ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES CHAZARAIN

Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples et résolubilité locale

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 1 (1974), p. 203-223

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_1_203_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,1 (1974), 203-223

PROPAGATION DES SINGULARITÉS POUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS A CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES ET RÉSOBULITÉ LOCALE

par Jacques CHAZARAIN

Plan.

0. Introduction.

On étudie la propagation des singularités des solutions de $Pu = f$ quand P est un opérateur à multiplicité constante et vérifie une condition sur les termes d'ordre inférieur.

De façon plus précise, on étend à cette classe d'opérateurs le théorème de Duistermaat-Hörmander [4] relatif à l'invariance du spectre singulier des solutions u par rapport au flot hamiltonien. On suppose d'une part que l'opérateur est réel et à caractéristiques réelles de multiplicité constante et d'autre part, on fait une hypothèse, dite condition de Lévi, sur les termes d'ordre inférieur. Cette condition de Lévi, qui s'introduit de façon nécessaire quand on étudie le problème de Cauchy (cf. [1] et les références citées), entraîne que les équations de transport sont des équations différentielles le long des bicaractéristiques et dont l'ordre est précisément la multiplicité de la caractéristique qui la contient.

La démonstration du théorème suit un plan analogue à celui introduit par Duistermaat-Hörmander, aussi on ne s'étendra pas sur les détails communs aux démonstrations afin de se consacrer aux difficultés propres à la multiplicité des caractéristiques. Les difficultés nouvelles sont de deux types. Tout d'abord, il faut s'assurer de l'invariance par transformation canonique de la condition de Lévi, et cela constitue en fait la partie cruciale de ce travail. D'autre part, la réduction de l'opérateur à la forme simple que l'on espère, à savoir D_n^r, se heurte à une obstruction que l'on contourne en se plaçant dans le cadre des systèmes du premier ordre. Alors, la réduction finale permet de se ramener à un système du type $D_n \times$ (matrice identité) comme dans Sato-Kawai-Kashiwara [6], notons que ces derniers auteurs traitent le cas de la régularité analytique ce qui les dispense d'avoir à faire une hypothèse sur les termes d'ordre inférieur pour ces opérateurs à multiplicité constante.

On termine par une application à la résolubilité locale pour P.

Ce travail est résumé dans [2] et pour ce qui concerne la condition de Lévi on trouvera des compléments dans [1].

1. Notations et énoncé de théorème principal.

Soit X une variété C^∞ de dimension n, on note (x, ξ) le point générique du cotangent T^*X. On utilise sans les rappeler les notations de Hörmander [5] pour les opérateurs intégraux de Fourier. On ne considère que les opérateurs pseudo-différentiels $P \in L_1^m(X) = L^m(X)$ dont le symbole admet un développement asymptotique en composantes homogènes, on note par la minuscule p correspondante le symbole principal de l'opérateur noté P.

Les opérateurs sont dits à caractéristiques de multiplicité constante au sens de la

DEFINITION 1.1. – *L'opérateur* $P \in L^m(X)$ *est à multiplicité constante si son symbole principal* p *se factorise sous la forme*

$$p = q_1^{r_1} \dots q_s^{r_s} \quad \text{avec} \quad r_j \in \mathbf{N} \tag{1.1}$$

où les q_j *sont des symboles de type principaux tels que les variétés* $q_j^{-1}(0)$ *soient disjointes dans* $T^*X \backslash 0$.

Introduisons maintenant la condition de Lévi pour de tels opérateurs.

