ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE KAHANE

Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles

Annales de l'institut Fourier, tome 5 (1954), p. 39-130

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1954__5__39_0>

SUR QUELQUES PROBLÈMES D'UNICITÉ ET DE PROLONGEMENT, RELATIFS AUX FONCTIONS APPROCHABLES PAR DES SOMMES D'EXPONENTIELLES

par Jean-Pierre KAHANE.

INTRODUCTION

Depuis le livre de M. Mandelbrojt [22], qui la mit pour la première fois en lumière, la liaison entre la théorie de la quasi-analyticité et l'analyse harmonique s'est affirmée dans de nombreux travaux. D'une part, certains auteurs se sont attachés à préciser l'énoncé suivant : une fonction presque-périodique dont le spectre est contenu dans une suite assez lacunaire ne peut devenir trop petite au voisinage d'un point sans s'annuler identiquement ([19], [18], [9], [12], [10], [11]). D'autre part a été récemment exprimée la relation entre certains problèmes de quasi-analyticité et l'approximation des fonctions par des combinaisons linéaires de dérivées ou de translatées ([26], [7]).

De ce point de vue, il nous a semblé utile de reprendre la théorie des fonctions moyenne-périodiques de M. L. Schwartz [34], pour poser dans ce cadre les problèmes d'unicité pour les fonctions d'une variable réelle, de spectre donné, dont on impose les valeurs sur un segment, ou les valeurs approchées au voisinage d'un point, ou les valeurs des dérivées successives en un point. Pour résoudre de tels problèmes, nous faisons appel à diverses méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, qui fournissent des types de résultats assez différents.

Un autre problème très naturel, que nous posons, est celui du prolongement d'une fonction définie sur un segment en une fonction moyenne-périodique de spectre donné. Ce problème se transcrit aisément dans le plan complexe, où il requiert une étude préalable, amorcée dans [33] et [34], de l'approximation des fonctions holomorphes dans un ouvert par des sommes d'exponentielles. Un même principe de prolongement en permet la résolution sur la droite et dans le plan complexe.

Telle est la matière des chapitres I et II du présent travail, et la justification de son titre. Le chapitre II, relatif à l'approximation et au prolongement dans le plan complexe, se trouvait rédigé quand est parvenu en France un ouvrage de M. Léontiev [15] qui en expose excellemment les principaux résultats. Nous croyons cependant qu'il n'est pas sans intérêt de les publier à nouveau, ne fût-ce qu'en raison de la méthode que nous utilisons, très différente de celle de M. Léontiev.

Le chapitre III est relatif à des techniques de la théorie des fonctions dont certaines sont déjà utilisées au chapitre I. Ces techniques permettent d'établir des « théorèmes d'unicité » voisins de ceux qu'a obtenus M. Mandelbrojt à l'aide de son inégalité fondamentale ([24], [25]) et d'étudier des problèmes très généraux (partiellement traités dans [27] et [28]) tels que l'approximation polynômiale pondérée sur un ensemble de segments, et la quasi-analyticité généralisée pour des classes de fonctions indéfiniment dérivables de spectre donné

Nos recherches furent entreprises avec la collaboration de Pierre Lalagüe, que j'assure ici de ma reconnaissante amitié; nos résultats communs se trouvent en [12]. En [11] (1) se trouve très brièvement exposée la substance du chapitre I. Certains résultats du chapitre III sont indiqués en [10]

Il est à peine besoin de dire que ce travail porte la marque des idées de M. Mandelbrojt. Pour son aide constante, pour ses encouragements, je voudrais lui exprimer ici toute ma gratitude.

Je remercie également M. Schwartz, aux ouvrages duquel je dois beaucoup, pour l'intérêt qu'il a bien voulu manifester à mon travail.

Mes remercîments vont enfin à M. Valiron pour la bienveillante attention qu'il n'a cessé de me porter, et à M. Denjoy, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

(1) Il faut dans cette note lire

en 2 a) : $\overline{\lim_{r\to\infty}}\left(r\alpha(r) - 2\pi r\overline{D}(r)\right) > 0$

et en 4, dernière phrase : par des fonctions de spectre Λ.

CHAPITRE PREMIER

QUASI-ANALYTICITÉ DES FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES

§ 1. — Fonctions moyenne-périodiques. Définition et principaux résultats.

La théorie générale des fonctions moyenne-périodiques, étudiées d'abord par M. Delsarte, est due à M. L. Schwartz [34]. Nous reprenons ici sa définition. L'introduction des transformées de Fourier des fonctions moyenne-périodiques, nécessaire à la résolution des problèmes posés au § 2, va nous permettre, en simplifiant sa méthode, de retrouver rapidement les résultats essentiels de la théorie (théorèmes 3 et 4).

1. Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel topologique sur le corps des nombres complexes des fonctions $f(x)$ à valeurs complexes continues sur la droite, où la convergence est définie comme la convergence uniforme sur tout segment. Soit $\tau(f)$ le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par les translatées $f(x+y)$ de $f(x)$.

Définition. — *Si $\tau(f) \neq \mathcal{E}$, $f(x)$ est dite moyenne-périodique.*

$\tau(f) \neq \mathcal{E}$ signifie qu'existe au moins une fonction continue non approchable sur un segment par des combinaisons linéaires $\sum_1^N a_{n,N} f(x+y_n)$, c'est-à-dire qu'existe au moins une mesure μ à support compact, non réduite à zéro (en bref $\mu \in \mathcal{E}'$, $\mu \neq 0$) telle que $\int f(x+y)\, d\mu(-x) = f * \mu \equiv 0$. Dire que f est moyenne-périodique, c'est dire qu'elle vérifie au moins une équation $f * \mu \equiv 0$, $\mu \in \mathcal{E}'$, $\mu \not\equiv 0$.

REMARQUE. — Les fonctions périodiques sont moyenne-périodiques, car $\tau(f)$ n'est constitué que de fonctions périodiques.

Dans ce paragraphe, f désignera une fonction moyenne-périodique, et μ une mesure $\in \mathcal{E}'$, $\mu \not\equiv 0$, telle que $f * \mu \equiv 0$.

2. Appelons « segment-support » d'une mesure μ (ou d'une fonction k sommable) à support compact, le plus petit segment contenant son support. On sait que le segment-support de $k * \mu$ est égal à la somme des segments-supports de μ et de k (c'est une conséquence immédiate de la relation $l = \pi D$ qui relie la longueur du segment-support d'une mesure ou d'une fonction à la « densité » des zéros de sa transformée de Fourier dans le plan complexe (cf. p. ex. [20] chap. III)).

Soit φ une fonction sommable sur tout segment, s'annulant sur le segment-support $[a, b]$ de μ, telle que $\varphi * \mu \equiv 0$. Montrons qu'on a $\varphi \equiv 0$. En effet, soit, pour tout $c > b$, $\varphi_c = \varphi$ sur $[b, c]$, $\varphi_c = 0$, ailleurs; $\varphi_c * \mu = \int_b^c \varphi(x)\, d\mu(y - x)$ ne peut différer de zéro qu'aux points y tels que le segment-support sur l'axe des x de $\mu(x - y)$ contienne c, donc sur un segment égal au segment-support de μ; en vertu du résultat rappelé plus haut, le support de φ_c est donc ponctuel; cela n'est possible pour tout $c > b$ que si $\varphi \equiv 0$ sur (b, ∞); et de même $\varphi \equiv 0$ sur $(-\infty, a)$.

DÉFINITION. — f étant donné, la borne inférieure des longueurs des segments-supports des $\mu \in \mathcal{E}'$, $\mu \not\equiv 0$, telles que $f * \mu \equiv 0$ est la moyenne-période de f.

Si f s'annule sur un segment de longueur supérieure à sa moyenne-période, $f \equiv 0$.

3. Posons $f^-(x) = f(x)$ et $f^+(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$
$f^-(x) = 0$ et $f^+(x) = f(x)$ pour $x > 0$

et

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\, d\mu(y - x) = -\int_{0^+}^{\infty} f(x)\, d\mu(y - x) = g(y)$$

soit

$$f^- * \mu = -f^+ * \mu = g$$

g est une fonction sommable à support compact, contenu dans le segment-support de μ.

Soit

$$M(w) = \mathfrak{T}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ixw}\, d\mu(x)$$

et

$$G(w) = \mathfrak{T}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ixw} g(x)\, dx$$

les transformées de Fourier de μ et g dans le plan complexe (fonctions entières de type exponentiel).

Définition. — $\mathfrak{T}(f) = F(w) = \dfrac{G(w)}{M(w)}$ *est la transformée de Fourier de* $f(x)$.

Il faut justifier cette définition : 1° en montrant qu'elle est indépendante du choix de μ ; 2° en montrant qu'elle recouvre une définition usuelle (celle de Carleman), quand $f(x)$ n'est pas trop rapidement croissant. Le 2° sera traité au 8. Examinons ici le 1°.

Soit $f * \mu_1 \equiv 0$, $\mu_1 \in \mathcal{E}'$, $\mu_1 \not\equiv 0$, $f^- * \mu_1 = \mu_1 * f^- = g_1$. On a

$$\mu_1 * f^- * \mu = \mu_1 * g = g_1 * \mu \qquad \text{donc} \qquad \mathfrak{T}(\mu_1)\mathfrak{T}(g) = \mathfrak{T}(g_1)\mathfrak{T}(\mu)$$

$F(w)$ est donc indépendant du choix de μ.

Remarque. — D'après 2, $F(w) \equiv 0$ entraîne $f \equiv 0$.

Dans la suite, F désignera la transformée de Fourier de f.

4. Pour que $\mu_1 * f \equiv 0$, $\mu_1 \in \mathcal{E}'$, il est nécessaire que

$$\mathfrak{T}(\mu_1)\, F = M_1(w)\, F(w)$$

soit transformée de Fourier d'une fonction g_1 sommable à support compact. Montrons que c'est aussi suffisant.

Posons $\mu_1 * f^- = g_2$. $g_2(x)$ est nulle pour x assez grand, et $g_2 * \mu = \mu_1 * f^- * \mu = \mu_1 * g$. L'hypothèse s'écrit

$$\mathfrak{T}(\mu_1 * g) = M_1(w)\, F(w)\, M(w) = \mathfrak{T}(g_1 * \mu)$$

soit $g_2 * \mu = g_1 * \mu$. Ainsi $g_2 - g_1$ est une fonction, nulle pour x assez grand, sommable sur tout segment, telle que $(g_2 - g_1) * \mu \equiv 0$. D'après 2, on a $g_2 \equiv g_1$. En posant $\mu_1 * f^+ = -g_3$, on a de même $g_3 \equiv g_1$. D'où $\mu_1 * f \equiv 0$.

5. Soit $e^{i\lambda x} \in \tau(f)$, λ complexe. Alors $f * \mu \equiv 0$ entraîne $e^{i\lambda x} * \mu \equiv 0$, soit $M(\lambda) = 0$. Montrons que λ est pôle de $F(w)$.

Quitte à remplacer f et $d\mu$ par $f(x)e^{-i\lambda x}$ et $d\mu(x)e^{-i\lambda x}$, on peut supposer $\lambda = 0$. Si $G(0) \neq 0$ la proposition est démontrée. Sinon on peut poser

$$\mu_1(x) = \int_{-\infty}^{x} = -\int_{x}^{\infty} d\mu(y), \qquad g_1(x) = \int_{-\infty}^{x} = -\int_{x}^{\infty} g(y)\,dy,$$

$$\mathcal{T}(\mu_1) = M_1(w) = \frac{iM(w)}{w}, \qquad \mathcal{T}(g_1) = G_1(w) = \frac{iG(w)}{w},$$

$$g_1 = f^- * \mu_1 = -f^+ * \mu_1,$$

donc $M_1(0) = 0$. Si $G_1(0) = 0$, la proposition est démontrée. Sinon, on itère en posant $M_{n+1}(w) = \frac{iM_n(w)}{w}$, $G_{n+1}(w) = \frac{iG_n(w)}{w}$ et on arrive à $M_N(0) = 0$, $G_N(0) \neq 0$.

Inversement, si λ est pôle de $F(w)$, c'est que $M(\lambda) = 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{E}'$ tel que $f * \mu \equiv 0$, donc $e^{i\lambda x} \in \tau(f)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $e^{i\lambda x} \in \tau(f)$ est donc que $F(w)$ admette λ pour pôle. Plus précisément :

Théorème 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $P(x)e^{i\lambda x} \in \tau(f)$, $P(x)$ *étant un polynôme de degré* p, *est que* $F(w)$ *admette* λ *pour pôle d'ordre supérieur à* p.

Pour la démonstration, il suffit de remplacer ci-dessus $M(\lambda) = 0$ par $M(\lambda) = M'(\lambda) = \cdots M^{(p+1)}(\lambda) = 0$, en constatant que $P(x)e^{i\lambda x} \in \tau(f)$ s'écrit $\tau(P) \subset \tau(f(x)e^{-i\lambda x})$ et que $\tau(P)$ contient tous les polynômes de degré $\leqslant p$.

Définition. — *On appellera spectre de* f *l'ensemble des pôles de* $F(w)$, *comptés avec leur ordre de multiplicité.*

6. Que peut-on dire d'une fonction moyenne-périodique dont le spectre est vide?

$F(w)$ est alors une fonction entière.

Quitte à les multiplier par $\left(\frac{\sin w}{w}\right)^3$, supposons $M(w)$ et $G(w)$ transformées de Fourier de fonctions deux fois dérivables. Il en est alors de même de

$$M'(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int -ixe^{-ixw}\,d\mu(x) = \mathcal{T}(-ix\mu).$$

Montrons que $F(w)\,M'(w)$ est transformée de Fourier d'une fonction continue à support compact.

En effet, $\dfrac{M'(w)}{M(w)} = a + \dfrac{p}{w} + \Sigma\left(\dfrac{1}{w-\lambda_j} + \dfrac{1}{\lambda_j}\right)$, $|\lambda_j| = O(j)$. En écrivant $\Sigma = \sum\limits_{|\lambda_j|<2|w|} + \sum\limits_{|\lambda_j|\geqslant 2|w|}$, on voit que, à l'extérieur des cercles de rayon ε centrés aux zéros λ_j de $M(w)$, on a $\left|\dfrac{M'(w)}{M(w)}\right| < \underset{|w|\to\infty}{O(|w|)}$. A l'extérieur de ces cercles, donc partout dans le plan, on a $|F(w)M'(w)| < O(|wG(w)|)$, donc $F(u)M'(u)\in L$, et $F(w)M'(w)$ est une fonction entière de type exponentiel. Le théorème de Paley-Wiener ([30], p. 13) établit notre proposition.

D'après 4, on a donc $f * x\mu \equiv 0$.

En itérant, on voit que $f * P(x)\mu \equiv \int f(y-x)P(x)\mu'(x)\,dx \equiv 0$ pour tout polynôme $P(x)$. Comme, sur le support de μ, on peut approcher uniformément $f(y-x)\mu'(x)$ par des polynômes $P(x)$, on doit avoir $f(y-x)\mu'(x) \equiv 0$ pour tout x et tout y, d'où la conclusion :

Si le spectre de f est vide, $f \equiv 0$.

7. Supposons maintenant le spectre de f non vide, et étudions le spectre de $\varphi = f * \nu$, $\nu \in \mathcal{E}'$.

Soit φ^- la fonction définie à partir de φ comme f^- à partir de f (voir 3) : φ^- et $f^- * \nu$ coïncident pour $|x|$ assez grand, donc $\varphi^- - f^- * \nu = h$ est une fonction sommable à support compact. D'où

$$\mu * \varphi^- = \mu * f^- * \nu + \mu * h$$

et $\quad M(w)\,\Phi(w) = M(w)\,F(w)\,N(w) + M(w)\,H(w)$, $\quad \Phi$, N et H

étant les transformées de Fourier de φ, ν et h. $\Phi(w)$ admet donc pour pôles ceux de $F(w)\,N(w)$, avec leur ordre de multiplicité.

THÉORÈME 2. — *Le spectre de $f * \nu$, $\nu \in \mathcal{E}'$, est l'ensemble des pôles de $\mathcal{C}(f)\,\mathcal{C}(\nu)$.*

En particulier, si $\mathcal{C}(\nu)$ s'annule sur le spectre de f, on a d'après 6 : $f * \nu \equiv 0$. Autrement dit, si $P(x)\,e^{i\lambda x} * \nu \equiv 0$ pour toute « exponentielle-polynôme » $P(x)\,e^{i\lambda x} \in \tau(f)$, on a $f * \nu \equiv 0$. Le résultat peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME 3. — *f appartient à l'espace engendré par les exponentielles-polynômes de $\tau(f)$.*

8. Abordons maintenant la seconde question posée lors de la définition de $F(w)$. Supposons $f^-(x)\,e^{bx}$ et $f^+(x)\,e^{ax}$ bornées. Les transformées de Fourier-Carleman [5]

$$F^+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f^-(x)e^{-ixw}\,dx$$

$$F^-(w) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int f^+(x)e^{-ixw}\,dx \quad (w = u + iv)$$

sont holomorphes respectivement pour $v > b$ et $v < a$. Comme fonctions de u, $F^+(u+iv)$ et $F^-(u+iv)$ sont transformées de Fourier, au sens usuel, de $e^{vx}f^-$ et $-e^{vx}f^+$ respectivement. De même $M(u+iv)$ et $G(u+iv)$ sont transformées de Fourier de $e^{vx}\mu$ et $e^{vx}g$. Comme

$$e^{vx}f^- * e^{vx}\mu = e^{vx}g \qquad \text{et} \qquad -e^{vx}f^+ * e^{vx}\mu = e^{vx}g,$$

on a $\quad F^+(w)M(w) = G(w) \quad$ et $\quad F^-(w)M(w) = G(w)$

quand ces égalités ont un sens, donc aussi

$$F^+(w) = F(w) \qquad \text{et} \qquad F^-(w) = F(w).$$

Notre définition est ainsi parfaitement justifiée.

Voici deux applications des expressions simples que nous venons de trouver, dans les hypothèses faites, pour $F(w)$.

9. Soit f une fonction moyenne-périodique quelconque. Soit $\varphi(x) = \Sigma A x^p e^{i\lambda x}$ (Σ : somme finie, $A = A(p, \lambda, \varphi)$, $x^p e^{i\lambda x} \in \tau(f)$). La transformée de Fourier de φ est

$$\Sigma \frac{(-i)^{p-1}\, p\,!\, A}{\sqrt{2\pi}(w-\lambda)^{p+1}} = \frac{\Gamma(x)}{M(w)}$$

si une suite de telles fonctions φ tend uniformément vers f sur un segment $[-l, 0]$ égal au segment-support de μ, la suite des fonctions $\gamma = \varphi^- * \mu$ tend uniformément vers g, donc $\Gamma(w)$ tend vers $G(w)$ et chaque $A(p, \lambda, \varphi)$ vers le produit par $\dfrac{\sqrt{2\pi}\, i^{p-1}}{p\,!}$ du coefficient de $\dfrac{1}{(w-\lambda)^{p+1}}$ dans le développement de $F(w)$. Joint au théorème 3, ce résultat donne :

Théorème 4. — *Sur tout segment de longueur supérieure à une moyenne-période, f admet un développement déterminé par rapport aux exponentielles monômes de $\tau(f)$, dont la transformée* *de Fourier-Carleman formelle est le développement de* $F(w)$ *en éléments simples.*

Les exponentielles monômes de $\tau(f)$ forment une base de $\tau(f)$, et toute fonction de $\tau(f)$ est caractérisée par son développement suivant cette base.

Notation : nous écrirons $f(x) \sim \Sigma A(p, \lambda) x^p e^{i\lambda x}$.

10. Soit f une fonction moyenne-périodique bornée.

Si $|f| < M$, on a $\sqrt{2\pi}|F(w)| < \frac{M}{|v|}$. Le spectre de f est donc réel et simple. Soit $f(x) \sim \Sigma A(\lambda) e^{i\lambda x}$. Soit C un cercle de rayon R centré au point λ du spectre, dont le diamètre réel $[\alpha, \beta]$ ne contient pas d'autre point du spectre. On a

$$\int_{C^+} \sqrt{2\pi}\, F(w)(w-\alpha)(w-\beta)\,dw = -2\pi A(\lambda)(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$$

et $$|\sqrt{2\pi}\, F(w)(w-\alpha)(w-\beta)| < 2MR \quad \text{sur C}$$

d'où $$2\pi R\,.\,2MR > 2\pi|A(\lambda)|R^2 \quad \text{et} \quad |A(\lambda)| < 2M.$$

Théorème 5. — *Si* $|f|$ *est borné par* M, *le spectre de* f *est réel et simple, et les coefficients du développement de* f *sont bornés par* 2M [1].

11. Étudions les primitives et la dérivée d'une fonction moyenne-périodique f.

Soit f_1 une primitive de f. Les fonctions φ du 9 admettent des primitives φ_1 égales à f_1 en O. Sur tout segment I d'origine O, les fonctions φ_1 convergent uniformément vers f_1, puisque $|\varphi_1 - f_1| \leqslant |I| \max\limits_{x\in I} |\varphi - f|$. f_1 est donc moyenne-périodique, et son développement en exponentielles-monômes s'obtient en intégrant formellement celui de f [2]. Si $f_1(O) = 0$, on a

$$iw\mathcal{C}(f_1) = \mathcal{C}(f) \,(\text{car } iw\mathcal{C}(\varphi_1) = \mathcal{C}(\varphi)).$$

Si f admet une dérivée continue f', f' est moyenne-périodique, comme limite uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions de $\tau(f)$. Le développement de f' en exponentielles-monômes s'obtient en dérivant formellement celui de f.

Théorème 6. — *Si* f *est moyenne-périodique, ses primitives et sa dérivée, si elle existe et est continue, sont moyenne-périodiques, et leurs développements s'obtiennent en intégrant et en dérivant formellement celui de* f.

(1) M. B. Malgrange m'a fait observer que la simple considération du développement de Laurent de $F(w)$ en λ montre que $|A(\lambda)| < M$.

(2) C'est-à-dire en en prenant une primitive formelle.

12. Supposons maintenant $|f| < M$, et $O \notin \Lambda$.

D'après le théorème 5, on a $f \sim \Sigma A(\lambda) e^{i\lambda x}$, $|A(\lambda)| < 2M$, λ réels, et on sait que $\Sigma \frac{1}{|\lambda|^2} < \infty$, donc f admet des primitives successives $f_1 \dots f_p \sim \Sigma \frac{A(\lambda)}{(i\lambda)^p} e^{i\lambda x}$ telles que, pour $p \geqslant 2$ les développements sont absolument convergents. $f_2, f_3 \dots$ sont donc presque-périodiques. f et f_2 étant bornées, f_1 l'est aussi.

Supposons de plus que f admette une dérivée d'ordre n continue et bornée : $|f^{(n)}| < M_n$. Alors

$$f^{(n)} \sim \Sigma (i\lambda)^n A(\lambda) e^{i\lambda x} \quad \text{et} \quad |A(\lambda)| < \frac{2M_n}{|\lambda|^n}.$$

Si $n \geqslant 2$, f est presque-périodique.

Supposons seulement f uniformément continue et bornée. f est alors uniformément approchable sur la droite par des produits de composition $f * h$, h : fonction deux fois continûment dérivable, à support compact. Les fonctions $f * h$ sont presque-périodiques, donc f l'est aussi. Ce résultat est un cas particulier d'un théorème de Beurling [3].

Dans les hypothèses initiales, f_1 est uniformément continue et bornée, donc presque-périodique.

Théorème 7. — *Toute fonction moyenne-périodique bornée est, à une constante additive près, la dérivée d'une fonction presque-périodique.*

13. Si f est indéfiniment dérivable, nous noterons $f * T = T * f$ (et nous nommerons produit de composition de f par la distribution T) toute expression de la forme

$$f * \mu_0 + f' * \mu_1 \cdots + f^{(n)} * \mu_n, \qquad \mu_j \in \mathcal{E}', \qquad j = 0, 1, \dots n.$$

On définit pour les distributions T le support (réunion des supports des μ_j), la somme (de façon à assurer la distributivité du produit $f * T$), la transformée de Fourier

$$\mathfrak{T}(T) = \mathfrak{T}(\mu_0) - iw\mathfrak{T}(\mu_1) \cdots + (-iw)^n \mathfrak{T}(\mu_n)$$

(de sorte que, si h est une fonction indéfiniment dérivable à support compact, on a $\mathfrak{T}(h * T) = \mathfrak{T}(h)\mathfrak{T}(T)$), le cospectre (ensemble des zéros de $\mathfrak{T}(T)$).

D'après les théorèmes 3 et 6, on a $f * T = 0$ dès que $\mathfrak{T}(T)$ s'annule sur le spectre de f.

§ 2. — Nouvelles générations de $\tau(f)$ problèmes de quasi-analyticité et de prolongement.

Les problèmes posés dans ce paragraphe généralisent des problèmes, aujourd'hui classiques, posés par M. Mandelbrojt dans [22]. Le rapport entre la quasi-analyticité et les « théorèmes de fermeture » a été mis en évidence par M. Mandelbrojt dans [26] puis par M. Edwards dans [7].

1. Pour engendrer $\tau(f)$, on n'a pas besoin de toutes les translatées de f, mais seulement d'une « tranche » plus ou moins étroite. En effet, le sous-espace $\tau_l(f)$ de $\mathcal{E}$ engendré par les translatées $f(x+y)$, $0 < y < l$, coïncide avec $\tau(f)$ dès que la nullité pour $0 < y < l$ de

$$g(y) = -\int f(x+y)\, d\mu(-x), \qquad \mu \in \mathcal{E}',$$

entraîne $g(y) \equiv 0$. $g(y)$ appartenant à $\tau(f)$, il suffit pour cela que l soit supérieure à la moyenne-période de f.

Mais ce n'est pas nécessaire. Pour avoir $\tau_l(f) = \tau(f)$, il suffit que la seule fonction de $\tau(f)$ s'annulant sur $[0, l]$ soit la fonction nulle. C'est le cas par exemple, si petit que soit l, quand le spectre de f est constitué d'entiers positifs.

Définition. — *Appelons classe quasi-analytique* I_l (*cl.q.a.* I_l) *une classe de fonctions telles que chacune soit définie par ses valeurs sur un intervalle arbitraire de longueur l.*

Pour avoir $\tau_l(f) = \tau(f)$, il suffit que $\tau(f)$ soit une cl.q.a. I_l. Nous sommes conduits au problème suivant :

Problème n° 1. — *Soit* Λ *une suite donnée, de points simples ou multiples du plan complexe; appelons* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *le sous-espace de* $\mathcal{E}$ *engendré par les exponentielles-monômes de spectre contenu dans* Λ. *Déterminer l de façon que* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *soit une cl.q.a.* I_l.

Remarque. — $\mathcal{E}(\Lambda)$ étant invariant par translation, on pourra toujours supposer I_l ramené à l'intervalle $(-l, 0)$.

2. Plus généralement, on peut chercher à identifier à $\tau(f)$ le sous-espace $\tau_{\mathrm{E}}(f)$ de $\mathcal{E}$ engendré par les translatées $f(x+y)$,

où y parcourt un ensemble E mesurable. Si $\mathrm{I}(\alpha)$ est la mesure du complémentaire de cet ensemble sur le segment $[0, \alpha]$, il suffit, pour avoir $\tau_{\mathrm{E}}(f) = \tau(f)$, que la seule fonction $g \in \tau(f)$, telle que $\int_0^\alpha |g| < \mathrm{I}(\alpha)$ pour $\alpha > 0$ assez petit, soit la fonction nulle.

DÉFINITION. — *Étant donné une fonction positive* $\mathrm{I}(\alpha)$ $(\alpha > 0)$, *appelons classe quasi-analytique* $\mathrm{I}(\alpha)$ (*cl.q.a.* $\mathrm{I}(\alpha)$) *une classe de fonctions telles que chacune soit définie par l'ensemble de ses valeurs approchées à* $\varepsilon(x)$ *près au voisinage de l'origine* $(0 < x < x_0)$, *dès que* $\int_0^\alpha |\varepsilon(x)| dx < \mathrm{I}(\alpha)$ *pour* $0 < \alpha < x_0$.

Pour avoir $\tau_{\mathrm{E}}(f) = \tau(f)$, il suffit que $\tau(f)$ soit une classe $\mathrm{I}(\alpha)$ ($\mathrm{I}(\alpha)$: mesure du complémentaire de E sur $[0, \alpha]$).

Nous sommes conduits au problème suivant :

PROBLÈME N° 2. — Λ *étant donnée, déterminer* $\mathrm{I}(\alpha)$ *de façon que* $\mathcal{E}(\Lambda)$ (*défini au* 1) *soit une cl. q. a.* $\mathrm{I}(\alpha)$.

3. Si on a $\tau_l(f) = \tau(f)$ si petit que soit l, et si f est indéfiniment dérivable, on peut chercher à identifier à $\tau(f)$ le sous-espace $\delta(f)$ de $\mathcal{E}$ engendré par les dérivées successives $f^{(n)}(x)$ de f $(n = 0, 1, \ldots)$.

