sigma(n)}. \quad (8'')$$

Nous sommes maintenant en mesure de construire la suite  $F_n$ , ce qui revient à définir les suites  $h(n)$ ,  $l(n)$ ,  $\sigma(n)$ .

Pour des raisons de commodité, nous utiliserons  $\psi(n) = \tau(n) - \sigma(n)$ .

Supposons construits jusqu'au rang  $n_0$  les entiers  $\psi(n)$  et  $l(n-1)$ , tels qu'ils vérifient :

$$\left( \frac{d_{h(n-1)+1}}{d_{h(n-1)}} \right)^{\psi(n)} < \frac{1}{n}, \quad (9')$$

$$\left( \frac{d_{h(n)}}{R_0} \right)^{\psi(n)} < 2, \quad (10')$$

(11') quel que soit  $m \geq h(n)$ , on a

$$\lambda_m \left( \prod_{j=h(n-1)}^m \left( \frac{d_m}{d_j} \right)^{q_j} \right) < \frac{1}{4n}.$$

Nous connaissons donc  $l(n_0 - 1)$ ,  $h(n_0) = l(n_0 - 1) + 1$  et  $\psi(n_0)$ .

Montrons qu'alors, on peut choisir  $\psi(n_0 + 1)$  et  $l(n_0)$ . En effet, soit  $\psi(n_0 + 1)$  assez grand pour que :

$$\left( \frac{d_{h(n_0)+1}}{d_{h(n_0)}} \right)^{\psi(n_0+1)} < \frac{1}{n_0 + 1}.$$

Alors, il existe un rang  $N$  tel que, pour  $m > N$ , on ait :

$$\left( \frac{d_m}{R_0} \right)^{\psi(n_0+1)} < 2 \quad \text{car} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} d_m = R_0.$$

Enfin, par hypothèse

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m \left( \prod_{j=h(n_0)}^m \left( \frac{d_m}{d_j} \right)^{q_j} \right) = 0.$$

Donc il existe un rang  $M$  tel que pour  $m \geq M$ , on ait :

$$\lambda_m \left( \prod_{j=h(n_0)}^m \left( \frac{d_m}{d_j} \right)^{q_j} \right) < \frac{1}{8(n_0 + 1)}.$$

Donc les relations (9'), (10'), (11') sont vérifiées au rang  $n_0 + 1$ .

Comme la construction aux rangs 1 et 2 est triviale, la suite est construite quel que soit  $n$ .

Nous allons en déduire que la suite  $F_n$  associée possède les propriétés cherchées.

Montrons d'abord que

$$\|\pi_n\| \leq \sup(\|\pi_{n-1}\|, \|\pi_{n-2}\|). \quad (12')$$

Supposons d'abord  $x \in D - \Delta_{h(n)}$ .

On a  $\pi_n(x) = \pi_{n-1}(x) F_n(x)$ , et

$$|F_n(x)| = 1 \quad \text{quel que soit} \quad x \in D - \Delta_{h(n)}.$$

Donc  $|\pi_n(x)| = |\pi_{n-1}(x)|$  quel que soit  $x \in D - \Delta_{h(n)}$ .



Donc la relation (12') est triviale pour  $x \in D - \Delta_{h(n)}$  et elle est la conséquence de la relation

$$|\pi(x)| = |\pi_n(x)| \quad \text{quel que soit } x \in D - \Delta_{h(n)}. \quad (13')$$

*Supposons maintenant*  $x \in \Delta_{h(n+1)}$  et soit  $m$  tel que  $x \in D_m$ ,  $x \notin D_{m+1}$ .

$$|F_{n-1}(x)| \dots |F_n(x)| \leq \left( \prod_{m=h(n-1)}^{l(n)} \left( \frac{d_{l(n)}}{d_m} \right)^{q_m} \right) \lambda_m \cdot \left( \frac{d_{h(n-1)}}{R_0} \right)^{\psi(n-1)} \left( \frac{d_{h(n)}}{R_0} \right)^{\psi(n)},$$

d'après (8'').

Mais le membre de droite est majoré par  $\frac{1}{n}$  d'après (10') et (11').

D'où

$$|\pi_n(x)| \leq \frac{\|\pi_{n-2}\|}{n} \quad \text{quel que soit } x \in \Delta_{h(n+1)}. \quad (14')$$

*Supposons enfin*  $x \in \Delta_{h(n)} - \Delta_{h(n+1)}$ .