DEFINITION 1.2. – *Soit* $P \in L^m(X)$ *un opérateur à partie principale réelle et de multiplicité constante. On dit que* P *vérifie la condition de Lévi* $L_{(x^0, \xi^0)}$ *au point* $(x^0, \xi^0) \in p^{-1}(0) \subset T^*X \backslash 0$, *si pour toute phase* $\varphi(x)$ *solution de l'équation*

$$q_j(x, d\varphi(x)) = 0 \quad (\text{si } j \text{ est tel que } q_j(x^0, \xi^0) = 0)$$

au voisinage de x^0 *avec* $d\varphi(x^0) = \xi^0$ *et pour toute amplitude* $a \in C_0^\infty(X)$ *à support dans un voisinage de* x^0 *où* $d\varphi \neq 0$ *on a*

$$e^{-it\varphi} P(ae^{it\varphi}) = 0(t^{m-r_j}) \quad t \to +\infty \tag{1.2}$$

L'opérateur vérifie la condition de Lévi (L) *si* $L_{(x^0, \xi^0)}$ *est satisfaite en tous points de* $p^{-1}(0)$.

On vérifie facilement que (L) est une condition sur les termes de degré $m - (\bar{r} - 1)$ où $\bar{r} = \max\limits_j (r_j)$, en particulier elle est donc toujours satisfaite si P est de type principal.

On renvoie à ([1] II § 2) pour une étude plus détaillée de la condition de Lévi.

Enonçons maintenant le résultat essentiel de ce travail :

THEOREME 1.1. – *Soit* $P \in L^m(X)$ *un opérateur propre à partie principale réelle de multiplicité constante qui vérifie la condition de Lévi* (L). *Soit* $u \in \mathcal{D}'(X)$ *et posons* $f = Pu$ *alors l'ensemble* S.S.$u \backslash$S.S.f *est inclus dans* $p^{-1}(0)$ *et est invariant par le flot bicaractéristique (étant entendu que sur* $q_j^{-1}(0)$ *on prend le flot associé au champ hamiltonien* H_{q_j} *relatif au symbole* q_j*).*

On note par S.S.u le spectre singulier de u qui est désigné par WF(u) et appelé "wave front set" dans Hörmander [5].

Avant de passer à la démonstration proprement dite du théorème, il est utile d'étudier certaines transformations de l'opérateur P et tout d'abord il est commode de disposer d'une formulation de la condition de Lévi bien adaptée au calcul avec les opérateurs intégraux de Fourier.

2. Condition de Lévi locale.

On aura besoin d'une forme locale de certains résultats sur la condition de Lévi que l'on a démontrés dans [1]. A cet effet, rappelons la définition d'une classe particulière d'opérateurs étudiés par Duistermaat-Hörmander ; soit K une partie fermée conique de $T^*X\backslash 0$, on désigne par $L^m(X, K)$ les opérateurs de $L^m(X)$ dont le symbole est dans $S^{-\infty}$ en dehors de K.

Voici une forme locale du théorème 2.10 de [1].

THEOREME 2.1. — *Soit* P *un opérateur de degré* m *à multiplicité constante et un point* $(x^0, \xi^0) \in P^{-1}(0)$. *On a l'équivalence des conditions suivantes :*

i) *L'opérateur* P *vérifie la condition de Lévi* $L_{(x,\xi)}$ *pour* (x, ξ) *dans un voisinage conique de* (x^0, ξ^0) *dans* $p^{-1}(0)$.

ii) *Soit* j *tel que* $q_j(x^0, \xi^0) = 0$ *et supposons pour fixer les idées que* $\dfrac{\partial q_j}{\partial x_n}(x^0, \xi^0) \neq 0$. *Soit* $\varphi(x, \xi')$ *la solution locale de l'équation*

$$\begin{cases} q_j(x, d\varphi) = 0 \\ \varphi(x, \xi')|_{x_n = x_n^0} = x' \cdot \xi' \quad (\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})) \end{cases} \tag{2.1}$$

alors

$$e^{-i\varphi} P(ae^{i\varphi}) \in S^{m-r_j}(X \times \mathbf{R}^{n-1})$$

pour tout $a \in C_0^\infty$ *à support dans un petit voisinage de* x^0.

