ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN BERNARD

ALAIN DUFRESNOY

Calcul symbolique sur la frontière de Silov de certaines algèbres de fonctions holomorphes

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 2 (1975), p. 33-43

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_33_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 2 (1975), 33-43

CALCUL SYMBOLIQUE SUR LA FRONTIÈRE DE ŠILOV DE CERTAINES ALGÈBRES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

par Alain BERNARD et Alain DUFRESNOY

Soit A l'algèbre des limites uniformes de polynômes sur un compact K de $\mathbf{C}^n$. Soit S la frontière de Šilov de A. On montre que dans certains cas (K strictement pseudo-convexe, K polyèdre), A possède une propriété "d'ultraséparation" sur S, propriété qui permet d'obtenir la dichotomie du calcul symbolique borné sur les algèbres restrictions de A aux sous-compacts X de S : Soit toutes les fonctions continues, soit seules les fonctions holomorphes, opèrent de façon bornée sur une telle algèbre restriction.

1. Introduction.

Notons S_n la sphère unité de $\mathbf{C}^n$. ($S_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n ; \sum_1^n |z_i|^2 = 1\}$) et $A(S_n)$ l'algèbre des limites uniformes sur S_n de polynômes. A. Dufresnoy a montré dans sa thèse ([5]) que si X est un sous-compact de S_n tel que $A(S_n)/X$ – algèbre des restrictions à X des éléments de $A(S_n)$ – soit autoadjointe (i.e. tel que la fonction $\bar{z}$ opère sur $A(S_n)/X$) alors X est d'interpolation (i.e. toute fonction continue opère sur $A(S_n)/X$).

Nous nous proposons ici de montrer, dans un premier temps, un résultat de séparation de compacts par des éléments de $A(S_n)$, paragraphe 2. Puis d'en déduire l'ultraséparation de $A(S_n)$ sur S_n, paragraphe 3. Enfin, d'obtenir grâce à cette ultraséparation la dichotomie du calcul symbolique borné sur les algèbres restrictions de $A(S_n)$, paragraphe 4. Nous indiquerons dans le paragraphe 5 ce qu'il advient si on remplace la sphère S_n par d'autres compacts de $\mathbf{C}^n$.

2. Séparation de compacts par des éléments de $A(S_n)$.

Montrons tout d'abord le lemme suivant (où d désigne la distance euclidienne dans $\mathbf{C}^n$).

LEMME 1. – *Il existe un nombre $\rho > 0$ (ne dépendant que de n) tel que, pour toute partie finie E de S_n de maille supérieure à η (i.e. telle que $z \in E$, $z' \in E$ et $z \neq z'$ entraîne $d(z, z') > \eta$), il existe $f \in A(S_n)$ telle que*

i) $\forall z \in S_n \quad |f(z)| \leqslant 2$

ii) $\forall z \in S_n$ *tel que* $d(z, E) > \eta \qquad |f(z)| \leqslant \frac{1}{4}$

iii) $\forall z \in S_n$ *tel que* $d(z, E) < \rho\eta \qquad |f(z)| \geqslant \frac{3}{4}$.

Démonstration. – Considérons pour chaque $w \in E$ l'élément e_w de $A(S_n)$ défini par :

$$e_w(z) = e^{\langle z, w\rangle - 1} \quad \text{où} \quad \langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i .$$

On vérifie facilement que

$$e_w(w) = 1 \quad \text{et pour tout } z \in S_n, \ |e_w(z)| = e^{-\frac{1}{2} d(z, w)^2} \tag{1}$$

Choisissons nn nombre ρ $\left(0 < \rho < \frac{1}{2}\right)$ tel que, notant

$$\varphi(\rho) = \sum_{p=1}^{\infty} (p+2)^{2n} e^{-p^2/8\rho}$$

on ait :

$$\varphi(\rho) \leqslant e^{-\rho/2} - \frac{3}{4} \quad \text{et (donc)} \quad \varphi(\rho) \leqslant \frac{1}{4}. \tag{2}$$

Nous allons vérifier que l'élément f de $A(S_n)$ défini par

$$f(z) = \sum_{w \in E} [e_w(z)]^{1/\rho\eta^2}$$

satisfait aux conditions i), ii) et iii).