Soit  $m$  tel que  $x \in D_m$ ,  $x \notin D_{m+1}$ ; alors

$$|F_{n-1}(x) F_n(x)| < \left( \prod_{j=h(n)}^m \left( \frac{d_m}{d_j} \right)^{q_j} \right) \cdot \lambda_m \cdot \left( \frac{d_{h(n-1)}}{R_0} \right)^{\psi(n-1)} \left( \frac{d_{h(n)}}{R_0} \right)^{\psi(n)},$$

d'après (7'').

Le membre de droite est majoré par  $\frac{1}{n-1}$  d'après (10') et (11')

$$|\pi_n(x)| \leq \frac{\|\pi_{n-2}\|}{n} \quad \text{quel que soit } x \in \Delta_{h(n)} - \Delta_{h(n+1)}. \quad (14'')$$

Donc en résumant les deux derniers cas, on voit que la relation (14') est vérifiée pour tout  $x \in \Delta_{h(n)}$ , et la relation (12') est évidemment une conséquence de (14').

Nous allons d'abord appliquer ce résultat à l'étude de

$$|\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x)| \quad \text{pour} \quad x \in \Delta_{h(n)}.$$

On a

$$|\pi_n(x)| \cdot |F_{n+1}(x) - 1| \leq \|\pi_n\| \cdot |F_{n+1}(x) - 1|.$$

Or

$$\|\pi_n\| \leq \sup(\|\pi_{n-1}\|, \|\pi_{n-2}\|) \leq \dots \leq \sup(\|\pi_1\|, \|\pi_2\|) = M.$$

D'où

$$|\pi_n(x)| \leq M \cdot |F_{n+1}(x) - 1|.$$

Or, d'après (4') et (9') quel que soit  $x \in D - \Delta_{h(n)}$  on a

$$|1 - F_{n+1}(x)| < \left( \frac{d_{h(n+1)}}{d_{n(n)}} \right)^{\psi(n+1)} < \frac{1}{n+1}.$$

D'où

$$|\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x)| < \frac{M}{n+1}, \quad \text{quel que soit} \quad x \in D - \Delta_{h(n)}. \quad (15')$$

Etudions maintenant  $|\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x)|$  pour  $x \in \Delta_{h(n)}$ .

Grâce à (14') nous voyons que, quel que soit  $x \in \Delta_{h(n)}$ , on a

$$|\pi_n(x)| < \frac{M}{n-1}.$$

Evaluons  $|\pi_{n+1}(x)|$ . Toujours grâce à (14') nous avons, quel que soit  $x \in \Delta_{h(n+1)}$ ,

$$|\pi_{n+1}(x)| < \frac{M}{n}.$$

Il reste donc à étudier  $|\pi_{n+1}(x)|$  pour  $x \in \Delta_{h(n)} - \Delta_{h(n+1)}$ .

On a

$$|\pi_{n+1}(x)| = |\pi_n(x)| \cdot |F_{n+1}(x)|.$$

Or

$$|F_{n+1}(x)| = 1 \quad \text{pour} \quad x \in \Delta_{h(n)} - \Delta_{h(n+1)}.$$

Donc

$$|\pi_{n+1}(x)| = |\pi_n(x)| < \frac{M}{n-1}.$$

D'où

$$\|\pi_{n+1} - \pi_n\| < \frac{M}{n-1}.$$

Ceci montre la convergence de la suite  $\pi_n$  vers un élément  $\pi$  qui vérifie notamment  $\|\pi\|_{\Delta_{h(n)}} < \frac{1}{n-1}$  donc la condition (2') est réalisée.

Il est évident d'autre part que  $w_{\mathfrak{F}}(f, \mu) < +\infty$ . En effet, quel que soit  $\mu$  fixé, inférieur à  $-\log R_0$ , soit  $m_0$  tel que  $-\log d_{m_0} > \mu$ . Soit  $n_0$  tel que  $h(n_0) > m_0$ .

Alors on a, quel que soit  $n > n_0$ , et quel que soit  $x$  tel que  $x \notin D_{m_0}$ ,  $|F_n(x)| = 1$ . Donc, quel que soit  $\mu < -\log d_{m_0}$ ,  $w_{\mathfrak{F}}(F_n, \mu) = 0$ . Donc

$$w_{\mathfrak{F}}(\pi, \mu) = w_{\mathfrak{F}}(\pi_n, \mu) = w_{\mathfrak{F}}(\pi_{n_0}, \mu).$$

Or  $\pi_n \in K(D)$ , donc  $w_{\mathfrak{F}}(\pi_n, \mu) < +\infty$ .