iii) *L'opérateur* P *est bien décomposable dans un voisinage canonique fermé* K *de* (x^0, ξ^0) *au sens qu'il existe des opérateurs* $B_k \in L^{m-r_k}(X, K)$, $\alpha \in L^0(X, K)$ *(avec* $\alpha(x, \xi)$ *identique à* 1 *dans un voisinage de* (x^0, ξ^0)*) tels que l'on ait*

$$(\alpha \cdot \mathrm{P}) - \sum_{k=0}^{r_j} (\mathrm{B}_j \mathrm{Q}_j^{r_k}) \in \mathrm{L}^0(\mathrm{X}, \mathrm{K}) \quad \textit{où} \quad \mathrm{Q}_j = q_j(x, \mathrm{D})$$

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème cité de [1] aussi indique-t-on seulement les modifications à y apporter.

L'implication i) $\rightarrow$ ii) résulte de la proposition 2.7 de [1] que l'on adapte immédiatement à la situation locale car elle repose sur la structure formelle du développement asymptotique de $e^{-i\varphi}\,\mathrm{P}(ae^{i\varphi})$ donnée par la formule (2.10). L'implication iii) $\rightarrow$ i) est basée sur le lemme 2.11 de [1]. De façon plus précise, on écrit que

$$\mathrm{P} = \alpha\mathrm{P} + (\mathrm{I} - \alpha)\mathrm{P}$$

et comme $(\mathrm{I} - \alpha)\mathrm{P} \in \mathrm{L}^{-1}(\mathrm{X}, \mathrm{K})$ par construction, il suffit de montrer que

$$e^{-it\varphi}(\alpha\mathrm{P})(ae^{it\varphi}) = 0(t^{m-r_j})$$

et pour cela, on applique le lemme 2.11 aux termes $\mathrm{B}_k\mathrm{Q}_j^k$ de la décomposition de $\alpha\mathrm{P}$ donnée par iii).

Reste à prouver l'implication ii) $\rightarrow$ iii). Pour cela, on adapte la démonstration du théorème 2.10 de [1] ; ce qui est possible car l'implication qui nous intéresse repose sur le lemme 2.13 qui est encore valable sous l'hypothèse ii) puisque tout point (x, ξ) d'un voisinage conique de (x^0, ξ^0) dans $p^{-1}(0)$ est bien de la forme $(x, \varphi'_x(x, \xi))$, comme le montre le

LEMME 2.1. – *Avec les notations du* ii), *l'application*

$$(x, \xi') \rightarrow (x, \varphi'_x(x, \xi')) \in q_j^{-1}(0)$$

est un difféomorphisme d'un voisinage conique de (x^0, ξ'^0) *sur un voisinage conique* (x^0, ξ^0) *où* $\xi'^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_{n-1}^0)$.

Démonstration. – L'équation $q_j(x, \xi) = 0$ est équivalente dans un voisinage de (x^0, ξ^0) à une équation de la forme $\xi_n = \lambda(x, \xi')$ car on a supposé $\dfrac{\partial q}{\partial x_j}(x^0, \xi^0) \neq 0$. On a donc une carte locale θ de la variété $q_j^{-1}(0)$ en posant : $\theta : (x, \xi') \rightarrow (x, \xi', \lambda(x, \xi'))$. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de vérifier que l'application $\Phi : (x, \xi') \rightarrow (x, \varphi'_{x'}(x, \xi'))$ est un difféomorphisme local au point (x^0, ξ'^0).

La matrice jacobienne s'écrit sous la forme

$$\phi'' = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \varphi''_{x'x} \\ \hline 0 & \varphi''_{x'\xi'} \end{array}\right)$$

et comme $\varphi''_{x'\xi'}(x^0, \xi'^0) =$ Identité, on a bien det $\phi''(x^0, \xi'^0) \neq 0$.

