

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MADELEINE BAUER

## Sur les $G$ -structures $k$ -plates

*Annales de l'institut Fourier*, tome 24, n° 1 (1974), p. 297-310

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1974\\_\\_24\\_1\\_297\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_1_297_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LES G-STRUCTURES K-PLATES

par Madeleine BAUER

### Introduction.

Dans son article : "The integrability problem for G-structures" [3], V. Guillemin établit qu'une G-structure  $(E \rightarrow M)$  k-plate [1-5] est  $(k+1)$ -plate si et seulement si un certain tenseur  $C^k$  ( $k^e$  tenseur de structure) défini sur un prolongement  $E^k$  de  $E$  [1-5] est nul (Théorème fondamental).

Pour ce faire, V. Guillemin suppose implicitement que l'espace  $E^k$  des  $(k+1)$ -repères E-k-plats de  $M$  est un sous-espace fibré principal  $\mathcal{C}^\infty$  de l'espace  $H^{k+1}(M)$  des  $(k+1)$ -repères de  $M$ .

Nous donnons ici, par des méthodes qui généralisent celles de D. Bernard [2], une démonstration du théorème fondamental utilisant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un  $(k+2)$ -repère E-k-plat soit E- $(k+1)$ -plat. Une conséquence de cette démonstration est que l'hypothèse implicite de V. Guillemin mentionnée ci-dessus est effectivement vérifiée (corollaire 3.3).

### Notations.

On se place dans la catégorie des variétés  $\mathcal{C}^\infty$  dont les morphismes sont les applications  $\mathcal{C}^\infty$ .

$T_x U$  : espace tangent au point  $x$  à la variété  $U$ .

$T_x f$  : application tangente à l'application  $f$  au point  $x$ .

$(D'f)_x$  : dérivée  $r^e$  de  $f$  au point  $x$  si  $f$  est une application  $\mathcal{C}^\infty$  d'un espace vectoriel dans un autre.

Si  $\mathcal{O}$  est un groupe de Lie, on notera  $\underline{\mathcal{O}}$  son algèbre de Lie et on identifiera  $\underline{\mathcal{O}}$  et l'espace tangent à l'élément neutre de  $\mathcal{O}$ .

Si  $U$  et  $V$  sont des variétés, on notera  $J^k(U, V)$  la variété des  $k$ -jets de  $U$  dans  $V$ , et si  $X = j_x^k f \in J^k(U, V)$ , on notera par  $\beta(X) = f(x)$  le but de  $X$  et par  $\Pi_p^k(X) = j_x^p f$  la projection de  $X$  dans  $J^p(U, V)$  ( $p \leq k$ ).

Si  $E$  est un espace fibré  $\mathcal{C}^\infty$  de base  $M$ , on notera  $\mathcal{J}^k(E)$  la variété des  $k$ -jets de sections de  $E$ .

$$e_k = j_0^{k+1} \text{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

## 1. Préliminaires.

1. Si  $U, V, W$  sont des variétés et  $f$  un morphisme de  $V$  dans  $W$  alors l'application  $\bar{f}$  de  $J^k(U, V)$  dans  $J^k(U, W)$  définie par :

$$\bar{f}(j_x^k g) = j_x^k (f \circ g) \quad (1)$$

est un morphisme.

Si  $M$  est une variété de dimension  $n$ , l'espace  $H^k(M)$  des  $k$ -repères de  $M$  est la sous-variété de  $J^k(\mathbb{R}^n, M)$  formée des  $k$ -jets inversibles de source 0. Pour l'application but  $\beta$ ,  $H^k(M)$  est un espace fibré principal de groupe structural  $L_n^k$ , ensemble des  $k$ -jets inversibles de source et but 0.

Si  $G$  est un sous-groupe de Lie de  $L_n^1$ , une  $G$ -structure sur  $M$  est un sous-espace fibré principal de  $H^1(M)$  de groupe structural  $G$ . On supposera toujours  $G$  fermé dans  $L_n^1$ .

2. Soit  $(E_i \rightarrow M_i)$  une  $G$ -structure ( $i = 1, 2$ ) et  $f$  un difféomorphisme local de  $M_1$  dans  $M_2$  :  $\tilde{f} = \bar{f}|_{H^1(M_1)}$  est un difféomorphisme local de  $H^1(M_1)$  dans  $H^1(M_2)$ . On dit que  $f$  (ou  $j_x^{k+1} f$ ) préserve le couple de  $G$ -structures  $(E_1, E_2)$  à l'ordre  $k$  en  $x \in M_1$  si :

$$1/ \tilde{f}(E_{1_x}) = E_{2_{f(x)}} \quad [E_{i_y} : \text{fibre de } E_i \text{ en } y]$$

2/ quelque soit  $p \in E_{1_x}$ ,  $\tilde{f}(E_1)$  et  $E_2$  ont un contact d'ordre  $k$  en  $\tilde{f}(p)$  (en tant que sous-variétés de  $H^1(M_2)$ ).

### 3. Définition de $G^k$ .

Soit  $E_0$  la G-structure plate canonique sur  $\mathbf{R}^n$  et  $G^k$  le sous-groupe de  $L_n^{k+1}$  composé des repères  $k$ -plats (c.à.d. préservant le couple de G-structures  $(E_0, E_0)$  à l'ordre  $k$  en 0) de but 0.