Pour tout $z \in S_n$ et tout entier $p \geqslant 0$, définissons l'ensemble :

$$E_p(z) = \{w \in E \ ; p\eta/2 \leqslant d(z\,,w) < (p+1)\eta/2\}.$$

Remarquons que, du fait que E a une maille supérieure à η, on a

$$\text{Card } E_p(z) \leqslant (p+2)^{2n} \quad \text{et} \quad \text{Card } E_0(z) \leqslant 1 \tag{3}$$

Ecrivons alors f sous la forme

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{w \in E_p(z)} [e_w(z)]^{1/\rho\eta^2}.$$

En distinguant le premier terme de cette somme, on obtient, d'après (1), (2) et (3), que pour tout $z \in S_n$:

$$|f(z)| \leqslant 1 + \sum_{p=1}^{\infty} (p+2)^{2n} e^{-p^2/8\rho} \leqslant 1 + \varphi(\rho) \leqslant 2$$

d'où la condition i).

Ensuite, si $d(z\,,E) > \eta$ on a en fait :

$$f(z = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{w \in E_p(z)} |e_w(z)|^{1/\rho\eta^2}$$

donc $|f(z)| \leqslant \varphi(\rho)$, d'ou ii) d'après (2).

Enfin, si $d(z\,,E) < \rho\eta$ il existe $w_0 \in E$ tel que $d(z\,,w_0) < \rho\eta$ et par suite, ρ étant plus petit que $1/2$:

$$|f(z)| \geqslant |e_{w_0}(z)|^{1/\rho\eta^2} - \varphi(\rho) \geqslant e^{-\rho/2} - \varphi(\rho)$$

d'où la condition iii) d'après (2).

c.q.f.d.

De ce lemme, on déduit alors le résultat de séparation de compacts cherché, sous la forme suivante :

PROPOSITION 1. — *Il existe un entier* M *(ne dépendant que de la dimension n) tel que, pour tout couple* (K , K′) *de compacts disjoints de* S_n, *il existe* M *éléments* $f_1 \dots f_M$ *de* $A(S_n)$ *tels que* :

i) $\forall z \in S_n$, $\operatorname{Sup}\{|f_m(z)| \ ; 1 \leqslant m \leqslant M\} \leqslant 2.$

ii) $\forall z \in K$, $\operatorname{Sup}\{|f_m(z)| \ ; 1 \leqslant m \leqslant M\} \leqslant \dfrac{1}{4}\cdot$

iii) $\forall z \in K'$, $\operatorname{Sup}\{|f_m(z)| \ ; 1 \leqslant m \leqslant M\} \geqslant \dfrac{3}{4}$

Démonstration. – Il suffit de prendre pour M un entier supérieur à $\left(\frac{1}{\rho}\right)^{2n}$, où ρ désigne la constante obtenue dans le lemme précédent. En effet, si on pose $\eta = d(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$, le fait que S_n soit de dimension moindre que $2n$ entraîne qu'il existe M ensembles finis $\mathrm{E}_1 \ldots \mathrm{E}_M$ inclus dans K′ et de mailles supérieures à η, tels que

$$\forall z \in \mathrm{K}', \ \exists m \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant m \leqslant \mathrm{M} \quad \text{tel que} \quad d(z, \mathrm{E}_m) < \rho\eta. \qquad (1)$$

Soit alors pour chaque m, $f_m \in \mathrm{A}(\mathrm{S}_n)$ associé à E_m par le lemme 1 : d'après (1) et le choix de η, $\sup\{|f_m| \ ; \ 1 \leqslant m \leqslant \mathrm{M}\}$ satisfait aux condition i), ii) et iii) cherchées.

c.q.f.d.

