ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRÉDÉRIC RIESZ

L'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue

Annales de l'institut Fourier, tome 1 (1949), p. 29-42
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1949__1__29_0>

L'ÉVOLUTION DE LA NOTION D'INTÉGRALE DEPUIS LEBESGUE [1]

par F. RIESZ (Budapest).

En exprimant toute ma gratitude pour l'invitation dont je me sens extrêmement honoré, c'est du concept génial de l'intégrale que l'on doit à Henri Lebesgue et de son évolution au cours de presque un demi-siècle, que je vais parler. Si je revendique le droit de le faire, c'est que j'ai été l'un des premiers à reconnaître la profondeur et l'immense portée de cette notion d'intégrale.

Si je me ne trompe pas, c'est le livre de Lebesgue sur les séries trigonométriques, dans la collection Borel, qui a attiré mon attention sur sa notion d'intégrale ; après, pour pénétrer dans les détails, j'ai étudié aussi sa Thèse et son livre sur l'intégration. Cependant l'idée et le courage d'essayer d'appliquer cette notion à des problèmes dont je m'occupais, me sont venues en lisant, en 1906, l'excellent Mémoire de Fatou, imprimé dans les *Acta Mathematica* et que l'auteur présentait aussi comme Thèse. C'est en particulier un théorème très simple, appelé généralement lemme de Fatou et assurant, dans le langage d'aujourd'hui la semicontinuité inférieure de l'opération fonctionnelle linéaire que constitue l'intégration, qui m'aida à démontrer, en février 1907, quelques semaines après la lecture de la Thèse, le théorème découvert aussi indépendamment et simultanément par M. Ernest Fischer et que l'on cite sous le nom de nous deux. Le théorème servit, en premier lieu, de billet permanent d'aller et retour entre les deux espaces à une infinité de dimensions dont l'intérêt s'attache à la théorie des équations intégrales, savoir l'espace à une infinité de coordonnées de Hilbert et

[1] Conférence faite à Paris sur l'invitation de la Faculté des Sciences et de la Société mathématique de France et répétée à Grenoble (juin 1949).

l'ensemble L^2 des fonctions mesurables et de carré sommable, deux espaces que l'on envisage d'ailleurs aujourd'hui, avec M. von Neumann, comme deux réalisations d'une notion plus générale, savoir de l'espace abstrait de Hilbert. C'était peut-être la première application de la théorie de Lebesgue, après, bien entendu, celles faites par lui-même et par Fatou qui attirait l'intérêt des Mathématiciens et qui mettait en lumière l'importance de sa notion d'intégrale. Parmi ceux, qui se hâtèrent de l'appliquer, qu'il me soit permis de citer Émile Picard, qui en tira parti pour la théorie des équations intégrales de première espèce, tandis que la plupart de ses contemporains, fidèles à l'intégrale classique et ses généralisations immédiates, ne s'empressaient pas autour de l'intégrale nouvelle. Il me faut encore citer M. Fréchet, qui s'aperçut presque immédiatement d'une conséquence importante de notre théorème, savoir l'expression, sous forme d'intégrale, de toute opération linéaire définie dans l'espace fonctionnel L^2 des fonctions sommables ainsi que leurs carrés. D'ailleurs, quant à moi, j'ai tiré indépendamment la même conséquence; par hasard, nos deux notes sur le sujet furent présentées, en juin 1907, dans la même séance de l'Académie des Sciences et ont paru dans le même fascicule des Comptes Rendus. Peu de temps après j'ai établi l'expression analogue pour l'espace L^p.

Outre l'importance de la formule dont je viens de parler et qui entre autres rendait d'excellents services dans la théorie des équations intégrales, j'avais encore une seconde raison d'en parler. C'est qu'elle me suggérait d'envisager la question analogue pour un espace fonctionnel d'une apparence beaucoup plus simple : l'espace formé par l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle fermé (a, b). Étant donné dans cet espace une opération telle que