Donc  $w_{\mathfrak{F}}(\pi, \mu) < +\infty$ , quel que soit  $\mu < -\log R_0$ , et la condition (1') est bien réalisée, ce qui montre que  $\pi$  est strictement annulé par  $\mathfrak{F}$ .

*Donc  $\mathfrak{F}$  est un filtre percé strictement annulateur.*

Le lemme I.6.A. est établi ainsi que le théorème I.6.

## 6. Filtres percés simples. Exemples et contre-exemples.

Nous allons présenter ici quelques exemples de filtres percés et déterminer s'ils sont, ou non des T-filtres. Pour cela, nous allons considérer une catégorie de filtres percés dont l'étude est facilitée par la rareté relative des trous qui le composent, et que nous allons maintenant définir.

**DEFINITION.** — Soit  $D$  un infraconnexe,  $\mathfrak{F}$  un filtre percé décroissant de  $D$  et  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base canonique de  $\mathfrak{F}$ . Alors le filtre percé  $\mathfrak{F}$  est dit simple si et seulement si la suite  $(D_n)$  vérifie à partir d'un certain rang  $N$  la propriété suivante

*l'ensemble  $(D_n \cup D_{\underline{n+1}})$  admet au plus un trou.*

De même, un filtre percé croissant est dit simple s'il est l'inverse d'un filtre percé décroissant simple.

*Remarque.* — Si un filtre percé simple admet pour centre l'origine, alors l'ensemble des trous internes de  $D_N$  est une suite monotone décrivant  $\mathfrak{F}$  et cette suite suffit à caractériser les propriétés du filtre  $\mathfrak{F}$ .

Nous noterons par  $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une telle suite, et nous noterons  $\rho_m$  le diamètre de  $T_m$ , ainsi que

$$d_m = d(T_{m+1}, T_m) \quad \text{si } \mathfrak{F} \text{ est décroissant,}$$

$$d_m = d(T_{m-1}, T_m) \quad \text{si } \mathfrak{F} \text{ est croissant.}$$

On voit que  $\mathfrak{F}$  n'est décrit que par une seule suite de cercles concentriques percés  $c_m$  n'ayant chacun qu'un seul trou  $T_m$  dans une de leurs classes  $\Gamma_m$ .

Alors  $\mathfrak{F}$  est un T-filtre si et seulement s'il existe une suite d'entiers  $q_m \geq 0$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\log \gamma_D(\Gamma_m, q_m) + \sum_{j=1}^{m-1} q_j |\log d_m - \log d_j|] = +\infty.$$

$$\text{Or} \quad \gamma_D(\Gamma_m, q_m) = \left( \frac{d_m}{\rho_m} \right)^{q_m}.$$

Donc  $\mathfrak{F}$  est un T-filtre si et seulement si il existe une suite d'entiers  $q_m \geq 0$  tels que

$$(T_0) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [q_m (\log \rho_m - \log d_m) + \sum_{j=1}^{m-1} q_j |\log d_m - \log d_j|] = +\infty$$

Nous allons citer quelques exemples intéressants, dont certains ont déjà été obtenus par E. Motzkin et P. Robba sous l'hypothèse que le corps de reste de  $K$  est de caractéristique non nulle, que nous éviterons ici.

Soit  $R$  le diamètre de  $\mathfrak{F}$ , c'est-à-dire la limite de la suite  $d_m$ .

1) Si la relation  $d_m = \rho_m$  est vérifiée pour une infinité d'indices, alors  $\mathfrak{F}$  est un T-filtre [10].

2) Si la série de terme général  $|\log R - \log d_m|$  est convergente et si la relation  $\rho_m = d_m$  n'est vérifiée que pour un nombre fini d'indices, alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathfrak{F}$  soit un T-filtre est que la série de terme général  $\frac{|\log R - \log d_m|}{\log d_m - \log \rho_m}$  soit divergente [10].

En particulier, on voit que si  $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\rho_m}{R} < 1$  alors  $\mathcal{F}$  n'est pas un T-filtre.

3) Si la série de terme général  $|\log R - \log d_m|$  est divergente et si  $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m > 0$  alors  $\mathcal{F}$  est un T-filtre.

4) Un exemple plus intéressant encore que l'exemple 3) montre que la condition  $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m > 0$  n'est pas nécessaire pour que  $\mathcal{F}$  soit un T-filtre.

En effet, il est clair que si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\log \rho_m - \log d_m + \sum_{j=1}^{m-1} |\log d_m - \log d_j|] = +\infty,$$

alors  $\mathcal{F}$  vérifie la condition  $(T_0)$  avec  $q_m = 1$  pour tout  $m$ .