3. Ultraséparation de $\mathrm{A}(\mathrm{S}_n)$.

Rappelons qu'une algèbre de Banach B de fonctions continues sur un compact X (c'est-à-dire une sous-algèbre B de C(X), contenant les constantes, et munie d'une norme N plus fine que celle de la convergence uniforme sur X, telle que B soit complète) est dite *ultraséparante* sur X si l'algèbre $l^\infty(\mathrm{N}, \mathrm{B})$ des suites bornées (pour la norme N) d'éléments de B sépare les points du compactifié de Stone Čech $\beta(\mathrm{N} \times \mathrm{X})$ de $\mathrm{N} \times \mathrm{X}$. (Pour plus de précisions voir [2] paragraphes 1.2 et 3.1). De la proposition précédente, nous allons déduire formellement le résultat suivant (où $\mathrm{A}(\mathrm{S}_n)$ est considérée comme algèbre de Banach : norme uniforme sur S_n).

THÉORÈME 1. – $\mathrm{A}(\mathrm{S}_n)$ *est ultraséparante sur* S_n.

Démonstration. – Soient β et β' deux éléments de $\beta(\mathrm{N} \times \mathrm{S}_n)$, avec $\beta \neq \beta'$. Il existe deux fermés disjoints K et K′ de $\mathrm{N} \times \mathrm{S}_n$ tels que β (resp. β') soit adhérent à K (resp. à K′). Pour tout $p \in \mathrm{N}$ notons K_p (resp. K'_p) l'ensemble des $x \in \mathrm{S}_n$ tels que $(p, x) \in \mathrm{K}$ (resp. $(p, x) \in \mathrm{K}'$). Pour chaque $p \in \mathrm{N}$, K_p et K'_p sont deux compacts disjoints, et par suite il existe M éléments $f_{1,p} \ldots f_{\mathrm{M},p}$ de $\mathrm{A}(\mathrm{S}_n)$ satisfaisant aux conclusions de la proposition 1 pour ce couple $(\mathrm{K}_p, \mathrm{K}'_p)$ (avec M indépendant de p). Pour chaque $m \leqslant \mathrm{M}$ notons

F_m la suite $\{f_{m,p}\ ;\ p \in N\}$ d'éléments de $A(S_n)$ ainsi définie. On a alors $F_m \in l^\infty(N\ ,\ A(S_n))$ et du fait que $\mathrm{Sup}\{|F_m|\ ;\ m \leqslant M\}$ distingue β et β' il existe $m \leqslant M$ tel que F_m distingue β et β'.

c.q.f.d.

De ce théorème, on déduit formellement le corollaire suivant (où l'algèbre restriction $A(S_n)/X$ est considérée comme algèbre de Banach pour la norme quotient).

COROLLAIRE. – *Pour tout sous compact* X *de* S_n, *l'algèbre* $A(S_n)/X$ *est ultraséparante sur* X,

Démonstration. – En effet, par définition de la norme quotient, pour obtenir une suite bornée d'éléments de $A(S_n)/X$, il suffit de prendre les restrictions à X des éléments d'une suite bornée d'éléments de $A(S_n)$.

4. Calcul symbolique sur les algèbres ultraséparantes.

Soit B une algèbre de Banach de fonctions continues sur un compact X, (nous supposerons que la norme de Banach N sur B satisfait à $N(1) = 1$). Nous dirons qu'une fonction φ *opère de façon bornée* sur la boule de B de centre 0 et de rayon $r > 0$ si φ est définie et continue sur $\{z \in C\ ;\ |z| < r\}$ et s'il existe une constante K telle que

$$f \in B\ ,\ N(f) < r \Rightarrow \varphi \circ f \in B \quad \text{et} \quad N(\varphi \circ f) \leqslant K.$$

Nous allons démontrer le théorème suivant, qui grâce au paragraphe précédent s'applique aux algèbres restrictions de $A(S_n)$ pour fournir la dichotomie annoncée.