$$A(f+g)=Af+Ag, \qquad A(cf)=cAf, \qquad |Af|\leqq M \max |f|,$$

où la quantité M ne dépend que de l'opération A, peut-on la mettre sous la forme

$$A(f)=\int_a^b f(x)a(x)\,dx$$

où $a(x)$, fonction génératrice de l'opération, A est la même pour toutes les $f(x)$? Or il est évident, qu'une des opérations les plus simples A, savoir $Af=f(x_0)$, tout en entrant dans notre catégorie, ne peut donner lieu à une telle représentation. En effet, pour arriver à une réponse positive et c'est ce que j'ai découvert en 1909, il faut avoir recours à un autre type d'intégrale, l'intégrale de Stieltjes, généralisation immédiate de l'intégrale classique. La seule différence c'est que dans les sommes dont l'intégrale est la limite, il faut remplacer les différences $x_k - x_{k-1}$ par les variations $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ d'une fonction $\alpha(x)$, fonction que l'on suppose, dans la plupart des applications, être monotone ou à variation bornée. Alors, en se servant d'une telle intégrale, la réponse à notre question sera affirmative ; en effet, toute opération linéaire A sur l'espace C pourra être mise sous la forme

$$Af = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

où la fonction à variation bornée $\alpha(x)$, génératrice de l'opération A, est déterminée par l'opération A, à une constante additive près, en tous ses points de continuité D'ailleurs il me faut avouer que ce n'était pas la première réponse affirmative à notre question ; en effet, déjà antérieurement MM. Hadamard et Fréchet ont réussi à exprimer l'opération A par une suite convergente d'intégrales ordinaires

$$\int_a^b f(x)a_n(x)\,dx.$$

Mais pour revenir à Lebesgue, la conséquence la plus intéressante de ma découverte du rôle que joue l'intégrale de Stieltjes pour les opérations linéaires, c'est qu'elle lui suggérait presque immédiatement d'incorporer cette intégrale dans la sienne. En eflet, supposons pour l'instant que la fonction $\alpha(x)$ figurant dans l'intégrale

$$^{v}\!\int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

soit continue et strictement croissante, donc nul part constante et que par conséquent, elle admette une inverse $x(\alpha)$ du même type ; alors la définition de l'intégrale par des sommes approchées met immédiatement en évidence que l'intégrale de Stieltjes s'écrit aussi sous la forme

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f[x(\alpha)]\,d\alpha.$$

Or, cette relation est valable aussi sous des conditions plus générales, savoir quand on permet à la fonction $\alpha(x)$ de faire des sauts et de rester constante dans des intervalles. En effet il n'est pas difficile de se fixer ce qu'on veut entendre par fonction inverse sous ces conditions plus générales et si l'on veut aller encore plus loin en passant à des $\alpha(x)$ à variation bornée, on pourra, outre l'idée évidente de les décomposer en des fonctions monotones, penser aux intégrales de ligne, ce qui suggérera d'introduire pour nouvelle variable non pas $\alpha = \alpha(x)$ elle-même, mais sa variation totale indéfinie, c'est-à-dire sa variation totale formée de a jusqu'à x ou ce qui revient au même, la longueur d'arc de la courbe rectifiable $x = \alpha(t)$, $y = 0$. Les détails sont tellement évidents que vous me permettrez de ne pas les exposer. Encore un dernier pas et nous arrivons à ce qu'on appelle l'intégrale de Stieltjes-Lebesgue : au lieu de supposer que la fonction à intégrer $f(x)$ soit continue ou au moins pas trop discontinue, la seule condition que l'on s'impose est que la nouvelle intégrale à laquelle on arrive, soit une intégrale au sens de Lebesgue. Je reparlerai encore des relations entre les deux intégrales. Mais avant cela, il me faut encore retourner à l'intégrale de Lebesgue et parler de ses divers modes d'introduction.