LEMME 1.3. — *Pour qu'un difféomorphisme local  $f$  de  $\mathbf{R}^n$  préserve le couple de G-structures  $(E_0, E_0)$  à l'ordre  $k$  en  $x$  il faut et il suffit que  $j_x^k D^1 f$  appartienne à  $J^k(\mathbf{R}^n, G)$ .*

L'application  $i_{k+1,k}$  de  $L_n^{k+1}$  dans  $J_0^k(\mathbf{R}^n, L_n^1)$ , qui à  $j_0^{k+1} f$  fait correspondre  $j_0^k D^1 f$ , est un plongement. Mais le lemme précédent implique que :  $G^k = (i_{k+1,k})^{-1} [J_0^k(\mathbf{R}^n, G)]$ . Or,  $G$  étant fermé dans  $L_n^1$ ,  $J_0^k(\mathbf{R}^n, G)$  est fermé dans  $J_0^k(\mathbf{R}^n, L_n^1)$ , ce qui entraîne que  $G^k$  est un sous-groupe fermé de  $L_n^{k+1}$  et que, par conséquent, c'est un sous-groupe de Lie.

L'ensemble  $E_0^k$  des  $(k+1)$ -repères  $k$ -plats de  $\mathbf{R}^n$  est un  $G^k$ -sous-espace fibré principal trivial de  $H^{k+1}(\mathbf{R}^n)$ .

### 4. Propriétés de $G^k$ .

L'application tangente  $T_{e_k} i_{k+1,k}$  identifie l'algèbre de Lie  $\underline{G}^k$  de  $G^k$  à l'espace vectoriel  $\bigoplus_{r=0}^k \underline{G}^{(r)}$  avec :

$$\underline{G}^{(r)} = [\underline{G} \otimes S^r(\mathbf{R}^{n*})] \cap [\mathbf{R}^n \otimes S^{r+1}(\mathbf{R}^{n*})] \quad (2)$$

Une représentation linéaire  $\rho^k$  de  $G^k$  sur  $T_{e_{k-1}} E_0^{k-1} = \mathbf{R}^n \bigoplus_{r=0}^k \underline{G}^{(r)}$  est définie par :

$$\rho^k(Y) = T_{e_{k-1}} (\bar{g}^{-1} \circ R_{Y'}) \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = j_0^{k+1} g \in G^k, \quad Y' = j_0^k g \in G^{k-1} \\ R_{Y'}, \text{ translation à droite par } Y' \text{ opérant sur } E_0^{k-1}. \end{array} \right. \quad (3)$$

De plus si  $Y' = e_{k-1}$ , on a pour  $(u, U)$  appartenant à

$$T_0(\mathbf{R}^n) \times T_{e_{k-1}} G^{k-1} :$$

$$T_{e_{k-1}} \bar{g}^{-1}(u, U) = \rho^k(Y)(u, U) = (u, U + [D^1(D^k g^{-1})]_0 u) \quad (4)$$

### 5. G-structure $k$ -plate.

Une G-structure  $E \rightarrow M$  est dite  $k$ -plate en  $x \in M$ , s'il existe en ce point un  $(k+1)$ -repère  $E$ - $k$ -plat, c.à.d. un  $(k+1)$ -repère en  $x$  préservant le couple de G-structures  $(E_0, E)$  à l'ordre  $k$  en 0. Une G-structure  $k$ -plate en tout point de  $M$  est dite simplement  $k$ -plate.

On considérera désormais une G-structure  $k$ -plate  $E$  et on désignera par  $E^k$  l'ensemble des  $(k+1)$ -repères  $E$ - $k$ -plats de  $M$ .

*Il est évident que, du point de vue ensembliste,  $E^k$  est un  $G^k$ -sous-espace fibré principal de  $H^{k+1}(M)$ . On supposera de plus, jusqu'au paragraphe 3, que :*

*" $E^k$  est un  $G^k$ -sous-espace fibré principal  $C^\infty$  de  $H^{k+1}(M)$ ."*

Cette hypothèse deviendra un théorème grâce au corollaire 3.3.

## 2. Tenseur de structure.

### 1. 1-forme fondamentale $\Gamma^k$ sur $E^k$ .

PROPOSITION 2.1. — Soit  $X = j_0^{k+1}f$  un  $(k+1)$ -repère de  $M$  dont l'image  $X' = j_0^k f$  dans  $H^k(M)$  est dans  $E^{k-1}$ . Pour que  $X$  soit  $E$ - $k$ -plat il faut et il suffit que l'application :  $T_X \bar{f}^{-1} : T_X E^{k-1} \rightarrow T_{e_{k-1}} H^k(\mathbb{R}^n)$  prenne ses valeurs dans  $T_{e_{k-1}} E_0^{k-1}$ .

Il résulte de cette proposition que la 1-forme  $\Gamma^k$  sur  $E^k$  définie par :

$$\Gamma_X^k = T_X(\bar{f}^{-1} \circ \Pi_k^{k+1}) \quad (\Pi_k^{k+1} : E^k \rightarrow E^{k-1}) \quad (5)$$

prend ses valeurs dans  $T_{e_{k-1}} E_0^{k-1} = \mathbb{R}^n \bigoplus_{r=0}^k \underline{G}^{(r)}$ . On écrira :

$$\Gamma^k = \omega + \Omega^0 + \dots + \Omega^{k-1},$$

$\Omega^i$  étant la composante de  $\Gamma^k$  à valeurs dans  $\underline{G}^{(i)}$ . De plus la transla-

lation à droite sur  $E^k$  par  $Y \in G^k$  transforme  $\Gamma^k$  de la façon suivante  $R_Y^* \Gamma^k = \rho^k(Y) \Gamma^k$ .