THEOREME 2. – *Soit* B *une algèbre de Banach de fonctions continues sur un compact* X *Supposons* B *ultraséparante sur* X *Alors si* $B \neq C(X)$, *seules les fonctions holomorphes peuvent opérer de façon bornée sur une boule de* B : *précisément si une fonction* φ *opère sur la boule de centre* 0 *et de rayon* $r > 0$ *de* B, *alors* φ *est holomorphe sur* $\{z \in C\ ;\ |z| < r\}$.

La démonstration de ce théorème va s'appuyer sur le lemme suivant, dont la preuve consiste essentiellement en une adaptation aux algèbres de Banach d'une technique utilisée par K. de Leeuw et Y. Katznelson pour des algèbres uniformes [8].

LEMME 2. — *Soit* B *une algèbre de Banach de fonctions continues sur un compact* X. *Soit* $r > 0$. *S'il existe une fonction* φ *qui opère de façon bornée sur la boule de centre* 0 *et de rayon* r *de* B, *mais qui ne soit pas holomorphe en* z_0 $(|z_0| < r)$, *alors* $\bar{z}$ *opère sur l'adhérence uniforme de* $l^\infty(\mathrm{N}, \mathrm{B})$ *sur* $\beta(\mathrm{N} \times \mathrm{X})$.

Démonstration. — Soit $\widetilde{\mathrm{B}}$ l'algèbre des limites uniformes sur X de suites bornées d'éléments de B. $\widetilde{\mathrm{B}}$, munie de la norme

$$\widetilde{N}(f) = \mathrm{Inf}\,\{\mathrm{Sup}_n\, N(fn)\ ;\ f_n \in \mathrm{B}\,,\ \|f_n - f\|_{\mathrm{X}} \to 0\}$$

est une algèbre de Banach de fonctions continues sur X. φ opérant de façon bornée sur la boule de rayon r de B, opère de façon bornée sur la boule de rayon r de $\widetilde{\mathrm{B}}$. Soit r' tel que $|z_0| < r' < r$. Soit k une fonction C^∞ à support dans $\{z \in \mathrm{C}\ ;\ |z| < r - r'\}$. De la formule :

$$(\varphi * k) \circ f = \int \varphi \circ (f - z) \,.\, k(z)\,(dx\,dy)\,(z)$$

on déduit que $\varphi * k$ opère de façon bornée sur la boule de rayon r' de $\widetilde{\mathrm{B}}$. Remarquons aussi que $\varphi * k$ est de classe C^∞ et que, pour k bien choisi, $\varphi * k$ est assez voisine de φ, donc non holomorphe en au moins un point z'_0 de $\{z\,,\ |z| < r\}$. Définissons alors une fonction ψ par

$$\psi(z) = \left[\frac{\partial(\varphi * k)}{\partial \bar{z}}\,(z'_0)\right]^{-1} . \left[(\varphi * k)\,(z + z'_0) - (\varphi * k)\,(z'_0) - z\,\frac{\partial(\varphi * k)}{\partial z}\,(z'_0)\right]$$

et remarquons que ψ admet à l'origine le développement limité :

$$\psi(z) = \bar{z} + |z|\,\epsilon(z) \quad (\text{où } \epsilon(z) \to 0 \quad \text{quand } z \to 0). \qquad (1)$$

Mais ψ opère de façon bornée sur la boule de $\widetilde{\mathrm{B}}$ de rayon $r'' = r' - |z'_0|$, donc sur la boule de rayon r'' de $l^\infty(\mathrm{N}\,,\widetilde{\mathrm{B}})$ (qui est une algèbre de Banach de fonctions sur $\beta(\mathrm{N} \times \mathrm{X})$, pour la norme $\widetilde{\mathrm{N}}^\infty$ définie par

$\widetilde{N}^\infty(\{f_i\}) = \operatorname{Sup}\{\widetilde{N}(f_i)\})$. Notons alors, pour chaque entier p, ψ_p la fonction définie par $\psi_p(z) = p\psi\left(\frac{z}{p}\right)$.