Vous connaissez la définition de Lebesgue lui-même, qui se base sur la notion de mesure et qui consiste en substance à remplacer, dans la formation des sommes d'approximation, les segments de l'intervalle d'intégration par des ensembles mesurables convenablement choisis. Cependant Lebesgue a fait déjà allusion à une définition descriptive laquelle, en postulant certaines propriétés simples de l'intégrale, telles qu'on les rencontre en analyse classique, par exemple dans l'intégration des fonctions continues, s'efforce de les conserver en passant à des champs plus larges de fonctions. Dans le langage d'aujourd'hui, ce dont il s'agit, c'est d'envisager l'intégration comme une opération fonctionnelle, définie d'abord pour les fonctions continues, ou même si l'on veut pour un type encore plus simple, c'est-à-dire pour les fonctions en escalier et puis de l'étendre à des fonctions limites. Or, il est évident que le passage à des fonctions limites devra être soumis à quelques conditions restrictives et c'est du choix de ces conditions que dépendent les diverses définitions de l'intégrale. Lebesgue lui-même propose (sous le nom de 6^{e} condition) de considérer les limites des suites croissantes et bornées de fonctions. La première idée qui se présente alors est d'opérer alternativement avec des suites croissantes ou décroissantes : en le faisant indéfiniment, on définira l'intégrale pour toutes les classes de Baire. Mais ne peut-on pas y arriver plus vite ? W. H. Young montre que si l'on décide de faire abstraction des ensembles de mesure nulle, on arrive déjà en deux étapes essentiellement à l'intégrale de Lebesgue. Dans le même but M. Borel, dans un mémoire qu'il faisait paraître dans le *Journal de Liouville,* se sert de la notion qu'il appelle convergence asymptotique, mais pour laquelle on a généralement adopté le nom « convergence en mesure ». Ce type de convergence dont, entre autres, on doit une analyse profonde à M. Fréchet et qui joue aussi un rôle important en théorie des probabilités, n'est pas en réalité une convergence effective, mais une sorte de convergence en moyenne ; en particulier, toute suite convergente en moyenne par rapport à un exposant $p \geqq 1$ converge aussi en mesure. Or on peut aussi la définir sans se reporter à la notion générale de mesure ; il suffit de se servir de l'idée d'ensemble de mesure nulle, c'est-à-dire savoir ce qu'on veut entendre par « presque partout ». En effet, j'ai montré qu'elle se caractérise aussi par le fait que de toute suite partielle de la suite envisagée on peut extraire une autre suite partielle qui converge presque partout et que les fonctions limites de toutes ces suites coïncident presque partout.

Ce dernier fait, ainsi que le résultat de W. H. Young que nous venons d'indiquer et de plus le rôle que jouent les ensembles de mesure nulle dans un autre chapitre de la théorie, concernant l'existence de la dérivée, suggèrent déjà d'essayer d'introduire et d'étudier l'intégrale de Lebesgue sans utiliser la théorie de la mesure dans toute sa généralité, mais seulement la notion et les propriétés évidentes des ensembles de mesure nulle. C'est ce que j'ai esquissé déjà en 1912 dans une note des Comptes rendus. Puis, en 1916, à l'occasion du Congrès scandinave à Stockholm, j'ai eu plusieurs entretiens avec Mittag-Leffler, qui, en admirateur de Weierstrass qu'il était, pensait pouvoir faire remonter l'idée de l'intégrale de Lebesgue à ce grand géomètre, mais sans y réussir. Sur son invitation, j'ai rédigé, pour les *Acta Mathematica*, un exposé détaillé de mes idées. L'idée principale me fut suggérée par ce fait que les ensembles de mesure nulle figurent comme exceptions permises dans presque tous les résultats de la théorie ; alors il n'y avait qu'à se contenter, dès le commencement, de n'envisager que des suites qui ne convergent pas néccessairement partout, mais seulement presque partout. J'ai montré d'une manière peut-être plus compliquée que je le pourrais faire aujourd'hui que toute suite bornée de fonctions en escalier, définies sur un intervalle fini et qui converge presque partout, peut être intégrée terme à terme, c'est-à-dire que la suite des intégrales est une suite numérique convergente. En attachant la limite de cette suite intégrée comme valeur d'intégrale à la fonction limite, il est d'abord facile de voir que cette intégrale dépend seulement de la fonction limite et non pas de la suite particulière dont on se sert. De cette façon, on vient d'attacher une intégrale à toutes les fonctions limites possibles et on voit aisément que ce sont précisément les fonctions bornées et intégrables ou comme on dit aussi, sommables au sens de Lebesgue. Enfin, le passage à des fonctions non bornées est presque immédiat ; de plus les divers critères d'intégrabilité et les règles concernant l'intégration terme à terme des suites de fonctions sommables, l'intégration par partie et le changement de variables se démontrent sans peine. La mesure des ensembles se définit par l'intégrale de leur fonction caractéristique, etc. Le seul point qui exige un certain effort consiste en ce que les fonctions limites des suites bornées et convergentes partout ou presque partout des fonctions obtenues en première étape sont du même type, c'est-à-dire qu'un prolongement de notre procédé d'extension ne fournit aucune nouvelle fonction.