DÉFINITIONS. — $\{\mathrm{M}_n\}$ *étant une suite croissante, désignons par* $\mathrm{C}\{\mathrm{M}_n\}$ *l'ensemble des fonctions* f *indéfiniment dérivables telles que* $|f^{(n)}(x)| < k\mathrm{M}_n$ *sur toute la droite,* k *constante* $(n \geqslant n_0)$;

par $\mathrm{K}^*\{\mathrm{M}_n\}$ *la réunion des* $\mathrm{C}\{k^n\mathrm{M}_n\}$ *pour toutes les valeurs de* $k > 0$;

par $\mathrm{C}_{\mathrm{I}}\{\mathrm{M}_n\}$ *l'ensemble des fonctions* f *indéfiniment dérivables sur un intervalle* I *contenant l'origine, telles que* $|f^{(n)}(x)| < k\mathrm{M}_n$ *sur* I, k *constante;*

par $\mathrm{K}_{\mathrm{I}}\{\mathrm{M}_n\}$ *la réunion des* $\mathrm{C}_{\mathrm{I}}\{k^n\mathrm{M}_n\}$ *pour toutes les valeurs de* $k > 0$;

par $\mathrm{K}\{\mathrm{M}_n\}$ *l'intersection des* $\mathrm{K}_{\mathrm{I}}\{\mathrm{M}_n\}$ *pour tous les intervalles* I.

Si $f \in \mathrm{C}\{\mathrm{M}_n\}$ (resp. $\mathrm{K}\{\mathrm{M}_n\}$), il en est de même pour $g = -f * \mu$, $\mu \in \mathcal{E}'$. Pour avoir $\tau(f) = \delta(f)$, il faut et suffit que

$$\int f^{(n)}(x)\, d\mu(-x) = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

entraîne
$$\int f(x+y)\, d\mu(-x) \equiv 0.$$

Il suffit donc que la seule fonction g de $\tau(f)$, appartenant à $C\{M_n\}$ (resp. $K\{M_n\}$) et s'annulant avec toutes ses dérivées en 0 soit la fonction nulle.

DÉFINITION. — *Appelons classe quasi-analytique* D (*cl.q.a.* D) *une classe de fonctions indéfiniment dérivables telles que chacune soit définie par les valeurs de ses dérivées successives à l'origine.*

Pour avoir $\tau(f) = \delta(f)$, il suffit que

$$\tau(f) \cap C\{M_n\} \quad (\text{resp.}\, \tau(f) \cap K\{M_n\})$$

soit une cl. q. a. D. Et même il suffit que

$$\tau(f) \cap C_I\{M_n\} \quad (\text{resp.}\, \tau(f) \cap K_I\{M_n\})$$

soit une cl. q. a. D. Nous sommes conduits au problème suivant :

PROBLÈME N° 3. — Λ *étant donnée, déterminer* $C\{M_n\}$ (*resp.* $K\{M_n\}$, $K^*\{M_n\}$, $C_I\{M_n\}$, $K_I\{M_n\}$) *pour que* $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ (*resp.* $\mathcal{E}(\Lambda) \cap K\{M_n\}$ *etc.*) *soit une cl. q. a.* D.

REMARQUE ([22] chap. VIII). — Pour que $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C_I\{M_n\}$ (resp. $\mathcal{E}(\Lambda) \cap K_I\{M_n\}$) soit une cl.q.a. D, quel que soit I, il suffit que $\mathcal{E}(\Lambda)$ soit une cl.q.a. $I(\alpha)$, avec

$$I(\alpha) = \min_n \frac{M_n \alpha^{n+1}}{(n+1)!} \left(\text{resp. } I(\alpha) = \min_n \frac{M_n (k\alpha)^{n+1}}{(n+1)!},\ k \text{ constante}\right).$$

En effet, la formule de Taylor montre que $g(\alpha)$ est alors majorée par $k_1 I'(\alpha)$, k_1 constante.

Naturellement, cette remarque n'est utilisable que si $\mathcal{E}(\Lambda)$ est une cl.q.a. I_l si petit que soit l.

Nous serons amené à résoudre un problème plus général que le problème n° 3, où $\mathcal{E}(\Lambda)$ est remplacé par l'espace $\mathcal{E}_I(\Lambda)$ que nous allons maintenant définir.

4. Le problème posé au 1 est relatif à *l'unicité* d'une fonction de $\mathcal{E}(\Lambda)$ connue sur un segment. Il est naturel de se poser la question de *l'existence* d'une fonction de $\mathcal{E}(\Lambda)$ prenant des valeurs données sur un segment I.

Appelons $\mathcal{E}_I$ *l'espace des fonctions continues sur* I, $\mathcal{E}_I(\Lambda)$ *le sous-espace de* $\mathcal{E}_I$ *engendré par les exponentielles-monômes de* *spectre contenu dans* Λ. Une condition nécessaire pour pouvoir prolonger dans $\mathcal{E}(\Lambda)$ une fonction f_{I} donnée sur I, est évidemment que f_{I} appartienne à $\mathcal{E}_{\mathrm{I}}(\Lambda)$. Mais c'est loin d'être une condition suffisante.

En effet, on peut avoir $\mathcal{E}_{\mathrm{I}}(\Lambda) = \mathcal{E}_{\mathrm{I}}$. Il faut et suffit pour cela que toute mesure $\mu \in \mathcal{E}'$ de support contenu dans I, et dont la transformée de Fourier s'annule sur Λ, soit réduite à zéro. Si on peut alors, comme solution du problème n° 1, prendre $l < |\mathrm{I}|$, il existe des fonctions de $\mathcal{E}_{\mathrm{I}}(\Lambda)$ non prolongeables en fonctions de $\mathcal{E}(\Lambda)$: à savoir les fonctions nulles sur un segment de longueur l. C'est le cas si Λ est la suite des entiers positifs ($|\mathrm{I}| < 2\pi$, $l > 0$ quelconque).

Même si $\mathcal{E}_{\mathrm{I}}(\Lambda) \neq \mathcal{E}_{\mathrm{I}}$, il peut exister des fonctions de $\mathcal{E}_{\mathrm{I}}(\Lambda)$ non prolongeables en fonctions de $\mathcal{E}(\Lambda)$. Prenons par exemple pour Λ la suite $\{i\lambda_n\}$, λ_n positifs, $\Sigma \frac{1}{\lambda_n} < \infty$; on vérifie, quel que soit I, $\mathcal{E}_{\mathrm{I}}(\Lambda) \neq \mathcal{E}_{\mathrm{I}}$ (cf. § 4). Or une série telle que $\Sigma a_n e^{-\lambda_n x}$ peut converger sur une demi-droite, au delà de laquelle elle n'est pas prolongeable.

Nous sommes donc conduits au problème suivant :

Problème n° 4. — *Donner des conditions pour qu'une fonction de* $\mathcal{E}_{\mathrm{I}}(\Lambda)$ *soit prolongeable en une fonction de* $\mathcal{E}(\Lambda)$.

§ 3. — Définition de f par ses valeurs sur un segment.

Nous tenterons dans ce paragraphe de donner des solutions aux problèmes n° 1 et n° 4. Auparavant, il nous faut préciser le sens de quelques termes, dont nous aurons à faire un fréquent usage.

1. — Quelques définitions concernant les suites. — La plupart des définitions que nous allons donner se trouvent dans [2] et [25].

Dans le plan de la variable $w = u + iv$, donnons-nous une suite Λ et un angle A ouvert, de sommet O, contenant au moins l'un des points ± 1. Pour simplifier, nous admettrons désormais (sauf précision contraire) que Λ ne contient pas O. Toutes les définitions données seront relatives à Λ et A.

La *fonction de distribution* (de Λ dans A) est le nombre $N(r)$ d'éléments de Λ situés dans A et dans le cercle $|w| \leqslant r$.

La *fonction de densité* est $D(r) = \dfrac{N(r)}{n(r)}$, avec $n(r) = r$ ou $2r$ suivant que A contient un seul des points ± 1 ou les deux.

La *fonction de densité moyenne* est $\overline{D}(r) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^r D(t)\,dt$.
La *distribution logarithmique* est

$$L(r) = \int_0^r \frac{dN(t)}{n(t)} = D(r) + \int_0 \frac{D(t)}{t}\,dt = D(r) + \overline{D}(r) + \int_0^r \frac{\overline{D}(t)}{t}\,dt,$$

$L(r)$ est la partie discontinue de $D(r)$.
Les *densités*

$\left\{\begin{array}{lll} \textit{supérieure} & \textit{moyenne sup.} & \textit{moyenne logarithmique sup.} \\ \textit{inférieure} & \textit{moyenne inf.} & \textit{moyenne logarithmique inf.} \end{array}\right.$

sont respectivement

$$\begin{array}{lll} D^{\bullet} = \overline{\lim}\, D(r) & \overline{D^{\bullet}} = \overline{\lim}\, \overline{D}(r) & \widehat{D^{\bullet}} = \overline{\lim}\, \dfrac{L(r)}{\log r} \\ D^{\bullet} = \overline{\lim}\, D(r) & \overline{D^{\bullet}} = \overline{\lim}\, \overline{D}(r) & \widehat{D^{\bullet}} = \overline{\lim}\, \dfrac{L(r)}{\log r} \end{array} \quad (r \to \infty)$$

Λ est *mesurable* et de *densité* D si $D^{\bullet} = D_{\bullet} = D$
Λ est de plus *bien répartie* si $N(r) - Dn(r) = O(1)$
Λ est *régulière* s'il existe $h > 0$ tel que

$$N(r+h) - N(r) \leqslant 1 \quad (0 < r < \infty).$$

La *densité maximum* de Λ, soit $\underset{A}{\text{dens. max.}}\,\Lambda$, est la borne inférieure des densités des suites mesurables contenant Λ. Polya a démontré (cf. [2], note I) que cette borne est atteinte, et que

$$\underset{A}{\text{dens. max.}}\,\Lambda = \lim_{\xi \to 1-0}\, \overline{\lim_{r \to \infty}}\, \frac{N(r) - N(\xi r)}{n(r) - n(\xi r)}.$$

La *densité minimum* de Λ, soit $\underset{A}{\text{dens. min.}}\,\Lambda$, est la borne supérieure des densités des suites mesurables contenues dans Λ. On a

$$\underset{A}{\text{dens. min.}}\,\Lambda = \lim_{\xi \to 1-0}\, \underline{\lim}_{r \to \infty}\, \frac{N(r) - N(\xi r)}{n(r) - n(\xi r)}.$$

Si Λ_1 et Λ_2 sont complémentaires par rapport à une suite mesurable Λ de densité D (c'est-à-dire si l'ordre de multiplicité de chaque élément de Λ est la somme de ses ordres de multiplicité dans Λ_1 et Λ_2), on a

$$\text{dens. max. } \Lambda_1 + \text{dens. min. } \Lambda_2 = \text{D}.$$

La *densité de répartition* de Λ, soit Δ, est la borne inférieure des densités des suites bien réparties Λ^* contenant Λ.

Calculons Δ.

Posons $\Delta_h = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\text{N}(t+h) - \text{N}(t)}{n(h)}$. Il existe des suites Λ^* de densité $\Delta_h + \varepsilon$, si petit que soit $\varepsilon > 0$; donc $\Delta \leqslant \underline{\lim\limits_{h\to\infty}} \Delta_h$. D'autre part, si Λ^* a pour densité D^*, on a

$$\text{N}^*(t+h) - \text{N}^*(t) = n(h)\text{D}^* + \text{O}(1)\,(t,\, h \to \infty)$$

donc

$$\text{D}^* > \Delta_h - \text{O}(1)\,(h\to\infty) \qquad \text{et} \qquad \Delta \geqslant \overline{\lim_{h\to\infty}}\, \Delta_h.$$

Donc
$$\Delta = \lim_{h\to\infty} \Delta_h.$$

Toute suite régulière admet une densité de répartition finie.

On a les inégalités évidentes

$$\text{dens. min. } \Lambda \leqslant \text{D}_{\cdot} \leqslant \overline{\text{D}}_{\cdot} \leqslant \widehat{\text{D}}_{\cdot} \leqslant \widehat{\text{D}}^{\cdot} \leqslant \overline{\text{D}}^{\cdot} \leqslant \text{D}^{\cdot} \leqslant \text{dens. max. } \Lambda \leqslant \Delta.$$

Aucun de ces signes $\leqslant$ ne peut être remplacé par $=$, ainsi qu'on s'en assure par des exemples.

Il nous arrivera de ne pas préciser l'angle A.

Si Λ est définie comme suite positive, A sera toujours supposé contenir $+1$ et non -1.

Si Λ est définie comme suite réelle, A sera en général supposé contenir $+1$ et -1. Cependant, Λ ne sera dite mesurable, bien répartie ou régulière que si elle l'est dans tout angle A.

Les mêmes conventions vaudront si Λ *s'accumule angulairement* sur l'axe réel > 0 (resp. sur l'axe réel), c'est-à-dire si $\text{Arg}\,\lambda$ (mod. 2π) (resp. (mod. π)) et $|\lambda|^{-1}$ tendent simultanément vers 0 sur Λ.

2. Classes quasi-analytiques I_l. — M. Levinson a établi, sur le cospectre des mesures $\mu \in \mathcal{E}'$ l'important théorème que voici ([20], chap. III).

THÉORÈME 1. — *Soit Σ le cospectre d'une mesure $\mu \in \mathcal{E}'$ dont le segment-support a pour longueur L_μ. Σ est mesurable et de même densité $D = \frac{L_\mu}{2\pi}$ dans tous les angles A. La fonction $\frac{|v|}{u^2 + v^2}$ prend sur Σ une suite de valeurs dont la somme est bornée.*

De ce théorème nous allons tirer une réponse au problème nº 1.

Soit $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$ une fonction moyenne-périodique de spectre S, $\mu \in \mathcal{E}'$, $\mu \not\equiv 0$, telle que $f * \mu \equiv 0$ et $g = f^- * \mu$. Rappelons que S est l'ensemble des pôles, comptés avec leur ordre de multiplicité, de $\frac{\mathcal{C}(g)}{\mathcal{C}(\mu)}$. Soit S′ la suite complémentaire de S par rapport au cospectre de μ.

D'après le théorème 1, on a

$$2\pi \operatorname*{dens.max.}_{A} S' + 2\pi \operatorname*{dens.min.}_{A} S = L_\mu$$

(longueur du segment-support de μ).

Or $\mathcal{C}(g)$ s'annule sur S′. D'après le même théorème, on a

$$2\pi \operatorname*{dens.max.}_{A} S' \leqslant L_g$$

(longueur du segment-support de g).

Si f s'annule sur $[-l, 0]$, on a $L_g \leqslant L_\mu - l$. On a donc

$$l \leqslant 2\pi \operatorname*{dens.min.}_{A} S \leqslant 2\pi \operatorname*{dens.min.}_{A} \Lambda$$

THÉORÈME 2. — *Si $\mathcal{E}(\Lambda) \neq \mathcal{E}$, $\mathcal{E}(\Lambda)$ est une cl. q. a. I_l dès que $l > 2\pi \operatorname*{dens.min}_{A} \Lambda$ (pour au moins un A).*

Ce résultat, démontré par Levinson quand Λ est une suite d'entiers ([20], chap. II), constitue une bonne réponse au problème nº 1. Pour certaines suites Λ mesurables, il peut être encore précisé comme nous le verrons au § 4 (cf. aussi [17]).

3. Moyenne-période et problème de prolongement. — Appelons moyenne-période attachée à Λ, et désignons par L, la borne supérieure des longueurs des segments I pour lesquels $\mathcal{E}_I(\Lambda) = \mathcal{E}_I$; autrement dit, la borne inférieure des longueurs des segments-supports des $\mu \in \mathcal{E}'$, dont le cospectre contient Λ.

Le théorème 1 nous permet les évaluations suivantes :

a) $L \geqslant 2\pi \operatorname{dens.max}_{A} \Lambda$ (quel que soit A).

b) si $\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{|\mathfrak{J}\lambda|}{|\lambda|^2} = \infty$, alors $L = \infty$.

D'autre part, nous verrons au § 4, 1, que

c) si $\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{|\lambda|} < \infty$, alors $L = 0$.

Soit f une fonction continue sur la droite, non nécessairement moyenne-périodique, telle que $\tau(f) = \tau_l(f)$. C'est dire que l'ensemble des fonctions $f * \mu$, $\mu \in \mathcal{E}'$, forme une cl. q. a. I_l. Soit f_I la restriction de f au segment I. On a évidemment

$$f_I \in \mathcal{E}_I(\Lambda) \qquad \text{pour} \qquad |I| < L.$$

Supposons qu'existe un segment I de longueur $|I| > L + l + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, tel que $f_I \in \mathcal{E}_I(\Lambda)$. Alors, pour toute mesure μ dont le cospectre contient Λ et dont le support est contenu dans $[0, L + \varepsilon]$, (il existe une infinité de telles $\mu \not\equiv 0$, dont l'intersection des cospectres se réduit à Λ), $f * \mu$ s'annule sur un segment de longueur supérieure à l. Donc $f * \mu \equiv 0$. Donc $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$.

Théorème 3. — *Si $\tau(f) = \tau_l(f)$ et si $f_I \in \mathcal{E}_I(\Lambda)$ sur un segment* I *de longueur* $|I| > L + l$, L *étant la moyenne-période attachée à* Λ, *alors* $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$.

Corollaire. — *Si f appartient à une cl. q. a.* D $K\{M_n\}$, *et si* $f_I \in \mathcal{E}_I(\Lambda)$ *pour* $|I| > L$, *alors* $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$.

Ce corollaire généralise un théorème de Mandelbrojt ([22], p. 143).

Le théorème 3 répond au problème n° 4, mais il ne permet de prolonger une fonction de $\mathcal{E}_I(\Lambda)$ dans $\mathcal{E}(\Lambda)$ que lorsqu'elle est, d'autre façon, déjà connue sur toute la droite. Il est intéressant d'établir des critères de prolongement ne faisant intervenir que les valeurs de la fonction sur I. Voici un résultat que nous établirons au chapitre II.

Théorème 4. — *Si Λ est symétrique et s'accumule angulairement sur l'axe réel, toute fonction de $\mathcal{E}_I(\Lambda) \cap K_I\{n!\}$ est prolongeable sur la droite en une fonction de $\mathcal{E}(\Lambda) \cap K\{n!\}$, dès que* $|I| > 2\pi \operatorname{dens.max.} \Lambda$.

On ne peut pas remplacer les hypothèses relatives à Λ et I par l'hypothèse que Λ est contenue dans le cospectre d'une mesure dont le support est intérieur à I, ainsi qu'en témoigne l'exemple donné au § 2, 4.

Le théorème 4 permet de préciser l'évaluation *a*) ; il indique en effet que sur le segment I existent des fonctions n'appartenant pas à $\mathcal{E}_I(\Lambda)$, à savoir les fonctions analytiques ayant une singularité sur la droite.

THÉORÈME 5. — *Si* Λ *est symétrique et s'accumule angulairement sur l'axe réel, on a* $L = 2\pi$ dens. max. Λ.

C'est la confirmation d'une hypothèse de M. L. Schwartz ([33], p. 130).

4. Problème du prolongement et densité de répartition. — Le théorème 4 ne permet de prolonger une fonction donnée sur un segment que si elle est analytique. En imposant à Λ et à I des conditions plus restrictives, on peut se contenter de supposer la fonction donnée indéfiniment dérivable. Nous allons en effet établir le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — Λ *étant une suite réelle régulière de densité de répartition* Δ, *toute fonction de* $\mathcal{E}_I(\Lambda) \cap C_I\{M_n\}$ *est prolongeable en une fonction (presque-périodique) de* $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_{n+p}\}$, *où p ne dépend que de* Λ, *dès que* $|I| > 2\pi\Delta$.

Pour la démonstration, nous pouvons supposer I symétrique par rapport à 0, Λ bien répartie et $\Delta = 1$, soit

$$\Lambda = \{\lambda_j\} \qquad \text{avec} \qquad |\lambda_j - j| < h, \qquad (j = \cdots -1,\ 0,\ 1,\ \ldots).$$

Posons $\quad C(w) = (w - \lambda_0) \prod_1^\infty \left(1 - \frac{w}{\lambda_j}\right)\left(1 - \frac{w}{\lambda_{-j}}\right).$

D'après un lemme de Lévine ([16] ; voir aussi [25], p. 63),

1° $C(w)$ est de type exponentiel π, et $|C(x)| < K_1(x^2+1)^{2h}$.

2° $|C'(\lambda_j)| > K_2|\lambda_j|^{-4h}$ (K_1, K_2 constantes).

Étant donné X réel, cherchons à construire une distribution $T = T_X$ somme d'une distribution $\theta = \theta_X$ portée par $[-\pi, \pi]$ et d'une mesure de Dirac δ_X en X, telle que

$$\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(\theta) + \mathcal{C}(\delta_X) = \Theta(w) + e^{-iwX}$$

s'annule sur Λ.

On est ramené à la recherche d'une fonction $\Theta(w)$ vérifiant les conditions suivantes : 1) $\Theta(w)$ est de type exponentiel π, à croissance lente sur l'axe réel; 2) $\Theta(\lambda_j) = -e^{-\lambda_j X}$ pour tout j. On peut prendre

$$\Theta(w) = w^{N} C(w) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_j}{w - \lambda_j}$$

avec $\Sigma|a_j| < \infty$, ce qui, grâce à la première partie du lemme de Lévine, assure 1), et

$$\lambda_j^{N} C'(\lambda_j) a_j = -e^{-i\lambda_j X}$$

ce qui assure 2). En vertu de la deuxième partie du lemme de Lévine, ces deux conditions sont compatibles dès qu'on prend $N > 4h + 2$.

Remarquons que N et $|a_j|$ ne dépendent pas de X. On peut ainsi écrire $\Theta(w) = P(w)Q(w)$, où $P(w) = w^{N} \prod_{1}^{p-N} \left(1 - \frac{w}{\lambda_j}\right)$ est un polynôme, indépendant de X, de degré $p > N + 4h + 1$, et $Q(w)$ une fonction de type exponentiel π, telle que

$$\int |Q(u)|\, du < B < \infty,$$

B ne dépendant pas de X. On a donc, pour toute fonction f indéfiniment dérivable,

$$(1) \qquad f * \theta = \sum_{1}^{p} f^{(\nu)} * \mu_\nu$$

avec $\int |d\mu_\nu| < B_\nu$ indépendant de X.

Soit $f_I \in \mathcal{E}_I(\Lambda) \cap C_I\{M_n\}$. L'égalité

$$(2) \qquad f(x + X) = -(f_I * \theta)(x), \qquad X \notin I$$

définit $f(x) = f(x, X)$ au voisinage de X, et on peut dans (2) remplacer $f_{(I)}(x)$ par $f_{(I)}(x) - \Sigma d_j e^{i\lambda_j x}$. Or, d'après le théorème 6 du § 1, si petits que soient les $\varepsilon_\nu > 0$, il existe des coefficients $d_j = d_j(\{\varepsilon_\nu\})$, tels que $|f_I^{(\nu)}(x) - \Sigma d_j (i\lambda_j)^\nu e^{i\lambda x}| < \varepsilon_\nu (\nu = 1, 2, \dots p)$. D'après (1) et (2), on a donc $|f(x) - \Sigma d_j e^{i\lambda x}| < \sum_{1}^{p} B_\nu \varepsilon_\nu$, au voisinage de X. En faisant tendre les ε_ν vers 0, on a une suite d'expressions $\Sigma d_j e^{i\lambda x}$ qui converge uniformément sur toute la droite vers une fonction limite $\in \mathcal{E}(\Lambda)$, prolongeant f_I et définie par (2) au voisinage de chaque point. D'après (1) et (2), on a encore $|f^{(n)}(x)| < \sum_{1}^{p} M_{n+\nu} B_\nu$, donc $f \in C\{M_{n+p}\}$. C. Q. F. D.

Le théorème 6 fournit une bonne réponse au problème n° 4. Il est facile de voir que, plus que les « densités » ordinairement considérées, c'est bien la « densité de répartition » qui détermine la possibilité de prolongement d'une fonction de $\mathcal{E}_I(\Lambda)$. Ainsi, si Λ contient des « paquets » d'entiers consécutifs dont la « largeur » croît indéfiniment

$$\left(\text{soit } \overbrace{p_1 - 1,\ p_1,\ p_1 + 1},\quad \overbrace{p_2 - 2,\ p_2 - 1,\ \ldots\ p_2 + 2},\ \ldots\ \overbrace{p_n - n,\ \ldots\ p_n + n},\ \ldots\right),$$

la densité maximum peut être nulle, tandis que $\Delta = 1$. Or, si $p_n < n^k$, k constante, il existe une série de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{ip_n x} S_n(x) \qquad \text{avec} \qquad S_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijx},$$

qui converge vers une fonction indéfiniment dérivable pour $|x| < \pi - 2\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ donné, sans représenter une fonction périodique (puisque les coefficients ne tendent pas vers 0); il suffit de prendre pour $S_n(x)$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de Fourier d'une fonction indéfiniment dérivable, nulle pour $|x| < \pi - \varepsilon$.

Les hypothèses du théorème 6 peuvent être affaiblies en supposant f_I, non plus indéfiniment dérivable sur I, mais seulement p fois dérivable ($p > 8h + 4$); alors $f_I \in \mathcal{E}_I(\Lambda)$ est encore prolongeable en une fonction bornée de $\mathcal{E}(\Lambda)$ L'hypotèse de dérivabilité sur I n'est sans doute pas essentielle; nous ne sommes pas parvenus à l'éliminer.

§ 4. Classes quasi-analytiques D et I(α).

Ce paragraphe est consacré à l'étude des problèmes n° 3 et n° 4.

Nous aurons recours à deux méthodes principales. La première, qui est essentiellement celle de M. Mandelbrojt dans [22], a déjà été exploitée par M. Lalagüe et moi-même [12]. Elle consiste à construire une suite de mesures à supports décroissants, orthogonales aux fonctions de $\mathcal{E}(\Lambda)$. Elle s'applique dès que la moyenne-période attachée à Λ est nulle, mais donne surtout des résultats intéressants quand Λ est très rare.

La seconde méthode repose sur la considération de la transformée de Fourier (= de Fourier-Carleman) d'une fonction bornée de $\mathcal{E}(\Lambda)$: elle ne s'applique donc que lorsque Λ est réelle. En appliquant à cette transformée de Fourier différents théorèmes de la théorie des fonctions, on obtient des types de résultats assez différents. Cette méthode est essentiellement, quoique d'une manière plus ou moins cachée, celle utilisée par MM. Lévine et Lifschitz [19], Lévine [18], Hirschman et Jenkins [9] pour définir des cl.q.a. $I(\alpha)$ plus générales que celles de Mandelbrojt. La simple formule de Jensen permet d'améliorer leurs résultats et d'obtenir, relativement aux cl.q.a. D des résultats très précis quand Λ est assez rare.

La formule de Carleman, les résultats du type Mandelbrojt-Mac-Lane conduisent, relativement aux cl.q.a. D, à des généralisations du théorème de Denjoy-Carleman.

Une troisième méthode pour aborder le problème n° 3 a été introduite par M. Lalagüe [13] [14]. Elle repose sur l'étude des relations d'inclusion entre classes $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ (resp. $K\{M_n\}$). Nous ne l'examinerons pas ici.

Notation. — Dans ce paragraphe, les éléments $\lambda = \lambda_j$ de Λ seront rangés par modules non-décroissants ($j = 1, 2, \ldots$).

1. **Première méthode.** — Dans ce qui suit, α parcourt un ensemble de valeurs positives tendant vers 0. Supposons qu'existe une famille de fonctions entières $M_\alpha(w)$, de type exponentiel $\frac{\alpha}{2}$, absolument sommables sur la droite réelle, s'annulant sur Λ et prenant en O la valeur 1. C'est dire d'après le théorème de Paley-Wiener, qu'existe une famille de mesures $\mu_\alpha \in \mathcal{E}'$ identifiables à des fonctions μ'_α, de supports contenus dans les segments $\left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$, telles que $f * \mu_\alpha \equiv 0$ pour toute $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$. C'est dire que toutes les fonctions de $\mathcal{E}(\Lambda)$ ont une moyenne-période nulle.

Soit $I(\alpha)$ une fonction positive donnée, $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$,

$$\int_0^\alpha |f| < I(\alpha), \qquad \mathcal{T}(f) = F(w),$$
$$g_\alpha = -f^+ \ \mu_\alpha, \qquad \mathcal{T}(g_\alpha) = G_\alpha(w).$$

On a

$$G_\alpha(0) = F(0)M_\alpha(0), \qquad \text{soit} \qquad \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} g_\alpha(x)\,dx = \sqrt{2\pi}\,F(0).$$

Comme

$$|g_\alpha(x)| \leqslant \max|\mu'_\alpha| \int_0^\alpha |f| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, I(\alpha) \int |M_\alpha(u)|,$$

on a $$\alpha I(\alpha) \int |M_\alpha(u)| \geqslant 2\pi |F(0)|.$$

Si donc

$$(1) \qquad \underline{\lim}\, \alpha I(\alpha) \int |M_\alpha(u)| = 0.$$

on a $F(0) = 0$. Or on peut, sans modifier $I(\alpha)$ (du moins pour $\alpha < 1$), changer $f(x)$ en $\int_0^x f(\xi)\,d\xi$ et (d'après § 1, 11) $F(w)$ en $\frac{F(w)}{iw}$. La condition (1) entraîne donc $F(0) = F'(0) = \cdots = 0$, soit $f \equiv 0$.