## 2. Isomorphisme canonique entre $\mathcal{J}_{\beta(X)}^k(T(\mathbf{R}^n))$ et $T_X H^k(\mathbf{R}^n)$ .

Soit  $\xi$  un champ de vecteurs sur  $\mathbf{R}^n$  ; il se relève en un champ de vecteurs  $\xi^k$  sur  $H^k(\mathbf{R}^n)$  défini par :  $\xi_X^k = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} [\overline{\text{expt}} \xi(X)]$ .  $\xi_X^k$  ne dépend que de  $j_{\beta(X)}^k \xi$  et l'on notera  $\alpha_{k,X}$  l'isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathcal{J}_{\beta(X)}^k(T(\mathbf{R}^n))$  sur  $T_X H^k(\mathbf{R}^n)$  qui envoie  $j_{\beta(X)}^k \xi$  sur  $\xi_X^k$ .

A partir du crochet,  $[\cdot, \cdot]$ , des champs de vecteurs dans  $\mathbf{R}^n$ , on obtient le crochet naturel,  $[\![\cdot, \cdot]\!]$ , de  $\mathcal{J}_{\beta(X)}^k(T(\mathbf{R}^n))$  à valeurs dans  $\mathcal{J}_{\beta(X)}^{k-1}(T(\mathbf{R}^n))$  défini par :  $[j_{\beta(X)}^k \xi, j_{\beta(X)}^k \zeta] = j_{\beta(X)}^{k-1} [\xi, \zeta]$ .  $\alpha_{k,X}$  permet de transporter ce crochet en un crochet, encore noté  $[\![\cdot, \cdot]\!]$  de  $T_X H^k(\mathbf{R}^n)$  à valeurs dans  $T_X H^{k-1}(\mathbf{R}^n)$  qui vérifie de plus

$$[\![\xi_X^k, \zeta_X^k]\!] = T \Pi_{k-1}^k [\xi^k, \zeta^k]_X = [\xi^{k-1}, \zeta^{k-1}]_{X'}, \quad [X' = \Pi_{k-1}^k(X)].$$

## 3. Formule de Maurer-Cartan.

La 1-forme fondamentale  $\Gamma_0^k$  de  $H^{k+1}(\mathbf{R}^n)$  prend ses valeurs dans  $T_{e_{k-1}} H^k(\mathbf{R}^n)$  qui est muni de la structure d'“algèbre de Lie tronquée” définie par le crochet  $[\![\cdot, \cdot]\!]$ . L'expression  $[\![\Gamma_0^k, \Gamma_0^k]\!]$  a donc un sens et on a :

$$\begin{aligned} [\![\Gamma_0^k, \Gamma_0^k]\!] (\xi_X^{k+1}, \zeta_X^{k+1}) &= 2 [\![\Gamma_0^k(\xi_X^{k+1}), \Gamma_0^k(\zeta_X^{k+1})]\!] \\ &= 2 [\![ (Tf^{-1}\xi)_{e_{k-1}}^k, (Tf^{-1}\zeta)_{e_{k-1}}^k ]\!] \quad \text{si } X = j_0^{k+1} f \\ &= 2 (Tf^{-1}[\xi, \zeta])_{e_{k-2}}^{k-1} \\ &= 2 T_{e_{k-1}} \Pi_{k-1}^k \circ \Gamma_0^k [\xi^{k+1}, \zeta^{k+1}]_X \\ &= 2 T_{e_{k-1}} \Pi_{k-1}^k \circ d\Gamma_0^k (\xi_X^{k+1}, \zeta_X^{k+1}) \end{aligned}$$

car l'invariance de  $\Gamma_0^k$  par le prolongement des difféomorphismes de  $\mathbf{R}^n$  ( $\bar{g}^* \Gamma_0^k = \Gamma_0^k$ ) implique :  $\mathcal{L}_{\xi^{k+1}} \Gamma_0^k = 0$ .

On a ainsi obtenu la “formule de Maurer-Cartan” :

$$T_{e_{k-1}} \Pi_{k-1}^k \circ d\Gamma_0^k = \frac{1}{2} [\![\Gamma_0^k, \Gamma_0^k]\!]. \quad (6)$$

#### 4. Cohomologie de Spencer.

Le crochet  $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$  de  $\mathcal{F}_0^k(T(\mathbf{R}^n))$  induit un crochet, encore noté  $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$  sur  $\bigoplus_{r=0}^k \mathbf{R}^n \otimes S^r(\mathbf{R}^{n*})$ . Ce crochet, restreint à

$$[\mathbf{R}^n \otimes S^p(\mathbf{R}^{n*})] \times [\mathbf{R}^n \otimes S^q(\mathbf{R}^{n*})]$$

est l'application nulle si  $p + q - 1$  est supérieur à  $k$  ; si  $p + q - 1$  est inférieur ou égal à  $k$  c'est l'application bilinéaire :

$$\llbracket v_1 \otimes s_1, v_2 \otimes s_2 \rrbracket = v_2 \otimes (D_{v_1} s_2) \odot s_1 - v_1 \otimes (D_{v_2} s_1) \odot s_2 \quad (7)$$

à valeurs dans  $\mathbf{R}^n \otimes S^{p+q-1}(\mathbf{R}^{n*})$ .