Une autre méthode pour introduire l'intégrale dont je me sers dans mon cours et qui s'est formée et simplifiée progressivement sans que l'on en puisse nommer l'auteur, opère, conformément au postulat posé par Lebesgue, avec des suites croissantes de fonctions en escalier (ou si l'on veut, des suites de polynomes ou de fonctions continues) ; mais au lieu d'exiger de ces suites qu'elles soient bornées et alors convergentes, on se contente d'exiger qu'elles le deviennent après l'intégration, c'est-à-dire que leurs intégrales forment des suites numériques convergentes. Or on voit aisément que sous cette condition, les suites primitives, avant d'être intégrées, convergent aussi elles-mêmes, au moins presque partout. Alors, en définissant l'intégrale des fonctions limites par la limite de la suite intégrée, on passe de la classe des fonctions en escalier, disons de la classe C_0, à une classe C_1 plus large, laquelle d'ailleurs est intimement liée à la classe des fonctions semi-continues inférieurement. Bien entendu, on aura à prouver que l'intégrale ainsi définie ne dépend pas de la suite particulière choisie, mais seulement de la fonction limite. Or, cela se fait à l'aide d'un lemme très simple, conséquence immédiate du théorème de recouvrement de M. Borel, ou aussi du théorème de Dini, disant que lorsque une suite de fonctions en escalier va en décroissant vers o presque partout, la suite intégrée converge aussi vers o.

Enfin, après avoir introduit la classe C_1, on passe à la classe C_2 que l'on pourrait aussi désigner par $C_1 - C_1$ puisqu'elle est formée par l'ensemble des différences des fonctions appartenant à la classe C_1. Or on voit que si $f_1 - g_1 = f_2 - g_2$ pour quatre fonctions prises de la classe C_1, la relation analogue est valable aussi pour leurs intégrales, ce qui vient immédiatement du même fait concernant l'équation $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$. Il s'ensuit que l'on peut définir, sans ambiguïté, l'intégrale de telles différences par la différence des intégrales respectives.

Quand on définit l'intégrale de cette manière, on aura à se demander, tout comme dans le cas de la définition dont je viens de parler, où l'on arrive si l'on répète le même procédé, mais en partant, au lieu de la classe C_0, de la classe plus générale C_2 ? Envisageons alors, au lieu de la classe C_2, la classe C_3 qui s'en déduit en y ajoutant toutes les fonctions, s'il y en a, qui ne diffèrent des fonctions déjà introduites que sur un ensemble de mesure nulle. J'ai dit s'il y en a parce qu'il n'y a pas lieu de s'y intéresser, les ensembles de mesure nulle étant à négliger dans toute la théorie. Cela étant, on voit peut-être encore plus facilement que pour l'autre définition, que notre classe est close, c'est-à-dire qu'on n'en sort pas en formant les limites des suites croissantes, bien entendu sous la condition que leurs intégrales restent bornées. De plus l'intégration terme à terme est permise. Vous savez que, dans la théorie de Lebesgue, ce fait, connu sous le nom de théorème de Beppo Levi, suffit pour en déduire les principaux théorèmes concernant l'intégration terme-à-terme ainsi que le lemme de Fatou. Il en est de même dans la théorie que je viens d'esquisser ; d'ailleurs, après avoir défini la mesure des ensembles par l'intégrale de leur fonction caractéristique, on parviendra vite à constater l'identité de notre intégrale et de celle de Lebesgue.

Parmi les autres définitions qui fournissent la même notion d'intégrale (il y en a plusieurs), je ne veux qu'en indiquer brièvement encore deux, la première ayant été introduite par M. Borel et développée par Hahn ; quant à la seconde qui est d'une nature toute différente et peut-être parente éloignée de la notion d'intégrale de M. Perron, j'y ai fait allusion dans ma conférence au congrès de Zürich en 1932 et je l'ai développée en tous ses détails dans les Annales de l'École Normale de Pise en 1936. Veuillez bien me pardonner de me citer moi-même tant de fois !