Théorème 1. — *Les fonctions* $M_\alpha(w)$ *étant définies ci-dessus* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *est une cl. q. a.* $I(\alpha)$ *dès que*

$$\underline{\lim}_{\alpha \to 0}\, \alpha I(\alpha) \int |M_\alpha(u)| = 0.$$

2. **Applications : classes quasi-analytiques $I(\alpha)$.** — Si Λ est à distribution logarithmique bornée $\left(\Sigma \frac{1}{|\lambda|} < \infty\right)$, on peut prendre

$$M_\alpha(w) = \Pi\left(1 - \frac{w}{\lambda}\right) \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\sin \alpha_j w}{\alpha_j w}$$

$\{\alpha_j\}$ étant une suite positive telle que

$$\Sigma \alpha_j = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{et} \qquad \max_n (\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n r^{n+1}) > K(\alpha) r^2 \Pi\left(1 + \frac{r}{|\lambda|}\right),$$

$K(\alpha)$ ne dépendant pas de $r > 0$. La possibilité de construire une telle suite $\{\alpha_j\}$ est connue (cf. [22], chap. v). L'évaluation de $\int |M_\alpha(u)|$ à partir de là est plus ou moins intéressante suivant la forme de Λ : le principe en consiste à majorer $\Pi\left|1 - \frac{u}{\lambda}\right|$ par une expression de la forme $\max_n \frac{|u|^n}{M_n}$, et

$$\prod_{j=0}^{\infty} \frac{\sin \alpha_j u}{\alpha_j u} \qquad \text{par} \qquad \min_n |\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n u^{n+1}|^{-1}.$$

Nous allons expliciter le résultat dans trois cas particuliers.

A) Λ *est réelle et symétrique, à distribution logarithmique bornée* $(\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1} = \mu_j > 0)$.

Soit $\{\gamma_j\}$ une suite positive, $\sum_0^\infty \gamma_j = \frac{1}{4}$, $\lim_{j\to\infty} \gamma_j\mu_j = \infty$. Posons

$$M_\alpha(w) = \prod_{j=1}^\infty \left(1 - \frac{w^2}{\mu_j^2}\right) \prod_{j=0}^\infty \left(\frac{\sin \gamma_j \alpha w}{\gamma_j \alpha w}\right)^2.$$

Pour $\mu_j \leqslant u \leqslant \mu_{j+1}$, $|M_\alpha(u)|$ et $\gamma_0^2\alpha^2u^2|M_\alpha(u)|$ sont majorés par

$$\prod_{j=1}^n \frac{\frac{u^2}{\mu_j^2} - 1}{\gamma_j^2\alpha^2u^2} < \prod_{j=1}^n (\mu_j\gamma_j\alpha)^{-2}.$$

Donc

$$\int |M_\alpha(u)| = 2\int_0^1 + 2\int_1^\infty < 2\left(1 + \frac{1}{\gamma^2\alpha^2}\right) \max_n \frac{1}{(\mu_1\gamma_1 \ldots \mu_n\gamma_n\alpha^n)^2}.$$

Si $\{m_j\}$ est une suite positive tendant vers ∞, telle que $\sum^\infty \frac{m_j}{\mu_j} < \infty$, $\mathcal{E}(\Lambda)$ est donc une cl.q.a. $I(\alpha)$ dès que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{I(\alpha)}{\alpha \min_n (m_1 \ldots m_n\alpha^n)^2} < \infty. \tag{2}$$

En effet, il suffit de poser $\mu_j\gamma_j = km_j$ pour j assez grand, $k > 1$.

Si $\{l_j\}$ est une suite positive croissante tendant vers ∞, telle que $\sum^\infty \frac{l_j}{|\lambda_j|} < \infty$, on peut remplacer le dénominateur de (2) par $\alpha \min_n (l_1 \ldots l_n\alpha^n)$.

B) Λ *est symétrique, à distribution logarithmique bornée, et la suite* $\frac{|\mu_j|}{j}$ *est non-décroissante* $(\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1} = \mu_j)$.

$M_\alpha(w)$ sera définie comme en A). On a

$$\Pi\left|1 - \frac{u^2}{\mu_j^2}\right| \leqslant \Pi\left(1 + \frac{u^2}{|\mu_j|^2}\right) = 1 + u^2\Sigma\frac{1}{|\mu_j|^2} + \cdots$$
$$+ u^{2n}\Sigma\frac{1}{|\mu_{j_1}\ldots\mu_{j_n}|^2} + \cdots < \frac{k^2}{k^2-1}\max_n\left((ku)^{2n}\Sigma\frac{1}{|\mu_{j_1}\ldots\mu_{j_n}|^2}\right).$$

Pour calculer $\Sigma \frac{1}{|\mu_{j_1} \dots \mu_{j_n}|^2}$, observons que $\Sigma \frac{1}{|j_1 \dots j_n|^2}$ est le coefficient de $(\pi u)^{2n}$ dans le développement de

$$\frac{\operatorname{Sh} \pi u}{\pi u} = \Pi \left(1 + \frac{u^2}{j^2}\right).$$

D'où

$$\Sigma \frac{1}{|\mu_{j_1} \dots \mu_{j_n}|^2} \leqslant \frac{1}{|\mu_1 \dots \mu_n|^2} \Sigma \left(\frac{1 \dots n}{j_1 \dots j_n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{|\mu_1 \dots \mu_n|^2} \frac{\pi^{2n}(n\,!)^2}{(2n+1)\,!} < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{|\mu_1 \dots \mu_n|^2}$$

et $\Pi \left|1 - \frac{u^2}{\mu_j^2}\right| < k_1 \max\limits_n \frac{(k_2 u)^{2n}}{|\mu_1 \dots \mu_n|^2}$, k_1 et k_2 constantes. $|M_\alpha(u)|$ et $\gamma_0^2 \alpha^2 u^2 |M_\alpha(u)|$ sont majorés par

$$\max_n \frac{k_1 k_2^{2n}}{|\mu_1 \gamma_1 \dots \mu_n \gamma_n \alpha^n|^2}.$$

Quitte à poser ici $|\mu_j| \gamma_j = k k_2 m_j$ pour j assez grand, on aura le même résultat qu'en A).

C) *La suite* $\frac{|\lambda_j|}{j^2}$ *est non-décroissante.*

Les calculs faits en B) s'adaptent en remplaçant u^2 et μ_j^2 par u et λ_j.

Exprimons les résultats obtenus.

THÉORÈME 2. — Λ *étant à distribution logarithmique bornée, et satisfaisant l'une des conditions suivantes (avec* $|\lambda_{j+1}| \geqslant |\lambda_j|$)

A) Λ *est symétrique et réelle;*

B) Λ *est symétrique, et la suite* $\frac{|\lambda_{2j}|}{j}$ *est non-décroissante;*

C) *la suite* $\frac{|\lambda_j|}{j^2}$ *est non-décroissante,*

soit $\{l_j\}$ *une suite positive croissante, tendant vers* ∞, *telle que* $\Sigma \frac{l_j}{|\lambda_j|} < \infty$. $\mathcal{E}(\Lambda)$ *est une cl. q. a.* $I(\alpha)$ *dès que*

$$\varliminf_{\alpha \to 0} \frac{I(\alpha)}{\alpha \min\limits_n (l_1 \dots l_n \alpha^n)} < \infty. \tag{3}$$

Ce théorème contient le résultat suivant de Mandelbrojt, établi dans [22] (chap. VII) pour des λ entiers : si Λ est symétrique, avec $\Sigma \frac{1}{|\lambda^\sigma|} < \infty$, $\rho > \frac{\sigma}{1-\sigma} > 0$, la seule fonction $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$ telle que $\log \int_0^\alpha |f| < -\frac{1}{\alpha^\rho}$ $(\alpha \to 0)$ est $f \equiv 0$.

REMARQUE. — Dès que $\left|\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\right| \left(\text{resp. } \left|\frac{\mu_{j+1}}{\mu_j}\right|\right)$ est borné, on peut arbitrairement décaler l'ensemble des indices de la suite l_j. Au dénominateur de (3), on peut alors remplacer α par α^{-p}, si grand qu'on fixe p. Nous verrons qu'il n'en est pas ainsi quand Λ est encore plus lacunaire.

3. Classes quasi-analytiques D. — Pour que $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C_I\{M_n\}$ soit une cl.q.a. D, si petit que soit I, il suffit, nous l'avons vu au § 2, que $\mathcal{E}(\Lambda)$ soit une cl.q.a. $I(\alpha) = \min\limits_n \frac{M_n \alpha^{n+1}}{(n+1)!}$.

Dans les hypothèses du théorème 2, il suffit donc que

$$\min_n \frac{M_n \alpha^n}{(n+1)!} < k \min_n (l_1 \dots l_n \alpha^n)$$

pour une infinité de valeurs de $\alpha \to 0$ (k constante). Pour interpréter cette condition, nous aurons recours au lemme suivant ([25], p. 18).

LEMME 0. — *Soit* $\{A_n\}$ *et* $\{B_n\}$ *deux suites positives,* $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ *étant croissante. Les relations*

$$B_n \leqslant A_n \ (n > n_0) \qquad et \qquad \max_n \frac{r^n}{B_n} \geqslant \max_n \frac{r^n}{A_n} \ (r > r_0)$$

sont équivalentes.

Il suffit ici de poser

$$A_n = \frac{M_n}{(n+1)!}, \qquad B_n = k(l_1 \dots l_n), \qquad r = \frac{1}{\alpha}.$$

THÉORÈME 3. — *Dans les hypothèses du théorème* 2, $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C_I\{M_n\}$ *est une cl.q.a.* D *dès que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{(n+1)!\, l_1 \dots l_n} < \infty.$$

COROLLAIRE. — $\mathcal{E}(\Lambda) \cap K_I\{M_n\}$ *est une cl.q.a.* D *dès que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{M_n}{l_1 \dots l_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

4. Réciproques. — La condition $\sum^{\infty} \frac{l_j}{|\lambda_j|} < \infty$, dans l'énoncé du théorème 2, ne peut pas être beaucoup améliorée. Nous allons montrer qu'on ne peut pas remplacer l_j par $\frac{|\lambda_{j+1}|}{j}$. Pour cela, nous allons construire, moyennant les hypothèses convenables sur Λ, une fonction $f_0 \in \mathcal{E}(\Lambda)$, s'annulant avec toutes ses dérivées en O, et appartenant à une classe $K_I\{M_n\}$ (resp. $C_I\{M_n\}$) la plus petite que nous pourrons. Λ sera toujours à distribution logarithmique bornée.

Dans tous les cas que nous examinerons, Λ sera contenue dans une bande $|v| \leqslant B$, $F_0(w) = \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{w}{\lambda_j}\right)^{-1}$ sera absolument sommable sur toute droite $v = v_0$ pour $|v_0| > B$, et de même $w^n F_0(w)$, n entier quelconque; la série des résidus Λ_j de F_0 aux points λ_j sera aussi absolument sommable, et de même la série des $\lambda_j^n \Lambda_j$, n entier quelconque.

Nous poserons $f_0 = -i\sqrt{2\pi} \sum_1^{\infty} \Lambda_k e^{i\lambda_k x}$, de façon que

$$\mathcal{T}(f_0) = F_0(w).$$

On sait (voir § 1, 8) que $F_0(u + iv_0)$ est pour $v_0 < -B$ la transformée de Fourier, au sens usuel, de $e^{v_0 x} f_0^+(x)$. Cette dernière fonction est indéfiniment dérivable, puisque

$$\int |u^n F_0(u + iv_0)| < \infty,$$

donc f_0 s'annule avec toutes ses dérivées en O.

De plus, $|f_0^{(n)}(x)| \leqslant \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} |\Lambda_k \lambda_k^n| e^{B|x|}$, donc $f_0 \in C_I\{M_n\}$ quel que soit I, et $f_0 \in C\{M_n\}$ si $B = 0$, avec $M_n = \sum_{k=1}^{\infty} |\Lambda_k \lambda_k^n|$; $\log M_n$ est fonction convexe de n. Nous allons évaluer M_n dans les quatre cas suivants, où Λ sera supposée contenue dans une bande $|v| \leqslant B$.

A) Λ *est symétrique* ($\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1} = \mu_j$) *et la suite* $\frac{|\mu_j|}{j^{1+\varepsilon}}$ *est croissante pour un* $\varepsilon > 0$.

On a $\quad \Lambda_{2k} = -\Lambda_{2k-1} = N_k = -\frac{\mu_k}{2} \prod_{j \neq k}\left(1 - \frac{\mu_k^2}{\mu_j^2}\right)^{-1}.$

Évaluons M_{2n-1}. Pour $k \geqslant n+1$,

on a $$|N_k \mu_k^{2n-1}| = \frac{X}{2} |\mu_1 \ldots \mu_n|^2$$

avec

$$\begin{aligned}
X &= \prod_{j=1}^{n} \left|1 - \frac{\mu_j^2}{\mu_k^2}\right|^{-1} \prod_{\substack{j=n+1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left|1 - \frac{\mu_k^2}{\mu_j^2}\right|^{-1} \\
&< \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{j}{k}\right)^{2+2\varepsilon}\right)^{-1} \prod_{\substack{j=n+1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left|1 - \left(\frac{k}{j}\right)^{2+2\varepsilon}\right|^{-1} \\
&= \left(\frac{k^n}{n!}\right)^{2+2\varepsilon} \prod_{\neq k} \left|1 - \left(\frac{k}{j}\right)^{2+2\varepsilon}\right|^{-1} \\
&< \left(\frac{k^n}{n!}\right)^{2+2\varepsilon} \prod_{j=1}^{k-1} \left(\frac{k}{j}\right)^{-2\varepsilon} \left(\frac{k^2}{j^2} - 1\right)^{-1} \prod_{j=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2}{j^2}\right)^{-1} \\
&= 2\pi \left(\frac{k^n}{n!}\right)^{2+2\varepsilon} \min_j \left(\frac{j!}{k^j}\right)^{2\varepsilon} \\
&< \frac{2\pi}{k^2} \frac{(N!)^{2\varepsilon}}{(n!)^{2+2\varepsilon}} \qquad \text{avec} \qquad N - 1 \leqslant (n+1)\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} < N \\
&< \frac{1}{k^2} C^n, \text{ C ne dépendant que de } \varepsilon \text{ (comme dans la suite } C_1\text{).}
\end{aligned}$$

Donc $$\sum_{n+1}^{\infty} |N_k \mu_k^{2n-1}| < C^n |\mu_1 \ldots \mu_n|^2$$

Or $$\sum_{1}^{n} |N_k \mu_k^{2n-1}| < |\mu_n^2| M_{2n-3}.$$

Par récurrence, on établit $M_{2n-1} < C_1{}^n |\mu_1 \ldots \mu_n|^2$. $\log M_n$ étant convexe, on a donc $M_{n-1} < C_1^n |\lambda_1 \ldots \lambda_n|$.

B) *La suite* $\dfrac{|\lambda_j|}{j^{2+\varepsilon}}$ *est croissante pour un* $\varepsilon > 0$.

On a $\Lambda_k = -\lambda_k \prod_{j \neq k} \left(1 - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_j}\right)^{-1}$. les calculs faits en A) s'adaptent en remplaçant μ_j^2 par λ_j. On aboutit de même à $M_{n-1} < C_1^n |\lambda_1 \ldots \lambda_n|$.

C) Λ *est symétrique, et* $\left|\dfrac{\lambda_{2j}}{\lambda_{2(j-1)}}\right| > K > 1$.

D) $\left|\dfrac{\lambda_j}{\lambda_{j-1}}\right| > K > 1$.

Dans ces deux cas, on a

$$|\Lambda_k\lambda_k^n| \leqslant |\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k| \prod_{j=1}^{k-1}\left|1-\frac{\lambda_j}{\lambda_k}\right|^{-1} \prod_{j=k+1}^{\infty}\left|1-\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right|^{-1}$$

soit $|\Lambda_k\lambda_k^n| < C|\lambda_1\ldots\lambda_k|$

et
$$M_{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} |\Lambda_k\lambda^{n-1}| < C_1|\lambda_1\ldots\lambda_n|.$$

THÉORÈME 4. — *Λ étant contenue dans une bande $|\nu| \leqslant B$, et satisfaisant l'une des conditions suivantes (avec $|\lambda_{j+1}| \geqslant |\lambda_j|$).*

A) *Λ est symétrique, et la suite* $\left|\frac{\lambda_{2j}}{\lambda^{1+\varepsilon}}\right|$ *est croissante* $(\varepsilon > 0)$;

B) *la suite* $\left|\frac{\lambda_j}{j^{2+\varepsilon}}\right|$ *est croissante* $(\varepsilon > 0)$;

C) *Λ est symétrique, et* $\left|\frac{\lambda_{2j}}{\lambda_{2(j-1)}}\right| > K > 1$;

D) $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_{j-1}}\right| > K > 1$

la fonction $f_0 \in \mathcal{E}(\Lambda)$ dont la transformée de Fourier est

$$F_0(w) = \prod_1^{\infty}\left(1-\frac{w}{\lambda_j}\right)^{-1}$$

s'annule avec toute ses dérivées en 0.

Dans les deux premiers cas, on a $f_0 \in K\{M_n\}$ (resp. $K^*\{M_n\}$ si $B = 0$), et dans les deux derniers cas $f_0 \in C_I\{M_n\}$ quel que soit I *(resp. $C\{M_n\}$ si $B = 0$), avec $M_{n-1} = |\lambda_1\ldots\lambda_n|$.*

REMARQUE. — On a $\int_0^{\alpha} |f_0| < \min_n \frac{|\lambda_1\ldots\lambda_n| k^n\alpha^n}{n!}$, k constante, avec $k = 1$ dans les deux derniers cas. Dans les hypothèses du théorème 2, il est donc impossible de remplacer l_j par $\frac{|\lambda_{j+1}|}{j}$. En particulier, dès qu'on a $\sum^{\infty}\left|\frac{\lambda_{j-N}}{j\lambda_j}\right| < \infty$ avec C) ou D), on ne peut pas décaler arbitrairement l'ensemble des indices de la suite l_j $\left(\text{puisqu'on peut prendre } l_j = \frac{|\lambda_{j-N}|}{j_{-N-1}}\right)$; $\mathcal{E}(\Lambda)$ est alors une cl. q. a. I(α) dès que

$$\varliminf_{\alpha \to 0} \alpha^{-N-1}\int_0^{\alpha} |f_0| I(\alpha) < \infty.$$

5. Conditions nécessaires et suffisantes de quasi-analyticité. — On peut ainsi préciser la dernière remarque.

Théorème 5. — *Λ étant contenue dans une bande $|\nu| \leqslant B$, et satisfaisant l'une des conditions suivantes*

$$\text{A)} \qquad \lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}, \qquad \sum^{\infty} \left| \frac{\lambda_{2(j-1)}}{\lambda_{2j}} \right| < \infty$$

$$\text{B)} \qquad \sum^{\infty} \left| \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} \right| < \infty$$

la fonction f_0 du théorème 4 est, au voisinage de 0, « la plus petite fonction » non nulle de $\mathcal{E}(\Lambda)$ (à un facteur multiplicatif constant près), dans ce sens que l'inégalité

$$\alpha^p \int_0^\alpha |f| < \int_0^\alpha |f_0| \quad (p \text{ entier} \geqslant 0), \qquad \text{avec} \qquad f \in \mathcal{E}(\Lambda),$$

satisfaite pour une infinité de valeurs de $\alpha \to 0$, entraîne que f est une combinaison linéaire de f_0 et de ses p premières dérivées. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{E}(\Lambda)$ soit une cl.q.a. $\mathrm{I}(\alpha)$ est que

$$\lim_{\alpha \to} \frac{\mathrm{I}(\alpha)}{\int_0^\alpha |f_0|} = 0.$$

Démonstration. — Les hypothèses sur Λ entraînent la validité de la remarque finale de 4, avec $N = 2$. Montrons que l'hypothèse faite sur f entraîne que $\mathcal{T}(f) = F(w)$ a au plus $p + 2$ zéros. En effet, si $F(w) = (w - w_1) F_1(w)$, l'équation différentielle $f = -if_1' - w_1 f_1$ admet une solution f_1 moyenne-périodique telle que $\mathcal{T}(f_1) = F_1(w)$, $f_1(0) = 0$; et on a

$$\int_0^\alpha |f_1| < \alpha \int_0^\alpha |f_1'|$$

$$\int_0^\alpha |f| > \int^\alpha |f_1'| - w_1 \int_0^\alpha |f_1| > \frac{1}{2} \int_0^\alpha |f_1'| > \frac{1}{2\alpha} \int_0^\alpha |f_1|$$

pour α assez petit. Si $F(w) = (w - w_1) \ldots (w - w_{p+3}) F_{p+3}(w)$, il existe ainsi une fonction moyenne-périodique f_{p+3} telle que

$$\mathcal{T}(f_{p+3}) = F_{p+3}(w), \qquad \text{et} \qquad \int_0^\alpha |f| > \frac{1}{(2\alpha)^{p+3}} \int_0^\alpha |f_{p+3}|$$

pour α assez petit. Si $w_1, \ldots w_{p+3}$ étaient des zéros de $F(w)$, on aurait $f_{p+3} \in \mathcal{E}(\Lambda)$, ce qui est en contradiction avec la remarque finale du 4. $F(w)/F_0(w)$ est donc un polynôme de degré $< p+3$. Il suit de là que f est combinaison linéaire de f_0 et de ses q premières dérivées, $q < p+3$; le calcul ci-dessus montre que

$$\alpha^q \int_0^\alpha |f| > C \int_0^\alpha |f_0|,$$

C constante, donc $q \leqslant p$. C.Q.F.D.

Le théorème 5 fournit une réponse complète au problème n° 2, mais il est d'application limitée à des suites Λ très spéciales. Il est d'ailleurs facile d'en élargir les conditions d'application, mais sans espoir de rejoindre celles du théorème 2. En effet, on ne peut affirmer en général que

$$F_0(w) = \Pi\left(1 - \frac{w}{\lambda}\right)^{-1}$$

est transformée de Fourier d'une fonction moyenne-périodique; au contraire, on construit facilement des suites d'entiers Λ tels que $F_0(u + iv_0)$ ne soit pas une fonction bornée de $u (v_0 \neq 0)$, auquel cas F_0 ne peut être transformée de Fourier (= de Fourier-Carleman) d'une fonction f_0 périodique. Il serait intéressant de savoir si les conclusions du théorème 5 subsistent chaque fois que $F_0(w)$ satisfait les conditions énoncées au début du 4.

Relativement aux cl. q. a. D, on a un résultat analogue au théorème 5.

Théorème 6. — *Dans les hypothèses du théorème* 5, *une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C_I\{M_n\}$ *soit une cl.q.a.* D *est qu'elle ne contienne pas* f_0 *(quel que soit* I *contenant* O).

La condition est évidemment nécessaire. Si elle est satisfaite, on a, d'après le théorème 4,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M_{n-1}}{|\lambda_1 \ldots \lambda_n|} = 0.$$

Le théorème 3, avec $l_j = |\lambda_{j-2}|$ (resp. $|\lambda_{j-1}|$), montre alors que $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C_I\{M_{n-3}\}$ (resp. $C_{I'}\{M_{n-2}\}$) est une cl.q.a. D. Or, si $f \in \mathcal{E}(\Lambda) \cap C_I\{M_n\}$ s'annule avec toutes ses dérivées en O et si $f \not\equiv 0$, les fonctions $f_q (q = 1, 2, \ldots)$ définies après le théorème 5 s'annulent aussi avec toutes leurs dérivées en O, et $f_q \in C_I\{M_{n-q}\}$;

donc $\mathcal{T}(f)$ ne peut s'annuler plus de deux fois, et il existe une fonction de $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C_I\{M_n\}$, soit f, f_1 ou f_2, qui est proportionnelle à f_0, contrairement à l'hypothèse.

REMARQUES. — 1. Grâce au théorème 6 du § 3, on peut quand $B = 0$ remplacer dans l'énoncé du théorème 6 $\mathcal{E}(\Lambda)$ par $\mathcal{E}_I(\Lambda)$: les hypothèses sont alors purement locales.

2. L'intérêt du théorème 6 est de donner une condition nécessaire et suffisante de quasi-analyticité très différente de la condition classique de Denjoy-Carleman (voir 10). Il exprime que l'ensemble des classes non quasi-analytiques $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C_I\{M_n\}$ (Λ donnée), ordonné par inclusion, admet pour plus petit élément la classe dont les seules fonctions s'annulant en 0 avec toutes leurs dérivées sont proportionnelles à f_0.

3. Nous établirons en 8 des résultats voisins du théorème 6.

6. Seconde méthode. — Dans la suite de ce paragraphe, nous restreindrons notre étude aux fonctions moyenne-périodiques bornées. Nous pouvons donc supposer Λ réelle et simple (théorème 5 du § 1).

NOTATION. — Désignons par $r(\alpha)$ une fonction décroissante de $\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant x_0)$, pouvant être infinie sur un segment $[0, \alpha_\infty]$, nulle en x_0, et par $\alpha(r)$ la fonction inverse de $r(\alpha)$ $(r \geqslant 0)$, avec $\alpha(\infty) = \lim\limits_{r \to \infty} \alpha(r) = \alpha_\infty$.

Soit $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$, $f \not\equiv 0$,

$$|f| < 1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^\alpha |f| < e^{-\alpha r(\alpha)} \quad (0 < \alpha < x_0).$$

$F(w) = \mathcal{T}(f)$ étant donné par les formules du § 1, 8, les hypothèses faites sur f entraînent les majorations suivantes pour $F(w)$:

$$\sqrt{2\pi}\,|F(w)| \leqslant \int_{-\infty}^{0} |f(x)|\, e^{xv}\, dx < \frac{1}{v} \qquad \text{pour} \qquad v > 0$$

$$\sqrt{2\pi}\,|F(w)| \leqslant \int_0^\alpha |f(x)|\, dx + \int_\alpha^\infty e^{xv}\, dx < e^{-\alpha r(\alpha)} + \frac{e^{-\alpha|v|}}{|v|}$$

pour $v < 0$. Choisissons $\alpha = \alpha(|v|)$; alors

$$\alpha r(\alpha) = \alpha |v| > |v|\, \alpha(r) \qquad (w = u + iv = re^{i\theta}).$$

Les majorations qui s'ensuivent pour $F(w)$ permettent d'énoncer le lemme suivant ([19], [18]).

Lemme 1. — *L'ensemble des fonctions bornées de* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *est une cl.q.a.* $\mathrm{I}(\alpha) = e^{-\alpha r(\alpha)}$ *dès que les conditions*

$$(\text{L. 1})\quad \left|\begin{array}{ll} \mathrm{F}(w) & \textit{méromorphe, de pôles simples } \in\Lambda \\ \log|\mathrm{F}(w)| < -\log v & \textit{pour} \quad v > 0 \\ \log|\mathrm{F}(w)| < \log\dfrac{1+|v|}{|v|} - |v|\,\alpha(r) & \textit{pour} \quad v < 0 \end{array}\right.$$

entraînent $\mathrm{F}(w) \equiv 0$.

Des modifications évidentes dans les calculs conduisent au

Lemme 1'. — *Les relations*

$$f\in\mathcal{E}(\Lambda), \qquad |f| < 1, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha}|f| < e^{-\alpha r(\alpha)} \quad (0 < \alpha < x_0)$$

entraînent $f \equiv 0$ *dès que les conditions*

$$(\text{L. 1}')\quad \left|\begin{array}{l} \mathrm{F}(w) \quad \textit{méromorphe, de pôles simples } \in\Lambda \\ \log|\mathrm{F}(w)| < \log\dfrac{1+|v|}{|v|} - |v|\,\alpha(r) \end{array}\right.$$

entraînent $\mathrm{F}(w) \equiv 0$.

Soit maintenant $f\in\mathcal{E}(\Lambda) \cap \mathrm{C}\{\mathrm{M}_n\}$, $f^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. En intégrant par parties les seconds membres des formules donnant $\mathrm{F}(w)$ (§ 1, 8), on a

$$\sqrt{2\pi}\,\mathrm{F}^+(w) = \int_{-\infty}^{0}(iw)^n f^{(n)}(x)\,e^{-iwx}\,dx$$
$$\sqrt{2\pi}\,\mathrm{F}^-(w) = -\int_{0}^{\infty}(iw)^n f^{(n)}(x)\,e^{-iwx}\,dx$$

d'où $|\mathrm{F}(w)| < \dfrac{\mathrm{K}}{|v|}\dfrac{\mathrm{M}_n}{r^n}$ quel que soit $n \geqslant 0$ (K : constante).

Lemme 2. — $\mathcal{E}(\Lambda) \cap \mathrm{C}\{\mathrm{M}_n\}$ *est une cl.q.a.* $\mathcal{D}$ *dès que les conditions*

$$(\text{L. 2})\quad \left|\begin{array}{l} \mathrm{F}(w) \quad \textit{méromorphe, de pôles simples } \in\Lambda \\ \log|\mathrm{F}(w)| < -\log|v| - \mathrm{S}(r) \end{array}\right.$$

avec $\mathrm{S}(r) = \max\limits_{n}(n\log r - \log \mathrm{M}_n)$, *entraînent* $\mathrm{F}(w) \equiv 0$.

Remarques. — 1. Dans (L. 1), (L. 1') et (L. 2), on peut remplacer la première hypothèse sur $\mathrm{F}(w)$ par celle-ci : $\mathrm{F}(w)$ est holomorphe en dehors de Λ. Le fait que les éléments de Λ sont des pôles simples découle du calcul fait au § 1, 10.

2. Si Λ est régulière et de densité de répartition Δ, le théorème 6 du § 3 permet de remplacer, dans les énoncés des lemmes 1, 1′ et 2, l'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{E}(\Lambda)$ par l'ensemble des fonctions p fois dérivables de $\mathcal{E}_I(\Lambda)$, et $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ par $\mathcal{E}_I(\Lambda) \cap C_I\{M_{n-p}\}$, avec $|I| > 2\pi\Delta$, I contenant 0. Tous les théorèmes que nous établirons à partir de ces lemmes seront susceptibles de la même remarque.