Or cette condition peut être réalisée avec une suite  $\rho_m$  telle que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m = 0$ , à condition bien sûr que,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sum_{j=1}^{m-1} |\log d_m - \log d_j| \right] = +\infty$$

Il est à remarquer que cette dernière relation est vraie si et seulement si la série de terme général  $|\log R - \log d_j|$  diverge [11].

## II. APPLICATIONS AUX PROBLEMES D'ANALYCITE

### 1. Caractérisation des ensembles analytiques.

Rappelons le problème posé par E. Motzkin et P. Robba [11]. Une partie  $D$  de  $K$  est dite *analytique* si pour tout  $a \in D$ , pour tout  $r > 0$  et pour tout  $f \in H(D)$  tel que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in D$  satisfaisant  $|x - a| \leq r$ , on a  $f = 0$ . Nous allons caractériser les ensembles analytiques au moyen des T-filtres.

DEFINITIONS. — Soit  $D$  un infraconnexe et soit  $\mathcal{F}$  un T-filtre. Soit  $f \in H(D)$ . Nous dirons que  $f$  est auto-annulé par  $\mathcal{F}$  si  $f$  est strictement annulé par  $\mathcal{F}$  et si  $v(f(x)) = +\infty$  quel que soit  $x \in \mathcal{R}(\mathcal{F})$ .

II.1. LEMME. — Soit  $D$  un infraconnexe de diamètre  $R$ . Soit  $a \in D$ , soit  $r \leq R$  et soit  $d$  l'ensemble des  $x \in D$  tels que  $|x - a| \leq r$ .  
 $\quad \quad \quad > 0$

Soit  $f \in H(D)$  tel que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in d$ . Alors il existe un T-filtre  $\mathcal{F}$  tel que  $d \subset \mathcal{R}(\mathcal{F})$  et tel que  $f$  soit auto-annulé par  $\mathcal{F}$ .

Preuve. — Si  $f$  est auto-annulé par un T-filtre décroissant de centre  $a$ , de diamètre  $\geq r$ , le lemme est établi. Sinon, on a  $v_a(f, \mu) = +\infty$  pour tout  $\mu \geq -\log R$ . Soit  $b \in D$  tel que  $f(b) \neq 0$ ; on a donc  $|a - b| > r$  et  $v_b(f, -\log |a - b|) = v_a(f, -\log |a - b|) = +\infty$ . Or  $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} v_b(f, \mu) = v(f(b))$ , ce qui prouve l'existence d'un nombre  $\nu \geq -\log |a - b|$  tel que  $v(f_b, \mu) < +\infty$  pour

$$\mu > \nu \quad \text{et} \quad \lim_{\mu \rightarrow \nu} v_b(f, \mu) = +\infty.$$

Donc il existe un T-filtre croissant  $\mathcal{F}$  de centre  $b$ , de diamètre  $p^{-\nu}$ , tel que  $f$  soit auto-annulé par  $\mathcal{F}$  et l'on a bien  $d \subset \mathcal{R}(\mathcal{F})$ .

II.2. THEOREME. — Une partie  $D$  de  $K$  est analytique si et seulement si  $D$  est infraconnexe sans T-filtre à plage non vide.

Preuve. — Il est immédiat de se ramener au cas d'une partie bornée grâce à une inversion, centrée en un trou de  $D$ . (Si  $D$  n'admet pas de trou,  $\bar{D} = K$  et  $H(D) = K(D)$ ). D'autre part il est immédiat de se ramener au cas d'un fermé borné grâce au corollaire II.2. de [2]. Alors on sait que si  $D$  est analytique,  $D$  est infraconnexe d'après le théorème I.8. de [2] car si  $H(D)$  admet des idempotents  $\neq 0$  et  $1$ ,  $D$  n'est pas analytique. Enfin, l'infraconnexe  $D$  ne doit pas admettre de T-filtre  $\mathcal{F}$  à plage non vide car il existerait  $f \in H(D)$  tel que  $f(x) = 0$  pour

tout  $x \in \mathcal{R}(\mathcal{F})$  et en particulier, si  $a \in \mathcal{R}(\mathcal{F})$  et si  $r = d(a, \mathcal{C}\mathcal{R}(\mathcal{F}))$ ,  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in D$  tel que  $|x - a| \leq r$ .

Réciproquement si  $D$  est infraconnexe, un élément  $f \in H(D)$  tel que  $f(x) = 0$  pour  $|x - a| \leq r$ , ( $a \in D$  et  $r > 0$ ) est auto-annulé par un T-filtre dont la plage contient  $a$ , d'après le lemme II.1. et ceci ne peut donc pas se produire si  $D$  est sans T-filtre à plage non vide.