La définition Borel-Hahn se suggère en rappelant deux théorèmes sur l'intégrale de Lebesgue. L'un, celui de Lusin, affirme que toute fonction sommable ou plus généralement, toute fonction mesurable peut être changée en fonction continue et cela en la modifiant seulement en des intervalles partiels, en nombre fini ou infini, mais d'une longueur totale arbitrairement petite. L'autre, le théorème d'Egoroff, dit que toute suite de fonctions mesurables qui converge presque partout, devient uniformément convergente quand on supprime de tels intervalles convenablement choisis. Alors la définition de l'intégrale que ces théorèmes suggèrent, consiste à considérer les fonctions qui peuvent être rendues continues en les modifiant sur des intervalles partiels de longueur totale arbitrairement petite et à former la limite de leurs intégrales. Bien entendu, il faut, par précaution, prendre garde que les modifications faites n'influencent pas sensiblement l'intégrale ; par exemple, on supposera d'abord que la fonction est bornée et pour les changements, on restera entre les deux bornes de la fonction. Après, le passage à des fonctions non bornées se fera de la manière usuelle.

Quant à la seconde définition, à laquelle Lebesgue lui-même a fait déjà allusion dans son livre sur l'intégration, mais sans la formuler, elle correspond à la manière dont on passe à l'intégration à la fin du Calcul différentiel, dans la plupart des cours élémentaires d'Analyse, c'est-à-dire à la recherche d'une fonction dont la fonction donnée est une dérivée. Je ne pense pas ici à la belle et importante théorie de la totalisation que l'on doit à M. Denjoy. Tout simplement, lorsque une fonction $f(x)$ non négative, d'ailleurs quelconque, donnée sur un intervalle (a, b), est la dérivée presque partout d'une fonction croissante et par conséquent, de toute une foule de telles fonctions $F(x)$, on définit l'intégrale de $f(x)$ par la borne inférieure des variations $F(b) - F(a)$. De plus, on montre aisément que parmi nos $F(x)$, il en existe une, bien déterminée à une constante additive près, pour laquelle cette borne inférieure est atteinte justement et que cette même fonction fournit aussi la borne inférieure pour tous les intervalles partiels de l'intervalle (a, b), de sorte qu'on peut l'envisager comme l'intégrale indéfinie de $f(x)$. Enfin, quant aux fonctions $f(x)$ de signe variable, on procède ou bien en les décomposant en leurs parties positives et négatives ou bien on cherche, parmi les fonctions $F(x)$ dont elles sont la dérivée presque partout, celle dont la variation totale sur l'intervalle (a, b) est la plus petite possible. Tous les faits principaux découlent de cette définition avec une aisance surprenante et cela en ne s'appuyant, pour ainsi dire, que sur un des théorèmes principaux de Lebesgue, affirmant que toute fonction monotone admet une dérivée presque partout. Quant à ce théorème, Lebesgue l'a énoncé et prouvé à la fin de son livre où il apparaît comme un corollaire de la théorie de l'intégration. Or, pour pouvoir y baser une telle théorie, il faut l'avoir démontré à l'avance indépendamment de la notion d'intégrale ou de celle de la mesure des ensembles ; c'est une tâche que, comme vous le voyez par exemple dans ma conférence du congrès de Zürich, plusieurs auteurs ont réussi à achever par des raisonnements de plus en plus élémentaires.

Mais peut-être ai-je parlé déjà assez des fonctions d'une seule variable. Heureusement, je n'aurai pas beaucoup à dire des fonctions de plusieurs variables. En effet, les diverses définitions de l'intégrale et la théorie qui s'y attache, peuvent être répétées presque sans changement, bien entendu, en remplaçant, dans la définition des fonctions en escalier et dans les autres détails, les intervalles linéaires par des rectangles, etc., ou comme on dit aussi, par des intervalles à plusieurs dimensions. C'est seulement la dernière définition, basée sur la notion de la dérivée, dont l'extension au cas de plusieurs variables ne se fait pas sans avoir préalablement analysé la notion de dérivée pour les fonctions additives de rectangles, etc. Mais heureusement on n'aura pas, pour notre but, à pénétrer dans les problèmes plus profonds concernant de telles dérivées ; en effet, on pourra se contenter de l'idée moins exigeante de dérivée par rapport à un réseau, comme s'en sert M. de la Vallée Poussin pour l'étude de la dérivation des fonctions additives d'ensemble Non seulement la démonstration de l'existence d'une telle dérivée d'une fonction monotone d'une seule variable est presque immédiate, mais on n'a presque rien à changer quand on passe au cas de plusieurs variables et les considérations concernant l'intégrale s'étendent à ce cas général avec des modifications évidentes. Il ne reste que peu de problèmes, comme par exemple ceux des intégrations successives et du changement de variables qui ne se posent que pour plusieurs variables ou exigent des considérations plus approfondies.