7. Application de la formule de Jensen. Classes quasi-analytiques I(α). — Nous utiliserons les notations du § 3, 1.

Dans [19], [18], [9], le lemme 1 (ou un lemme analogue) est exploité ainsi : on suppose Λ symétrique, formée d'éléments $\pm\lambda$; on pose $C(w) = \Pi\left(1 - \frac{w^2}{\lambda^2}\right)$, et on considère la fonction entière $F(w)C(w)$; dans [9], où le meilleur résultat est obtenu (relativement à des suites Λ d'entiers), on applique à cette fonction entière la formule de Jensen en majorant $\log|C(w)|$ par $\log C(ir) = 2r^2 \int_0^\infty \frac{D(t)}{t^2+r^2}dt = \zeta(r)$; on voit ainsi qu'on a $F(w) \equiv 0$ dès que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}(r\alpha(r) - \pi\zeta(r)) = \infty.$$

Une amélioration évidente de la méthode consiste à appliquer la formule de Jensen à $F(w)$ elle-même, ce qui donne

$$-\int_0^r \frac{N(t)}{t}dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(re^{i\theta})|\,d\theta - \log|F(0)|.$$

Supposons $F(w) \not\equiv 0$. Quitte à diviser $F(w)$ par w^p, ce qui n'altère pas les conditions (L. 1), on peut supposer $F(0) \neq 0$. En utilisant les inégalités de (L. 1), on obtient alors

$$-2r\overline{D}(r) < -\frac{1}{\pi}r\alpha(r) - \frac{1}{2}\log r + O(1)$$

d'où $\alpha(r) < 2\pi\overline{D}(r)$ pour r assez grand.

Théorème 7. — *L'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{E}(\Lambda)$ est une cl.q.a. $I(\alpha) = e^{-\alpha r(\alpha)}$ dès qu'on a, pour une infinité de valeurs de $r \to \infty$,*

$$\alpha(r) \geqslant 2\pi\overline{D}(r) \tag{4}$$

Ajouter à Λ un élément (y compris l'élément 0), revient à ajouter, à $\overline{\mathrm{D}}(r)$, $\frac{\log r}{2r}$.

Cas particuliers. — *a*) Les hypothèses du théorème 7 sont satisfaites si $\alpha_\infty > 2\pi\overline{\mathrm{D}}.$. L'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{E}(\Lambda)$ est donc une cl. q. a. I_l dès que $l > 2\pi\overline{\mathrm{D}}.$: ce résultat est contenu dans le théorème 2 du § 3.

b) Si $\overline{\mathrm{D}}(r) \leqslant \overline{\mathrm{D}}.$ pour une infinité de valeurs de $r \to \infty$, il suffit d'avoir $\alpha_\infty = 2\pi\overline{\mathrm{D}}.$. L'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{E}(\Lambda)$ est alors une cl. q. a. I_l dès que $l = \overline{\mathrm{D}}.$: lorsque $\overline{\mathrm{D}}. =$ dens. min. Λ ce résultat complète le théorème 2 du § 3; il a été établi, avant nous, grâce à la même méthode, par Lévine [16].

c) Le théorème 7 contient les résultats de [19], [18] et [9] qui généralisent eux-mêmes le théorème de Mandelbrojt rappelé en 3.

Remarque. — Le cas *b*) s'applique, il est facile de le voir, si Λ est la suite des entiers pairs, avec $\overline{\mathrm{D}}. = \frac{1}{2}$. Or il cesse de s'appliquer dès qu'on adjoint à cette suite Λ les deux éléments $+1$ et -1 : en effet, il existe une fonction $\sin x + \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2inx}$ nulle sur $[0, \pi]$. Donc dans (4) on ne peut remplacer $\overline{\mathrm{D}}(r)$ par $\overline{\mathrm{D}}(r) + \frac{\log r}{r}$. Le théorème 7 est ainsi d'une grande précision pour une suite Λ dont la répartition est voisine de celle des entiers; il fournit dans ce cas une bonne réponse aux problèmes n° 1 et n° 2; dans le cas de suites irrégulièrement réparties ou très rares, les théorèmes 2 du § 3 et 3 du § 4 peuvent lui être préférables.

Si nous supposons $\mathrm{F}(w) \not\equiv 0$ soumise aux conditions (L. 1'), l'application de la formule de Jensen donne

$$-2r\overline{\mathrm{D}}(r) < -\frac{2}{\pi} r\alpha(r) + \mathrm{O}(1).$$

Théorème 7'. — *Les relations*

$$f \in \mathcal{E}(\Lambda), \qquad |f| < 1, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} |f| < e^{-\alpha r(\alpha)}$$

entraînent $f \equiv 0$ *dès que* $\overline{\lim_{r \to \infty}} (r\alpha(r) - \pi r\, \overline{\mathrm{D}}(r)) = \infty$.

8. Classes quasi-analytiques D. — Supposons maintenant $F(w)$ soumise aux conditions (L. 2). La formule de Jensen donne

$$-2r\,\overline{D}(r) \leqslant -S(r) - \log r + O(1)$$

soit, d'après le lemme 0, $M_n > K|\lambda_1 \dots \lambda_{n+1}|$, K constante.

D'où l'énoncé très simple suivant.

Théorème 8. — $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ *est une cl.q.a.* D *dès que*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{|\lambda_1 \dots \lambda_{n+1}|} = 0 \qquad (|\lambda_{j+1}| \geqslant |\lambda_j|).$$

Remarque. — Si $F(w)$ s'annule k fois, l'application à $F(w)$ de la formule de Jensen permet d'écrire

$$M_n > K|\lambda_1 \dots \lambda_{n+k+1}|.$$

Dès qu'on a $\varliminf_{n\to\infty} \dfrac{M_n}{|\lambda_1 \dots \lambda_{n+k+1}|} < \infty$, la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ s'annulant avec toutes ses dérivées en O, ne peut s'annuler plus de k fois : c'est dire que f est ou nulle, ou combinaison linéaire de $f_0, f_0' \dots f_0^{(k)}$, avec

$$\mathcal{C}(f_0) = F_0(w) = \Pi\left(1 - \frac{w}{\lambda}\right)^{-1}.$$

En particulier, si $F_0(w)$ n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{E}(\Lambda)$, $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ est une cl.q.a D dès que

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{|\lambda_1 \dots \lambda_{n+k}|} < \infty$$

pour une valeur assez grande de k.

Le théorème 8 est plus simple et plus précis que le théorème 3, mais il ne le contient pas; d'une part en effet, il ne s'applique que lorsque Λ est réelle; d'autre part; il suppose connu le comportement sur la droite entière d'une fonction de $\mathcal{E}(\Lambda)$ (le fait d'appartenir à $C\{M_n\}$) alors que le théorème 3 ne suppose connu que le comportement local (le fait d'appartenir à $C_I\{M_n\}$).

On supprime aisément ce dernier inconvénient en ayant recours au théorème 6 du § 3, qui, joint au théorème 8, permet de définir des cl.q.a. D sur un segment.

THÉORÈME 8'. — *Λ étant réelle, régulière et de densité de répartition Δ, $\mathcal{E}_I(\Lambda) \cap C_I\{M_n\}$ est une cl.q.a.* D *dès que*

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+p}}{|\lambda_1 \ldots \lambda_n|} = 0$$

quel que soit l'entier p, avec $|I| > 2\pi\Delta$, I contenant 0.

REMARQUE. — Au lieu de supposer (5) satisfait quel que soit p, il suffit de supposer (5) satisfait pour *une* valeur $p > 8h + 4$ (cf. remarque finale du § 3). Si $F_0(w)$ n'est pas transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{E}(\Lambda)$, il suffit de supposer (5) satisfait pour une valeur quelconque (négative au besoin) de p. Si $F_0(w) = \mathcal{T}(f_0)$, et si (5) est satisfait pour une valeur quelconque de p, les seules fonctions de $\mathcal{E}_I(\Lambda) \cap C_I\{M_n\}$ s'annulant avec toutes leurs dérivées en O sont combinaisons linéaires (finies) de f_0 et de ses dérivées.

Le théorème 4 constitue une réciproque au théorème 8. La confrontation de ces deux théorèmes donne de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes de quasi-analyticité.

THÉORÈME 9. — *Si Λ est réelle et satisfait l'une des hypothèses* A) *ou* B) *du théorème 4, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{E}(\Lambda) \cap K^*\{M_n\}$ soit une cl.q.a.* D *est que* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{M_n}{\lambda_1 \ldots \lambda_{n+1}}\right|^{\frac{1}{n}} = 0$. *Si Λ est réelle et satisfait l'une des hypothèses* C) *ou* D) *du théorème 4, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ soit une cl.q.a.* D *est que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M_n}{|\lambda_1 \ldots \lambda_{n+1}|} = 0$.

Le théorème 9 présente l'intérêt, par rapport au théorème 6, d'expliciter les plus petites classes non quasi-analytiques $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ (resp. $K^*\{M_n\}$).

En usant du même raisonnement qu'en *6* et de la remarque qui suit le théorème 8', on obtient d'ailleurs l'extension suivante du théorème 6 :

THÉORÈME 9'. — *La conclusion du théorème 6 s'étend au cas où Λ est réelle et satisfait l'une des hypothèses* C) *ou* D) *du théorème 4.*

9. Application de la formule de Carleman. Classes quasi-analytiques $I(\alpha)$. — Au lieu d'appliquer à $F(w)$, soumise aux conditions (L. 1), (L. 1') ou (L. 2), la formule de Jensen, on peut appliquer à $F(w)$ d'autres théorèmes de la théorie des fonctions. Alors Λ n'interviendra plus par sa fonction de densité moyenne sur toute la droite $\overline{D}(r)$, mais par sa distribution logarithmique sur une demi-droite (quand on applique la formule de Carleman), ou par sa « lacunarité », c'est-à-dire par la largeur relative d'une suite de segments ne contenant aucun point de Λ (quand on applique un théorème du type Mandelbrojt-Mac-Lane).

Nous affecterons d'un $^+$ les fonctions (définies au § 3, 1) relatives à Λ dans l'angle $|\theta| < \frac{\pi}{2}$

Supposons d'abord $F(w) \not\equiv 0$ soumise aux conditions (L. 1). L'application de la formule de Carleman (cf. chap. III, § 3) donne alors

$$\int_0^r \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{r^2}\right) dN^+(t) > \frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2}\right)\rho\alpha(\rho)\, d\rho + O(1)$$

soit, si $D^+(r)$ est borné $(r > 0)$

$$\int^r \frac{2\pi D^+(t) - \alpha(t)}{t}\, dt > O(1).$$

Théorème 10. — *L'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{E}(\Lambda)$ est une cl.q.a. $I(\alpha) = e^{-\alpha r(\alpha)}$ dès que $D^{+\cdot} < \infty$ et*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \int^r \frac{\alpha(t) - 2\pi D^+(t)}{t}\, dt = \infty.$$

Cas particuliers. — 1. La dernière relation est satisfaite si $\alpha_\infty > 2\pi \widehat{D}^+_\cdot$. L'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{E}(\Lambda)$ est une cl.q.a. I_l dès que $l > 2\pi \widehat{D}^+_\cdot$: ce résultat est contenu dans le théorème 2 du § 3. On peut le préciser en supposant $\overline{\lim_{r\to\infty}}\left(\widehat{D}^+_\cdot \log r - L^+(r)\right) = \infty$ il suffit alors que $l = 2\pi \widehat{D}^+_\cdot$.

2. Si $L^+(r)$ est bornée, il suffit d'avoir

$$\int^\infty \frac{\alpha(t)}{t}\, dt = \infty.$$

Si l'on remplace (L. 1) par (L. 1'), des modifications évidentes dans les calculs conduisent au théorème suivant :

THÉORÈME 10'. — *Les relations*

$$f \in \mathcal{E}(\Lambda), \qquad |f| < 1, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} |f| < e^{-\alpha r(\alpha)} \quad (0 < \alpha < x_0)$$

entraînent $f \equiv 0$ *dès que* $D^{+} < \infty$ *et* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \displaystyle\int^{r} \frac{\alpha(t) - \pi D^{+}(t)}{t}\, dt = \infty$.

10. Classes quasi-analytiques D. — Supposons maintenant $F(w)$ soumise aux conditions (L. 2). Posons $w' = ie^{-i\pi a} w^{a}$ avec $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$.

Posons $F_1(w') = F(w)$. $F_1(w')$ est méromorphe dans le demi-plan $\mathrm{R}w' \geqslant 0$; ses pôles, simples, y forment une suite portée par la demi-droite $\operatorname{Arg} w' = \frac{\pi}{2} - \pi a$, dont la fonction de distribution est $N_1(\rho) = N^{+}\left(\rho^{\frac{1}{a}}\right)$ et on a

$$\log |F_1(w')| < -\log \left| \rho^{\frac{1}{a}} \sin \frac{2\theta' - \pi}{2a} \right| - S\left(\rho^{\frac{1}{a}}\right) \qquad (w' = \rho e^{i\theta'}).$$

La formule de Carleman, appliquée à $F_1(w' + 1)$, donne alors (cf. chap. III, § 3, 2e remarque)

$$\overline{\lim_{\rho\to\infty}} \int^{\rho} \left(S\left(\tau^{\frac{1}{a}}\right) - \pi \sin \pi a \, N^{+}\left(\tau^{\frac{1}{a}}\right)\right) \frac{d\tau}{\tau^{2}} < \infty.$$

THÉORÈME 11. — $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ *est une cl.q.a.* D *dès qu'on a* $N^{+}(r) = O(r^{a})$ *et* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \displaystyle\int^{r} \frac{S(t) - \pi \sin \pi a \, N^{+}(t)}{t^{1+a}}\, dt = \infty$, *avec* $S(r) = \max\limits_{n} (n \log r - \log M_n)$, $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$.

CAS PARTICULIERS. — 1. Pour $a = 1$, on retrouve le théorème de Denjoy-Carleman; on sait d'ailleurs que la condition $\displaystyle\int^{\infty} \frac{S(t)}{t^{2}}\, dt = \infty$ est une condition nécessaire pour que $C\{M_n\}$ soit une cl.q.a. D.

2. Si $\int^{\infty} \frac{N^+(t)}{t^{1+a}} dt < \infty$, $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ est une cl.q.a. D dès que $C\{M_n^a\}$ est une cl.q.a. D.

3. En particulier, si $N^+(t)$ est bornée, $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ est une cl.q.a D dès que $C\{\sqrt{M_n}\}$ est une cl.q.a D.

11. Application d'un résultat du type M-M-L. Classes quasi-analytiques D. — Supposons encore $F(w)$ soumise aux conditions (L. 2). Pour simplifier, supposons d'abord Λ symétrique. Posons $w = -ie^s$, $s = \sigma + it$, $F(w) = H(s)$. Désignons par $G(\sigma)$ une fonction égale à $\operatorname{Arc}\cos(he^{-\sigma})$ quand e^σ est à une distance $\leqslant h$ de l'origine et de $\Lambda (h > 0$ donné), égale à ∞ ailleurs. Soit Δ_s le domaine $\sigma > \sigma_0 = \log h$, $|t| < G(\sigma)$.

Comme M. Mandelbrojt l'a remarqué pour établir ses théorèmes de fermeture ([27], p. 194), les conditions (L. 2), où $S(r)$ est une fonction croissante, entraînent

$$(\text{L. } 2') \quad \left| \begin{array}{l} H(s) \text{ holomorphe dans } \Delta_s \\ \log|H(s)| < -S(e^{\sigma-a}) + A \text{ dans } \Delta_s, \\ \quad a \text{ et } A \text{ étant constantes.} \end{array} \right.$$

Il nous suffit alors d'appliquer le théorème et la remarque 2 du chapitre III, § 1, pour pouvoir énoncer :

THÉORÈME 12. — *Désignons par Ω une réunion de segments de longueurs indéfiniment croissantes, ne contenant aucun point* $\log\lambda(\lambda\in\Lambda)$, *par* $\mu(\Omega;\sigma)$ *et* $\mu(C\Omega;\sigma)$ *les mesures de Ω et de son complémentaire sur le segment* $[0, \sigma]$. *Posons*

$$S(e^\sigma) = \max_n (n\sigma - \log M_n)$$

Λ étant donnée symétrique et réelle, $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ *est une cl.q.a.* D *dès qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\int^{\infty} S(e^\sigma) e^{-\mu(C\Omega;\sigma) - \varepsilon\mu(\Omega;\sigma)} d\sigma = \infty.$$

Supposons maintenant Λ positive. Posons

$$w = -e^s, \qquad F(w) = H(s).$$

$G(\sigma)$ gardant même signification que ci-dessus, soit Δ_s le domaine $\sigma > \sigma_0 = \log h$, $|t| < G(\sigma) + \frac{\pi}{2}\cdot$ Alors les conditions (L. 2) entraînent encore (L. 2').

THÉORÈME 12'. — *Les notations sont celles du théorème* 12. Λ *étant donnée positive*, $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$ *est une cl.q.a.* D *dès qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\int^{\infty} S(e^{\sigma}) e^{-\frac{1}{2}\mu(C\Omega;\,\sigma) - \varepsilon\mu(\Omega;\,\sigma)}\, d\sigma = \infty.$$

REMARQUE. — On peut supposer Ω vide. Les théorèmes 12 et 12' se réduisent alors respectivement au théorème de Denjoy-Carleman et au cas particulier 3) du théorème 9.

Classes quasi-analytiques $I(\alpha)$. — Supposons de nouveau $F(w)$ soumise aux conditions (L. 1), et Λ symétrique. Pour passer de la condition de décroissance en $|v|$, à laquelle est soumise $F(w)$ pour $v < 0$, à une condition de décroissance en r, nous nous inspirerons d'un procédé « de rotation » utilisé en [19]. Posons

$$\Phi(w) = F(we^{i\varphi})\, F(we^{-i\varphi})\, F(-we^{i\varphi})\, F(-we^{-i\varphi}), \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

$\Phi(w)$ est holomorphe en dehors des ensembles Λ_{φ} et $\Lambda_{-\varphi}$, obtenus en faisant tourner Λ des angles φ et $-\varphi$ autour de 0, et satisfait

$$\log|\Phi(w)| < -2\log|r^2 \sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)| - 2\sin(2\varphi)\, r\alpha(r)$$
$$(w = re^{i\theta}).$$

Posons $\qquad w = -ie^{s}, \qquad \Phi(w) = X(s).$

$G(\sigma)$ gardant même signification que ci-dessus, soit ici Δ_s le domaine

$$\sigma > \sigma_0 = \log\frac{h}{\cos\varphi}, \qquad |t| < G(\sigma) - \varphi.$$

On vérifie alors que les conditions (L. 1) entraînent

$$\text{(L. 1'')} \qquad \left|\begin{array}{l} X(s) \text{ holomorphe dans } \Delta_s \\ \log|X(s)| < -e^{\sigma-a}\alpha(e^{\sigma+a}) + A, \\ \quad a \text{ et } A \text{ étant des constantes.} \end{array}\right.$$

Appliquons encore le théorème du chapitre III, § 1, en tenant compte des remarques 2 et 3. Ω ayant même signification que ci-dessus, les conditions (L. 1'') entraînent $X(s) \equiv 0$ dès que, pour une valeur de $\varepsilon > 0$, on a

$$\text{(6)} \qquad \int^{\infty} e^{\sigma}\alpha(e^{\sigma})\, e^{-\frac{\pi}{\pi-2\varphi}\mu(C\Omega;\,\sigma) - \varepsilon\mu(\Omega;\,\sigma)}\, d\sigma = \infty.$$

Si Λ est supposée non plus sysmétrique, mais positive, on a un résultat analogue, Δ_s étant défini par $\sigma > \sigma_0$, $|t| < G(\sigma) - \varphi + \frac{\pi}{2}$, et le coefficient $\frac{\pi}{\pi - 2\varphi}$ étant remplacé dans (6) par $\frac{\pi}{2(\pi - \varphi)}$.

THÉORÈME 13. — *Les notations étant celles du théorème* 12, *l'ensemble des fonctions bornées de* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *est une cl.q.a.* $I(\alpha)$ *dans les deux cas suivants* :

1° Λ *est symétrique réelle, et* $\overline{\lim\limits_{\sigma \to \infty}} \frac{\log \alpha(e^\sigma) + \mu(\Omega;\sigma)}{\sigma} > 0$;

2° Λ *est positive, et* $\overline{\lim\limits_{\sigma \to \infty}} \frac{2 \log \alpha(e^\sigma) + \mu(\Omega;\sigma)}{\sigma} > -1$.

En effet, la condition (6) est satisfaite dès que, sur une infinité d'intervalles de longueur 1 disjoints, on a

$$\log \alpha(e^\sigma) > -(1-\varepsilon)\sigma + \frac{\pi}{\pi - 2\varphi} \mu(C\Omega;\sigma) - \varepsilon\mu(\Omega;\sigma);$$

elle est donc satisfaite, pour φ assez petit, moyennant la condition 1°. Quand $\frac{\pi}{\pi - 2\varphi}$ est remplacé par $\frac{\pi}{2(\pi - \varphi)}$, elle est satisfaite moyennant la condition 2°.

COROLLAIRE. — *Posons* $\overline{\lim\limits_{\sigma \to \infty}} \frac{\mu(\Omega;\sigma)}{\sigma} = d$. *L'ensemble des fonctions bornées de* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *est une cl.q.a.* $I(\alpha) = e^{-(\alpha^{-\rho})}$ *dans les deux cas suivants :*

1° Λ *est symétrique réelle, et* $\rho > \frac{1-d}{d}$;

2° Λ *est positive, et* $\rho > \frac{1-d}{1+d}$.

* * *

13. **Remarque sur la méthode.** — La méthode définie en 6, qui repose sur les lemmes 1, 1′ et 2, s'étend immédiatement aux fonctions presque-périodiques de Bohr ou de Stepanof; c'est ainsi que Lévine a étudié dans [17] les fonctions presque-périodiques de Stepanof, nulles sur un segment.

L'application d'un résultat du type M.M.L. (resp. de la formule de Carleman) ne fait pas intervenir le fait que Λ

est discrète (resp. : que la partie négative de Λ est discrète). Ainsi les résultats de **11** et **12** (resp. : **9** et **10**), peuvent s'étendre à toutes les classes de fonctions dont on définit une transformée de Fourier-Carleman holomorphe en dehors du spectre (resp. : et dont la partie positive du spectre est discrète); ainsi étendus, les théorèmes 12 et 12′ s'appliquent aisément aux problèmes d'approximation polynômiale et aux problèmes des moments étudiés en [27]; nous reviendrons sur ces problèmes au chapitre III.

CHAPITRE II

APPROXIMATION PAR DES POLYNOMES DE DIRICHLET ET PROLONGEMENT DANS LE PLAN COMPLEXE

§ 1. Résultats généraux.

1. Approximation par des polynômes de Dirichlet dans un ouvert. — Les résultats qui suivent sont relatifs à l'approximation d'une fonction holomorphe dans un ouvert par des polynômes de Dirichlet d'exposants donnés. Ils se trouvent en partie exposés dans [2] (note III), [33] (§ 6) et [34] (chap. IV). Ces résultats sont intéressants en eux-mêmes; certains nous seront plus particulièrement utiles pour l'étude des problèmes de prolongement traités au § 2.

Définitions. — Étant donné un ouvert Ω du plan complexe ($z = x + iy$), que nous supposerons toujours réunion d'ouverts simplement connexes disjoints [1], et une suite Λ d'éléments λ distincts, réels ou complexes, soit $\mathcal{E}_\Omega$ l'espace des fonctions holomorphes dans Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω, et $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ le sous-espace de $\mathcal{E}_\Omega$ engendré par les fonctions $e^{\lambda z}$, $\lambda \in \Lambda$. Notons $d\mu(z)$ (resp. μ) toute mesure à support compact $C \subset \Omega$ et Ω_ζ la transformée de Ω par la translation ζ.

Proposition 1. — Pour avoir $f(z) \in \mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$, il faut et suffit que

$$(1) \qquad \int_C e^{\lambda z}\, d\mu(z) = 0, \qquad \lambda \in \Lambda,$$

entraîne $\int_C f(z)\, d\mu(z) = 0$.

Proposition 2. — Pour avoir $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) = \mathcal{E}_\Omega$, il faut et il suffit que (1) entraîne $\Phi(w) \equiv 0$ avec

$$(2) \qquad \Phi(w) = \int_C e^{wz}\, d\mu(z) \qquad (w = u + iv).$$

[1] On peut alors appliquer le théorème d'approximation polynômiale de Runge-Montel, convenablement précisé [29 *ter*].

En effet, le fait que (1) entraîne $\Phi^{(p)}(0) \equiv 0$ exprime $z^p \in \mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ $(p = 0, 1, \dots)$.

Proposition 3. — Si $\Phi(w) = \int e^{wz}\, d\mu_1(z) = \int e^{wz}\, d\mu_2(z)$, les supports de μ_1 et de μ_2 étant contenus dans Ω, on a pour toute fonction $f(z) \in \mathcal{E}_\Omega$: $\int f(z)\, d\mu_1(z) = \int f(z)\, d\mu_2(z)$: μ_1 et μ_2 seront dites équivalentes, et nous noterons $\mu_1 \approx \mu_2$.

Proposition 4. — Soit $\Phi_i(w) = \int e^{wz}\, d\mu_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, μ_1, μ_2, μ_3 étant des mesures à support compact ; les relations $\mu_1 * \mu_2 \approx \mu_3$ et $\Phi_1(w)\,\Phi_2(w) = \Phi_3(w)$ sont équivalentes.

Proposition 5. — Dire que $\Phi(w)$ est de la forme (2), c'est dire que $\Phi(w)$ est une fonction entière de type exponentiel, dont la transformée de Laplace $\varphi(z)$ est holomorphe en dehors de C. On peut écrire

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} e^{wz}\varphi(z)\, dz, \tag{3}$$

Γ étant une courbe fermée simple contenant à son intérieur toutes les singularités de $\varphi(z)$. Le plus petit convexe contenant les singularités de $\varphi(z)$ est le diagramme conjugué de $\Phi(w)$: c'est l'intersection des plans $x\cos\theta - y\sin\theta \leqslant h(\theta)$, où

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{\log|\Phi(re^{i\theta})|}{r}. \tag{4}$$

$\varphi(z)$ est défini par

$$\varphi(z) = \int e^{-wz}\,\Phi(w)\, dw, \tag{5}$$

l'intégrale pouvant être prise sur toute demi-droite issue de O, coupant perpendiculairement une droite passant par z, extérieure au diagramme conjugué de $\Phi(w)$. Pour avoir $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) \neq \mathcal{E}_\Omega$, il suffit qu'existe une fonction de type exponentiel, $\not\equiv 0$, s'annulant sur Λ, et dont le diagramme conjugué soit contenu dans Ω.

Proposition 6. — Si $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) \neq \mathcal{E}_\Omega$, et si Ω est connexe, l'ensemble des fonctions $e^{\lambda z}$, $\lambda \in \Lambda$, constitue une base de $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$.

En effet, l'hypothèse entraîne l'existence de $\Phi(w) \not\equiv 0$ de la forme (3) avec $\Gamma \subset \Omega$; si $\lambda_0 = 0 \in \Lambda$, et si $\Phi(w)$ s'annule p fois en 0, on peut écrire $\dfrac{\Phi(w)}{w^p} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma^+} e^{wz}\,\varphi_p(z)\, dz$ avec $\varphi_p^{(p)}(z) = \varphi(z)$, d'où $\int_\Gamma e^{\lambda z}\,\varphi_p(z)\, dz = 0$ pour $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$ et $\int_\Gamma e^{\lambda_0 z}\,\varphi_p(z)\, dz \neq 0$; donc $e^{\lambda_0 z}$ n'appartient pas à l'espace engendré par les fonctions

$e^{\lambda z}$, $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda_0$, résultat qui vaut quelle que soit la translation d'ensemble qu'on fasse subir à Λ, donc aussi pour $\lambda_0 \neq 0$.

Remarquons que, si Ω n'est pas connexe, il n'en est pas nécessairement ainsi : par exemple, si Λ est l'ensemble des entiers $\geqslant 0$ et < 0, et si Ω est constitué de deux cercles disjoints centrés en $i\pi$ et $-i\pi$. Cependant l'hypothèse $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) \neq \mathcal{E}_\Omega$, Ω connexe, peut évidemment être remplacée par $\Omega \supset \Omega'$, $\mathcal{E}_{\Omega'}(\Lambda) \neq \mathcal{E}_{\Omega'}$, Ω' connexe; en particulier, il suffit de supposer que Ω contient le diagramme conjugué d'une fonction de type exponentiel s'annulant sur Λ.

Proposition 7. — Si $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) \neq \mathcal{E}_\Omega$, et si Ω est convexe, toute fonction $f(z) \in \mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ est bien déterminée par son dévoloppement suivant la base $\{e^{\lambda z}\}$, $\lambda \in \Lambda$.