Soit $f \in l^\infty(N, B)$ tel que $\widetilde{N}^\infty(f) < r''$. On a :

$$\psi_p(f) \in l^\infty(N, \widetilde{B}).$$

Mais d'après (1) on a :

$$\psi_p(f) = \bar{f} + |f|\, \epsilon\left(\frac{f}{p}\right)$$

Donc pour tout entier p on a :

$$\bar{f} + |f|\, \epsilon\left(\frac{f}{p}\right) \in l^\infty(N, \widetilde{B}).$$

Donc, finalement, faisant tendre p vers l'infini, on obtient que $\bar{f}$ est adhérent à $l^\infty(N, \widetilde{B})$ pour la norme de la convergence uniforme sur $N \times X$. On en déduit le même résultat pour tout $f \in l^\infty(N, \widetilde{B})$, puis pour tout f adhérent à $l^\infty(N, \widetilde{B})$. Du fait immédiat que l'adhérence de $l^\infty(N, \widetilde{B})$ est égale à celle de $l^\infty(N, B)$, on déduit alors que $\bar{z}$ opère sur cette dernière adhérence.

c.q.f.d.

Démonstration du théorème 2. – Soit donc φ opérant sur la boule de rayon r de B. Si φ n'était pas holomorphe, d'après le lemme précédent, l'adhérence uniforme de $l^\infty(N, B)$ serait autoadjointe sur $\beta(N \times X)$. Mais $l^\infty(N, B)$ est une algèbre qui, B étant supposée ultraséparante sur X, sépare les points de $\beta(N \times X)$. Donc $l^\infty(N, B)$ serait, d'après le théorème de Weierstrass-Stone, dense dans toutes les fonctions continues sur $\beta(N \times X)$, c'est-à-dire dense dans $l^\infty(N, C(X))$. Mais une telle densité entraîne qu'il existe une boule de B "$\frac{1}{2}$-dense" dans la boule unité de C(X) (pour plus de précisions voir le paragraphe 1.2 de [2]), donc, finalement que B = C(X), ce qui est contraire à l'hypothèse.

c.q.f.d.

5. Extension des résultats précédents à d'autres compacts de $\mathbf{C}^n$.

a) Montrons tout d'abord le théorème suivant, qui assure le phénomène d'ultraséparation sur tout compact formé de points de *stricte pseudo-convexité* (à rapprocher du contre exemple donné en *c*).

THEOREME 3. – *Soit* K *un compact polynomialement convexe de* $\mathbf{C}^n$. *Soit* X *un sous-compact de la frontière de* K *tel que* K *soit strictement pseudo-convexe en chaque point de* X. *Alors* A(K)/X *est ultraséparante sur* X (A(K) *désigne l'algèbre des limites uniformes sur* K *de polynômes, et* A(K)/X *l'algèbre restriction, munie de la norme quotient*).

La démonstration est basée sur le lemme suivant,

LEMME 3. – *Avec les notations et hypothèses du théorème 3, il existe deux nombres a et b strictement positifs tels que, pour tout* $w \in X$, *il existe* $e_w \in A(K)$ *satisfaisant à* :

i) $e_w(w) = 1$.

ii) $\forall z \in \partial K \;,\; e^{-bd(z,w)^2} \leqslant |e_w(z)| \leqslant e^{-ad(z,w)^2}$

où d désigne la métrique euclidienne sur $\mathbf{C}^n$.

Le lemme est essentiellement le corollaire IX.C.7 (p. 275) de Gunning et Rossi [7], avec en plus des constantes a et b indépendantes de $w \in X$. Pour le démontrer on peut soit reprendre les techniques exposées dans Wermer : démonstration du théorème 9.3 page 52 de [10], soit appliquer un résultat de A.M. Chollet ([4]).