En parlant des réseaux, qu'il me soit permis de rappeler une méthode de transition qui permet de passer des fonctions d'une seule variable à celles de plusieurs variables, méthode découverte en 1909 simultanément par Lebesgue, M. de la Vallée Poussin et moi-même et laquelle s'applique, non seulement à l'intégrale ordinaire de Lebesgue, mais à celle de Stieltjes-Lebesgue et dont M. Jessen a su tirer parti pour l'intégration des fonctions à une infinité de variables. Qu'il me suffise ici de formuler ce principe sous sa forme la plus simple, pour le cas de deux variables. La méthode des réseaux permet d'établir une correspondance presque biunivoque entre un rectangle et un segment dont la longueur est égale à l'aire du rectangle et cela de sorte qu'à des ensembles mesurables correspondent de tels ensembles de même mesure, bien entendu dans le sens qui convient aux mots « mesurable » et « mesure » selon le nombre des dimensions. D'ailleurs, dans notre cas particulier de telles correspondances sont effectuées entre autres par la courbe de Peano ou par celle de Hilbert. Alors, étant donnée une fonction de deux variables $f(x, y)$, définie dans notre rectangle et $x=x(t)$, $y=y(t)$ étant les équations de la correspondance entre ce rectangle et un segment de l'axe des t, on n'aura qu'à introduire ces fonctions de t, au lieu des deux variables dans $f(x, y)$, c'est-à-dire faire correspondre à $f(x, y)$, fonction de deux variables, la fonction d'une seule variable $f[x(t), y(t)]$. Les deux fonctions qui se correspondent de cette façon seront en même temps sommables ou non et lorsqu'elles sont sommables, leurs intégrales admettent la même valeur. On peut donc profiter de notre correspondence pour passer immédiatement des fonctions d'une seule variable au cas de deux variables, la plupart des résultats se transportant d'une manière évidente. De plus, en opérant, non plus avec des rectangles, mais avec des intervalles dans des espaces de plusieurs ou même d'une infinité de dimensions, la théorie de l'intégration par rapport à une seule variable se transforme immédiatement en de sfaits d'un aspect plus général. La même idée s'applique aussi, avec un peu de précaution, aux intégrales de Stieltjes-Lebesgue et même, sous certaines hypothèses, aux intégrales des fonctions définies dans des ensembles abstraits dont nous allons parler.

Notre principe de transition nous forçait à bouleverser la structure des ensembles et à renoncer à la continuité, mais heureusement sans perdre beaucoup, Ne peut-on pas abandonner entièrement les ensembles de caractère géométrique et intégrer dans des ensembles abstraits? C'est ce qu'ont fait en 1915 M. Fréchet, fondateur de la topologie des ensembles abstraits, en étendant la méthode de Lebesgue à ce cas général et peu après M. Daniell qui se servit de l'idée du prolongement des fonctionnelles linéaires. Depuis, le premier ordre d'idées fut répété et continué par plusieurs auteurs, en particulier en vue des exigences de la théorie des probabilités et de quelques sujets voisins. Qu'il me soit permis de ne parler que du second, très proche de l'une des méthodes dont je me suis servi plus haut pour l'intégrale de Lebesgue.

Soit E un ensemble quelconque ou, comme on dit, un ensemble abstrait. En désignant ses éléments par x, fixons une classe C_0 de fonctions $\varphi(x)$, comprenant toutes les combinaisons linéaires ainsi que les modules $|\varphi|$ des éléments de la classe. Pour ne pas compliquer les choses, nous supposons encore que la classe contienne l'unité, c'est la fonction $\varphi(x) \equiv 1$; quand il n'en est pas ainsi, le rôle de l'unité pourra être joué par d'autres fonctions strictement positives et cela sur l'ensemble E entier ou du moins sur les sous-ensembles qui nous intéressent.