## 2. Transformation de Fourier associée à $\mathbb{Z}_p$ .

Rappelons brièvement le problème de la non-injectivité de la transformation de Fourier  $p$ -adique relative à  $\mathbb{Z}_p$ . M. Guerraoui et B. de Mathan ont montré dans [7] que si la transformation de Fourier  $p$ -adique associée à  $\mathbb{Z}_p$  n'est pas injective, un groupe abélien compact totalement discontinu est Fourier-injectif si et seulement s'il s'identifie à son dual  $p$ -adique. Il s'agit donc d'établir qu'en effet cette transformation de Fourier associée à  $\mathbb{Z}_p$  n'est pas injective.

Pour cela nous allons d'abord rappeler la définition de cette transformation de Fourier.

Soit  $p$  un nombre premier, soit  $\mathbb{Q}_p$  le complété de  $\mathbb{Q}$  pour la valeur absolue  $p$ -adique  $|\cdot|_p$ ; soit  $K$  le complété d'une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$  munie de l'unique valeur absolue prolongeant celle de  $\mathbb{Q}_p$ , soit  $v_p$  sa valuation ( $v_p(x) = -\log_p |x|_p$ ) et soit  $\mathfrak{M}$  l'idéal de valuation de  $K$ . Pour tout entier  $s \geq 0$ , soit  $\Gamma_s$  le groupe des racines  $p^s$ -ième de l'unité et soit  $\Gamma = \bigcup_{s=0}^{\infty} \Gamma_s$ . On sait que le groupe  $\Gamma$  s'identifie au groupe des homomorphismes continus de  $\mathbb{Z}_p$  dans  $(K^*, \cdot)$  par l'isomorphisme  $\Phi$  qui associe à  $\gamma \in \Gamma$  l'application  $\Phi(\gamma)$  telle que  $\Phi(\gamma)(x) = \gamma^x (x \in \mathbb{Z}_p)$ .

Soit  $L^1(\Gamma)$  l'algèbre de Banach  $p$ -adique des applications de  $\Gamma$  dans  $K$  qui tendent vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de  $\Gamma$ , dont la norme est définie par  $\|f\| = \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|_p$  et dont la multiplication est la convolution  $f * g$  définie par

$$f * g(\gamma) = \sum_{\delta \in \Gamma} f(\delta) g(\gamma \delta^{-1}).$$

Enfin, soit  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$  l'algèbre des applications continues de  $\mathbb{Z}_p$  dans  $K$  munie de la norme de la convergence uniforme sur  $\mathbb{Z}_p$ .

On appelle transformation de Fourier  $p$ -adique relative à  $\mathbb{Z}_p$  l'homomorphisme  $\mathfrak{F}$  de  $L^1(\Gamma)$  dans  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$  défini par

$$\mathfrak{F}(f)(n) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \gamma^n$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}_p$ .

### 3. Aspect analytique du problème.

En 1971, B. de Mathan a fait la conjecture :  $\mathfrak{F}$  n'est pas injective. Cette conjecture a trouvé en 1973 deux solutions simultanées. L'une obtenue par J. Fresnel et B. de Mathan [4] utilise une amélioration des résultats de [9]. L'autre que nous allons étudier ramène la conjecture à un problème d'analyticité grâce à la proposition II.1 due à Yvette Amice.

**II.3. PROPOSITION.** — Soit  $r < p^{\frac{1}{p(p-1)}}$  et soit  $D$  l'ensemble des  $x \in K$  tels que  $|x - \gamma| \geq r$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Le filtre croissant  $\mathfrak{G}$  qui admet pour base la suite des parties

$$\Delta_m = \left\{ x \in D \mid 0 < v_p(x - 1) \leq \frac{1}{p^m(p-1)} \right\}$$

est percé. Alors  $\mathfrak{F}$  n'est pas injective si et seulement s'il existe un élément de  $H(D_r)$  auto-annulé par  $\mathfrak{G}$  et de la forme  $g(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{a_\gamma}{1 - \gamma x}$ .