Sinon en effet, il existerait une fonction $g(z) \not\equiv 0$, $g(z) \in \mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$, telle que, pour toute suite $\Lambda' \subset \Lambda$ ne différant de Λ que par un nombre fini d'éléments, on ait $g(z) \in \mathcal{E}_\Omega(\Lambda')$. Si $\Phi(w)$ est de la forme (3) et s'annule sur Λ, Γ étant la frontière d'un convexe dans Ω, on peut écrire

$$\Phi(w) = w^p e^{aw+b} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{\mu_k}\right) e^{\frac{w}{\mu_k}}$$

la suite $\{\mu_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ contenant Λ,

$$|\mu_{k+1}| \geqslant |\mu_k| \ldots > \mu_0 = 0.$$

Posons $$\Phi_k(w) = \frac{\Phi(w)}{w - \mu_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} e^{wz} \varphi_k(z)\, dz;$$

$\varphi_k(z)$ est la transformée de Laplace de $\Phi_k(z)$, définie sur Γ et à l'extérieur de Γ par une égalité analogue à (3), et on a $\int_{\Gamma^+} g(z) \varphi_k(z)\, dz = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Posons

$$\psi_N(z) = a\varphi(z) + p\varphi_0(z) + \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k(z) + \frac{\varphi(z)}{\mu_k}\right);$$

c'est la transformée de Laplace de

$$\Psi_N(w) = \Phi(w)\left(a + \frac{p}{w} + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{w - \mu_k} + \frac{1}{\mu_k}\right)\right);$$

quand $N \to \infty$, $\psi_N(z)$ tend uniformément sur Γ et à l'extérieur de Γ vers la transformée de Laplace de $\Phi'(w)$, soit $z\varphi(z) - \Phi(0)$; on a donc $\int_{\Gamma^+} zg(z)\varphi(z)\, dz = 0$, et $zg(z) \in \mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$; de même $zg(z) \in \mathcal{E}_\Omega(\Lambda')$ pour toute suite Λ' ci-dessus définie. Par récurrence, on a donc $P(z)g(z)\in\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ quel que soit le polynôme $P(z)$.

Si $g(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans Ω (et on peut se ramener à ce cas en remplaçant Ω par un ouvert plus petit contenant Γ), tous les polynômes possédant ces zéros, donc tous les polynômes, appartiennent à $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$, contrairement à l'hypothèse $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)\neq\mathcal{E}_\Omega$.

Proposition 8. — Si $f(z)\in\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ est prolongeable analytiquement dans une chaîne de Ω_ζ, ζ parcourant un arc de Jordan $\mathcal{J}$ d'origine O([1]), on a $f(z)\in\mathcal{E}_{\Omega_\zeta}(\Lambda)$ pour tout $\zeta\in\mathcal{J}$.

En effet, si μ satisfait (1), $g(\zeta)=\int_C f(z-\zeta)\,d\mu(z)$ est une fonction analytique de ζ dans le voisinage de $\mathcal{J}$, nulle au voisinage de O, donc $g(\zeta)=0$ sur $\mathcal{J}$ et $f(z-\zeta)\in\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$.

Applications. — 1. Soit $f(z)\in\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)\neq\mathcal{E}_\Omega$, Ω étant un demi-plan; supposons que $f(z)$ soit prolongeable analytiquement dans un ensemble B de bandes (ouvertes) limitées par des droites parallèles à une même direction; posons $\Omega_1=\Omega\cup B$. On a $f(z)\in\mathcal{E}_{\Omega_1}(\Lambda)$. En effet, tout ouvert de Ω_1 peut être relié par une chaîne de ses translatés à un ouvert de Ω. D'où l'existence d'un mode de convergence pour une série de Dirichlet dans une « étoile oblique » de Mittag-Leffler.

2. Soit Ω_2 un ouvert défini comme Ω_1, et $\Omega'=\Omega_1\cap\Omega_2$. Si Ω' n'est pas connexe, il se peut que $f(z)$ admette deux définitions différentes dans Ω' (coïncidant sur Ω), appartenant également à $\mathcal{E}_{\Omega'}(\Lambda)$ et possédant même développement par rapport à la base $\{e^{\lambda z}\}$, $\lambda\in\Lambda$. La validité de la proposition 7 ne s'étend donc pas dans les mêmes conditions que celles de la proposition 6.

Proposition 9. — Soit Λ l'ensemble des zéros d'une fonction $D(w)$ de type exponentiel, telle que $\lim_{r\to\infty}\frac{\log|D(re^{i\theta})|}{r}$ existe pour un ensemble de valeurs de θ dense sur $[0, 2\pi]$. Soit J le diagramme conjugué de $D(w)$, J_ζ son transformé par la translation ζ, g un ouvert convexe contenant O, $G=\bigcup_{\zeta\in g}J_\zeta$. Si $f(z)\in\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$, $\Omega\supset J$, et si $f(z)\in\mathcal{E}_G$, alors $f(z)\in\mathcal{E}_G(\Lambda)$.

Démonstration. On sait, d'après un critère de Lindelöf ([21], p. 375) que si le quotient de deux fonctions de type

([1]) C'est à dire si f est prolongeable dans un ouvert G contenant Ω et réunion de translatés de Ω; faute d'avoir dans tous les cas $f\in\mathcal{E}_G(\Lambda)$, on a les propositions 8 et 9.

exponentiel est une fonction entière, c'est une fonction de type exponentiel. Si ν est une mesure à support compact $\subset G$, telle que $\psi(w) = \int e^{wz}\, d\nu(z)$ s'annule sur Λ, $\psi_1(w) = \dfrac{\psi(w)}{D(w)}$ est donc une fonction entière de type exponentiel. D'après la formule (4), le diagramme conjugué de $\psi_1(w)$ est intérieur à g. Soit ν_1 une mesure à support dans g, telle que $\psi_1(w) = \int e^{wz}\, d\nu_1(z)$, et μ une mesure à support voisin de J, telle que

$$D(w) = \int e^{wz}\, d\mu(z):$$

alors (proposition 3) $\nu \approx \mu * \nu_1$. Donc $\int f(z)\, d\nu(z) = 0$. C.Q.F.D.

Conditions suffisantes pour avoir $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) = \mathcal{E}_\Omega$, ou $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) \neq \mathcal{E}_\Omega$.
Explicitons la proposition 2 dans quelques cas particuliers. Les notations, relativement à Λ, seront celles du chapitre I, § 3.

PROPOSITION 10. — Si Ω est l'intersection des plans

$$x \cos\theta - y \sin\theta < H(\theta),$$

$H(\theta)$ étant continue $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$, on a $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) = \mathcal{E}_\Omega$ dès que $\int_0^{2\pi} H(\theta)\, d\theta \leqslant 4\pi \overline{D}^{\cdot}$ ($\overline{D}^{\cdot}$: densité moyenne supérieure dans le plan entier).

En effet, l'hypothèse sur Ω entraîne

$$\log|\Phi(re^{i\theta})| < rh(\theta) + C^{te}, \qquad \text{avec} \qquad h(\theta) < H(\theta).$$

Si $\Phi(w) \not\equiv 0$, l'application de la formule de Jensen donne, pour r assez grand, $2\overline{D}(r) < \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta < \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\theta)\, d\theta$. D'où le résultat.

PROPOSITION 11. — (Théorème de Carleman). Si Ω est contenue dans la bande $|y| < Y$, et si Λ est positive (resp. négative), on a $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) = \mathcal{E}_\Omega$ dès que $Y \leqslant \pi \widehat{D}^{\cdot}$ ($\widehat{D}^{\cdot}$: densité moyenne-logarithmique supérieure dans un demi-plan contenant Λ).

En effet, l'hypothèse sur Ω entraîne $\log|\Phi(w)| < Y'|v| + B|u|$, B constante, $Y' < Y$. Si $\Phi(w) \not\equiv 0$, l'application de la formule de Carleman (cf. chap. III, § 3), donne $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}} \displaystyle\int^r \frac{\pi D(t) - Y'}{t}\, dt = \infty$. D'où le résultat.

On obtient des réciproques aux propositions 10 et 11 en utilisant la proposition 5.

PROPOSITION 12. — Si Λ est symétrique, mesurable de densité D, et s'accumule angulairement sur l'axe réel, on a $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) \neq \mathcal{E}_\Omega$ dès que Ω (ou un translaté de Ω) contient le segment $[-i\pi D, i\pi D]$.

En effet, ce segment est le diagramme conjugué de

$$C(w) = \Pi\left(1 - \frac{w^2}{\lambda^2}\right)$$

(voir ci-dessous lemme 2).

PROPOSITION 13. — Si Λ est symétrique, on a $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) \neq \mathcal{E}_\Omega$ dès que Ω (ou un translaté de Ω) contient le cercle $|z| \leqslant \pi \overline{D^\cdot}$ ($\overline{D^\cdot}$: densité moyenne supérieure dans le plan).

En effet, le diagramme conjugué de $C(w)$ est contenu dans ce cercle (voir ci-dessous lemme 1).

2. Quelques lemmes sur les produits canoniques et les fonctions de type exponentiel. — Nous désignerons par $C(w) = \Pi\left(1 - \frac{w^2}{\lambda^2}\right)$ le plus simple (= le p. g. c. d.) des produits canoniques pairs s'annulant sur Λ, que nous supposerons toujours de densité supérieure bornée (sinon, l'inégalité $e\overline{D^\cdot} \geqslant D^\cdot$ ([25], p. 53) entraîne $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda) = \mathcal{E}_\Omega$ quel que soit Ω). Nous supposerons désormais, sauf mention contraire, soit Λ symétrique (et les notations du chap. I § 3 seront alors relatives à Λ dans tout le plan), soit Λ contenue dans un demi-plan (et les notations seront relatives à Λ dans ce demi-plan).

LEMME 1. — $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}} \frac{\log|C(re^{i\theta})|}{r} \leqslant \pi \overline{D^\cdot}$ ([25], p. 58.)

LEMME 2. — *(Carlson). Si Λ est mesurable de densité* D *et s'accumule angulairement sur l'axe réel (resp. sur l'axe réel négatif), on a* $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{\log|C(re^{i\theta})|}{r} = \pi|\sin\theta|$ *dès que* $\sin\theta \neq 0$. ([2], *note* 2).

LEMME 3. — *Si Λ s'accumule angulairement sur l'axe réel (resp. négatif) et a pour densité maximum* D_1, *on a*

$$\underline{\lim}_{r \to \infty} \frac{\log|C(re^{i\theta})|}{r} \geqslant \pi D_1(|\sin\theta| - 1)$$

dès que $|\sin\theta| \neq 0$.

Ce résultat découle des lemmes 1 et 2; l'hypothèse exprime en effet qu'on a $C(w) = \frac{C_1(w)}{C_2(w)}$, avec

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log|C_1(re^{i\theta})|}{r} = \pi D_1 |\sin\theta|$$

et

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log|C_1(re^{i\theta})|}{r} \leqslant \pi D_1.$$

Lemme 4. — *Étant donné* $\varepsilon > 0$, *il existe une infinité de valeurs* $R_j \to \infty$ *telles que, pour* $|w| = R_j$, *on ait* $\log|C(w)| > -\varepsilon R_j$.

Quitte à remplacer $C(w)$ par $\Pi\left(1 - \frac{w^2}{|\lambda|^2}\right)$, on peut supposer Λ réelle. Le lemme découle alors de la formule de Carleman, appliquée à $C(w)$ dans le demi-plan $v \geqslant 0$: s'il n'était pas satisfait, on ne saurait avoir

$$\int^{R}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)\log C(r)\,dr = O(1) \qquad (R \to \infty).$$

Lemme 5. — *Si* Λ *est mesurable et de densité* D, *on a*

$$\log|C(w)| > -\varepsilon r \qquad \textit{pour} \qquad \varepsilon > 0, \qquad r = |w| > R(\varepsilon)$$

dès que w^2 *est extérieur à un ensemble* E *de cercles* C *ainsi construits : chaque cercle* C *est homothétique dans le rapport* 2 *par rapport à son centre du plus grand* Γ *des cercles concentriques de rayon* $k^2\delta^2$ *contenant* k *points* λ^2 $\left(\delta \textit{ donné} < \frac{1}{D}\right)$, *et tout point* λ^2 *est contenu dans l'un des cercles* Γ.

Démonstration. — Posons $C(w) = (\Pi'\Pi'')\left(1 - \frac{w^2}{\lambda^2}\right)$, Π' désignant le produit des facteurs de $C(w)$ tels que $\frac{r}{\gamma} < |\lambda| < r\gamma$ (γ : constante arbitraire > 1), Π'' le produit des autres facteurs. On sait ([2], note 2) que $\log|\Pi''| > -\frac{\varepsilon r}{2}$ pour $r > R_1(\varepsilon, \gamma)$. Reste à montrer qu'on peut choisir γ de façon à avoir, quand $w^2 \notin E$, $\log|\Pi'| > -\frac{\varepsilon r}{2}$ pour r assez grand. Or, pour $r > R_2$, Π' est un produit dont le nombre de termes N ne dépasse pas

$\left(\gamma - \dfrac{1}{\gamma}\right) \cdot 2Dr$. Il résulte d'un raisonnement de H. Cartan ([6], chap. II) que

$$\Pi' |\lambda^2 - w^2| > (N!)^2 \delta^{2N} > \left(\frac{N\delta}{e}\right)^{2N}$$

et
$$\log \Pi' \left|1 - \frac{w^2}{\lambda^2}\right| > 2r\left[\frac{N}{r} \log \frac{N\delta}{re\gamma}\right]$$

En choisissant γ assez voisin de 1, on peut minorer le crochet par $-\dfrac{\varepsilon}{4}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme 6. — *Si Λ est à distribution logarithmique bornée, on a* $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{\log |C(re^{i\theta})|}{r} = 0$ *pour presque toute les valeurs de* θ.

Ce résultat est connu. On le déduit d'ailleurs aisément du lemme 5. Il admet le corollaire suivant :

Lemme 6'. — $D(w)$ *étant une fonction entière de genre* 0, *on a* $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{\log |D(re^{i\theta})|}{r} = 0$ *pour presque toutes les valeurs de* θ.

Lemme 7. — $D(w)$ *étant une fonction entière de type exponentiel* k *bornée sur la droite réelle, on a*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log |D(re^{i\theta})|}{r} = k |\sin \theta|$$

pour presque toutes les valeurs de θ.

Ce résultat a été établi par M. L. Schwartz ([33], p. 123), quand $D(u)$ est réelle. Nous nous ramènerons à ce cas, grâce à une fonction auxiliaire introduite dans [20], p. 29. Posons (à un monôme près),

$$D(w) = e^{az} \Pi\left(1 - \frac{w}{\lambda_n}\right) e^{\frac{w}{\lambda_n}}, \qquad \lambda_n = r_n e^{i\theta_n}, \qquad w = re^{i\theta}.$$

et
$$E(w) = e^{\frac{a+\bar{a}}{2} w} \Pi\left(1 - \frac{w \cos \theta_n}{r_n}\right) e^{\frac{w \cos \theta_n}{r_n}}.$$

On a $E(u)$ réelle, $|E(u)| \leqslant |D(u)|$,

$$\frac{D(w)}{E(w)} = \Pi \frac{\lambda_n - w}{\lambda_n - w'_n} e^{-iw\frac{\sin \theta_n}{r_n}} \qquad \text{avec} \qquad w'_n = w \cos \theta_n e^{i\theta_n}.$$

On sait (théorème de Levinson) que $\sum \frac{|\sin\theta_n|}{r_n} < \infty$. Quitte à diviser $D(w)$ et $E(w)$ par des fonctions de genre 0, ce qui d'après le lemme 6′ ne perturbera pas le résultat, on peut donc supposer $\max|\operatorname{tg}\theta_n| < \eta$ et $\sum \frac{|\sin\theta_n|}{r_n} < \eta$, η aussi petit qu'on veut.

Alors $-\eta r < \log \Pi \left| e^{-iw\frac{\sin\theta_n}{r_n}} \right| < \eta r$, et

$$\log \Pi \left| \frac{\lambda_n - w}{\lambda_n - w'_n} \right| < \sum \left| \frac{w'_n - w}{\lambda_n - w'_n} \right| < r \sum \frac{|\sin\theta_n|}{r_n |\sin\theta|} < \frac{r\eta}{|\sin\theta|}$$

$$\log \Pi \left| \frac{\lambda_n - w'_n}{\lambda_n - w} \right| < \frac{r\eta}{\sin\alpha} \qquad \text{pour} \qquad |\sin(\theta - \theta_n)| > \sin\alpha > 0.$$

Si petits qu'on choisisse θ_0 et ε, on peut choisir η de façon à avoir $\left| \log \left| \frac{D(w)}{E(w)} \right| \right| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad |\operatorname{tg}\theta| > |\operatorname{tg}\theta_0|$.

§ 2. Théorèmes de prolongement.

La plupart des théorèmes énoncés dans ce chapitre ont été établis indépendamment par M. Léontiev dans [15]. La méthode de M. Léontiev, très différente de la nôtre, est fondée sur un mode d'ultraconvergence du développement formel suivant la base $\{e^{\lambda z}\}$ d'une fonction de $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$. Elle se rattache à celle utilisée par M. Valiron dans [35], après MM. Ritt [32] et Polya [31] pour étudier les singularités des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre infini. Notre méthode semble moins puissante que celle de M. Léontiev; par contre, elle permet de retrouver plus rapidement les théorèmes classiques de Szasz, V. Bernstein, Ostrowski, Mandelbrojt sur les singularités des séries de Dirichlet et les résultats correspondants pour les fonctions presque-périodiques.

1. Problème du prolongement. — Le problème principal que nous chercherons à résoudre dans ce paragraphe est le suivant.

PROBLÈME. — *Ω et Λ étant données, déterminer un ouvert $G \supset \Omega$ tel que toute fonction de $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ soit prolongeable en une fonction de $\mathcal{E}_G(\Lambda)$.*

Notre méthode de résolution, inspirée de celle du chap. I, § 3, 4, sera la suivante. Nous chercherons à construire une mesure $\nu = \nu_Z$ somme d'une mesure $\mu = \mu_Z$ à support compact $C \subset \Omega$, et d'une mesure de Dirac en un point Z donné, telle que $\int e^{\lambda z} d\nu(z) = 0$ pour $\lambda \in \Lambda$. Nous chercherons alors à définir le prolongement au voisinage de Z d'une fonction $f_\Omega(z) \in \mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ par l'égalité

$$(1) \quad f(Z+\zeta) = -\int_C f_\Omega(z+\zeta)\, d\mu(z), \quad |\zeta| \leqslant \rho, \quad \rho = \rho(C).$$

La fonction $f(z)$ du premier membre est, à priori, fonction de Z. Cependant, si $Z \in \Omega$, on a $f = f_\Omega$.

Σ désignant une somme finie, (1) entraîne

$$f(Z+\zeta) - \Sigma a(\lambda) e^{\lambda(Z+\zeta)} = -\int \left[f_\Omega(z+\zeta) - \Sigma a(\lambda) e^{\lambda(z+\zeta)}\right] d\mu(z) (\lambda \in \Lambda)$$

ε étant donné, on peut déterminer les $a(\lambda)$ de façon que le crochet soit, en module, inférieur à ε. Le premier membre est alors majoré, en module, par $\varepsilon \int |d\mu|$. $f(z) = f_Z(z)$ est donc uniformément approchable au voisinage de $Z(|z - Z| \leqslant \rho)$ par les mêmes polynômes de Dirichlet que $f_\Omega(z)$ dans $\mathcal{E}_\Omega$.

Z parcourant un ensemble connexe $\mathcal{C}$, supposons que $\int |d\mu_Z|$ soit borné. Les fonctions $f = f_Z$ définies par (1), étant uniformément approchables par les mêmes polynômes de Dirichlet que f_Ω dans $\mathcal{E}_\Omega$, représentent une même fonction $f \in \mathcal{E}_{\Omega \cup g}(\Lambda)$ prolongeant f_Ω, dans un voisinage g, assez petit, de $\mathcal{C}$. Si Ω et g ont des points communs, le problème est résolu avec $G = \Omega \cup g$.

Le plus souvent, nous définirons une famille d'ouverts connexes g_i, dont la réunion empiète sur Ω, et tels que, sur chaque g_i, $f(z)$ soit uniformément approchable par les mêmes polynômes de Dirichlet que dans $\mathcal{E}_\Omega$. Nous prendrons alors $G = \bigcup_i (\Omega \cup g_i)$.

Cherchons maintenant comment construire la mesure ν. La construction de μ revient à celle d'une fonction entière de type exponentiel $\Phi(w)$, prenant sur Λ les mêmes valeurs que $-e^{wZ}$, et dont la transformée de Laplace $\varphi(z)$ a toutes ses singularités dans Ω. En effet, $\Gamma \subset \Omega$ étant une courbe contenant à son intérieur toutes les singularités de $\varphi(z)$, on peut prendre pour

$d\mu(z)$ la mesure $\frac{1}{2\pi i}\varphi(z)\,dz$ sur Γ^+, de sorte que (1) s'écrive

$$(2)\quad f(Z+\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f_\Omega(z+\zeta)\,\varphi(z)\,dz, \qquad |\zeta| \leqslant \rho.$$

Supposons que Ω contienne le diagramme conjugué d'une fonction entière de type exponentiel $D(w)$ s'annulant sur Λ. $\Phi(w)$ peut être défini par

$$(3)\qquad \Phi(w) = D(w)\,A(w)$$

où $A(w)$ satisfait les conditions suivantes :

a) $A(w)$ est bornée sur une suite de cercles $|w| = R_j$ de rayons R_j augmentant indéfiniment.

b) $A(w)$ est bornée pour chaque valeur de $\operatorname{Arg} w = \theta$ appartenant à un ensemble dense sur $[0, 2\pi]$.

c) $A(w)$ est méromorphe, et ses pôles, simples, sont les éléments λ de Λ, avec pour résidu en λ : $\frac{-e^{\lambda Z}}{D'(\lambda)}$.

Lorsque Z varie, cherchons une condition suffisante pour que $\int_\Gamma |\varphi(z)\,dz|$ soit borné ($\varphi = \varphi_Z$). D'après la formule (5) du § 1, il suffit que $\Phi(w) = \Phi_Z(w)$ soit uniformément borné par $k|D(w)|$ (k : constante) pour un ensemble de valeurs θ possédant au moins un élément sur chaque intervalle de longueur α, et que Γ contienne à son intérieur le lieu des points d'où J_D est vu sous l'angle $\pi - \alpha$. C'est le cas, pour une valeur assez petite de α, si

d) $A(w) \equiv A_Z(w)$ est uniformément bornée, si petit que soit α, pour un ensemble E_α de valeurs de θ ayant un élément sur chaque intervalle de longueur α. Cette condition *d*) entraîne *b*).

Nous pouvons énoncer le lemme suivant :

Lemme fondamental. — *Supposons que Ω contienne le diagramme conjugué d'une fonction $D(w)$ de type exponentiel s'annulant sur Λ ; soit $\varphi(z)$ la transformée de Laplace de la fonction définie par* (3). *Si, lorsque Z varie sur un ensemble connexe $\mathcal{C}$, $A(w) \equiv A_Z(w)$ satisfait les conditions a*), *d*), *c*) *l'égalité* (2) *définit une fonction f uniformément approchable, dans un voisinage g de $\mathcal{C}$, par les mêmes polynômes de Dirichlet $\Sigma a(\lambda)e^{\lambda z}$ ($\lambda \in \Lambda$) que f_Ω dans $\mathcal{E}_\Omega$. On peut prendre pour g le lieu* *des points dont la distance à $\mathcal{C}$ est inférieure à une constante* ρ *ne dépendant que de* Ω et Γ.

Pour construire $A(w)$, nous aurons recours à deux procédés. Le premier consiste à écrire

$$A(w) = -\Sigma \frac{e^{\lambda Z}}{D'(\lambda)(w-\lambda)}$$

et à rechercher des conditions de convergence normale de cette série, en dehors de cercles égaux centrés sur Λ, quand Z varie. Le second consiste à écrire

$$A(w) = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathcal{L}_j} \frac{e^{w'Z}\, dw'}{D(w')(w-w')}$$

$\{\mathcal{L}_j\}$ étant une suite de contours du plan w', frontières de domaines emboîtés dont la réunion contient tous les $\lambda \in \Lambda$, et aucun autre zéro de $D(w')(w-w')$.

2. Cas des suites Λ négatives. Premier procédé. — Nous prendrons ici $D(w) = C(w) = \Pi\left(1 - \frac{w^2}{\lambda^2}\right)$. Désignons par J le diagramme conjugué de $C(w)$.

Écrivons $$A(w) = -\Sigma \frac{e^{\lambda Z}}{C'(\lambda)(w-\lambda)}.$$

Pour que cette série soit normalement convergente, Z variant, il suffit d'avoir

$$X > \overline{\lim} \frac{\log |C'(\lambda)|}{\lambda} + \varepsilon = \delta + \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ arbitraire} > 0).$$

$x > \delta + \varepsilon - \rho(\alpha)$ étant donné, la fonction $f(z)$ définie par (2) est une fonction de y moyenne-périodique bornée. D'après le théorème 7 du chap. I, § 1, elle admet un développement absolument convergent $\Sigma a(\lambda) e^{\lambda z}$. Les coefficients $a(\lambda)$ sont d'ailleurs indépendants de x, puisque $\{e^{\lambda z}\}$ constitue une base de $\mathcal{E}_P(\Lambda)$, P désignant le plan $x > \delta + \varepsilon - \rho(\alpha)$.

1. Supposons que Λ soit mesurable et de densité D. Le lemme 2 du § 1 signifie que J est le segment $[-i\pi D, i\pi D]$. δ est l' « indice de condensation » de Λ ([2], chap. II). Si $\delta = 0$, on a l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1. — Λ *étant une suite négative mesurable de densité* D, *et d'indice de condensation nul,* Ω *un ouvert connexe* *contenant le segment* $[-i\pi D, i\pi D]$, *toute fonction de* $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ *est prolongeable analytiquement dans le demi-plan* $x \geqslant 0$ *en la somme d'une série de Dirichlet convergente, dont la suite des exposants est la symétrique*[1] *de* Λ.

Rappelons que, si Λ est régulière, son indice de condensation est nul.

Comme corollaire, on retrouve un résultat bien connu relatif aux séries de Dirichlet [2].

Corollaire. — *La somme d'une série de Dirichlet dont les exposants sont extraits d'une suite mesurable de densité* D, *et d'indice de condensation nul, admet au moins une singularité sur tout segment de longueur* $2\pi D$ *de sa droite de convergence.*

Sinon en effet, Ω_1 étant un ouvert assez petit contenant ce segment, la somme appartiendrait à $\mathcal{E}_{\Omega_1}(\Lambda)$, d'après la proposition 8 du § 1.

Si $\delta \neq 0$, on n'est pas sûr à priori que $f(z)$ dans P soit un prolongement analytique de $f_\Omega(z)$. Mais inversement, la proposition 8 du § 1 permet d'affirmer que la somme d'une série de Dirichlet dont l'abscisse de convergence est δ ne peut être prolongée jusque dans le demi-plan $x < 0$ à travers une chaîne de Ω_ζ. On retrouve un autre résultat bien connu :

La différence entre l'abscisse de convergence et l'abscisse d'holomorphie d'une série de Dirichlet dont les exposants sont extraits d'une suite mesurable ne peut pas dépasser l'indice de condensation de cette suite.

2. Supposons Λ régulière; soit h la borne inférieure des distances de deux éléments de Λ. Le lemme 1 du § 1 montre que J est contenu dans le cercle $|z| \leqslant \pi \overline{D}^{\cdot}$. On a d'autre part $\delta < 3(3-\log(hD^{\cdot}))D^{\cdot} = B$ ([25], p. 61).

On n'est pas sûr à priori que f dans P soit un prolongement analytique de f_Ω. La proposition 8 du § 1 permet ici de retrouver un résultat de Mandelbrojt ([23], chap. 8) qui précise un théorème d'Ostrowski :

La somme d'une série de Dirichlet admettant pour suite d'exposants la symétrique de Λ ne peut être prolongée analytiquement à travers une chaîne de cercles de centres ζ et rayons $\pi \overline{D}^{\cdot} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, lorsque ζ, partant du demi-plan de

[1] Les séries de Dirichlet sont traditionnellement notées $\Sigma\, \dot{a}(\lambda)\, e^{-\lambda z}$

convergence de la série, s'en éloigne continûment d'une distance supérieure à B.

3. Cas des suites Λ négatives. Second procédé. — Supposons

$$|\operatorname{Arg} w| < \pi - \frac{\alpha}{2} < \pi - \alpha' < \pi$$

et

$$(4) \qquad |\operatorname{Arg} Z| < \frac{\pi}{2} - \alpha'$$

Écrivons

$$(5) \qquad A_R(w) = \frac{-1}{2\pi i} \int \frac{e^{w'Z}}{C(w')(w - w')} dw',$$

l'intégrale étant prise dans le sens direct sur le contour du secteur $|\operatorname{Arg} w' - \pi| < \alpha'$, $|w'| < R$. On a

$$A_R(w) = - \sum_{|\lambda| < R} \frac{e^{\lambda Z}}{C'(\lambda)(w - \lambda)}.$$

D'après le lemme 4 du § I, il existe une suite de valeurs $R_j \to \infty$ telles que la partie de l'intégrale (10) relative à l'arc de cercle tende vers 0 quand R prend les valeurs $R_j \to \infty$. Les parties relatives aux segments rectilignes deviennent alors

$$(6) \qquad A^+(w) (\text{resp. } A^-(w)) = \frac{-1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{w'Z}}{C(w')(w - w')} dw'$$

l'intégrale étant prise sur la demi-droite $\operatorname{Arg} w' = \pi - \alpha'$ (resp. $\pi + \alpha'$). (6) définit des fonctions de w holomorphes et bornées dès qu'on a, pour r assez grand,

$$(7) \qquad X \cos \alpha' \pm Y \sin \alpha' + \frac{1}{r} \log |C(re^{i\alpha'})| > \varepsilon > 0.$$

Dans ces conditions, on peut écrire

$$\lim_{j \to \infty} A_{R_j}(w) = A^+(w) - A^-(w) = A(w).$$

Si $|\operatorname{Arg} w - \pi| < \alpha'' < \alpha'$, ces formules valent encore, à condition d'adjoindre au chemin d'intégration, pour R assez grand, un petit cercle entourant w, sur lequel

$$\int \frac{e^{w'Z} dw'}{C(w')(w - w')} = -2\pi i \frac{e^{wZ}}{C(w)}.$$

Avec cette convention, on peut, tant que Z satisfait (4) et (7), changer α' sans changer $A(w)$. On vérifie immédiatement que $A(w)$ satisfait les conditions *a*), *c*) et *d*), lorsque Z varie en satisfaisant (4) et (7), avec $0 < \alpha' < \frac{\alpha}{2}$.