Revenons à l'implication ii) $\rightarrow$ iii) ; on montre que P est localement bien décomposable par rapport à Q_j en construisant les opérateurs B_j exactement comme dans [1], à cela près que les symboles ne sont déterminés que dans un voisinage conique de (x^0, ξ^0), ce qui n'est pas gênant car on veut une égalité modulo $\mathrm{L}^0(\mathrm{X}, \mathrm{K})$.

Donnons maintenant une caractérisation de la condition de Lévi en termes d'opérateurs intégraux de Fourier. Pour cela, on a besoin d'introduire des relations bicaractéristiques associées aux symboles q_j. On définit la relation $\mathrm{C}_j \subset (q_j^{-1}(0) \times q_j^{-1}(0))$ par

$$\mathrm{C}_j = \{(x, \xi; y, \eta) \mid (x, \xi) \text{ et } (y, \eta) \text{ sont sur une même bicaractéristique de } q_j\} \tag{2.2}$$

Cette relation n'est pas en général canonique au sens de [4] car X n'est pas nécessairement pseudo-convexe par rapport à q_j. En revanche, on peut toujours construire un voisinage de x^0 qui soit pseudo-convexe, il suffit en effet de considérer un tube ouvert constitué de courbes bicaractéristiques ayant pour base un voisinage ouvert de x'^0 dans le plan $x_n = x_n^0$ [si par exemple on a $\dfrac{\partial}{\partial x_n} q_j(x^0, \xi^0) \neq 0$ ce que l'on supposera dans ce qui suit] où $x = (x_1, \dots, x_n)$ désigne les coordonnées de x dans une carte au voisinage de x^0.

L'opérateur de trace sur un hyperplan $x_n = x_n^0$ est un opérateur intégral de Fourier (cf. Duistermaat [3]), associé à la relation canonique $\mathrm{R}(x_n^0) \subset \mathrm{T}^*(\mathbf{R}^n) \times \mathrm{T}^*(\mathbf{R}^{n-1})$

$$\mathrm{R}(x_n^0) = \{(y, \eta); (z', \zeta') \mid y_n^0 = x_n^0, \quad \eta' = \zeta'\}.$$

Enfin, on définit par composition au voisinage de x^0 la relation canonique

$$\mathrm{C}_j(x_n^0) = \mathrm{C}_j \circ \mathrm{R}_s(x_n^0) \tag{2.3}$$

où $\mathrm{R}_s(x_n^0) = \{(z', \zeta'); (y, \eta) \mid y_n^0 = x_n^0, \eta' = \zeta'\}$, cette composée est

encore une relation canonique car on a supposé $\frac{\partial q}{\partial x_n}(x^0, \xi^0) \neq 0$.
Avec ces notations, on a le

THEOREME 2.2. – *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *L'opérateur* P *vérifie la condition de Lévi dans un voisinage conique de* (x^0, ξ^0).

ii) *Il existe un voisinage conique fermé* Γ *de* $(x^0, \xi^0; x^{0\prime}, \xi^{0\prime})$ *dans* $C_j(x_n^0)$ *tel que pour tout opérateur*

$$S \in I^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n-1}; \Gamma') \quad \textit{on a} \quad P \cdot S \in I^{m-r_j}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n-1}; \Gamma').$$

Démonstration de l'implication i) $\Rightarrow$ ii).

On sait (cf. [1] Lemme 2.1) que la relation $C_j(x_n^0)$ peut se définir au moyen d'une fonction de phase en prenant précisément la fonction $\varphi(x, \xi')$ définie par les équations (2-1), ce qui signifie que l'application

$$(x, \xi') \to (x, \varphi'_x; d_{\xi'}\varphi, \xi') \in C_j(x_n^0)$$

est un difféomorphisme local dans un voisinage conique de (x^0, ξ'^0). Dans ces conditions, l'opérateur S peut s'écrire sous la forme

$$Sv(x) = \int e^{i\varphi(x,\xi')} c(x, \xi') \hat{v}(\xi')\, d\xi'$$

avec $c \in S^0$ à support dans un voisinage conique de (x^0, ξ'^0). Il vient :

$$(PS)v = \int e^{-i\varphi} e^{i\varphi} P(ce^{i\varphi}) \hat{v}\, d\xi'$$

et d'après le ii) du théorème 2.1, on a

$$e^{i\varphi} P(ce^{i\varphi}) \in S^{m-r_j}$$

par conséquent, l'opérateur PS est bien de degré $m - r_j$.