Cela étant, envisageons une fonctionnelle $A = A\varphi$ et appelons-la l'intégrale des φ. Nous la supposons linéaire et aussi positive ; quant à cette dernière restriction, je me contente de dire qu'on peut s'en débarrasser grâce à un raisonnement ingénieux de M. Daniell ; je ne voudrais pas vous fatiguer en l'exposant. Alors, pour pouvoir copier le raisonnement, qui, lorsqu'il s'agissait de l'intégrale de Lebesgue, nous a conduit de la classe C_0 aux classes C_1, C_2 et C_3 en procédant par des suites monotones, nous aurons besoin de voir ce qui correspond aux deux propositions fondamentales, la première alléguant que $A\varphi_n \to 0$ lorsque $\varphi_n(x) \to 0$ en décroissant et presque partout, la seconde que pour les suites croissantes φ_n, l'hypothèse que $A\varphi_n$ reste bornée entraîne que $\varphi_n(x)$ converge presque partout vers une limite finie $f(x)$. Mais dans nos conditions plus générales qu'est ce qu'il faut entendre par « presque partout » ou ce qui revient au même, par « ensemble de mesure nulle ». Pour le définir, nous n'aurons qu'à remplacer la seconde proposition par une définition et cela en introduisant les ensembles de mesure nulle comme ceux pour lesquels une suite croissante $\varphi_n(x)$ peut diverger sans que la suite des $A\varphi_n$ cesse d'être bornée. Quant à la première proposition, nous aurons à la remplacer, avec M. Daniell, par une hypothèse, du moins partiellement ; nous supposerons que $A\varphi_n \to 0$ lorsque $\varphi_n(x) \to 0$ en décroissant *partout*. Cela posé on montre aisément que le terme « partout » peut être remplacé par « presque partout ». En effet, supposons que $\varphi_n(x) \to 0$ sauf un ensemble e_0 de mesure nulle et soit $\psi_n(x)$ une suite choisie de sorte qu'elle diverge sur e_0 tandis que $A\psi_n$ reste bornée ; par des raisons d'homogénéité, nous pouvons supposer que $A\psi_n$ reste au-dessous d'un ε arbitrairement petit. Alors la fonction $(\varphi_n - \psi_n)^+$ (partie positive de $\varphi_n - \psi_n$) tend *partout* vers o et alors, par hypothèse, $A(\varphi_n - \psi_n)^+ \to 0$; de plus

$$A\varphi_n = A(\varphi_n - \psi_n) + A\psi_n \leqslant A(\varphi_n - \psi_n)^+ + \varepsilon \to \varepsilon$$

ou, ε étant arbitrairement petit, il s'ensuit que $A\varphi_n \to 0$, ce qu'il fallait prouver.

Maintenant qu'on dispose des deux propositions fondamentales, la théorie se développe parallèlement à celle de l'intégrale de Lebesgue et fournit les mêmes conséquences, sauf une seule. C'est le théorème affirmant l'intégrabilité des fonctions composées. En général, ce théorème sera en défaut lorsque la classe C_0 n'est pas supposée comprendre les produits de ses éléments ; toutefois à ce défaut il pourra être remédié par l'adjonction des limites des suites uniformément convergentes. Quand il s'agit seulement de passer de f à f^2, on peut aussi raisonner en partant de la formule

$$f^2 = \sup(2\lambda|f| - \lambda^2)$$

où λ parcourt le demi-axe positif ou seulement une suite λ_n partout dense, par exemple celle des nombres rationnels. Donc f^2 n'est que la limite de la suite croissante des enveloppes supérieures

$$g_n = \sup_{m \leqq n} (2\lambda_m|f| - \lambda_m^2)$$

et il vient immédiatement de la théorie générale que les g_n sont sommables et qu'il en est de même de leur limite f^2 toujours qu'il existe une fonction majorante sommable $h(x) \geqslant f^2(x)$. Cela suffit pour étendre les idées concernant l'espace fonctionnel L^2 à notre cas général. En particulier, le théorème sur la représentation des fonctionnelles linéaires sous forme d'intégrale reste valable et nous aide entre autres à regarder sous un aspect très général des problèmes de différentiation et du changement des variables dans les intégrales.