Appliquons notre lemme fondamental dans les deux cas déjà étudiés.

1. Λ est mesurable et de densité D. D'après le lemme 2 du § 1, les conditions (4) et (7) se réduisent à (4). En utilisant les remarques faites en 2, on a la généralisation suivante du théorème 1 :

Théorème 2. — *Λ étant une suite négative mesurable de densité D, Ω un ouvert connexe contenant le segment $[-i\pi D, i\pi D]$, toute fonction de $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ est prolongeable analytiquement dans le demi-plan $x \geqslant 0$. Dans tout angle $|\mathrm{Arg}\, z| < \beta < \frac{\pi}{2}$, ce prolongement est une fonction bornée uniformément approchable par les mêmes combinaisons linéaires $\Sigma a(\lambda) e^{\lambda z} (\lambda \in \Lambda)$ que dans $\mathcal{E}_\Omega$. Si Λ admet un indice de condensation fini δ, le même prolongement est somme d'une série de Dirichlet convergente pour $x \geqslant \delta$, dont la suite des exposants est symétrique de Λ.*

Corollaire. — *La somme d'une série de Dirichlet dont la suite des exposants a pour densité maximum* D *admet au moins une singularité sur tout segment de longueur $2\pi D$ de sa droite d'holomorphie* [2]. *L'ultra-convergence est uniforme dans tout angle intérieur au demi-plan d'holomorphie.*

2. Λ est de densité maximum finie D_1 et de densité moyenne supérieure $\overline{D}^{\cdot}$. D'après le lemme 3 du § 1, les conditions (4) et (7) se réduisent à (7).

Théorème 3. — *Λ étant une suite négative de densité maximum D_1 et de densité moyenne supérieure $\overline{D}^{\cdot}$, Ω un ouvert connexe contenant le cercle $|z| < \pi \overline{D}^{\cdot}$, toute fonction de $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ est prolongeable analytiquement dans le domaine balayé par les segments coupant perpendiculairement la demi-droite Ox sans couper aucun des cercles de rayon πD_1 tangents en 0 à Ox. Dans tout angle intérieur à ce domaine, le prolongement est une fonction bornée uniformément approchable par les mêmes combinaisons linéaires $\Sigma a(\lambda) e^{\lambda z} (\lambda \in \Lambda)$ que dans $\mathcal{E}_\Omega$. Si Λ est régulière,* *le même prolongement est somme d'une série de Dirichlet convergente pour* $x > B$ (*défini au* **2**).

Il est évident que tout résultat du même type que le lemme 3 du § 1 donnerait un théorème de prolongement analogue au théorème 3.

4. Cas des suites Λ contenues dans un angle saillant. — Le second procédé, sous la forme exposée au 3, s'applique encore si Λ est une suite complexe contenue dans l'angle $|\operatorname{Arg} w - \pi| \leqslant \theta_0 < \frac{\pi}{2}\cdot$ On prendra de nouveau pour Ω un ouvert contenant le diagramme conjugué J de $C(w)$. Pour avoir des contours d'intégration convenables, on supposera $\alpha' > \theta_0$. $A(w)$ satisfait encore les conditions *a*), *c*), *d*) quand Z varie en satisfaisant (4) et (7).

Nous nous appuierons sur les inégalités évidentes :

$$(8) \qquad |C(w)| < \Pi\left(1 + \left|\frac{w^2}{\lambda^2}\right|\right)$$

$$(9) \qquad |C(u)| < \Pi\left|1 - \frac{u^2 e^{2i\theta_0}}{|\lambda^2|}\right|$$

$$(10) \qquad |C(w)| > \Pi\left|1 - \frac{w^2 e^{2i\theta_0}}{|\lambda^2|}\right| \qquad \text{si} \qquad \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} w < \pi - \theta_0$$

(8) et (9) nous permettent de localiser le diagramme conjugué de $C(w)$. (10) permet d'interpréter la relation (7).

On obtient ainsi les extensions suivantes des théorèmes 2 et 3.

THÉORÈME 2'. — Λ *étant une suite complexe contenue dans l'angle* $|\operatorname{Arg} w - \pi| < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, *mesurable, de densité* D, Ω *étant un ouvert connexe contenant l'intersection du cercle* $|z| < \pi D$ *et de la bande* $|x| \leqslant \pi D |\sin \theta_0|$, *toute fonction de* $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ *est prolongeable analytiquement dans l'angle* $|\operatorname{Arg} z| < \theta_0$, *Dans tout angle* $|\operatorname{Arg} z| < \beta < \theta_0$, *ce prolongement est une fonction bornée uniformément approchable par les mêmes combinaisons linéaires* $\Sigma a(\lambda) e^{\lambda z} (\lambda \in \Lambda)$, *que dans* $\mathcal{E}_\Omega$.

THÉORÈME 3'. — Λ *étant une suite complexe contenue dans l'angle* $|\operatorname{Arg} w - \pi| \leqslant \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, *de densité maximum* D_1 *et de densité moyenne supérieure* $\overline{D}^{\cdot}$, Ω *étant un ouvert connexe* *contenant le cercle* $|z| \leqslant \pi \overline{\mathrm{D}}^{\cdot}$ *et le point* $2\pi \mathrm{D}_1 \sin \theta_0$, *toute fonction de* $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ *est prolongeable analytiquement dans le domaine balayé par les segments coupant perpendiculairement la demi-droite* Ox *sans couper les droites issues de* O *faisant avec* Oy *l'angle* θ_0, *ni les cercles de rayon* $\pi \mathrm{D}_1$ *passant par* O *et faisant avec* Ox *l'angle* θ_0. *Dans tout angle intérieur à ce domaine, le prolongement est une fonction bornée uniformément approchable par les mêmes combinaisons linéaires* $\Sigma a(\lambda) e^{\lambda z} (\lambda \in \Lambda)$ *que dans* $\mathcal{E}_\Omega$.

Remarque. — La première partie des théorèmes 2′ et 3′ vaut encore si Λ est, à l'exception d'un nombre fini de points, contenue dans l'angle $|\mathrm{Arg}\, w - \pi| \leqslant \theta_0$; il suffit dans l'étude préalable d'adjoindre aux contours d'intégration des petits cercles entourant ces points. En particulier, la première partie des théorèmes 2 et 3 vaut si Λ, au lieu d'être supposée négative, est supposée s'accumuler angulairement sur l'axe réel négatif.

5. Cas des suites Λ symétriques s'accumulant angulairement sur l'axe réel. — Nous allons établir le théorème suivant, dont un énoncé partiel a été donné au chapitre I § 3.

Théorème 4. — *Soit* Λ *une suite symétrique, s'accumulant angulairement sur l'axe réel, mesurable et de densité* D, Ω *un ouvert connexe contenant le segment* $[-i\pi \mathrm{D}, i\pi \mathrm{D}]$. *Toute fonction de* $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ *est prolongeable analytiquement dans une bande verticale ouverte* $\mathcal{B}$ *(« bande » qui peut dégénérer en un demi-plan ou le plan entier) en une fonction de* $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\Lambda)$, *telle que sur tout segment de longueur* $2\pi \mathrm{D}$ *de la frontière de* $\mathcal{B}$ *il y ait au moins une singularité de cette fonction.*

Il suffit de montrer que toute fonction de $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ est prolongeable analytiquement sur l'axe imaginaire. Le reste du théorème découle des propositions 8 et 9, cette dernière jointe au lemme 2 du § 1.

Nous prendrons ici $\mathrm{D}(w) = \mathrm{C}(w)\, \mathrm{Ch}(wc)$ avec $c > 0$ assez petit et $\mathrm{Ch}(\lambda c) \neq 0$ pour $\lambda \in \Lambda$, et nous ferons varier Z sur l'axe imaginaire ($\mathrm{Z} = i\mathrm{Y}$). Pour construire $\mathrm{A}(w)$, nous aurons recours au second procédé, et aux lemmes 2 et 4 du § 1.

Supposons d'abord Λ réelle,

$$\left|\mathrm{Arg}\, w \pm \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} - \alpha' < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad |\mathrm{Y}| \sin \alpha' < c \cos \alpha'.$$

Posons $$A_R(w) = \frac{-1}{2\pi i}\int \frac{e^{iYw'}}{D(w')(w-w')}\,dw'$$

l'intégration étant faite le long du contour, pris dans le sens direct, de la réunion des deux secteurs découpés dans le cercle $|w'| = R$ par les angles $|\operatorname{Arg} w' - \pi| < \alpha'$ et $|\operatorname{Arg} w'| < \alpha'$. D'après le lemme 4, il existe une suite de valeurs $R_j \to \infty$ telle que $A_{R_j}(w)$ tende vers une limite $A(w)$; d'après le lemme 2, $A(w)$ est donnée par la même formule que $A_R(w)$, le chemin d'intégration étant constitué des quatre demi-droites

$$\operatorname{Arg} w' = \pm\alpha' \quad (\text{mod. } \pi).$$

$A(w)$ satisfait bien les conditions *a*), *b*) et *c*), le théorème 4 est ainsi établi quand Λ est réelle.

Si Λ n'est pas réelle, on déforme de la même manière tous les contours d'intégration, pour R assez grand, de façon qu'ils contiennent les points $\lambda \in \Lambda$ tels que $\left|\operatorname{Arg} \lambda \pm \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha'$, et la conclusion demeure.

Le théorème 4 admet le corollaire suivant :

Sur tout segment de longueur $2\pi D$ de la frontière de la bande horizontale d'holomorphie d'une fonction presque-périodique de variable complexe dont le spectre, symétrique, a pour densité maximum D, il y a au moins un point singulier de la fonction.

Tentons maintenant d'utiliser le premier procédé. Nous supposerons Λ symétrique réelle, c complexe, et nous écrirons

$$A(w) = \Sigma \frac{e^{i\lambda Y}}{C'(\lambda)\,\mathrm{Ch}(\lambda c)(w-\lambda)}.$$

Cette série est normalement convergente en dehors de cercles égaux centrés sur Λ, dès que $\mathrm{R}c > \overline{\lim}\, \frac{\log|C'(\lambda)|}{|\lambda|}$. La fonction $f(z)$ définie par (2) est alors une fonction moyenne-périodique bornée de y pour $|x|$ assez petit. D'où le théorème de prolongement suivant, où B a même signification qu'en 2.

THÉORÈME 5. — *Soit Λ une suite réelle symétrique de densité moyenne supérieure $\overline{D}^{\cdot}$, Ω un ouvert connexe contenant les cercles $|z \pm c| \leqslant \pi\overline{D}^{\cdot}$, avec $\mathrm{R}c > B$. Alors toute fonction de $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$ est prolongeable analytiquement dans une bande contenant l'axe* *imaginaire, où elle admet un développement $\Sigma a(\lambda)e^{\lambda z}$ uniformément convergent.*

Le théorème 5 admet le corollaire suivant :

Une fonction presque-périodique dont le spectre est contenu dans la suite symétrique Λ, et dont la bande horizontale d'holomorphie a une largeur supérieure à $2B + 2\pi\overline{D}^{\cdot}$, ne peut être prolongée à partir de cette bande dans une chaîne de cercles de rayons $\pi\overline{D}^{\cdot} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) dont les centres s'en éloignent continûment de plus de B.

6. Cas de certaines suites complexes. — Nous aurons ici en vue un problème plus général que le problème posé en 1, à savoir : que peut-on dire des singularités d'une fonction de $\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$, soumise à des conditions convenables ?

Nous ferons appel aux lemmes suivants.

Supposons qu'existe une fonction $D(w)$, s'annulant sur Λ, telle qu'on ait $\varliminf_{r\to\infty} \dfrac{\log|D(re^{i\theta})|}{r} > \varepsilon > 0$ pour un ensemble E_θ de valeurs de θ dense sur $[0, 2\pi]$, et $\log|D(R_j e^{i\theta})| > \varepsilon R_j$ pour une suite de valeurs $R_j \to \infty$ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$). Soit Ω un ouvert contenant le diagramme conjugué de $D(w)$. Alors

Lemme 1. — *Supposons* $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arg} c \in E_0$, $D(w)$ *et* $\operatorname{Sh}(wc)$ *sans zéros communs, et soit* Z *un point sur le segment* $[O, c]$; *il existe une mesure* $\mu_{c,Z} = \mu$ *à support compact dans* Ω, *telle qu'en posant* $2\nu_{c,Z} = 2\nu = \mu * (\delta_c - \delta_{-c})$, *la fonction* $\Psi(w) = \int e^{wz}\,d\nu(z)$ *prenne sur* Λ *les mêmes valeurs que* e^{wZ}.

Pour démontrer ce lemme, posons par analogie avec la méthode du 1, $\Psi(w) = D(w)\,A(w)\operatorname{Sh}(wc)$, avec, ici,

$$A(w) = \frac{e^{wZ}}{D(w)\operatorname{Sh}(wc)} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{ni\pi\frac{Z}{c}}}{cD\left(\dfrac{ni\pi}{c}\right)\left(w - \dfrac{ni\pi}{c}\right)}$$

$$= \lim_{R_j\to\infty}\left[-\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{w'Z}\,dw'}{D(w')\operatorname{Sh}(w'c)(w-w')} + \Sigma\frac{e^{\lambda Z}}{D'(\lambda)\operatorname{Sh}(\lambda c)(w-\lambda)}\right]$$

$\int$ étant prise le long du cercle $|w| = R_j$, échancré au besoin au voisinage des points $\dfrac{ni\pi}{c}$, Σ étant étendue à tous les $\lambda \in \Lambda$ contenus dans le cercle $|w| < R_j$. On voit ainsi que $A(w)$ est une fonction méromorphe de pôles simples $\lambda \in \Lambda$, avec pour résidu en λ $\dfrac{e^{\lambda z}}{D'(\lambda)\,\mathrm{Sh}\,(\lambda c)}$, bornée sur la suite de cercles $|w| = R_j$ $(R_j \to \infty)$ et bornée sur un ensemble de demi-droites, d'origine O, dense sur le cercle unité. Le lemme en résulte.

LEMME 2. — *Soit* $f(z) \in \mathcal{E}_{\Omega_c \cup \Omega_{-c}}$. *Si, c restant fixe, Z varie,* $\int f(z)\, d\nu_{c,Z}(z)$ *est une fonction analytique de* Z.

En effet, $A(w)$ est une fonction analytique de Z, donc aussi $\Psi^*(w)$, donc aussi la transformée de Laplace, $\psi(z)$, de $\Psi^*(w)$, et on a

$$\int f(z)\, d\nu\,(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\psi(z)\, dz,$$

étant un ensemble de contours contenus dans $\Omega_c \cup \Omega_{-c}$.

LEMME 3. — *Soit* $f(z) \in \mathcal{E}_{\Omega_\zeta}(\Delta)$ *lorsque* ζ *parcourt un arc de Jordan* $\mathcal{J}$ *joignant les points c et* $-c$. *Soit* $Z = 0$. *Si on change c en* $c^{\cdot}$ *assez voisin (satisfaisant les hypothèses du lemme* 1), $\int f(z)\, d\nu(z)$ *ne change pas.*

Il suffit de montrer que (le pointage traduisant le changement de c en $c^{\cdot}$), $H(w) = \dfrac{\psi(w) - \psi^{\cdot}(w)}{D(w)}$ est une fonction entière de type exponentiel dont la transformée de Laplace admet pour seules singularités les points $\pm c$ et $\pm c^{\cdot}$. Alors en effet, d'après la proposition 4 du § 1, on pourra écrire $\nu - \nu^{\cdot} = \sigma * \tau$, le support de σ étant contenu dans Ω, et celui de τ dans un voisinage V de $\mathcal{J}$, contenant $c^{\cdot}$ et $-c^{\cdot}$; $\int f(z)\, d\sigma\,(z - \zeta') = 0$ quand $\zeta' \in V$ entraîne

$$\int f(z)\, d\nu(z) = \int f(z)\, d\nu^{\cdot}(z).$$

On a $H(w) = K^{\cdot}(w) - K(w)$, avec

$$K(w) = -A(w)\,\mathrm{Sh}\,(wc) + \frac{1}{D(w)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{D\left(\dfrac{ni\pi}{c}\right)}\,\frac{\mathrm{Sh}\,(wc - ni\pi)}{wc - ni\pi}.$$

Le diagramme conjugué de $K(w)$ est porté par le segment

$[-c, c]$. Cherchons une fonction équivalente (dans le sens du § 1) à la transformée de Laplace de $K(w)$: une telle fonction sera notée $T(K)$. On peut écrire

$$T\left(\frac{\mathrm{Sh}\,(wc-a)}{wc-a}\right) \approx \frac{1}{2c}\, e^{-\frac{az}{c}} \log \frac{z+c}{z-c}$$

donc, formellement,

$$T(K) \approx \frac{1}{2c} \log \frac{z+c}{z-c} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{ni\pi}{c}z}}{D\left(\frac{ni\pi}{c}\right)}.$$

La somme infinie converge quand z est dans une bande de largeur $< \varepsilon$ contenant c et $-c$. Donc $T(K)$ admet dans cette bande pour seules singularités c et $-c$. Il en est de même pour la transformée de Laplace de $K(w)$, puisqu'elle n'a pas de singularités hors du segment $[-c, c]$. C'est ce qu'il fallait montrer.

Lemme 4. — *Soit encore $f(z) \in \mathcal{E}_{\Omega_\zeta}(\Lambda)$ quand $\zeta \in \mathfrak{J}$. Si Z est assez voisin de O sur le segment $[0, c]$, on a*

$$\int f(z)\, d\nu_{c,0}(z-Z) = \int f(z)\, d\nu_{c,Z}(z).$$

Posons ici

$$\int e^{wz}\, d\nu_{c,0}(z-Z) - \int e^{wz}\, d\nu_{c,Z}(z) = D(w)\, H_1(w).$$

Il suffit encore de montrer que $H_1(w)$ est une fonction entière de type exponentiel dont la transformée de Laplace a pour seules singularités les points $\pm c$ et $\pm c + Z$. Or on a

$$H_1(w) = e^{wZ} K(w) - K^*(w),$$

$K(w)$ ayant même signification que ci-cessus, et $K^*(w)$ étant obtenu à partir de $e^{-wZ} D(w)$ comme $K(w)$ à partir de $D(w)$. Le résultat en découle immédiatement.

Des lemmes 1 et 2 on tire

Théorème 6. — *Soit $C(w)$ une fonction de type exponentiel s'annulant sur la suite Λ, Ω un ouvert contenant le diagramme conjugué de $C(w)$. Supposons que, pour chaque $\varepsilon > 0$ l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log|C(re^{i\theta})|}{r} > -\varepsilon$*

est dense sur $[0, 2\pi]$. *Alors toute fonction de* $\mathcal{E}_{\Omega_c \cup \Omega_{-c}}(\Lambda)$ *est prolongeable analytiquement sur le segment* $[-c, c]$.

Des lemmes 1, 2, 3 et 4 on tire

Théorème 7. — $C(w)$ *et* Ω *satisfaisant les hypothèses du théorème* 6, *toute fonction* $f(z) \in \mathcal{E}_{\Omega_{\zeta_0}}(\Lambda)$, *prolongeable analytiquement dans une chaîne de* Ω_ζ, ζ *parcourant un arc de Jordan* $\mathcal{J}$ *passant par* ζ_0, *est prolongeable analytiquement dans l'enveloppe convexe de* $\mathcal{J}$.

Démonstration. Quitte à poser $C(w)\,\mathrm{Ch}\,(2w\varepsilon)\cos(2w\varepsilon) = D(w)$, ε étant assez petit, on se trouve en effet dans les conditions d'application des lemmes 1, 2, 3, 4.

Dans les hypothèses du théorème 6, on prolonge $f(z)$ grâce à l'égalité $f(Z) = \int f(z)\, d\nu_{c,Z}(z)$ à partir des valeurs de $Z \in \Omega_c$.

Dans les hypothèses du théorème 7, on a $f(z) \in \mathcal{E}_{\Omega_\zeta}(\Lambda)$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des milieux des cordes s'appuyant sur $\mathcal{J}$. L'égalité

$$f(\zeta' + \zeta'') = \int f(z)\, d\nu_{c,0}(z - \zeta' - \zeta'')$$

($\zeta' \pm c \in \mathcal{J}$, $|\zeta''| < \varepsilon_1$ assez petit) définit $f(z)$ au voisinage de chaque point de $\mathcal{D}$; ces définitions se raccordent d'après le lemme 3, et, quitte à prendre d'abord c assez petit, on voit qu'elles donnent le prolongement analytique de $f(z)$ dans $\mathcal{D}$. L'égalité $f(\zeta' + Z) = \int f(z)\, d\nu_{c,Z}(z - \zeta')$ définit alors, d'après les lemmes 2 et 4, le prolongement analytique de $f(z)$ sur le segment $[\zeta' - c, \zeta' + c]$. Les théorèmes 6 et 7 sont donc établis.

Le théorème 7 admet les corollaires suivants. Les corollaires 2 et 3 s'appuient sur la proposition 9 du § 1.

Corollaire 1. — *Si* $C(w)$, *satisfaisant les hypothèses du théorème* 6, *est de type exponentiel* $\leqslant \pi D$, *si* Ω_{ζ_0} *contient un cercle de rayon* $> \pi D$ *et centre* ζ_0, *et si* S *est l'ensemble des singularités d'une fonction* $f(z) \in \mathcal{E}_{\Omega_{\zeta_0}}(\Lambda)$, *alors la composante connexe contenant* ζ_0 *de l'ensemble des points distants de* S *de plus de* πD *admet une enveloppe convexe disjointe de* S.

Corollaire 2. — Si $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{\log |C(re^{i\theta})|}{r} = 0$ *pour un ensemble de valeurs de* θ *dense sur* $[0, 2\pi]$, *toute fonction* $f(z) \in \mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$, Ω *étant un ouvert quelconque, admet pour domaine d'existence un ensemble* g *convexe, et on a* $f(z) \in \mathcal{E}_g(\Lambda)$.

Corollaire 3. — Si $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\log|C(re^{i\theta})|}{r} = \pi D|\sin\theta|$ *pour un ensemble de valeurs de* θ *dense sur* $[0, 2\pi]$, *et si* Ω *contient le segment* $[-i\pi D, i\pi D]$, *toute fonction* $f(z)\in\mathcal{E}_\Omega(\Lambda)$, *analytique sur l'axe imaginaire, est justiciable des conclusions du théorème* 4.

Les lemmes 5, 6′ et 7 permettent de définir des conditions d'application des corollaires 1, 2 et 3.

D'après le lemme 5, le corollaire 1 est applicable si Λ est symétrique et mesurable de densité D dans le plan, et si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

a) Λ s'accumule dans un ensemble non dense de directions.

b) δ peut être choisi assez petit pour que les cercles de rayons $k^2\delta^2$ contenant k points λ^2 soient de rayons bornés.

Le corollaire 2 est un cas particulier d'un théorème de Polya [31], qui requiert seulement l'hypothèse

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|C(re^{i\theta})|}{r} = 0.$$

En vertu du lemme 6′, il s'applique dès que Λ est à distribution logarithmique bornée dans le plan $\left(\Sigma\frac{1}{|\lambda|} < \infty\right)$. Le théorème de Polya s'applique dès que Λ est de densité nulle.

Le corollaire 3 (où l'on remplace $C(w)$ par $D(w)$) s'applique dans les hypothèses du lemme 7. En revenant aux notations du chapitre I, on a l'énoncé suivant :

Théorème 8. — *Toute fonction moyenne-périodique*

$$f(x) \sim \Sigma a(\lambda)e^{i\lambda x}(\lambda\in\Lambda),$$

de moyenne période L, *analytique sur la droite, est prolongeable analytiquement dans une bande horizontale* $\mathcal{B}$ (*éventuellement dégénérée en un demi-plan ou en le plan entier*), *telle que sur tout segment de longueur* L *de la frontière de* $\mathcal{B}$ *il y ait au moins une singularité de* $f(z)$, *et on a* $f(z)\in\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\Lambda)$.

CHAPITRE III

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES APPLICATION : THÉORÈMES D'APPROXIMATION ET D'UNICITÉ DANS LE CHAMP RÉEL

§ 1. Sur un théorème de Mandelbrojt-Mac-Lane.

Nous avons rencontré (chap. I, § 4), et nous rencontrerons de nouveau (§ 4) le problème suivant :

Soit E un ensemble fermé sur la droite, $G(\sigma)$ une fonction positive, semi-continue inférieurement et comprise entre deux constantes positives l et m sur E, infinie sur CE. Soit Δ_s le domaine $\sigma > \sigma_0$, $|t| < G(\sigma)$ du plan de la variable complexe $s = \sigma + it$ (avec $-\infty \leqslant \sigma_0 < \infty$). Soit enfin $M(\sigma)$ une fonction croissante. Donner une condition suffisante, portant sur $G(\sigma)$ et $M(\sigma)$, pour que la seule fonction $H(s)$ holomorphe dans Δ_s, et y satisfaisant $\log|H(s)| < -M(\sigma)$, soit $H(s) \equiv 0$. Une telle condition sera dite du type M. M. L.

MM. Mandelbrojt et Mac-Lane apportent à ce problème la solution suivante [29] : si CE est vide, et si $G(\sigma)$ est à variation bornée, la condition

$$\int^{\infty} M(\sigma) e^{-\frac{\pi}{2}\int^{\sigma}\frac{d\alpha}{G(\alpha)}} d\sigma = \infty$$

est du type cherché, et c'est la meilleure possible. Une simple adaptation de leur méthode, fondée sur un théorème d'Ahlfors, va nous permettre d'étudier le cas où CE n'est pas vide.

Désignons par $\mu(E; \sigma)$ la mesure de E sur le segment $[\sigma_0, \sigma]$.

Soit $g(\sigma)$ la fonction égale à $G(\sigma)$ sur E, à une constante L sur CE$(L > \max\limits_{\sigma \in E} G(\sigma))$, et soit δ_s le domaine $\sigma > \sigma_0$, $|t| < g(\sigma)$.

Soit $z(s) = x(s) + iy(s)$ une fonction réalisant la transformation conforme de δ_s sur la bande $|y| < \frac{\pi}{2}$, de façon que, pour $\sigma > \sigma_0$, $y(\sigma) = 0$ et $x'(\sigma) > 0$; soit $s(z)$ la fonction inverse de $z(s)$. Nous utiliserons les lemmes suivants :

LEMME 1. — *Si* $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{g(\sigma)} > 4$, *on a*

$$x(s_2) - x(s_1) \geqslant \frac{\pi}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{g(\sigma)} - 4\pi$$

quels que soient les points $s_1 = \sigma_1 + it_1$ *et* $s_2 = \sigma_2 + it_2$ *de* δ_s.

COROLLAIRE. — $\sigma(x + iy_2) - \sigma(x + iy_1) \leqslant 8\mathrm{L}$, *quels que soient* y_1 *et* $y_2\left(|y_1| < \frac{\pi}{2}, |y_2| < \frac{\pi}{2}\right)$.

LEMME 2. — *On a* $x(s_2) - x(s_1) \leqslant \frac{\pi}{2} \int_{\sigma_1 - 8\mathrm{L}}^{\sigma_2 + 8\mathrm{L}} \frac{g(\alpha)\, d\alpha}{m^2(\alpha)}$, $m(\alpha)$ *désignant la distance du point* α *à la frontière de* δ_s.

COROLLAIRE. — *On a*

$$x(s_2) - x(s_1) \leqslant \frac{\pi}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2 - \mathrm{L}} \frac{g(\alpha)\, d\alpha}{m^2(\alpha)} + \frac{9\pi \mathrm{L}^2}{l^2}.$$

LEMME 2'. — *On a* $x(s) < \frac{\pi}{2} \int^{\sigma} \frac{d\alpha}{g(\alpha)} + \frac{2\pi\mathrm{L}}{l^2} \mathrm{V}(\sigma) + \mathrm{O}(1)$, $\mathrm{V}(\sigma)$ *désignant la variation totale de* $g(\sigma)$ *sur le segment* $[\sigma_0, \sigma]$.

LEMME 2''. — *Si* CE *est une réunion de segments de longueurs* $\frac{8\mathrm{L}^3}{l^2}$, *et si* $\mathrm{G}(\sigma)$ *est à variation totale bornée sur* E, *on a*

$$x(s) < \frac{\pi}{2} \int^{\sigma} \frac{d\alpha}{g(\alpha)} + \frac{\pi}{\mathrm{L}} \mu(\mathrm{CE}; \sigma) + \mathrm{O}(1).$$

LEMME 3. — *L'aire* A *du domaine transformé par* $s(z)$ *d'un cercle de centre* z_0 *et de rayon* R, *est supérieure à* $\pi \mathrm{R}^2 \| s'(z_0)|^2$.

LEMME 3'. — *On a* $x'(\sigma) > \frac{1}{2\mathrm{L}}$ *quel que soit* $\sigma > \sigma_0$.

Les lemmes 1 et 2 sont dus à Ahlfors. Ils se trouvent exposés dans [25], pp. 32 et 36.