On vérifie l'inclusion :  $\llbracket \underline{G}^{(p)}, \underline{G}^{(q)} \rrbracket \subset \underline{G}^{(p+q)}$  et on montre que :

$$C^*(\underline{G}) = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} C^{p,q}(\underline{G}) = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} \underline{G}^{(p-1)} \otimes \bigwedge^q \mathbf{R}^{n*}$$

est un complexe si on le munit de l'opérateur linéaire  $\delta$  de bidegré  $(-1, +1)$  défini par :

$$(\delta \xi)(u_1 \dots u_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1} \llbracket u_i, \xi(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{q+1}) \rrbracket \quad (8)$$

si  $\xi \in C^{p,q}(\underline{G})$ .

La cohomologie,  $HP^{p,q}(\underline{G})$ , de ce complexe en  $C^{p,q}(\underline{G})$ , est un des espaces de cohomologie de Spencer de  $G$ .

#### 5. Tenseur de structure

Quelque soit  $X \in E^k$  il existe au moins un sous-espace horizontal  $H_X$  de  $T_X E^k$  sur lequel les  $\Omega^i$  s'annulent ( $i = 0, \dots, k-1$ ) car cette condition équivaut à

$$T_X \Pi_k^{k+1} H_X = T_{e_{k-1}} \bar{f} [T_0(\mathbf{R}^n) \times \{e_{k-1}\}] \quad \text{si} \quad X = j_0^{k+1} f$$

Si on note encore  $H$  la projection de  $T_X E^k$  sur  $H_X$  parallèlement à  $V_X = T_X E_{\beta(X)}^k = \text{Ker } T_X \beta$  et si  $U$  et  $V$  sont des vecteurs de  $T_X E^k$  on pose :

$$C_{H_X}^k(u, v) = d\Gamma^k \circ H \wedge H(U, V) \quad \text{si} \quad \omega(U) = u, \omega(V) = v. \quad (9)$$

A l'aide d'une carte locale de  $M$  et de (6), on voit que  $\Gamma^k$  vérifie aussi la formule de Maurer-Cartan :

$$T_{e_k} \Pi_{k-1}^k \circ d\Gamma^k = \frac{1}{2} \llbracket \Gamma^k, \Gamma^k \rrbracket. \quad (10)$$

En prenant les composantes homogènes de cette égalité (10) à valeurs dans  $\underline{G}^{(i)}$  on obtient :

$$d\Omega^i = \frac{1}{2} \{ \llbracket \omega, \Omega^{i+1} \rrbracket + \llbracket \Omega^0, \Omega^i \rrbracket + \dots + \llbracket \Omega^i, \Omega^0 \rrbracket + \llbracket \Omega^{i+1}, \omega \rrbracket \} \quad (11)$$

$$(-1 \leq i \leq k-2) \left( \begin{matrix} \omega = \Omega^{-1} \\ \underline{G}^{(-1)} = \mathbf{R}^n \end{matrix} \right).$$

Par conséquent  $d\Omega^i \circ H \wedge H$  est nulle pour  $-1 \leq i \leq k-2$ , ce qui entraîne :

$$C_{H_X}^k(u, v) = d\Omega^{k-1} \circ H \wedge H(U, V) \quad \text{si} \quad \omega(U) = u, \omega(V) = v \quad (12)$$

de sorte que  $C_{H_X}^k$  est un élément de  $\underline{G}^{(k-1)} \otimes \wedge^2 \mathbf{R}^{n*} = C^{k,2}(\underline{G})$ .

On vérifie que  $C_{H_X}^k$  est un cocycle et que sa classe de cohomologie  $C^k(X)$  dans  $H^{k,2}(\underline{G})$  est indépendante du sous-espace horizontal choisi.

$\Gamma_X^k$  étant une application linéaire surjective de  $T_X E^k$  sur  $T_{e_{k-1}} E_0^{k-1}$ ,  $(\Omega^0 + \dots + \Omega^{k-1})_X$  est aussi une application linéaire surjective de  $T_X E^k$  sur  $\underline{G}^{k-1}$ . Les équations de Pfaff  $\Omega^i = 0$  ( $i = 0, \dots, k-1$ ) constituent donc un système différentiel de rang constant sur  $E^k$  transverse aux fibres. Par conséquent, il existe (localement) un champ  $\mathcal{C}^\infty$  de plans horizontaux  $\mathcal{H}$  sur lequel les  $\Omega^i$  ( $i = 0, \dots, k-1$ ) s'annulent.  $C_{\mathcal{H}}^k : X \rightarrow C_{\mathcal{H}_X}^k$  étant alors un morphisme (local) de  $E^k$  dans  $C^{k,2}(\underline{G})$ ,  $C^k : X \rightarrow C^k(X)$  est un morphisme de  $E^k$  dans  $H^{k,2}(\underline{G})$  dit  $k^e$  tenseur de structure de  $E$ .