Démonstration du théorème 3. – L'existence des e_w satisfaisant aux conclusions du lemme 3 permet d'obtenir l'analogue du lemme 1, puis de la proposition 1 du § 2, d'où l'ultraséparation cherchée.

c.q.f.d.

b) Venons en au cas des *polyèdres.* Un compact K de $\mathbf{C}^n$ sera dit polyèdre *non dégénéré* s'il existe m polynômes $p_1 \ldots p_m$ tels que :

$$K = \{z \in \mathbf{C}^n \;;\; |p_l(z)| \leqslant 1 \;,\; l = 1\,,2\,,\ldots\,,m\}$$

et tel que pour tout n-uple $l_1 \ldots l_n$ d'indices distincts compris entre 1 et m, la matrice $\left\{ \dfrac{\partial p_{l_j}}{\partial z_i} \right\}$ soit de rang n sur

$$\{z \in \mathrm{K} \ ; \ |p_{l_j}(z)| = 1 \ , j = 1 \, , 2 \, , \ldots , n\}.$$

THEOREME 4. – *Soit* K *un polyèdre compact non dégénéré de* $\mathbf{C}^n$. *Notons* A(K) *l'algèbre des limites uniformes de polynômes sur* K, *et* S *la frontière de Šilov de* A(K). *Alors* A(K)/S *est ultraséparante sur* S.

Démonstration. – Pour chaque n-uple $l_1 \ldots l_n$ d'indices distincts entre 1 et m, définissons la face

$$\mathrm{S}_{l_1 \ldots l_m} = \{z \in \mathrm{S} \ ; \ |p_{l_j}(z)| = 1 \ , j = 1 \, , 2 \, , \ldots , n\}.$$

Soit $\mathrm{S}_{l_1 \ldots l_m}$ une telle face (nous ne gardons que les faces non vides). Définissons

$$\mathrm{K}_{l_1 \ldots l_n} = \left\{ z \in \mathbf{C}^n \ ; \ \sum_{j=1}^{n} |p_{l_j}(z)|^2 \leqslant n \right\}$$

(tronqué éventuellement de façon à le rendre compact). $\mathrm{K}_{l_1 \ldots l_n}$ est polynialement convexe, $\mathrm{S}_{l_1 \ldots l_n}$ est inclus dans $\partial \mathrm{K}_{l_1 \ldots l_n}$, et l'hypothèse de non dégénérescence du polyèdre entraîne que $\mathrm{K}_{l_1 \ldots l_n}$ est strictement pseudo-convexe en chaque point de $\mathrm{S}_{l_1 \ldots l_n}$ ($\Sigma \ |p_{l_j}(z)|^2$ est strictement pluri-sous-harmonique en ces points). D'après le théorème 3, $\mathrm{A}(\mathrm{K}_{l_1, \ldots l_n})/\mathrm{S}_{l_1 \ldots l_n}$ est donc ultraséparante sur $\mathrm{S}_{l_1 \ldots l_n}$. Mais on a $\mathrm{K} \subset \mathrm{K}_{l_1 \ldots l_n}$, donc

$$\mathrm{A}(\mathrm{K}_{l_1 \ldots l_n})/\mathrm{S}_{l_1 \ldots l_n} \subset \mathrm{A}(\mathrm{K})/\mathrm{S}_{l_1 \ldots l_n}$$

et par suite $\mathrm{A}(\mathrm{K})/\mathrm{S}_{l_1 \ldots l_n}$ est a fortiori ultraséparante sur $\mathrm{S}_{l_1 \ldots l_n}$

Enfin, S est union, finie, des diverses faces $\mathrm{S}_{l_1 \ldots l_n}$; ces diverses faces sont bien distinguées par les modules des polynômes p_l ; il est alors facile, en revenant à la définition de l'ultraséparation, de montrer que A(K)/S est ultraséparante sur S.

c.q.f.d.

c) Il est naturel de se demander si, dans le théorème 3, on ne peut pas remplacer l'hypothèse de stricte convexité par la simple existence de fonctions pics. Il n'en est rien comme le montre le fait suivant :

Exemple. — Il existe un compact polynomialement convexe K de C^2, dont la frontière de Šilov S soit formée uniquement de points pics, tel que A(K)/S ne soit pas ultraséparante sur S.