On passe du lemme 2 au lemme 2′ en remarquant que

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2-L}\frac{g^2(\alpha)-m^2(\alpha)}{g(\alpha)m^2(\alpha)}\,d\alpha &\leqslant \frac{2}{l^2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2-L}(g(\alpha)-m(\alpha))\,d\alpha\\ &< \frac{2}{l^2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2-L}(V(\alpha+L)-V(\alpha-L))\,d\alpha\\ &< \frac{4L}{l^2}V(\sigma_2).\end{aligned}$$

On passe du lemme 2′ au lemme 2″ en remarquant que, si $[\sigma_1, \sigma_2]$ est un intervalle de CE dont les extrémités appartiennent à E, on a

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{d\alpha}{g(\alpha)}+\frac{4L}{l^2}(V(\sigma_2)-V(\sigma_1))<\frac{2}{L}(\sigma_2-\sigma_1).$$

Pour démontrer le lemme 3, supposons $z_0=0$, $z=re^{i\theta}$:

on a $\quad |s'(0)|^2\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|s'(re^{i\theta})|\,d\theta\right)^2<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|s'(re^{i\theta})|^2\,d\theta$

d'où $\quad \int_0^R|s'(0)|^2\,rdr=\frac{R^2}{2}|s'(0)|^2<\frac{1}{2\pi}A(R).$

Le lemme 3′ découle des lemmes 1 et 3. Quitte en effet à choisir $\sigma_2-\sigma_1=10\,L$, on a $x(s_2)-x(s_1)\geqslant\pi$; un cercle de centre x et rayon $\frac{\pi}{2}$ a donc pour image par $s(z)$ un domaine d'aire inférieure à $20\,L^2$, d'où $|\sigma'(x)|^2<\frac{80L^2}{\pi^3}$.

Des lemmes 1, 2″ et 3′ on tire le résultat suivant :

Théorème. — *Si* CE *est une réunion de segments de longueurs* $\frac{8L^3}{l^2}$, *et si* $G(\sigma)$ *est à variation totale bornée sur* E, *la condition*

$$\int^{\infty}M(\sigma)e^{-\frac{\pi}{2}\int^{\sigma}\frac{d\alpha}{G(\alpha)}-\frac{\pi}{L}\mu(CE;\sigma)}\,d\sigma=\infty$$

est du type M.M.L.

Posons en effet $H(\sigma)=\mathcal{H}(z)$. Comme $M(\sigma)$ est croissante, on a, d'après le corollaire du lemme 1,

$$\log|\mathcal{H}(z)|<-M(\sigma(x)-8L)$$

On sait alors (théorème de Watson) que la condition

$$\int^{\infty}M(\sigma(x)-8L)\,e^{-x}\,dx=\infty$$

assure $\mathcal{H}(z)\equiv 0$. Or cette condition est assurée par celle de l'énoncé, d'après les lemmes 2″ et 3′.

Remarques. — 1. On pourrait obtenir un énoncé moins restrictif en utilisant le lemme 2′ au lieu du lemme 2″.

2. Si, aux hypothèses de l'énoncé, on ajoute

$$\int_E (G - G(\sigma))\,d\sigma < \infty,$$

la condition

$$\int^\infty M(\sigma)\, e^{-\frac{\pi}{2G}\mu(E;\,\sigma)-\frac{\pi}{L}\mu(CE;\,\sigma)}\,d\sigma = \infty$$

est du type M.M.L.

3. Le théorème reste valable si l'on remplace l'hypothèse : $M(\sigma)$ croissante, par l'hypothèse : $M(\sigma) = e^\sigma\beta(\sigma)$, $\beta(\sigma)$ décroissante. Dans la démonstration, il suffit de remplacer $M(\sigma(x) - 8L)$ par $e^{\sigma(x)-8L}\beta(\sigma(x) + 8L)$.

4. Le théorème reste valable si, dans l'énoncé du problème initial, on remplace l'inégalité $\log|H(s)| < -M(\sigma)$ par

$$\log|H(s)| < -M(\sigma) + B|t|, \qquad B \text{ constante.}$$

5. Quitte à remplacer E par un ensemble plus grand, et $G(\sigma)$ par une fonction plus petite, on peut toujours appliquer notre théorème. Si CE est vide, il se réduit au théorème de Mandelbrojt-Mac-Lane.

§ 2. Un lemme sur les fonctions harmoniques conjuguées dans une bande.

Nous rencontrerons au § 3 le problème suivant, ainsi que d'autres problèmes du même type.

Soit $K(\sigma)$ une fonction monotone $(-\infty < \sigma < \infty)$ bornée inférieurement par un nombre positif. Construire une fonction $\zeta_1(s) = \xi_1(s) + i\eta_1(s)$ de $s = \sigma + it$, holomorphe dans la bande $|t| < \frac{\pi}{2}$, réelle sur la droite $t = 0$, et satisfaisant

$$\xi_1(s) = \int^\sigma K(\alpha)\,d\alpha + O(1), \qquad |\eta_1(s)| < \frac{\pi}{2}K(\sigma).$$

1. Le problème admet une solution rapide, fondée sur les lemmes d'Ahlfors exposés au § 1.

On peut supposer $K(\sigma)$ semi-continue inférieurement. Considérons le domaine Δ_ζ du plan $\zeta = \xi + i\eta$ défini par

$$\zeta = \int_0^u K(\alpha)\,d\alpha = L(u) \qquad |\eta| < \frac{\pi}{2} K(u) \qquad (-\infty < u < \infty).$$

Soit $u = l(\xi)$ la fonction inverse de $\xi = L(u)$. Δ_ζ est défini par $|\eta| < \frac{\pi}{2} K(l(\xi)) = G(\xi)$.

$G(\xi)$ étant à variation bornée, les lemmes d'Ahlfors expriment l'existence d'une fonction $s(\zeta) = \sigma(\zeta) + it(\zeta)$ représentant Δ_ζ sur la bande $|t| < \frac{\pi}{2}$, et de sa fonction inverse $\zeta(s)$, avec les propriétés suivantes :

a) $s(\xi)$ et $\zeta(\sigma)$ sont réelles

b) $\sigma(\xi) = \frac{\pi}{2} \int^{\xi} \frac{d\lambda}{G(\lambda)} + O(1)$

c) $\xi(\sigma + it) = \xi(\sigma) + O(1)$.

D'après *b*), on a $\sigma(\xi) = l(\xi) + O(1)$, d'où $L(\sigma(\xi)) = \xi + O(1)$, soit $L(\sigma) = \xi(\sigma) + O(1)$. D'après *c*) on a donc

$$\xi(\sigma + it) = L(\sigma) + O(1).$$

Cette relation s'écrit

$$\xi(\sigma + it) = L(\sigma \pm \theta h), \qquad |\theta| < 1, \quad h \text{ constante};$$

d'où
$$|\eta(\sigma + it)| < \frac{\pi}{2} \min_{|\theta| \leqslant 1} K(\sigma \pm \theta h).$$

Si $K(\sigma)$ est croissante, il suffira de prendre $\zeta_1(s) = \zeta(s + h)$; si $K(\sigma)$ est décroissante, $\zeta_1(s) = \zeta(s - h)$.

2. Nous allons maintenant résoudre le problème posé par une méthode plus puissante, qui va nous fournir d'autres résultats.

Soit $X(\sigma)$ une fonction à dérivée continue et bornée $(-\infty < \sigma < \infty)$. Cherchons à définir une fonction

$$\zeta(s) = \xi(s) + i\eta(s),$$

holomorphe dans la bande $|t| < \frac{\pi}{2}$ et continue à la frontière, telle que

$$\xi\left(\sigma + i\frac{\pi}{2}\right) = \xi\left(\sigma - i\frac{\pi}{2}\right) = X(\sigma) \qquad \eta(\sigma) = 0.$$

Posons $e^s = \frac{1-w}{1+w}$, $w = \rho e^{i\theta}$, $\zeta(s) = \zeta^*(w)$.

Si $\zeta^*(w)$ existe, elle a pour parties réelle et imaginaire

$$\xi^*(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi^*(e^{i\theta'}) \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\theta')+\rho^2}\,d\theta'$$
$$\eta^*(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi^*(e^{i\theta'}) \frac{\rho\sin(\theta-\theta')}{1-2\rho\cos(\theta-\theta')+\rho^2}\,d\theta'.$$

Transcrivons ces formules, pour obtenir $\xi(s)$ et $\eta(s)$, à l'aide des relations

$$\frac{2\rho\cos\theta}{1-e^{2\sigma}} = \frac{1+\rho^2}{1+e^{2\sigma}} = \frac{-2\rho\sin\theta}{2e^{\sigma}\sin t} = \frac{1-\rho^2}{2e^{\sigma}\cos t}$$
$$e^{\sigma'} = \left|\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2}\right| \qquad \xi^*(e^{i\theta'}) = \xi^*(e^{-i\theta'}) = X(\sigma').$$

On obtient

$$\xi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma')\left(\frac{1}{e^{2\sigma}+e^{2\sigma'}+2e^{\sigma+\sigma'}\sin t} + \frac{1}{e^{2\sigma}+e^{2\sigma'}-2e^{\sigma+\sigma'}\sin t}\right) 2e^{\sigma+\sigma'}\cos t\,d\sigma,$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma')\,d\left(\operatorname{Arc\,tg}\frac{e^{\sigma'}+e^{\sigma}\sin t}{e^{\sigma}\cos t} + \operatorname{Arc\,tg}\frac{e^{\sigma'}-e^{\sigma}\sin t}{e^{\sigma}\cos t}\right)$$

(1)
$$= X(\sigma) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X'(\sigma+\lambda)\operatorname{Arc\,tg}\frac{2e^{\lambda}\cos t}{1-e^{2\lambda}}\,d\lambda \qquad \left(|\operatorname{Arc\,tg}| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\eta(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma')\left(\frac{2e^{\sigma'}-2e^{\sigma}\sin t}{e^{2\sigma}+e^{2\sigma'}-2e^{\sigma+\sigma'}\sin t} - \frac{2e^{\sigma'}+2e^{\sigma}\sin t}{e^{2\sigma}+e^{2\sigma'}+2e^{\sigma+\sigma'}\sin t}\right) e^{\sigma'}\,d\sigma'$$

(2)
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X'(\sigma+\lambda)\log\frac{1+e^{2\lambda}+2e^{\lambda}\sin t}{1+e^{2\lambda}-2e^{\lambda}\sin t}\,d\lambda.$$

Les formules (1) et (2) définissent deux fonctions harmoniques conjuguées de σ et t dans la bande $|t| < \frac{\pi}{2}$, respectivement fonctions paire et impaire de t. D'après (1), on a

$$\xi(s) = X(\sigma) + O(1) \qquad \text{et} \qquad \lim_{|t| \to \frac{\pi}{2}} \xi(s) = \xi\left(\sigma \pm i\frac{\pi}{2}\right) = X(\sigma).$$

D'après (2), on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log\frac{1+e^{2\lambda}+2e^{\lambda}\sin t}{1+e^{2\lambda}-2e^{\lambda}\sin t}\,d\lambda = t \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

d'où
$$|\eta(\sigma+it_2)-\eta(\sigma+it_1)| \leqslant \sup_{\sigma}|X'(\sigma)|\,|t_2-t_1|$$

et

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \eta(s) = \eta\left(\sigma + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X'(\sigma+\lambda)\log\frac{1+e^{\lambda}}{1-e^{\lambda}}\,d\lambda.$$

Ainsi les formules (1) et (2) définissent une fonction $\zeta(s)$ satisfaisant les conditions imposées.

En particularisant $X'(\sigma)$, on peut grâce à (2) majorer ou minorer $\eta(s)$. Remarquons d'abord que, si $X'(\sigma) > 0$, $\eta(\sigma+it)$ est fonction croissante de t.

Supposons $X'(\sigma) = K(\sigma) + 8K'(\sigma)$, $K(\sigma) > 0$, $K'(\sigma) > 0$; cherchons à minorer $\eta(\sigma+it)$ pour $0 < t < \frac{\pi}{4}\cdot$ Posons

$$\log\frac{1+e^{-2\lambda}+2e^{-\lambda}\sin t}{1+e^{-2\lambda}-2e^{-\lambda}\sin t} = A(\lambda), \qquad \text{et} \qquad \int_{\lambda}^{\infty} A(x)\,dx = I(\lambda).$$

On a

$$-A(\lambda) = \log\left(1 - \frac{4e^{-\lambda}\sin t}{1+e^{-2\lambda}+2e^{-\lambda}\sin t}\right) < -e^{-\lambda}\sin t$$

$$A(\lambda) = \log\left(1 + \frac{4e^{-\lambda}\sin t}{1+e^{-2\lambda}-2e^{-\lambda}\sin t}\right) < \frac{4e^{-\lambda}\sin t}{\cos^2 t}$$

d'où

$$I(\lambda) < \frac{4}{\cos^2 t}A(\lambda) < 8A(\lambda) \qquad \left(0 < t < \frac{\pi}{4}\right)\cdot$$

Rappelons qu'on a $I(0) = \pi t$.

On a

$$\eta(\sigma+it) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} (X'(\sigma+\lambda) + X'(\sigma-\lambda))\,A(\lambda)\,d\lambda.$$

Comme $X'(\sigma+\lambda) \geqslant K(\sigma)$, on a

$$\int_0^{\infty} X'(\sigma+\lambda)\, A(\lambda)\, d\lambda \geqslant \pi t K(\sigma).$$

D'autre part,

$$\int_0^{\infty} X'(\sigma-\lambda)\, A(\lambda)\, d\lambda = \int_0^{\infty} (K(\sigma-\lambda) + 8K'(\sigma-\lambda))\, A(\lambda)\, d\lambda$$
$$\geqslant \int_0^{\infty} (K(\sigma-\lambda)\, A(\lambda) + K'(\sigma-\lambda)\, I(\lambda))\, d\lambda = \pi t K(\sigma).$$

Donc

$$\eta(\sigma+it) \geqslant tK(\sigma), \qquad \left(0 < t < \frac{\pi}{4}\right).$$

Si $X'(\sigma) = K(\sigma) - 8K'(\sigma)$, $K(\sigma) > 0$, $K'(\sigma) < 0$, un calcul très voisin établit le même résultat.

Nous arrivons ainsi à l'énoncé suivant :

LEMME 1. — *Soit* $K(\sigma)$ *une fonction à variation bornée. Il existe une fonction* $\zeta(s) = \xi(s) + i\eta(s)$ *de* $s = \sigma + it$, *holomorphe dans la bande* $|t| < \pi$ *et continue pour* $|t| \leqslant \pi$, *réelle sur l'axe réel, telle que* $\xi(s) = \int^{\sigma} K(\alpha)\, d\alpha + O(1)$

$$\eta(s) \geqslant tK(\sigma) \qquad \textit{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Si de plus $K(\sigma)$ *est positive,*

$$\eta(s) > \frac{\pi}{2} K(\sigma) \qquad \textit{pour} \qquad \frac{\pi}{2} < t < \pi.$$

Pour se ramener à l'étude précédente, faisons l'homothétie $s' = \sigma' + it' = \frac{s}{2}$ et posons $K(\sigma) = k(\sigma')$. Le résultat est établi si $K(\sigma)$ est positive et possède une dérivée continue, non négative et bornée : il suffit de poser

$$X'(\sigma) = k(\sigma') + 8k'(\sigma').$$

De même si $K(\sigma)$ est positive et possède une dérivée continue, non positive et bornée inférieurement. Si $K(\sigma)$ est monotone, on peut se ramener à l'un de ces deux cas par régularisation.

La première partie du lemme étant établie pour deux fonctions $K_1(\sigma)$ et $K_2(\sigma)$, elle l'est aussi pour $K(\sigma) = K_1(\sigma) + K_2(\sigma) - B$ (B constante) : la solution, avec des notations évidentes, est

$\zeta(s) = \zeta_1(s) + \zeta_2(s) - Bs$. Or, toute fonction $K(\sigma)$ à variation bornée est de cette forme, $K_1(\sigma)$ et $K_2(\sigma)$ étant monotones positives.

La décomposition ci-dessus peut s'écrire

$$X(\sigma) = X_1(\sigma) + X_2(\sigma) - B\sigma$$

d'où
$$X'(\sigma) > K_1(\sigma) + K_2(\sigma) - B = K(\sigma).$$

Le fait que $\eta(\sigma + it)$ est une fonction croissante de t si $X'(\sigma) > 0$ établit la deuxième partie du lemme.

Quitte à changer $K(\sigma)$ en $-K(\sigma)$, on peut énoncer :

LEMME 1'. — *L'énoncé de la première partie du lemme 1 vaut lorsque l'inégalité portant sur $\eta(s)$ est remplacée par $\eta(s) \leqslant tK(\sigma)$ pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.*

§ 3. Sur la croissance et la répartition des zéros et des pôles réels, des fonctions méromorphes dans un demi-plan.

Les notations seront celles du chapitre I, § 3. La variable complexe est $w = u + iv = re^{i\theta}$.

1. Étude du module maximum sur des cercles de centre O. — Le théorème de Carleman établit une relation entre la croissance d'une fonction dans un demi-plan et la répartition de ses zéros et de ses pôles. Une forme restrictive de ce théorème, suffisante pour la plupart des applications que nous en avons faites, est la suivante.

THÉORÈME 1. — *Soit Λ_1 et Λ_2 deux suites positives dont les fonctions de densité sont $D_1(r)$ et $D_2(r)$; supposons $D_2(r)$ bornée. Soit $k(r)$ une fonction mesurable bornée. Dès qu'on a*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \int^r \frac{D_1(t) - D_2(t) - k(t)}{t}\,dt = \infty \tag{1}$$

les conditions

$$\left|\begin{array}{l} F(w) \textit{ méromorphe et de pôles simples pour } |\theta| < \frac{\pi}{2} \\ F(w) = 0 \textit{ sur } \Lambda_1, \textit{ et } F(w) \neq \infty \textit{ hors de } \Lambda_2 \\ \log|F(w)| < \pi r k(r) + O(\log|\theta|) \end{array}\right. \tag{2}$$

entraînent $F(w) \equiv 0$.

En effet, si $F(w) \not\equiv 0$, la formule de Carleman s'écrit

$$\int_0^r \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{r^2}\right)(dN_1(t) - dN_2(t)) < \frac{1}{\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log|F(re^{i\theta})|\,d\theta$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int^r \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2}\right)\log|F(i\rho)F(-i\rho)|\,d\rho + O(1)$$

d'où

$$\int^r \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{r^2}\right)(dN_1(t) - dN_2(t) - k(t)\,dt) < O(1)$$

avec

$$\int^r \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{r^2}\right)dN(t) = \int^r \frac{D(t)}{t}\,dt + \frac{1}{r^2}\int^r N(t)\,dt + O(1)$$

ce qui contredit (1).

Remarques. — 1. Dans ce paragraphe et dans le suivant, les suites Λ considérées n'interviendront dans les formules que par l'intermédiaire de la fonction $\int^r \frac{D(t)}{t}\,dt + O(1)$, égale (à $O(1)$ près) à la distribution logarithmique $L(r)$ dès que $D(r)$ est bornée. Chaque fois que $D(r)$ est bornée, on peut donc remplacer dans les formules $D(r)$ (fonction de densité) par $\overline{D}(r)$ (fonction de densité moyenne).

2. Si Λ_1 et Λ_2, au lieu d'être supposées positives, sont supposées portées par les demi-droites

$$\theta = \theta_1 \qquad \text{et} \qquad \theta = \theta_2 \left(|\theta_1| < \frac{\pi}{2}, \qquad |\theta_2| < \frac{\pi}{2}\right),$$

la formule de Carleman est encore valable à condition de multiplier respectivement $N_1(r)$, $D_1(r)$ et $N_2(r)$, $D_2(r)$ par $\cos\theta_1$ et $\cos\theta_2$. Il en est de même du théorème 1, à condition de remplacer dans les conditions (2) $O(\log|\theta|)$ par $O(\log|\theta - \theta_2|)$.

3. Dans l'énoncé des conditions (2), on peut remplacer le second membre de l'inégalité par $\pi r k(r)$ ou $\pi|\rho|k(r)$ à condition d'en restreindre l'application à l'extérieur de cercles égaux arbitrairement petits centrés aux points de Λ_2.

Nous allons établir un théorème réciproque. Pour cela, nous nous appuierons sur le résultat du § 2 et sur le lemme suivant, dû à M. Fuchs et exposé dans [25], p. 126. La précision supplémentaire que nous donnons est immédiate.

Lemme. — *Si* Λ *est une suite régulière, la fonction* $G(w) = \Pi \frac{\lambda - w}{\lambda + w} e^{\frac{2w}{\lambda}}$ *satisfait* $\log|G(w)| = 2u \int^r \frac{D(t)}{t} dt + O(u)$ *en dehors de cercles égaux arbitrairement petits centrés en ses pôles. Si on suppose seulement* $D(r)$ *bornée, on a*

$$\log|G(w)| < 2u \int^r \frac{D(t)}{t} dt + O(u) \quad pour \quad u > 0$$

Théorème 2. — *Soit* Λ_1 *et* Λ_2 *deux suites positives dont les fonctions de densité* $D_1(r)$ *et* $D_2(r)$ *sont bornées; supposons de plus* Λ_2 *régulière. Soit* $k(r)$ *une fonction à variation bornée telle que*

$$\varlimsup_{r \to \infty} \int^r \frac{D_1(t) - D_2(t) - k(t)}{t} dt < \infty. \tag{3}$$

Il existe alors une fonction $F(w) \not\equiv 0$ *satisfaisant les conditions* (2).

Posons $F(w) = \frac{G_1(w)}{G_2(w)} e^{-2w\psi(w)}$. Pour avoir (2), il suffit que pour $u \geqslant 0$, $w \neq 0$, $\psi(w)$ soit holomorphe et qu'on ait

$$2u \int^r \frac{D_1(t) - D_2(t)}{t} dt - 2u\mathfrak{R}\psi(w) + 2v\mathfrak{J}\psi(w) < \pi r k(r)$$

soit, à fortiori, que
$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{R}\psi(w) > \int^r \frac{k(t)}{t} dt, \\ |\mathfrak{J}\psi(w)| < \frac{\pi}{2} k(r) \end{array} \right.$$

L'existence d'une telle fonction est assurée par le lemme 1' du § 2($\psi(w) = \zeta(\log w)$).

La remarque 3 est encore valable.

En particularisant les données du théorème 2, on obtient des énoncés très simples. Exemple : si $\left\{\frac{n}{\lambda_n}\right\}$ est une suite à variation bornée ($n = 1, 2, \ldots$), il existe une fonction $F(w)$ holomorphe pour $u > 0$, s'annulant sur les λ_n et satisfaisant $\log|F(w)| < \pi N(r)$. Il suffit de prendre $\Lambda_1 = \{\lambda_n\}$, Λ_2 vide, et de prendre pour $k(r)$ la fonction-interpolation linéaire de la suite de points $\left\{\lambda_n, \frac{n}{\lambda_n}\right\}$.

Les théorèmes 1 et 2 contiennent le théorème classique de

Carlson (Λ_1 : suite des entiers naturels, Λ_2 vide, $k(r)$ constante) et le théorème classique de Watson (Λ_1 et Λ_2 vides). Ils ont été inspirés par un théorème de Fuchs (Λ_1 régulière, Λ_2 vide, $k(r)$ constante).

Nous aurons à utiliser le théorème 2 sous la forme suivante ($k(r)$ étant changé en $-k(r)$).

THÉORÈME 2'. — *Soit* Λ *une suite positive régulière dont la fonction de densité est* $D(r)$. *Soit* $k(r)$ *une fonction à variation bornée telle que* $\overline{\lim_{r\to\infty}} \int^r \frac{k(t)-D(t)}{t}dt < \infty$. *Il existe alors une fonction* $F(w) \not\equiv 0$, *méromorphe pour* $u > 0$, *dont les pôles sont simples et portés par* Λ, *et qui vérifie, hors de cercles égaux arbitrairement petits centrés en ses pôles,* $\log|F(w)| < -|v|k(r)$.

Dans la suite nous aurons besoin d'une proposition du même type, mais qui fait intervenir le comportement de $F(w)$ dans tout la plan, à l'exception d'une coupure.

THÉORÈME 3. — *L'énoncé du théorème 2 vaut lorsque* (3) *et* (2) *sont respectivement remplacées par*

$$(3') \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \left| \int^r \frac{D_1(t)-D_2(t)+k(t)}{t}dt \right| < \infty, \qquad k(r) > 0$$

et

$$(2') \qquad \left| \begin{array}{l} F(w) \text{ méromorphe et de pôles simples pour } |\theta| < \pi \\ F(w) = 0 \text{ sur } \Lambda_1, \text{ et } F(w) \neq \infty \text{ hors de } \Lambda_2 \\ \log|F(w)| < -|v|\,k(r) + O(u) \text{ en dehors de cercles} \\ \quad \text{égaux arbitrairement petits centrés sur } \Lambda_2 \\ \quad \text{et sur le demi-axe réel négatif.} \end{array} \right.$$

Posons encore

$$F(w) = \frac{G_1(w)}{G_2(w)} e^{-2w\psi(w)}.$$

Pour avoir (2'), il suffit maintenant que, pour $|\theta| < \pi$, $\psi(w)$ soit holomorphe et qu'on ait

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{R}\psi(w) = -\int^r \frac{k(t)}{t}dt + O(1) \\ v\mathcal{I}\psi(w) < -\frac{\pi}{2}|v|\,k(r) + O(u). \end{array} \right.$$

La dernière inégalité est assurée si $\mathfrak{I}\psi(w)$ est fonction impaire de v, et si

$$\mathfrak{I}\psi(w) \leqslant -\frac{\pi}{2}k(r) \qquad \text{pour} \qquad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$\mathfrak{I}\psi(w) \leqslant -\theta k(r) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

En effet, $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)k(r) < \mathrm{K}\frac{u}{v}$ si $k(r) < \mathrm{K}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

L'existence d'une telle fonction $\psi(w)$ est assurée par le lemme 1 du § 2 ($\psi(w) = -\zeta(\log w)$).

Nous aurons à utiliser le théorème 3 sous la forme suivante :

Théorème 3'. — *Soit Λ une suite positive régulière dont la fonction de densité est $\mathrm{D}(r)$. Soit $k(r)$ une fonction mesurable bornée positive telle que*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\left|\int^{r} \frac{k(t) - \mathrm{D}(t)}{t}\,dt\right| < \infty.$$

Posons $k_{\cdot}(r) = \min_{u\geqslant r} k(u)$. Il existe alors une fonction $\mathrm{F}(w) \not\equiv 0$, méromorphe pour $|\theta| < \pi$, dont les pôles sont simples et portés par Λ, et qui vérifie, hors de cercles égaux arbitrairement petits centrés en ses pôles et sur le demi-axe réel négatif,

$$\log|\mathrm{F}(w)| < -|v|\,k(r) + \mathrm{O}(u).$$

Cet énoncé est obtenu à partir du théorème 3 par un simple changement de notation ($k(t)$ en $k_{\cdot}(t)$, Λ_2 en Λ), et l'utilisation du lemme suivant, avec $p(x) = \frac{1}{\pi}(k(e^x) - k_{\cdot}(e^x))$.

Lemme. — *Quelle que soit la fonction $p(x)$ mesurable, non-négative et bornée, on peut choisir Λ_1 de façon que*

$$\overline{\lim_{\mathrm{X}\to\infty}}\left|\int_0^{\mathrm{X}} (p(x) - \mathrm{D}_1(e^x))\,dx\right| < \infty.$$

Il est facile en effet de construire une fonction $q(x)$ positive, telle que $e^x q(x)$ soit non-décroissante (et, par exemple, constante par intervalles) et telle que $\left|\int_0^{\mathrm{X}} (p(x) - q(x))\,dx\right|$ soit borné. On pourra alors définir Λ_1 par sa fonction de distribution $\mathrm{N}_1(r) = r\mathrm{D}_1(r)$ à valeurs entières, comprise entre $rq(\log r) - 1$ et $rq(\log r) + 1$.

2. Étude du module maximum sur des droites verticales. — Nous allons terminer ce paragraphe en examinant la question suivante, qui se pose tout naturellement à propos des problèmes d'approximation et d'unicité sur la droite réelle que nous étudierons plus loin.

PROBLÈME. — *Donner des conditions, portant sur la suite* Λ *et la fonction* $m(u)$, *pour que les hypothèses*

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} \Phi(w) \text{ holomorphe pour } u > u_0 (u_0 \text{ donné } \geqslant 0) \\ \log|\Phi(w)| < m(u) \\ \Phi(w) = 0 \text{ sur } \Lambda \end{array}\right.$$

entraînent $\Phi(w) \equiv 0$.

On supposera $m(u)$ croissante convexe, ce qui n'est pas une restriction.

Soit $F(w)$ la fonction définie au théorème 2′. $F(w)\Phi(w)$ est holomorphe pour $u > u_0$ et satisfait

$$\log|F(w)\Phi(w)| < m(u) - |v|\,k(r).$$

Si $k(r)$ est non décroissante, $\log|F(w)\Phi(w)| < m(u) - |v|\,k(u)$.

Posons $H(s) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} F(w)\Phi(w)\,e^{-sw-w}\frac{dw}{(1+w)^2}$, $s = \sigma + it$.

L'expression sous le signe $\int$ est holomorphe pour $u > u_0$, et inférieure en module à

$$\frac{1}{\pi(1+r^2)}\exp[m(u) - \sigma u - u + tv - |v|\,k(u)].$$

L'intégrale définit donc une fonction $H(s)$ holomorphe indépendante de u tant que $|t| < k(u)$; dans ces conditions,

$$\log|H(s)| < m(u) - \sigma u - u.$$

Si on prend $u = u(\sigma)$ fonction croissante de σ, les inégalités qui précèdent permettent d'appliquer à $H(s)$ le théorème de Mandelbrojt-Mac-Lane.