$C^k$  est en fait un tenseur de type  $\mathcal{S}^k$  sur  $E^k$ .  $\mathcal{S}^k(Y)$  ne dépendant que de  $\Pi_1^{k+1}(Y)$ ,  $C^k$  passe au quotient et définit un tenseur  $C_0^k$  sur  $E$  par :

$$C^k(X) = C_0^k(\Pi_1^{k+1}(X)). \quad (13)$$



C'est ce tenseur  $C_0^k$  que Guillemin appelle  $k^e$  tenseur de structure de  $E$  ; mais nous n'utiliserons que  $C^k$  et, par ailleurs, la donnée de  $C^k$  est équivalente à celle de  $C_0^k$ .

### 3. Théorème fondamental.

#### 1. *Enoncé.*

THEOREME 3.1. — Si  $E$  est une  $G$ -structure  $k$ -plate et si  $E^k$  est un  $G^k$ -sous-espace fibré principal  $\mathcal{C}^\infty$  de  $H^{k+1}(M)$  alors :

i)  $C^k = 0$  implique que  $E$  est  $(k+1)$ -plate et que  $E^{k+1}$  est un  $G^{k+1}$ -sous-espace fibré principal de  $H^{k+2}(M)$ .

ii) s'il existe un  $(k+2)$ -repère  $E$ -( $k+1$ )-plat se projetant sur  $X \in E^k$ , alors  $C^k(X) = 0$ .

La deuxième partie du théorème s'établit facilement à l'aide de la formule de Maurer-Cartan [(11) pour  $i = k-1$ ] dans  $H^{k+2}(M)$ .

#### 2. *Démonstration de i)*

##### a) *Définition de $\tilde{\Omega}^k$*

Soit  $\mathcal{H}$  un champ (local) sur  $E^k$  de plans horizontaux sur lequel les  $\Omega^i$  ( $i = 0, \dots, k-1$ ) s'annulent. On a :

$$d\Omega^{k-1} \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} = C_{\mathcal{H}}^k \wedge \omega,$$

$C_{\mathcal{H}}^k$  étant une fonction (locale)  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $E^k$  à valeurs dans  $\underline{G}^{(k-1)} \otimes {}^2\mathbf{R}^{n*}$ . Comme  $C^k = 0$ ,  $C_{\mathcal{H}}^k$  prend en fait ses valeurs dans  $\delta(\underline{G}^{(k)} \otimes \mathbf{R}^{n*})$ .  $\delta$  étant une application linéaire, il existe une application linéaire  $r$  de  $\delta(\underline{G}^{(k)} \otimes \mathbf{R}^{n*})$  dans  $\underline{G}^{(k)} \otimes \mathbf{R}^{n*}$  vérifiant  $\delta \circ r = \text{id}_{\delta(\underline{G}^{(k)} \otimes \mathbf{R}^{n*})}$ . Soit  $t_{\mathcal{H}}$  la fonction (locale)  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $E^k$  définie par :  $t_{\mathcal{H}} = r \circ C_{\mathcal{H}}^k$ . On a alors :

$$d\Omega^{k-1} \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} = (\delta t) \wedge \omega.$$

Soit  $\tilde{\Omega}^k$  la 1-forme (locale) sur  $E^k$  à valeurs dans  $\underline{G}^{(k)}$  définie par :

$$1) \tilde{\Omega}_X^k(U) = t_{\mathcal{H}}(X) \omega_X(U) \text{ si } U \in \mathcal{H}_X,$$

2)  $\tilde{\Omega}_X^k(\tilde{\xi}_X) = P_{\underline{G}^{(k)}} \xi$  si  $\tilde{\xi}$  est le champ de vecteurs verticaux induit par  $\xi \in \underline{G}^k$  et  $P_{\underline{G}^{(k)}}$  la projection de  $\underline{G}^k$  sur  $\underline{G}^{(k)}$ . Mais alors on a :

$$\begin{aligned} \llbracket \omega, \tilde{\Omega}^k \rrbracket \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} &= \llbracket \omega \circ \mathcal{H}, \tilde{\Omega}^k \circ \mathcal{H} \rrbracket = \llbracket \omega, t_{\mathcal{H}} \omega \rrbracket = \\ &= (\delta t_{\mathcal{H}})^2 \wedge \omega = d\Omega^{k-1} \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\llbracket \omega, \tilde{\Omega}^k \rrbracket \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} = d\Omega^{k-1} \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H}. \quad (14)$$

D'autre part, pour  $\xi \in \underline{G}^k$ , on a si  $X = j_0^{k+1}f$ ,  $X' = j_0^k f$  :

$$\begin{aligned} (\Gamma^k + \tilde{\Omega}^k)_X(\tilde{\xi}) &= \Gamma_X^k(\tilde{\xi}) + P_{\underline{G}^{(k)}} \xi = T_{X'} \bar{f}^{-1} \circ T_X \Pi_k^{k+1}(\tilde{\xi}) + P_{\underline{G}^{(k)}} \xi \\ &= T_{X'} \gamma_X^{-1} \circ T \Pi_k^{k+1}(\tilde{\xi}) + P_{\underline{G}^{(k)}} \xi \quad \gamma_X \text{ étant le difféo-} \\ &\quad \text{morphisme cano-} \\ &\quad \text{nique de } G^k \text{ sur} \\ &\quad E_{\beta(X)}^k \text{ qui trans-} \\ &\quad \text{forme } e_k \text{ en } X. \\ &= T_{e_k} \Pi_k^{k+1} \circ T_X \gamma_X^{-1}(\tilde{\xi}) + P_{\underline{G}^{(k)}} \xi \\ &= P_{\underline{G}^{k-1}} \xi + p_{\underline{G}^{(k)}} \xi = \xi \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(\Gamma^k + \tilde{\Omega}^k)(\tilde{\xi}) = \xi. \quad (15)$$

b) *Morphismes (locaux) de  $E^k$  dans  $E^{k+1}$ .*

On va construire des morphismes locaux  $s_\alpha$  de  $E^k$  dans  $H^{k+2}(M)$  vérifiant :

$$1/ \Pi_{k+1}^{k+2} \circ s_\alpha = \text{id}_{E^k}.$$

$$2/ s_\alpha^* \Gamma^{k+1} = \Gamma^k + \tilde{\Omega}^k \text{ (1-forme à valeurs dans } T_{e_k} E_0^k)$$