En fait, nous donnons cet exemple avec pour K un compact de C, et comme algèbre l'algèbre R(K) des fractions rationnelles à pôles hors de K : mais il y est bien connu qu'un tel système peut s'installer dans C^2. L'exemple est simplement un "string of beads" convenable (cf. [6] p. 146), c'est-à-dire tel qu'il existe un compact X de K situé sur l'axe réel (l'algèbre restriction est alors autoadjointe), mais non d'interpolation : d'après le paragraphe 4, on n'a alors pas ultraséparation.

c.q.f.d.

d) Remarquons encore que la version de Basener ([1]) de l'exemple de Cole, à savoir un sous compact rationnellement convexe de la sphère S_2 tel que R(X) (limites uniformes sur X de fractions rationnelles) soit différent de C(X), fournit un exemple non trivial d'algèbre uniforme ultraséparante sur son spectre (X est le spectre, et $R(X) \supset A(S_2)/X$, donc R(X) est ultraséparante sur X puisque $A(S_2)/X$ l'est d'après l'étude qui précède) donc d'une algèbre uniforme telle qu'il y ait dichotomie du calcul symbolique borné sur toutes les algèbres quotients.

e) Rappelons aussi que pour une algèbre de Banach ultraséparante, l'union de deux compacts d'interpolation en est un (proposition 5, § 3.1 de [2]). On retrouve donc, dans les cas particuliers traités en a) et b), le résultat sur l'union de deux compacts d'interpolation – problème résolu en général par N. Varopoulos dans [9] (cf. aussi [3]) –.

f) Signalons enfin que, si nous n'avons étudié ce phénomène d'ultraséparation que sur des compacts inclus dans la frontière de Choquet, il peut aussi se produire sur des compacts dont certains points ne soient pas pics. Mais il nécessite quand même que la métrique de Gleason définie sur X par l'algèbre soit uniformément discrète (cf. [2] § 3.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BASENER, An example concerning peak points, *Notices of the American Mathematical Society,* 18 (1971), 415.

[2] A. BERNARD, Espaces des parties réelles des éléments d'une algèbre de Banach de fonctions, *Journal of functional analysis,* Vol. 10, n° 4, August, (1972).

[3] A. BERNARD, Algèbres quotients d'algèbres uniformes, *C.R.A.S.* Paris, t. 272 série A (26 avril 1971).

[4] A.M. CHOLLET, Ensembles de zéros à la frontière de fonctions analytiques dans des domaines strictement pseudo convexes, *Annales de l'Institut Fourier,* t. 26.1, à paraître.

[5] A. DUFRESNOY, Union de compacts d'interpolation pour une algèbre uniforme (Thèse) multigraphiée, Grenoble, mai 1974.

[6] T. GAMELIN, Uniform algebras, Prentice Hall, Inc. 1969.

[7] R. GUNNING et H. ROSSI, Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall, Inc. 1965.

[8] K. de LEEUW et Y. KATZNELSON, *J. anal. Math.,* 11 (1963).

[9] N. VAROPOULOS, Sur la réunion de deux ensembles d'interpolation pour une algèbre uniforme, *C.R.A.S.,* Paris t. 272 série A (5 avril 1971).

[10] J. WERMER, Banach algebras and several complex variables, Markham, Chicago, 1971.

Manuscrit reçu le 13 septembre 1974
Accepté par J.P. Kahane.

A. BERNARD et A. DUFRESNOY,
Institut de Mathématiques Pures
Université de Grenoble I
B.P. 116
38402 – Saint Martin d'Hères.