Démonstration de l'implication ii) $\Rightarrow$ i).

Si l'opérateur PS est de degré $m - r_j$ cela entraîne que l'amplitude

$$b = e^{-i\varphi} P(ce^{i\varphi}) \in S^{m-r_j}$$

et comme ceci est vrai pour tout opérateur S de ce type, on en déduit d'après le ii) du théorème 2.1, que P vérifie la condition de Lévi au voisinage de (x^0, ξ^0).

3. Invariance de la condition de Lévi par transformation canonique.

Les questions considérées dans ce paragraphe étant locales en x, on supposera pour simplifier que $X = \mathbf{R}^n$ et on désigne par $x = (x_1, \dots, x_n)$ un point générique, on utilisera aussi la notation $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

Soit χ une transformation canonique d'un voisinage conique de (x^0, ξ^0) sur un voisinage conique de $(y^0, \eta^0) \in T^*(R^n)$, on note $\widetilde{p}$ le symbole transformé $\widetilde{p}(\chi(x, \xi)) = p(x, \xi)$. Il est possible (cf. Duistermaat-Hörmander [4] proposition 6.1.4) de trouver des opérateurs intégraux de Fourier A et B qui satisfont aux conditions suivantes. On prend $A \in I^0(\mathbf{R}^n, X; \Gamma')$ tel que $(y^0, \eta^0; x^0, \xi^0)$ soit non caractéristique pour A et où Γ désigne une partie conique fermée du graphe de χ. L'opérateur B est une sorte d'inverse local de A ; de façon précise, on prend B tel que $B \in I^0(X, \mathbf{R}^n; (\Gamma^{-1})')$ et

$$\begin{aligned} &(x^0, \xi^0) \notin \text{S.S.}(BA - I) \\ &(y^0, \eta^0) \notin \text{S.S.}(AB - I) \end{aligned} \tag{3.1}$$

L'opérateur transmué de P par la transformation canonique χ est défini par $\widetilde{P} = APB$, c'est donc un opérateur pseudo-différentiel $\widetilde{P} \in L^m(\mathbf{R}^n)$ et le but de ce paragraphe est de démontrer le

THEOREME 3.1. – *Si* P *vérifie la condition de Lévi au voisinage du point* (x^0, ξ^0), *alors l'opérateur* $\widetilde{P} = APB$ *vérifie la condition de Lévi au voisinage du point* (y^0, η^0).

Démonstration. – Tout d'abord, il est clair que $\widetilde{p}$ est aussi à multiplicité constante au voisinage de (y^0, η^0) et s'écrit $\widetilde{p} = \widetilde{q}_1^{\,r_1} \dots \widetilde{q}_s^{\,r_s}$. Pour démontrer le théorème, on va appliquer le critère ii) du théorème 2.2. On suppose par exemple que $\dfrac{\partial \widetilde{q}_j}{\partial y_n}(y^0, \eta^0) \neq 0$, si l'entier j est tel que $\widetilde{q}_j(y^0, \eta^0) = 0$, ce qui permet d'introduire les relations canoniques $\widetilde{C}_j$ et $\widetilde{C}_j(y_n^0) = \widetilde{C}_j \circ R_s(y_n^0)$ analogues de (2.2) pour le symbole $\widetilde{q}_j$.