Ceci entraînera que  $s_\alpha$  sera un morphisme de  $E^k$  dans  $E^{k+1}$  d'après la proposition 2-1 car  $(s_\alpha^* \Gamma^{k+1}) = T_X \bar{F}^{-1}$  (si  $s_\alpha(X) = j_0^{k+2} F$ ) sera une application de  $T_X E^k$  dans  $T_{e_k} E_0^k$ .

Si  $\{U_\alpha\}$  est un recouvrement ouvert de  $M$  associé à un atlas de  $M$  il détermine un recouvrement ouvert  $\{H^{k+1}(U_\alpha)\}$  de  $H^{k+1}(M)$

muni de sections locales  $\sigma_\alpha$  de  $\Pi_{k+1}^{k+2}$ . On en déduit, par restriction, un recouvrement ouvert de  $E^k$  muni de morphismes locaux, encore notés  $\sigma_\alpha$ , de  $E^k$  dans  $H^{k+2}(M)$  vérifiant  $\Pi_{k+1}^{k+2} \circ \sigma_\alpha = \text{id}_{E^k|_{U_\alpha}}$ . Désormais on se restreindra à des ouverts de  $E^k|_{U_\alpha}$  dans lesquels il existe un champ de plans horizontaux  $\mathcal{H}_\alpha$  sur lequel les  $\Omega^i$  ( $i = 0, \dots, k-1$ ) s'annulent.

D'autre part, comme on aura besoin de les distinguer, on notera  $\Omega_k^i$  (resp.  $\Omega_{k+1}^i$ ) la 1-forme  $\Omega^i$  de  $E^k$  (resp. de  $H^{k+2}(M)$ ).

Si  $X = j_0^{k+2} f \in H^{k+2}(M)$  on a :

$$\begin{aligned} T\Pi_k^{k+1} \circ \Gamma_{j_0^{k+2}f}^{k+1} &= T\Pi_k^{k+1} \circ T\bar{f}^{-1} \circ T_{j_0^{k+2}f} \Pi_{k+1}^{k+2} = \\ &= T\bar{f}^{-1} \circ T\Pi_k^{k+1} \circ T_{j_0^{k+2}f} \Pi_{k+1}^{k+2} = \Gamma^k \circ T_{j_0^{k+2}f} \Pi_{k+1}^{k+2} \end{aligned}$$

$\Gamma^{k+1}$  (resp.  $\Gamma^k$ ) étant la 1-forme fondamentale de  $H^{k+2}(M)$  (resp.  $H^{k+1}(M)$ ). Ceci entraîne :

$$T\Pi_k^{k+1} \circ (\sigma_\alpha^* \Gamma^{k+1}) = \Gamma^k, \quad (16)$$

$\Gamma^k$  étant cette fois la 1-forme fondamentale de  $E^k$ , et par suite :

$$\sigma_\alpha^* \Omega_{k+1}^i = \Omega_k^i \quad (-1 \leq i \leq k-1). \quad (17)$$

Comme  $\Omega_{k+1}^{k-1}$  vérifie la formule de Maurer-Cartan [(11) pour  $i = k-1$ ] on a :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^* d\Omega_{k+1}^{k-1} &= \frac{1}{2} \sigma_\alpha^* \{ \llbracket \omega_{k+1}, \Omega_{k+1}^k \rrbracket + \llbracket \Omega_{k+1}^0, \Omega_{k+1}^{k-1} \rrbracket \\ &\quad + \dots + \llbracket \Omega_{k+1}^{k-1}, \Omega_{k+1}^0 \rrbracket + \llbracket \Omega_{k+1}^k, \omega_{k+1} \rrbracket \} \end{aligned}$$

soit encore d'après (17) :

$$\begin{aligned} d\Omega_k^{k-1} &= \frac{1}{2} \{ \llbracket \omega_k, \sigma_\alpha^* \Omega_{k+1}^k \rrbracket + \llbracket \Omega_k^0, \Omega_k^{k-1} \rrbracket \\ &\quad + \dots + \llbracket \Omega_k^{k-1}, \Omega_k^0 \rrbracket + \llbracket \sigma_\alpha^* \Omega_{k+1}^k, \omega_k \rrbracket \} \end{aligned}$$

Ce qui entraîne l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} d\Omega_k^{k-1} \circ \mathcal{H}_\alpha \wedge \mathcal{H}_\alpha &= [\omega_k, \sigma_\alpha^* \Omega_{k+1}^k] \circ \mathcal{H}_\alpha \wedge \mathcal{H}_\alpha = \\ &= [\omega_k, \Omega_{k+1}^k \circ T\sigma_\alpha \circ \mathcal{H}_\alpha] \end{aligned} \quad (18)$$