*Preuve.* — Soit  $f \in L_1(\Gamma)$ . Pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ , il est clair que la famille  $f(\gamma) \gamma^n x^n$  est une famille sommable et la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $\mathfrak{M}$  par  $\tilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \gamma^n x^n$  satisfait

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (\gamma x)^n = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{f(\gamma)}{1 - \gamma x}$$

de sorte que  $\tilde{f}$  est en fait la restriction d'une fonction  $\bar{f}$  définie sur  $K - \Gamma$  par (1)  $\bar{f}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{f(\gamma)}{1 - \gamma x}$ ; alors on a  $\bar{f} \in H(D)$ . De plus, on sait que si  $\gamma$  et  $\gamma' \in \Gamma$  on a  $|\gamma - \gamma'| \geq p^{\frac{1}{p(p-1)}}$  de sorte que comme  $r < p^{\frac{1}{p(p-1)}}$  chaque trou de  $D$  contient un seul élément de  $\Gamma$ ; par suite le développement Mittag-Lefflerien de  $\bar{f}$  se présente sous la forme (1).

On sait que pour tout entier  $m > 0$ ,  $\Gamma_m - \Gamma_{m-1}$  se compose de  $p^{m-1} \cdot (p-1)$  points répartis sur le cercle  $C_m$  de centre 1, de rayon  $p^{\frac{1}{p^m(p-1)}}$  et il en résulte donc que le filtre croissant  $\mathfrak{G}$  est percé.



Maintenant, il est clair que  $f \in \text{Ker } \mathfrak{F}$  si et seulement si  
 (2)  $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \gamma^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  (car  $\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{Z}_p$ ) ;

mais trivialement, (1) est équivalent à (3)  $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \gamma^n x^n = 0$  pour

tout  $x \in \mathfrak{M}$ . Or (2) est aussi équivalent à (4)  $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \left( \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \gamma^n \right) x^n = 0$

pour tout  $x \in \mathfrak{M}$  car (3) implique (4) et comme toute série de Taylor nulle sur un disque a tous ses coefficients nuls, on voit que (4) implique (3). Donc finalement  $f \in \text{Ker } \mathfrak{F}$  si et seulement si  $\bar{f}(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ . Or le développement Mittag-Lefflerien de  $\bar{f}$  montre que  $f = 0$  si et seulement si  $\bar{f} = 0$ . On voit donc que  $\mathfrak{F}$  n'est pas injective si et seulement s'il existe un élément  $\bar{f} \in H(D)$ , de la forme (1), dont la restriction à  $\mathfrak{M}$  est nulle ; il résulte du lemme II.1 que  $\mathfrak{M}$  est inclus dans une plage de T-filtre et comme  $\mathfrak{G}$  est le seul filtre percé de  $D$ , cela implique que  $\mathfrak{G}$  soit un T-filtre. Réciproquement, si  $\mathfrak{G}$  est un T-filtre et s'il existe un élément  $g \in H(D)$ , auto-annulé par  $\mathfrak{G}$  et de la forme  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{a_\gamma}{1 - \gamma x}$  où la famille  $a_\gamma$  tend vers zéro suivant le filtre complémentaire des parties finies de  $\Gamma$ , alors la fonction  $f : \gamma \rightarrow a_\gamma$  appartient à  $\text{Ker } \mathfrak{F}$  et la proposition II.3 est établie.

#### 4. Solution du problème.

Nous allons maintenant résoudre le problème posé sous cette nouvelle forme.

**II.4. PROPOSITION.** — *Le filtre percé  $\mathfrak{G}$  est un T-filtre et il existe un élément  $g \in H(D)$ , auto-annulé par  $\mathfrak{G}$ , de la forme*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{a_\gamma}{1 - \gamma x}. \quad (1)$$

**II.5. COROLLAIRE.** —  *$\mathfrak{F}$  n'est pas injective.*

*Preuve de la proposition II.4.* — Supposons construite une suite de polynômes  $Q_m$  possédant la propriété  $\varphi(\mathfrak{G})$  et telle que pour tout  $m$ ,

$Q_m$  n'admette que des zéros simples appartenant tous à  $\Gamma$  et soit  $g$  un élément de  $H(D)$  auto-annulé par  $\mathfrak{G}$  et de la forme indiquée par le lemme I.6B. Alors comme les zéros de  $Q_m$  sont simples, il est clair que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $(1 - \gamma x)g \in H(D \cup T_\gamma)$  où  $T_\gamma$  est le trou de  $D$  qui contient  $\gamma^{-1}$ . Donc la partie singulière du développement Mittag-Lefflerien de  $g$  relative au trou  $T_\gamma$  est de la forme  $\frac{a_\gamma}{1 - \gamma x}$  ce qui prouve que  $g$  est bien de la forme (1). Il reste donc à construire une suite de polynômes  $Q_m$  possédant la propriété  $\varphi(\mathfrak{G})$  telle que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $Q_m$  n'admette que des zéros simples, appartenant tous à  $\Gamma$ .