Etant donné un voisinage conique fermé $\widetilde{\Gamma}$ de $(y^0, \eta^0; y'^0, \eta'^0)$ dans $\widetilde{C}_j(y_n^0)$, il faut montrer que pour tout opérateur

$$\widetilde{S} \in I^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n-1}; \widetilde{\Gamma}')$$

on a $\widetilde{P}\widetilde{S} \in I^{m-r_j}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n-1}; \widetilde{\Gamma}')$. Pour cela, on utilise le

LEMME 3.1. – *Il existe une transformation canonique* χ_1 *d'un voisinage conique de* (x'^0, ξ'^0) *sur un voisinage conique de* (y'^0, η'^0) *telle que*

$$\widetilde{C}_j(y_n^0) \circ \chi_1 = \chi \circ C_j(x_n^0) \tag{3.2}$$

Démonstration du lemme. – On définit la relation χ_1 par

$$\chi_1 = \widetilde{R}(y_n^0) \circ \chi \circ R_s(x_n^0)$$

et on vérifie facilement qu'elle est définie par la transformation (donc canonique) $\chi_1 : (x', \xi') \to \chi_1(x', \xi')$ telle que $(x' ; \xi') \to$ [la bicaractéristique de q_j passant par le point $(x', x_n^0 ; \xi', \lambda(x, \xi'))$] celle-ci se transforme par la transformation canonique χ en une bicaractéristique de q_j qui coupe le plan $y_n = y_n^0$ au point $(y', y_n^0 ; \eta', \widetilde{\lambda}(y, \eta'))$ et l'on pose

$$\chi_1(x' ; \xi') = (y' ; \eta') .$$

Pour démontrer (3.2), on calcule son premier membre

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_j(y_n^0) \circ \chi_1 &= \widetilde{C}_j \circ R_s(y_n^0) \circ R(y^0) \circ \chi \circ R_s(x_n^0)\\ &= \widetilde{C}_j \circ \chi \circ R_s(x_n^0)\end{aligned}$$

et comme $\widetilde{q}_j$ est le transporté de q_j par χ on a

$$\widetilde{C}_j \circ \chi = \chi \circ C_j$$

d'où en reportant, on trouve

$$C_j(y_n^0) \circ \chi_1 = \chi \circ C_j \circ R_s(x_n^0) ,$$

soit finalement

$$= \chi \circ C_j(x_n^0) .$$

De ce lemme, on va déduire l'analogue de (3.2) mais au niveau des opérateurs. Soit Γ un voisinage conique fermé de $(x^0, \xi^0 ; x'^0, \xi'^0)$ dans $C_j(x_n^0)$ et soit $S \in I^0(X, X' ; \Gamma')$ tel que S ait un symbole inversible dans un voisinage conique de $(x^0, \xi^0 ; x'^0, \xi'^0)$. Dans ces conditions, on peut trouver une partie conique fermée Γ_1 du graphe de χ_1 et un opérateur $B_1 \in I^0(\mathbf{R}^{n-1}, X' ; (\Gamma_1^{-1})')$ tel que

$$B\widetilde{S} = SB_1 . \tag{3.3}$$

On a, en résumé, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "A"] & & \mathbf{R}^n \\
X \arrow[u, "P"] & & \mathbf{R}^n \arrow[ll, "B"'] \arrow[u, "\widetilde{P}"'] \\
X' \arrow[u, "S"] & & \mathbf{R}^{n-1} \arrow[ll, "B_1"'] \arrow[u, "\widetilde{S}"']
\end{tikzcd}$$

En revenant au calcul du composé $\widetilde{P}\widetilde{S}$, il vient

$$\widetilde{P}\widetilde{S} = \mathrm{APB}\widetilde{S}$$

d'où, grâce à (3.3)

$$= \mathrm{APSB}_1 \ ,$$

or P satisfait la condition de Lévi au voisinage de (x^0 , ξ^0) ; par conséquent, le théorème 2.2 implique que PS est de degré $m - r_j$ et par suite $\widetilde{P}\widetilde{S}$ est aussi de degré $m - r_j$, ce qui prouve finalement l'appartenance

$$\widetilde{P} \cdot \widetilde{S} \in I^{m - r_j}(\mathbf{R}^n , \mathbf{R}^{n-1} ; \widetilde{\Gamma}') \ .$$