Soit  $t_\alpha$  la fonction (locale)  $\mathcal{C}^\infty$  définie dans  $E^k|_{U_\alpha}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n \otimes S^{k+1}(\mathbf{R}^{n*}) \otimes \mathbf{R}^{n*}$  définie par :

$$\Omega_{k+1}^k \circ T_X \sigma_\alpha(U) = \tilde{\Omega}_\alpha^k(U) + t_\alpha(X) \omega(U) \quad \text{si } U \in \mathcal{H}_{\alpha_X}, \quad (19)$$

$\tilde{\Omega}_\alpha^k$  étant la 1-forme définie comme au paragraphe a) à l'aide de  $\mathcal{H}_\alpha$ .

L'égalité (14) implique :

$$d\Omega_k^{k-1} \circ \mathcal{H}_\alpha \wedge \mathcal{H}_\alpha = [\omega_k, \tilde{\Omega}_\alpha^k] \circ \mathcal{H}_\alpha \wedge \mathcal{H}_\alpha = [\omega_k, \tilde{\Omega}_\alpha^k \circ \mathcal{H}_\alpha].$$

L'égalité (18) implique :

$$\begin{aligned} d\Omega_k^{k-1} \circ \mathcal{H}_\alpha \wedge \mathcal{H}_\alpha &= [\omega_k, \Omega_{k+1}^k \circ T\sigma_\alpha \circ \mathcal{H}_\alpha] = [\omega_k, \tilde{\Omega}_\alpha^k \circ \mathcal{H}_\alpha + t_\alpha \omega_k] \\ &= [\omega_k, \tilde{\Omega}_\alpha^k \circ \mathcal{H}_\alpha] + (\delta t_\alpha)^2 \omega. \end{aligned}$$

Une conséquence de ces égalités est :

$$(\delta t_\alpha)^2 \omega = 0,$$

ce qui n'est possible que pour  $(\delta t_\alpha) = 0$ .

Mais comme la suite ci-dessous est exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{R}^n \otimes S^{k+2}(\mathbf{R}^{n*}) \rightarrow \mathbf{R}^n \otimes S^{k+1}(\mathbf{R}^{n*}) \otimes \mathbf{R}^{n*} \xrightarrow{\delta} \\ \mathbf{R}^n \otimes S^k(\mathbf{R}^{n*}) \otimes \mathbf{R}^{n*} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$t_\alpha$  prend en fait ses valeurs dans  $\mathbf{R}^n \otimes S^{k+2}(\mathbf{R}^{n*})$ .

Soit  $s_\alpha$  le morphisme (local) de  $E^k|_{U_\alpha}$  dans  $H^{k+2}(U_\alpha)$  défini par  $s_\alpha(X) = j_0^{k+2}F$  avec :

$$1/ \quad j_0^{k+1}F = X \quad (\text{c'est-à-dire } \Pi_{k+1}^{k+2} \circ s_\alpha = \text{id } E^k|_{U_\alpha})$$

$$2/ \quad (D^{k+2}F^{-1} \circ f)_0 = -t_\alpha(X) \quad \text{si } \sigma_\alpha(X) = j_0^{k+2}f.$$

On a alors si  $\zeta$  appartient à  $T_X E^k$

$$(\sigma_\alpha^* \Gamma^{k+1})_X \zeta = T_X \bar{f}^{-1}(\zeta) = (u, U) \in T_0 \mathbb{R}^n \times T_{e_k} L_n^{k+1}$$

et

$$\begin{aligned} (s_\alpha^* \Gamma^{k+1})_X \zeta &= T_X \bar{F}^{-1}(\zeta) = T_{e_k} \bar{F}^{-1} \circ \bar{f} \circ T_X \bar{f}^{-1}(\zeta) = \\ &= T_{e_k} \bar{F}^{-1} \circ \bar{f}(u, U) \\ &= (u, U + (D^1(D^{k+1} \bar{F}^{-1} \circ f))_0 u) \quad \text{à cause de (4)} \\ &\quad \text{avec } g = f^{-1} \circ F. \\ &= (u, U - t_\alpha(X)u). \end{aligned}$$

Ceci implique qu'on a :

$$s_\alpha^* \Gamma^{k+1} = \sigma_\alpha^* \Gamma^{k+1} - t_\alpha \omega_k = \Gamma^k + \Omega_{k+1}^k \circ T\sigma_\alpha - t_\alpha \omega_k$$

d'après (16).

Soit encore :

$$\begin{aligned} (s_\alpha^* \Gamma^{k+1}) \circ \mathcal{H}_\alpha &= (\Gamma^k + \Omega_{k+1}^k \circ T\sigma_\alpha - t_\alpha \omega_k) \circ \mathcal{H}_\alpha = \Gamma^k \circ \mathcal{H}_\alpha \\ &\quad + \tilde{\Omega}_\alpha^k \circ \mathcal{H}_\alpha + t_\alpha \omega_k - t_\alpha \omega_k \end{aligned}$$

à cause de la définition de  $t_\alpha$  (19), c'est-à-dire :

$$(s_\alpha^* \Gamma^{k+1}) \circ \mathcal{H}_\alpha = (\Gamma^k + \tilde{\Omega}_\alpha^k) \circ \mathcal{H}_\alpha. \quad (20)$$