Mais le temps me presse et je n'ai pas encore parlé du développement de l'idée de l'intégrale au cours des 10 ou 15 dernières années. Malheureusement, pendant la plus grande partie de cette période, les difficultés de guerre et d'après-guerre m'ont empêché de suivre régulièrement ce qui se passait et en particulier, à propos de quelques auteurs français, qui se sont occupés de certains sujets dont j'ai commencé l'étude et m'ont même honoré en donnant mon nom à quelques notions, je n'ai pas réussi à pénétrer suffisamment dans le langage et l'écriture créés par la société anonyme Bourbaki pour les comprendre entièrement. C'est donc très peu que j'ose parler de cette période. Pour commencer, je vous prie de nouveau de m'excuser si je parle tout d'abord de moi-même ; mais ce sont mes propres travaux que je connais le mieux. Déjà en 1928, au congrès de Bologne, en connexion avec le théorème de Jordan concernant la décomposition des fonctions à variation bornée en des parties monotones et un théorème plus subtil de Lebesgue que l'on aime à citer aujourd'hui sous le nom de théorème de Lebesgue-Nikodym, j'ai introduit la notion de la plus petite majorante d'un ensemble d'opérations linéaires et je m'en suis servi pour décomposer les opérations en des parties régulières et singulières. Là je me suis borné, à titre d'exemple, au cas des fonctions continues et j'ai montré, entre autres, que ces parties peuvent être caractérisées et construites sans avoir recours à l'expression analytique de l'opération sous forme d'intégrale de Stieltjes. J'ai repris le même sujet, sous une forme très générale, dans un mémoire paru d'abord en 1936 en langue hongroise, dans les communications de l'Académie hongroise, et dont une version en langue française, avec des modifications légères, fut imprimée en 1940 dans les Annals of Mathematics. D'ailleurs, j'apprends que sans me consulter, on l'a traduit aussi en langue russe. A peu près au même temps ont aussi paru des travaux importants de MM. Freudenthal, Kantorovitch et Garrett Birkhoff sur les modules semiordonnés et les lattices linéaires qui sont en relation intime avec mon sujet. Pour être bref, ce qui peut nous intéresser du point de vue de ma conférence d'aujourd'hui, c'est que je n'y parle ni d'ensembles de points ni de fonctions, mais c'est le rôle des fonctions elles-mêmes qui est joué par des éléments abstraits, d'ailleurs soumis à très peu d'hypothèses concernant leur addition. Alors on voit aisément que les opérations linéaires définies pour des classes de tels éléments forment des lattices linéaires et c'est de cette sorte que mon Mémoire se change, en réalité, en l'étude d'un calcul des lattices linéaires. Un autre ordre d'idées très général fut introduit par M. Carathéodory dans un Mémoire sur l'algébraïsation de la notion d'intégrale paru en 1938 dans les « Sitzungsberichte » de Munich. Ses idées furent aussi continuées par M. Bischof dans sa thèse très intéressante, présentée à l'Université de Berlin en 1940 et M. Carathéodory lui-même y est revenu l'année suivante, les appliquant au théorème de Riesz-Fischer et à la théorie ergodique.

Faute de temps je ne peux pas entrer dans les détails et je regrette aussi de ne pouvoir parler des généralisations de l'intégrale de

Lebesgue dans lesquelles les fonctions, au lieu de prendre des valeurs numériques, font correspondre à la variable des éléments appartenant à certains espaces vectoriels. Je me contente de mentionner une des applications les mieux connues ; c'est l'expression des transformations autoadjointes de l'espace de Hilbert sous forme d'intégrale étendue à leur spectre. Peut-être aurais-je dû aussi parler du rôle que les ensembles de mesure nulle et leurs analogues en Théorie du potentiel, les ensembles de capacité nulle, jouent dans l'analyse des fonctions analytiques et de celles harmoniques et sousharmoniques, comme on le trouve exposé en particulier dans les travaux de MM. Brelot et Henri Cartan.

Je ne peux finir ma conférence sans citer une série de notes de M. Stone dans les « Proceedings » de Washington dont la quatrième vient de paraître dans le fascicule de janvier de cette année. Dans ces notes il s'agit d'une analyse axiomatique de l'idée d'intégrale, en particulier de celle de Daniell ; d'ailleurs, à ce que M. Stone observe, son analyse est très voisine d'une autre, par Bourbaki, mais qui attend encore de paraître.

Ainsi la théorie de Lebesgue ne cesse pas d'évoluer ; espérons qu'elle ne perdra pas la simplicité et la fraîcheur de sa première jeunesse.