Prenons pour $u(\sigma)$ la fonction inverse de $\sigma = \dfrac{m(u)}{u} = \sigma_1(u)$, soit $u_1(\sigma)$. On a $H(s) \equiv 0$ dès que

$$(5)\qquad \int^{\infty} u_1(\sigma)\,e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma}\frac{d\alpha}{k(u_1(\alpha))}}\,d\sigma = \infty.$$

Prenons pour $u(\sigma)$ la fonction inverse de $\sigma = m'(u)$ soit $p'(\sigma)$. On peut définir $p(\sigma)$ par

$$\min_u = \min_\sigma (m(u) + p(\sigma) - \sigma u) = 0 \quad (u > 0,\ \sigma > 0).$$

Dans la suite, les fonctions convexes $p(\sigma)$ et $m(u)$ seront toujours liées par cette relation. On a $\mathrm{H}(s) \equiv 0$ dès que

$$(6) \qquad \int^{\infty} p(\sigma) e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{d\alpha}{k(p'(\alpha))}} d\sigma = \infty$$

ou

$$(7) \qquad \int^{\infty} p'(\sigma) e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{d\alpha}{k(p'(\alpha))}} d\sigma = \infty .$$

Les relations (6) et (7) sont d'ailleurs équivalentes : l'intégration par parties dans (7) montre que (6) entraîne (7), et la relation $p'(\sigma) < p(\sigma + 1)$ que (7) entraîne (6). Comme $u_1(\sigma) > p'(\sigma)$ pour σ assez grand, (7) entraîne (5).

Les conditions (5) et (7) peuvent prendre une forme plus simple. Elles s'écrivent en effet

$$\int^{\infty} u e^{-\mathrm{A}(u)} d\mathrm{A}(u) = \infty \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{A}(u) = \frac{1}{2}\int^{u} \frac{d\sigma(t)}{k(t)}$$

En intégrant par parties, on voit qu'une telle condition (entraînée à fortiori par $\lim_{u \to \infty} (u e^{-\mathrm{A}(u)}) = \infty$) est équivalente à

$$\int^{\infty} e^{-\mathrm{A}(u)} du = \infty$$

(5) et (7) peuvent donc s'écrire

$$(5') \qquad \int^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\int^{u} \frac{d\sigma_1(t)}{k(t)}} du = \infty$$

$$(7') \qquad \int^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\int^{u} \frac{dm'(t)}{k(t)}} du = \infty$$

Théorème 4. — *Soit* Λ *une suite régulière dont la fonction de densité est* $\mathrm{D}(r)$. *Soit* $k(r)$ *une fonction non-décroissante telle que*

$$(8) \qquad \lim_{r \to \infty} \int^{r} \frac{k(t) - \mathrm{D}(t)}{t} dt < \infty .$$

Supposons satisfaite l'une des relations (5), (6), (7), (5'), (7'). *Les conditions* (4) *entraînent alors* $\Phi(w) \equiv 0$.

Nous désignerons par $H(\Lambda, m(u))$ (resp. $K(\Lambda, p(\sigma))$) l'ensemble des hypothèses du théorème 4 portant sur Λ et $m(u)$ (resp. sur Λ et $p(\sigma)$).

Nous dirons qu'une fonction $k(r)$ satisfaisant (8) est liée à Λ par H.

Remarque. — On peut prendre pour $k(r)$ la plus grande minorante croissante de $D(\gamma r)$ ou de $\overline{D}(\gamma r)$, γ constante, soit $D.(\gamma r)$ ou $\overline{D}.(\gamma r)$. Cependant, $L(r)$ étant la distribution logarithmique de Λ, il est préférable de prendre pour $\int^X k(e^x)\,dx$ la plus grande minorante convexe de $L(\gamma e^X)$. Dans ce cas, il se peut que, pour X assez grand, ces deux fonctions ne soient jamais égales : $k(r)$ est alors nécessairement une constante, à savoir $\widehat{D}..$ Si $k(r)$ est constante, on peut compléter le théorème par un résultat essentiellement dû à Fuchs [8].

Théorème 4'. — *Soit Λ une suite régulière, k une constante et $\mu(r)$ une fonction croissante telles que*

$$L(r) > k\log r + \mu(r) \qquad (r > r_0).$$

Posons $\sigma_2(u) = \overline{\text{borne}}_{t\leqslant u}(\sigma_1(t) - 2\mu(t))$. *Moyennant la relation* $\int^\infty e^{-\frac{\sigma_2(u)}{2k}}\,du = \infty$, *les conditions* (4) *entraînent* $\Phi(w) \equiv 0$.

La démonstration repose sur le lemme de Fuchs. Désignons par Λ_1 la suite $\left\{\frac{n}{k}\right\}$; soit $G(w)$ et $G_1(w)$ les fonctions de Fuchs de Λ et Λ_1, et $\Phi_1(w) = \frac{\Phi(w)\,G_1(w)}{G(w)}\cdot$ Comme on a

$$\log|\Phi_1(w)| < m(u) - 2u\mu(r) < u\sigma_2(u),$$

le théorème 4' résulte de l'application du théorème 4 où Λ et Φ sont remplacées par Λ_1 et Φ_1.

On peut, dans l'énoncé du théorème 4' remplacer $k\log r$ par $\int^r \frac{k(t)}{t}\,dt$ et $\frac{\sigma_2(u)}{k}$ par $\int^u \frac{d\sigma_2(t)}{k(t)}$, $k(r)$ étant une fonction croissante : il suffit, dans la démonstration ci-dessus, de définir une suite Λ_1 régulière telle que $\log|G|(w)| < 2u\int^r \frac{k(t)}{t}\,dt$. Mais, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, la généralisation ainsi obtenue des théorèmes 4 et 4' n'est qu'apparente, les théorèmes 4 et 4' ayant des champs d'application complémentaires.

§ 4. Sur quelques problèmes d'approximation et d'unicité.

1. Les théorèmes 4 et 4' du précédent paragraphe permettent de résoudre immédiatement des problèmes difficiles du champ réel. Le théorème 4' a été implicitement appliqué par M. Fuchs à un problème des moments de Stieltjes généralisé [8]. Nous nous proposons d'appliquer le théorème 4 à quelques-uns des problèmes étudiés par M. Mandelbrojt à l'aide du principe des séries adhérentes ([25], chap. v).

PROBLÈME 1. — *Soit* $\{\lambda_n\}$ *une suite positive croissante,* $\{M_n\}$ *une suite positive. Supposons qu'il existe une mesure positive* μ *telle que*

$$(1) \qquad \left\{ \int_0^\infty x^{\lambda_n}\, d\mu(x) = M_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \right.$$

Indiquer des conditions pour que cette solution soit unique.

REMARQUE. — $\log M_n$ est fonction convexe de λ_n. En effet,

$$M_n = \max_{u=\lambda_n} |F(w)|, \qquad \text{avec} \qquad F(w) = \int_0^\infty x^w\, d\mu(x).$$

Ce problème se réduit au problème classique de Stieltjes si $\lambda_n = n$. Il a été posé sous cette forme générale par M. Boas dans [5].

PROBLÈME 2. — *Même énoncé,* $\{\lambda_n\}$ *étant ici une suite croissante d'entiers positifs, et les égalités* (1) *étant remplacées par*

$$(2) \qquad \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\lambda_n}\, d\mu(x) = M_n. \right.$$

Ce problème se réduit au problème classique de Hamburger si $\lambda_n = n$.

PROBLÈME 3. — *Soit* $\{\lambda_n\}$ *une suite positive croissante,* $P(x)$ *une fonction continue positive,* $\mathcal{E}(0, +\infty)$ *l'espace de Banach des fonctions* $f(x)$ *continues sur* $[0, +\infty)$ *avec* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, *la norme étant* $\|f\| = \max_{x\geqslant 0} |f(x)|$. *Indiquer des conditions pour que la suite* $\left\{ \dfrac{x^{\lambda_n}}{P(x)} \right\}$ *soit complète sur* $\mathcal{E}(0, +\infty)$.

Problème 4. — *Même énoncé, $\{\lambda_n\}$ étant ici une suite croissante d'entiers positifs, et $\mathcal{E}(0, +\infty)$ étant remplacé par $\mathcal{E}(-\infty, +\infty)$, espace des fonctions $f(x)$ continues sur la droite, avec $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ et $\|f\| = \max |f(x)|$.*

Ce problème se réduit au problème classique de S. Bernstein si $\lambda_n = n$.

Problème 5. — *Soit $\{\lambda_n\}$ une suite croissante d'entiers positifs, $\{M_n\}$ une suite positive. Indiquer des conditions pour que la seule fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable satisfaisant les relations*

$$(3) \qquad \Big\{\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(x)|^2\, dx < M_n^2.$$

$$(4) \qquad \{f^{(\lambda_n)}(0) = 0$$

soit la fonction $f(x) \equiv 0$.

Problème 5′. — *Même énoncé, les relations* (3) *étant remplacées par*

$$(3') \qquad \{f^{(n)}(x) < M_n.$$

Ce problème se réduit au problème classique d'Hadamard si $\lambda_n = n$.

Pour résoudre le problème 1, il suffit de poser

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^w\,(d\mu(x) - d\mu_1(x))$$

où μ_1 est une mesure positive satisfaisant comme μ les relations (1). $\Phi(w)$ satisfait les hypothèses du théorème 4 du § III, si $\Lambda = \{\lambda_n\}$ est régulière et si $m(u)$ est la plus grande fonction convexe telle que $\{m(\lambda_n) = \log M_n$. Comme $\Phi(w) \equiv 0$ entraîne $\mu \equiv \mu_1$, on a l'énoncé suivant :

Théorème 1. — *Soit $m(u)$ la plus grande fonction convexe telle que $\{m(\lambda_n) = \log M_n$. La condition $H(\{\lambda_n\}, m(u))$ résout le problème 1.*

Pour résoudre le problème 2, décomposons $\{\lambda_n\}$ en deux suites Λ_p formée d'entiers pairs, et Λ_i formée d'entiers impairs.

Si μ_1 est une mesure positive satisfaisant, comme μ, les relations (2), nous poserons

$$\Phi^+(w) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^w (d\mu(x) + d\mu(-x) - d\mu_1(x) - d\mu_1(-x))$$
$$\Phi^-(w) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^w (d\mu(x) - d\mu(-x) - d\mu_1(x) + d\mu_1(-x))$$

$\Phi^+(w)$ et $\Phi^-(w)$ satisfont les hypothèses du théorème 4 du § 3, en prenant pour Λ respectivement Λ_p et Λ_i, et pour $m(u)$ la plus grande fonction convexe telle que $m(\lambda_n) = \log M_n$ quand $\lambda_n \in \Lambda_p$. Si $\Phi^+(w) \equiv \Phi^-(w) \equiv 0$, on a encore $\mu \equiv \mu_1$.

THÉORÈME 2. — *Soit respectivement Λ_p et Λ_i les suites d'entiers pairs et impairs dont la réunion constitue $\{\lambda_n\}$. Soit $m(u)$ la plus grande fonction convexe telle que $m(\lambda_n) = \log M_n$ quand λ_n est paire. La réunion des conditions*

$$\left|\begin{array}{l} H(\Lambda_p,\ m(u)) \\ H(\Lambda_i,\ m(u)) \end{array}\right.$$

résout le problème 2.

Pour résoudre le problème 3, posons

$$\Phi(w) = \int_0^\infty \frac{x^w}{P(x)} d\mu(x)$$

μ étant une mesure bornée $\left(\int |d\mu| < \infty\right)$ telle que

$$\Phi(\lambda_n) = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots);$$

le problème revient à donner des conditions entraînant $\Phi(w) \equiv 0$.

Or

$$\log|\Phi(w)| < \max_{x>0}(u \log x - \log P(x)) + C^{te} = m(u) + C^{te} \quad (u > 0)$$

$p(\sigma)$ est alors la plus grande fonction convexe inférieure ou égale à $\log P(e^\sigma)$.

THÉORÈME 3. — *Soit $p(\sigma)$ la plus grande minorante convexe de $\log P(e^\sigma)$. La condition $K(\{\lambda_n\}, p(\sigma))$ résout le problème 3.*

Pour résoudre le problème 4, on pose

$$\Phi^\pm(w) = \int_0^\infty x^w \left(\frac{d\mu(x)}{P(x)} \pm \frac{d\mu(-x)}{P(-x)}\right)$$

μ étant une mesure bornée telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\lambda_n}}{P(x)} d\mu(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

THÉORÈME 4. — *Λ_p et Λ_i étant définies comme au théorème 2, soit $p(\sigma)$ la plus grande fonction minorante convexe de* $\log P(e^\sigma)$ *et* $\log P(-e^\sigma)$. *La réunion des conditions*

$$\left| \begin{array}{l} K(\Lambda_p,\ p(\sigma)) \\ K(\Lambda_i,\ p(\sigma)) \end{array} \right.$$

résout le problème 4.

Pour résoudre le problème 5, considérons la transformée de Fourier $g(y)$ de $f(x)$, et posons

$$\Phi^{\pm}(w) = \int_0^{\infty} y^{w}(g(y) \pm g(-y))\, dy$$

$\Phi^+(w)$ et $\Phi^-(w)$ s'annulent respectivement sur Λ_p et Λ_i, et satisfont d'après l'inégalité de Schwartz,

$$\Phi^{\pm}(w) \leqslant \left[\int_{-\infty}^{\infty} y^{2u+2} g^2(y)\, dy\right]^{\frac{1}{2}} + O(1)\,(u > 1).$$

Si $m(u)$ est la plus grande fonction convexe telle que $\S m(n) \leqslant \log M_n$, on a donc $\log|\Phi^{\pm}(w)| < m(u+1) + O(1)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 4 du § 3 à $\Phi^{\pm}(w-1)$.

THÉORÈME 5. — *Même énoncé que le théorème 2, $m(u)$ étant ici la plus grande fonction convexe telle que*

$$\S\, m(n) \leqslant \log M_n.$$

On ramène le problème 5′ au problème 5 grâce à un artifice, dû à MM. Mandelbrojt et Wiener et exposé dans [25] p. 146. Les conditions du théorème 5 résolvent ainsi, on s'en assure très facilement, le problème 5′.

REMARQUES SUR LES CONDITIONS $H(\Lambda, m(u))$ ET $K(\Lambda, p(\sigma))$.

1. Dans les théorèmes 1, 2, 5, on introduit $m(u)$ pour pouvoir appliquer une des conditions (5), (6), (7), (5′), (7′) du § 3. On peut facilement éliminer $m(u)$ des énoncés. Ainsi, les conditions (5′) et (7′) permettent respectivement d'obtenir les variantes suivantes des théorèmes 1 et 5 :

Si $\{\lambda_n\}$ est une suite régulière à laquelle $k(r)$ est liée par H, la condition

$$\sum_{N=1}^{\infty}(\lambda_{N+1}-\lambda_N)\exp.\left[-\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}\frac{1}{k(\lambda_n)}\left(\frac{\log M_{n+1}}{\lambda_{n+1}}-\frac{\log M_n}{\lambda_n}\right)\right]=\infty$$

résout le problème 1.

Λ_p et Λ_i étant les parties paire et impaire de Λ, auxquelles $k_p(r)$ et $k_i(r)$ sont liées par H, $\{\log M_n^c\}$ étant la suite régularisée convexe de $\{\log M_n\}$ (cf. [24], p. 16), la réunion des conditions

$$\left|\sum_{N=1}^{\infty}\exp.\left[-\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}\frac{\log M_{n-1}^c+\log M_{n+1}^c-2\log M_n^c}{k(n)}\right]=\infty\right.$$

(pour $k=k_i$ et $k=k_p$) résout le problème 1.

2. Chaque condition H ou K équivaut aux conditions classiques de Carleman, S. Bernstein et Denjoy-Carleman (respectivement relatives aux problèmes 1 et 2, 4, 5) quand $\{\lambda_n\}=\{n\}$.

3. Ces conditions sont voisines de celles de Mandelbrojt (obtenues par M. Mandelbrojt pour des λ_n entiers [24], et étendues par M. Agmon, en ce qui concerne les problèmes 1 et 3, aux suites $\{\lambda_n\}$ régulières [1]). On obtient ces dernières, au lieu des nôtres, quand on remplace dans (7) $k(r)$ par $\underline{\mathrm{D}}.(\gamma r)$ ou $\overline{\mathrm{D}}.(\gamma r)$ (ce qui est une restriction) et $p'(\sigma)$ par $p(\sigma)$ (ce qui est une amélioration). Elles entraînent les nôtres dès que $p'(\sigma)>\varepsilon p(\sigma)$, ε constante, ou $um'(u)-m(u)<\mathrm{A}u$, A constante. Nos conditions ont pour avantage principal de ne faire intervenir les suites Λ que par leurs distributions logarithmiques. La méthode de M. Mandelbrojt, basée sur son « inégalité fondamentale », a pour avantage essentiel de permettre la résolution d'un problème que nous n'avons pas abordé : celui de la quasi analyticité généralisée sur une demi-droite.

Les théorèmes de Fuchs, obtenus en appliquant le théorème 4′ du § 3 au lieu du théorème 4, peuvent être utilisés quand dans nos énoncés la meilleure fonction $k(r)$ est une constante.

2. Nous allons maintenant, au lieu du théorème 4, appliquer le théorème 3′ du § 3 et le théorème du § 1 à l'étude des problèmes suivants :

Problème 6. — *Même énoncé que pour le problème 1, le* *support de μ étant de plus supposé porté par un ensemble fermé donné* S *de la demi-droite* $x \geqslant 0$.

PROBLÈME 7. — *Même énoncé que pour le problème 3,* $\mathcal{E}(0, +\infty)$ *étant remplacé par l'espace* $\mathcal{E}(S)$ *des fonctions* $f(x)$ *continues sur* $(0, +\infty)$, *avec* $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, *la norme étant*

$$\|f\| = \max_{x \in S} |f(x)|.$$

PROBLÈME 8. — *Soit* $\{\lambda_n\}$ *une suite croissante d'entiers impairs;* $\{M_n\}$ *une suite positive. Indiquer des conditions pour que la seule fonction* $f(x)$ *paire, indéfiniment dérivable, satisfaisant les conditions* (3) *et* (4), *et telle que son spectre (support de sa transformée de Fourier) soit contenu dans un ensemble symétrique* S, *soit la fonction* $f(x) \equiv 0$.

PROBLÈME 8'. — *Même énoncé, les conditions* (3) *étant remplacées par* (3'), *le spectre étant défini comme l'ensemble des singularités de la transformée de Fourier-Carleman.*

Pour étudier le problème 6, supposons $\Lambda = \{\lambda_n\}$ régulière et considérons les fonctions $k(r)$ et $F(w)$ définies au théorème 3' du § 3. Désignons par μ_1 une mesure satisfaisant les mêmes conditions que μ, posons $x = e^{\xi}$,

$$\frac{1}{2}(d\mu(x) - d\mu_1(x)) = d\beta(\xi)$$

$$\Phi(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi w}\, d\beta(\xi)$$

$$H(s) = \frac{1}{\pi}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} F(w)\Phi(w)e^{-sw-Kw}\frac{dw}{(1+w^2)}$$

$s = \sigma + it$, K constante telle que

$$\log|\Phi(w)| < -|v|k.(r) + (K-1)|u|$$

hors des cercles exceptionnels. Si $p(\sigma) = \max_n (\lambda_n\sigma - \log M_n)$, il suffit de se référer à la démonstration du théorème 4, § 3, pour voir que $H(s)$ est holomorphe pour $|t| < k.(p'(\sigma))$ et satisfait dans cette bande $\log|H(s)| < -p(\sigma)$.

Formellement, on a

$$\text{(7)} \qquad H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s-\xi)\, d\beta(\xi),$$

avec

$$h(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(c+iv)e^{-(s+K)(c+iv)}\frac{idv}{(1+c+iv)^2}$$

$c > 0$. L'égalité (7) vaut manifestement pour $|t| < k. < \min\limits_r k(r)$.

Posons

$$h_{\pm\alpha}(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty\,(\operatorname{Arg} w = \pm\alpha)} F(c \pm i + w)e^{-(s+K)(c\pm i+w)}\frac{dw}{(1+c\pm i+w)^2}$$

$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Le logarithme de l'expression à intégrer est inférieur à

$$r[\mp k.\sin\alpha + 2K|\cos\alpha| - \sigma\cos\alpha \pm t\sin\alpha] - (\sigma + K)c + |t| + O(1)$$

$h_{\pm\alpha}(s)$ est donc définie et holomorphe si

$$\mp k.\sin\alpha + 2K|\cos\alpha| - \sigma\cos\alpha \pm t\sin\alpha < -\varepsilon < 0$$

et alors $\qquad \log|h_{\pm\alpha}(s)| < -\sigma c + |t| + O(1).$

Dans l'angle où les deux membres sont définis, on a

$$h_{\pm\alpha}(s) = h_{\pm\frac{\pi}{2}}(s)$$

$h_{\pm\frac{\pi}{2}}(s)$ est donc prolongeable en une fonction bornée à l'extérieur de la demi-bande $\pm t \geqslant k. - \varepsilon$, $|\sigma| \leqslant 2K + \varepsilon$. Comme

$$h(s) = h_{\frac{\pi}{2}}(s) - h_{-\frac{\pi}{2}}(s) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} F(c+iv)e^{-(s+K)(c+iv)}\frac{idv}{(1+c+iv)^2}$$

$h(s)$ est holomorphe dans le plan privé de ces deux demi-bandes, et $\log|h|(s)| < -\sigma c + |t| + O(1)$, $O(1)$ étant uniformément borné par rapport à c si c est à une distance $> \varepsilon > 0$ de Λ.

Soit E la réunion des segments de longueur $4K + 2\varepsilon$ centrés sur le support de β. D'après (7), $H(s)$ peut-être définie dans les bandes $\sigma \in \complement E$ et y satisfait

$$\log|H(s)| < \log\int e^{c\xi}|d\beta(\xi)| - \sigma c + |t| + O(1)$$

soit, par un choix convenable de c,

$$\log|H(s)| < -p(\sigma) + |t| + O(1).$$

H(s) satisfait donc les hypothèses du § 1. Comme $H(s) \equiv 0$ entraîne $\Phi(w) \equiv 0$ et $\beta \equiv 0$, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *$\{\lambda_n\}$ étant régulière, soit $k(r)$ une fonction mesurable bornée positive telle que*

$$\int^r \frac{k(t) - D(t)}{t} dt = O(1) \qquad (r \to \infty)$$

posons $k_{\cdot}(r) = \min\limits_{u \geqslant r} k(u)$. Soit Ω une réunion de segments de longueurs indéfiniment croissantes ne contenant aucun point $\log s$, $s \in S$. *Posons $p(\sigma) = \max\limits_n (\lambda_n \sigma - \log M_n)$. La condition*

$$\int^\infty p(\sigma) \exp. \left[-\frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha \in \Omega}^\sigma \frac{d\alpha}{k_{\cdot}(p'(\alpha))} - \varepsilon \mu(\Omega; \sigma) \right] d\sigma = \infty, \ \varepsilon > 0$$

résout le problème 6.

Quitte à changer seulement la définition de β, on a

THÉORÈME 7. — *Même énoncé relativement au problème 7, $p(\sigma)$ ayant ici la même signification qu'au théorème 3.*

Quitte à remplacer $d\beta(\xi)$ par $(g(e^\xi) + g(e^{-\xi}))e^\xi d\xi$, on résout de même le problème 8.

THÉORÈME 8. — *Même énoncé relativement au problème 8, $p(\sigma)$ ayant ici même signification qu'au théorème 5.*

Il suffit encore d'utiliser la transformation de Mandelbrojt et Wiener, en remarquant qu'elle conserve le spectre (à l'exception peut-être de l'origine), pour ramener le problème 8′ au problème 8.

La solution du problème 8′ généralise le théorème 12 du § 4 du chapitre I. Il permet de définir de nouvelles classes quasi analytiques $\mathcal{E}(\Lambda) \cap C\{M_n\}$, dont les fonctions soient caractérisées par la donnée de leurs dérivées d'ordre λ_n en un point.

Des problèmes analogues ont été récemment étudiés par M. Mandelbrojt à l'aide de son inégalité fondamentale [28].

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon : Sur deux théorèmes de M. S. Mandelbrojt, *C. R. Ac. Sc.*, 228 (1949), pp. 1835-1837.

[2] V. Bernstein : Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[3] A. Beurling : Sur une classe de fonctions presque-périodiques, *C. R. Ac. Sc.*, 225 (1947), pp. 326-328.

[4] R. P. Boas : On a generalization of the Stieltjes moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 46 (1939), pp. 142-150.

[5] T. Carleman : L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent, Uppsala, 1944.

[6] H. Cartan : Sur les systèmes de fonctions holomorphes..., *Annales E. N. S.*, 45 (1928), pp. 255-346.

[7] R. E. Edwards : On derivative and translational bases for periodic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2 (1951), pp. 644-653.

[7 *bis*] W. H. J. Fuchs : A generalization of Carlson's theorem, *J. London Math. Soc.*, 21 (1946), pp. 106-110.

[8] W. H. J. Fuchs : On a generalization of the Stieltjes moment problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), pp. 1057-1059.

[9] I. I. Hirschman et J. A. Jenkins : Note on a result of Levine and Lifschitz, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), pp. 390-393.

[10] J. P. Kahane : Extension du théorème de Carlson et applications, *C. R. Ac. Sc.*, 234 (1952), pp. 2038-2040.

[11] J. P. Kahane : Quasi-analyticité des fonctions moyenne-périodiques, *C. R. Ac. Sc.*, 236 (1953), pp. 569-571.

[12] J. P. Kahane et P. Lalaguë : Quasi-analyticité des fonctions sommes de séries de Fourier lacunaires, *C. R. Ac. Sc.*, 230 (1950), pp. 2250-2252.

[13] P. Lalaguë : Classes de fonctions indéfiniment dérivables, sommes de séries de Fourier lacunaires, *C. R. Ac. Sc.*, 236 (1953), pp. 887-889.

[14] P. Lalaguë : Classes de fonctions indéfiniment dérivables presque-périodiques de spectre donné, *C. R. Ac. Sc.*, 236 (1953), pp. 2473-2474.

[15] A. F. Léontiev : Séries de polynômes de Dirichlet et leurs généralisations (en russe), *Troudi de l'Inst. Steklov*, 39, Moscou, 1951.

[16] B. Lévine : Fonctions de degré fini, bornées sur une suite de points, (en russe), *Dokladi A. N.-S.S.S.R.*, 65 (1949), p. 265.

[17] B. Lévine : Sur les fonctions définies par leurs valeurs sur un certain intervalle (en russe), *Dokladi A. N.-S.S.S.R.*, 70 (1949), pp. 757-60.

[18] B. Lévine : Sur la quasi-analyticité des classes de fonctions presque-périodiques (en russe), *Dokladi A. N.-S.S.S.R.*, 70 (1950), pp. 949-952.

[19] B. Lévine et M. Lifschitz : Quasi-analyticité des classes de fonctions représentables par des séries de Fourier (en russe) *Mat. Sbornik*, 9, 3 (1941), pp. 694-709.

[20] N. Levinson : Gap and density theorems, *Colloquium*, New-York, 1940.

[21] E. Lindelöf : Sur les fonctions entières d'ordre entier, *Annales E. N. S.*, 22 (1905), pp. 369-395.

[22] S. Mandelbrojt : Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1935.

[23] S. Mandelbrojt : Dirichlet Series, *The Rice Institute Pamphlet*, 1944.

[24] S. Mandelbrojt : Théorèmes d'unicité, *Annales E. N. S.*, 65 (1948), pp. 101-138.

[25] S. Mandelbrojt : Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications. Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[26] S. Mandelbrojt : Un théorème de fermeture, *C. R. Ac. Sc.*, 231 (1950), pp. 16-18.

[27] S. Mandelbrojt : Théorèmes généraux de fermeture, *Journal d'analyse mathématique*, Jérusalem, 1 (1951), pp. 180-208.

[28] S. Mandelbrojt : Quelques nouveaux théorèmes de fermeture, *Ann. Soc. Polon. Math.*, 25 (1952), pp. 241-251.

[29] S. Mandelbrojt et Mac-Lane : On functions holomorphic in a strip region, and an extension of Watson's problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 61 (1947), p. 454.

[29 *bis*] S. Mandelbrojt et F. E. Ulrich : On a generalization of the problem of quasi-analyticity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 52 (1942) pp. 265-282.

[29 *ter*] P. Montel : Leçons sur les séries de polynômes, Gauthier-Villars, Paris, 1910.

[30] R. E. A. C. Paley et N. Wiener : Fourier transforms in the complex domain, *Colloquium*, New-York, 1934.

[31] G. Polya : Eine Verallgemeinerung der Fabryschen Lückensatzes. *Göttinger Nachr.*, 1927, pp. 187-195.

[31 *bis*] G. Polya : Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Zeitschrift*, 29 (1929), pp. 549-624.

[32] J. F. Ritt : On a general class of linear homogeneous differential equations of infinite order with constant coefficients, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18 (1917), pp. 27-49.

[33] L. Schwartz : Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentionelles imaginaires, *Ann. Toulouse* 6 (1942) pp. 111-174.

[34] L. Schwartz : Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques, *Annals of Math.* 48 (1947), pp. 857-929.

[35] G. Valiron : Sur les solutions des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre infini, *Annales E. N. S.*, 46 (1929). pp. 26-53.