4. Réduction par transformation canonique.

Pour étudier au voisinage d'un point (x^0 , ξ^0) le spectre singulier d'une solution distribution u de $\mathrm{P}u = f$, on procèdera à des réductions de P en se plaçant sur un voisinage conique de (x^0 , ξ^0). De façon plus précise, on se donne $(x^0 , \xi^0) \in p^{-1}(0)$ et soit j tel que $q_j(x^0 , \xi^0) = 0$, alors on écrit p sous la forme

$$p = q_j^{r_j} \left(\prod_{k \neq j} q_k^{r_k} \right) ,$$

par conséquent le symbole $\prod_{k \neq j} q_k^{r_k}$ est elliptique au voisinage de (x^0 , ξ^0). Comme la composition avec un opérateur elliptique conserve à la fois le spectre singulier et la condition de Lévi, on ne diminue pas la généralité du problème en supposant que $p = q^r$, où q désigne un symbole réel appartenant à S^1 et de type principal.

Mais on peut encore simplifier la forme de q en appliquant la proposition 6.1.4 de [4], si on suppose que le champ hamiltonien H_q de q en (x^0, ξ^0) n'est pas tangent à l'axe du cône. Cette proposition montre l'existence d'une transformation canonique χ d'un voisinage conique de $(x^0, \xi^0) \in T^*X$ sur un voisinage conique de $(y^0, \eta^0) \in T^*(\mathbf{R}^n)$ et d'opérateurs $A \in I^0(\mathbf{R}^n, X; \Gamma')$ et $B \in I^0(X, \mathbf{R}^n; (\Gamma^{-1})')$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} .\ \mathrm{APB} = \widetilde{\mathrm{P}} \quad \text{avec} \quad \widetilde{\mathrm{P}} = \eta_n^r \\ .\ \Gamma \text{ est une partie conique fermée du graphe de } \chi \\ .\ (x^0, \xi^0) \notin \mathrm{S.S.}(\mathrm{BA} - \mathrm{I}) \quad \text{et} \quad (y^0, \eta^0) \notin \mathrm{S.S.}(\mathrm{AB} - \mathrm{I})\ . \end{array}\right. \tag{4.1}$$

L'opérateur transmué P est donc de la forme

$$\widetilde{\mathrm{P}} = \mathrm{D}_n^r + (\text{termes de degré} < r)\ ,$$

mais d'après l'invariance de la condition de Lévi démontrée au § 3, il résulte que $\widetilde{\mathrm{P}}$ vérifie aussi la condition de Lévi dans un voisinage conique de (y^0, η^0). Alors le critère iii) du théorème 2.1 montre que $\widetilde{\mathrm{P}}$ peut se décomposer sous la forme

$$\alpha \cdot \widetilde{\mathrm{P}} = \mathrm{D}_n^r + \sum_{j=0}^{r-1} \mathrm{B}_j(x, \mathrm{D})\, \mathrm{D}_n^j \tag{4.2}$$

où α, $\mathrm{B}_j \in \mathrm{L}^0(\mathbf{R}^n ; \mathrm{K})$ avec K désignant un voisinage conique fermé de (y^0, η^0) et de plus le symbole de α est identique à 1 au voisinage de (y^0, η^0). Grâce à l'ellipticité de α au voisinage de (y^0, η^0), on ne diminue pas la généralité en remplaçant $\alpha\widetilde{\mathrm{P}}$ par $\widetilde{\mathrm{P}}$ dans le premier membre de (4.2). Arrivé à cette réduction, on peut être tenté de chercher un opérateur elliptique $\mathrm{E} \in \mathrm{L}^0$ qui réduise à D_n^r, c'est-à-dire tel que

$$\widetilde{\mathrm{P}}\mathrm{E} - \mathrm{E}\mathrm{D}_n^r \in \mathrm{L}^{-\infty}\ ,$$

mais ceci est impossible en général.