Pour tout entier  $s$ ,  $\Gamma_s$  est de la forme  $\Gamma_{s-1} + \sum_{i=1}^{p-1} u_{s,i} \Gamma_{s-1}$  où  $(u_{s,i})$ ,  $(1 \leq i \leq p-1)$ , désigne  $p-1$  racines  $p^s$ -ième de 1 telles que  $|u_{s,i} - u_{s,j}|_p = p^{\left(\frac{1}{p^{s-1}(p-1)}\right)}$ . On notera  $\Gamma_{s,0} = \Gamma_{s-1}$  et  $\Gamma_{s,i} = u_{s,i} \Gamma_{s-1}$   $(1 \leq i \leq p-1)$  et on a donc  $-\log d(\Gamma_{s,i}, \Gamma_{s,j}) = \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}$ .

On appellera  $\Gamma$ -cercle l'intersection avec  $\Gamma$  d'un cercle  $C$  centré en un point de  $\Gamma$ , dont le rayon est de la forme  $r_s = p^{\frac{1}{p^{s-1}(p-1)}}$ . (Alors on sait qu'un  $\Gamma$ -cercle de rayon  $r_s$  possède  $p^{s-1}(p-1)$  points). En particulier, pour tout  $s \in \mathbb{N}$ , on notera  $\Sigma_s$  le  $\Gamma$ -cercle de centre 1, de rayon  $r_s$ ; alors il est clair que  $\Gamma_s \cap C \Gamma_{s-1} = \Sigma_s$ . D'autre part, on notera  $C_s$  le cercle de centre 1, de rayon  $r_s$ .

Pour tout entier  $n$  fixé nous allons construire maintenant une partie  $E_n$  de  $\Gamma$  aussi grande que possible telle que pour tous  $x, y \in E_n$   $x \neq y$

on ait (5)  $v_p(x - y) \geq \frac{1}{p^{n-1}(p-1)}$ . Soit  $s \geq n$  et supposons déjà construite une partie  $E_{n,s}$  de  $\Gamma_s$  satisfaisant la relation (5) pour tous  $x, y \in E_{n,s}$  et telle que tout  $\Gamma$ -cercle  $\Sigma$  inclus dans  $\Gamma_s$  et de rayon  $r_t \geq r_n$  satisfasse (6)  $\text{Card}(\Sigma \cap E_{n,s}) = p^{t-1}(p-1)$ . Nous allons construire une partie  $E_{n,s+1}$  de  $\Gamma_{s+1}$  contenant  $E_{n,s}$ , et satisfaisant toujours (5) et (6) au rang  $s+1$ . Pour cela considérons les parties  $\Gamma_{s+1,i} = u_{s+1,i} \Gamma_s$  et soit  $E_{n,s+1} = E_{n,s} \cup \left( \bigcup_{i=1}^{p-1} u_{s+1,i} E_{n,s} \right)$ . Il est clair que  $E_{n,s+1}$  satisfait encore les relations (5) et (6), et on peut

ainsi construire  $E_n$  par récurrence en posant  $E_n = \bigcup_{s=n}^{\infty} E_{n,s}$ . Nous allons maintenant construire la suite  $Q_m$  de la façon suivante. Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , soit  $v_m$  la partie entière de  $\log_p m$  et soit  $\Delta_m$  une classe du cercle  $C_m$ . Alors soit  $Q_m(X) = \prod_{\alpha \in F_{v_m} \cap \Delta_m} (X - \alpha)$ ; on a  $\deg Q_m = p^{m-1-v_m}$  et  $Q_m$  admet exactement  $p^{j-1-v_m}(p-1)$  pôles sur chaque  $\Gamma$ -cercle inclus dans  $\Delta_m$  et de rayon  $r_j$  ( $v_m + 1 \leq j \leq m$ ).

Nous allons établir que la suite  $Q_m$  possède la propriété  $\varphi(\mathfrak{G})$ , ce qui établira le théorème d'après ce que nous avons vu précédemment.