Si  $\xi$  appartient à  $\underline{G}^k$ , on a d'après (15) :  $(\Gamma^k + \tilde{\Omega}_\alpha^k)_X(\tilde{\xi}) = \xi$ .  
Mais on a aussi :

$$(s_\alpha^* \Gamma^{k+1})_X(\xi) = T_X \bar{F}^{-1}(\tilde{\xi}) = T_X \gamma_X^{-1}(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}.$$

Ceci entraîne l'égalité :

$$(s_\alpha^* \Gamma^{k+1}) (\tilde{\xi}) = (\Gamma^k + \tilde{\Omega}_\alpha^k) (\tilde{\xi}). \quad (21)$$

Les 1-formes  $s_\alpha^* \Gamma^{k+1}$  et  $\Gamma^k + \tilde{\Omega}_\alpha^k$  sont donc les mêmes sur les vecteurs horizontaux (20) et sur les vecteurs verticaux (21) ; il en résulte qu'elles sont égales. Or  $(\Gamma^k + \tilde{\Omega}_\alpha^k)_X$  est une application linéaire de  $T_X E^k$  dans  $T_{e_k} E_0^k$ , de sorte que, puisque  $s_\alpha(X) = j_0^{k+2} F$ ,  $T_X \bar{F}^{-1} = (s_\alpha^* \Gamma^{k+1})_X = (\Gamma^k + \tilde{\Omega}_\alpha^k)_X$  est une application linéaire de  $T_X E^k$  dans  $T_{e_k} E_0^k$ .  $s_\alpha(X)$  est donc un  $(k+2)$ -repère  $E-(k+1)$ -plat d'après la proposition 2-1 ;  $s_\alpha$  est par conséquent un morphisme (local) de  $E^k|_{U_\alpha}$  dans  $H^{k+2}(U_\alpha)$  à valeurs dans  $E^{k+1}|_{U_\alpha}$ .

c) *Conclusion*

Puisque  $E^k$  est un sous-espace fibré principal  $\mathcal{C}^\infty$  de  $H^{k+1}(M)$ , il existe des sections locales  $\mathcal{C}^\infty$   $s_\alpha^k$  de  $E^k$  définies sur  $U_\alpha$  (quitte à prendre le recouvrement  $\{U_\alpha\}$  plus fin). Les fonctions  $s_\alpha^{k+1} = s_\alpha \circ s_\alpha^k$  sont alors des sections locales  $\mathcal{C}^\infty$  de  $H^{k+2}(M)$  à valeurs dans  $E^{k+1}$  définies sur un recouvrement ouvert de  $M$  subordonné au recouvrement  $\{U_\alpha\}$ .

$E^{k+1}$  étant déjà un  $G^{k+1}$ -sous-fibré principal ensembliste de  $H^{k+2}(M)$ ,  $E^{k+1}$  est donc un  $G^{k+1}$ -sous-fibré principal  $\underline{\mathcal{C}^\infty}$  de  $H^{k+2}(M)$  et de plus  $E$  est  $(k+1)$ -plate.

3. *Conséquence*

Supposons que la  $G$ -structure  $E$  soit  $k$ -plate. Alors  $E$  est 1-plate ce qui entraîne, d'après la deuxième partie du théorème et le caractère tensoriel de  $C^0$ , que  $C^0$  est nul.  $E^1$  est donc un  $G^1$ -sous-fibré principal  $\mathcal{C}^\infty$  de  $H^2(M)$  d'après la première partie du théorème.

De même, pour  $i \leq k-1$ , si l'on fait l'hypothèse de récurrence que  $E^i$  est un  $G^i$ -sous-fibré principal  $\mathcal{C}^\infty$  de  $H^{i+1}(M)$ , comme  $E$  est  $(i+1)$ -plate,  $C^i$  est nul, de sorte que  $E^{i+1}$  est un  $G^{i+1}$ -sous-espace fibré principal  $\mathcal{C}^\infty$  de  $H^{i+2}(M)$ . Ainsi est établi le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 3.3.** — *Si une  $G$ -structure  $E$  est  $k$ -plate, alors le fibré  $E^k$  des  $(k+1)$ -repères  $E$ - $k$ -plats est un  $G^k$ -sous-fibré principal  $\mathcal{C}^\infty$  de  $H^{k+1}(M)$ .*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BAUER, Sur les  $G$ -structures  $k$ -plates, *Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Strasbourg, juin 1972, multigraphiée.*
- [2] D. BERNARD, Sur la géométrie différentielle des  $G$ -structures, *Ann. Inst. Fourier* T. 10 (1960), 151-270.
- [3] V. GUILLEMIN, The integrability problem for  $G$ -structures, *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 116 (1965), 544-560.
- [4] V. GUILLEMIN and S. STERNBERG, Deformation theory of pseudo-group structures, *Mem. Amer. Math. Soc.* n° 64 (1966).

- [5] P. VER EECHE, Géometrie différentielle. Fasc. 1 : Calcul des jets,  
*Inst. de Pesquisas Mat. de Sao Paulo, 1967.*

Manuscrit reçu le 22 janvier 1973  
accepté par B. Malgrange.

Madeleine BAUER ,  
Institut de recherche mathématique avancée  
Laboratoire Associé au C.N.R.S.  
7, rue René Descartes  
67084 Strasbourg Cédex