Pour cela nous allons majorer les nombres

$$\lambda_m = \|Q_m\|_{C_m} \cdot \left\| \frac{1}{Q_m} \right\|_{\Delta_m \cap D}.$$

Soit  $T$  un trou de  $D$  inclus dans  $\Delta_m$  et soit  $\alpha \in T$ . Alors il est clair que pour  $|x - \alpha|_p = r$ , on a

$$\begin{aligned} \log(\lambda_m) &= -v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1}(p-1)}\right) + v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p-1}\right) = \\ &= -v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1}(p-1)}\right) + v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1-v_m}(p-1)}\right) \cdot \\ &\quad -v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1-v_m}(p-1)}\right) + v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p-1}\right). \end{aligned}$$

Or, par construction, le polynôme  $Q_m$  admet au plus un zéro dans chaque disque centré en un trou de  $D$  et de diamètre  $r_{m-v_m}$  de sorte qu'on a :

$$\begin{aligned} &-v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1}(p-1)}\right) + v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1-v_m}(p-1)}\right) \leq \\ &\leq \sum_{j=v_m}^m \frac{p^{j-1-v_m}}{p^{j-1}(p-1)} \leq \frac{m}{p^{v_m}} < \frac{p^{v_m+1}}{p^{v_m}} = p \end{aligned}$$

$$\text{et } -v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1}(p-1)}\right) + v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p-1}\right) \leq \frac{1}{p-1}$$

d'où 
$$\log \lambda_m \leq p + \frac{1}{p-1}.$$

Alors comme les zéros d'un polynôme  $Q_m$  appartiennent tous à  $\Delta_m$ , on a, en posant  $q_m = p^{m-1-v_m}$ ,  $\| \prod_{j=1}^m Q_j \|_{C_m \cap D} = \lambda_m \prod_{j=1}^{m-1} \left( \frac{r_m}{r_j} \right)^{q_j}$  et l'on est donc ramené à étudier la suite  $\prod_{j=1}^{m-1} \left( \frac{r_m}{r_j} \right)^{q_j}$ . Soit

$$A_m = \log \left( \prod_{j=1}^{m-1} \left( \frac{d_m}{d_j} \right)^{q_j} \right).$$

On a 
$$A_m = \sum_{j=1}^{m-1} (\log d_j - \log d_m) q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} p^{j-1-v_j} \left[ \frac{1}{p^{j-1}(p-1)} - \frac{1}{p^{m-1}(p-1)} \right]$$

et comme  $p^{v_j} > j$  on voit que  $A_m > \left( \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{m-1} p^{j-m-v_j} \right) \left( \frac{1}{p-1} \right)$ . Or  $\sum_{j=1}^{m-1} p^{j-m-v_j}$  est borné de façon évidente, ce qui prouve que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = +\infty,$$

donc la suite  $Q_m$  possède la propriété  $\varphi(\mathfrak{G})$  et la proposition II.4 est démontrée.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. AMICE et A. ESCASSUT, Sur la non injectivité de la transformation de Fourier  $p$ -adique relative à  $\mathbb{Z}p$ , C.R.A.S., A, 278 (mars 1974), 583-585.
- [2] A. ESCASSUT, Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, *Indagationes Mathematicae*, (North. Holland Publishing Company. Amsterdam, London) Vol. 36, n° 4, (1974), 339-351.

- [3] A. ESCASSUT, Eléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe, *Annali di matematica pura ed applicata*, Bologna. (A paraître).
- [4] J. FRESNEL et B. DE MATHAN, Sur la transformation de Fourier  $p$ -adique, *C.R.A.S.*, Paris, A, 277 (15 oct. 1973), 711-714.
- [5] G. GARANDEL, Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, *Indagationes Mathematicae*, Amsterdam, London. (A paraître en 1975).
- [6] L. GRUSON, Algèbres de Banach ultramétriques, Journées Poitou-Aquitaine, 1967 (polycopié).
- [7] M. GUERRAOUI et B. DE MATHAN, Groupes  $p$ -réflexifs et transformation de Fourier  $p$ -adique, *C.R.A.S.*, Paris, A, 276, 423-426.
- [8] M. KRASNER, Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, Colloques Internationaux du C.N.R.S., n° 143, Clermont-Ferrand, 1964, Edition du C.N.R.S. 1966.
- [9] M. LAZARD, Les zéros d'une fonction analytique. Presses Universitaires de France, Paris, (I.H.E.S. Publication mathématique n° 14).
- [10] E. MOTZKIN et Ph. ROBBA, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 269 (21 juil. 1969), 126-129.
- [11] E. MOTZKIN et Ph. ROBBA, Prolongement analytique en analyse  $p$ -adique. Séminaire de Théorie des Nombres, Faculté des Sciences de Bordeaux (J. Lesca) n° 3, 1968-1969 (polycopié)
- [12] Ph. ROBBA, Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, *Astérisque*, fascicule n° 10, Octobre 1973.

Manuscrit reçu le 17 mai 1974

Accepté par C. Chabauty.

Alain ESCASSUT,

Laboratoire de Mathématiques

Associé au CNRS

UER de Math. et d'Informatique

Université de Bordeaux I

351, Cours de la Libération

33405 – Talence.