Pour surmonter cette difficulté, une méthode qui m'a été suggérée par T. Kawai consiste à se ramener à la situation d'un système du 1er ordre pour essayer ensuite d'adapter la technique utilisée par Sato-Kawai-Kashiwara [6].

Terminons ce paragraphe par la réduction à un système et notons de nouveau par x la variable générique. L'équation

$$D_n^r u + \sum_{j=0}^{r-1} B_j(x\,, D)\, D_n^j u = f$$

est équivalente à l'équation

$$D_n U + B(x\,, D)\, U = F\ , \tag{4.3}$$

avec $\quad U = (u\,, D_n u\,, \dots, D_n^{r-1} u) \quad F = (0\,, \dots, 0\,, f)$

$$B(x\,, D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \bigcirc & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & \bigcirc & & & 0 & 1 \\ B_0\,, & B_1\,, & \dots & & , & B_{r-1} \end{pmatrix} \in L^0(\mathbf{R}^n)$$

et $L^m(\mathbf{R}^n)$ désignera à partir de maintenant les opérateurs de degré m à valeurs dans les matrices $(r \times r)$. Il est important, pour la suite, de remarquer que

$$\text{S.S.}U = \text{S.S.}u \tag{4.4}$$

car cela permettra de raisonner sur U pour l'étude du spectre singulier de u. D'autre part, si l'opérateur $B(x\,, D)$ ne contenait pas de dérivation en D_n, on pourrait considérer (4.3) comme une équation d'évolution ; le paragraphe suivant va permettre de se ramener à une telle situation.

5. Un type de théorème de préparation pour les opérateurs pseudo-différentiels.

THEOREME 5.1. – *Etant donné un opérateur* $B(x\,, D) \in L^0(\mathbf{R}^n)$, *on peut trouver un opérateur elliptique* $E \in L^0(\mathbf{R}^n)$ *et un opérateur* $A(x'\,, x_n\,, D') \in L^0(\mathbf{R}^{n-1})$ *qui dépend de façon* C^∞ *de la coordonnée* x_n *tels que*

$$(D_n + B(x , D)) \equiv (D_n + A(x , D'))\, E(x , D) \quad \mod L^{-\infty} \quad (5.1)$$

où $L^0(\mathbf{R}^n)$ *désigne des opérateurs sur* $\mathbf{R}^n$ *de degré* 0 *à valeurs dans les matrices* $r \times r$.

Démonstration. – On construit les opérateurs Q et A au moyen de développements asymptotiques

$$E \approx \Sigma E_{-k} \qquad A \approx \Sigma A_{-k} ,$$

et l'on détermine successivement les opérateurs E_{-k}, $A_{-k} \in L^{-k}$ par les conditions

$$D_n \equiv D_n E_0 \qquad \mod L^0 \qquad (5.2)$$

$$(D_n + B) \equiv (D_n + A_0 + \cdots + A_{-k})(E_0 + \cdots + E_{-k-1}) \mod L^{-k-1}. \qquad (5.3)$$

Pour satisfaire (5.2), on prend $E_0 = Id. \in L^0$, ainsi E sera elliptique.

Si on connaît les A_{-j}, E_{-j-1} pour $j \leqslant k-1$, on obtient A_{-k} et E_{-k-1} en écrivant (5.3) sous la forme

$$D_n + B - (D_n + A_0 + \cdots + A_{-k+1})(E_0 + \cdots + E_{-k}) \equiv$$
$$\equiv (A_{-k} + D_n E_{-k-1}) \mod L^{-k-1} \qquad (5.4)$$

Notons $c_{-k}(x , \xi)$ le symbole connu du premier membre de (5.4), il vient l'équation

$$c_{-k}(x , \xi) = a_{-k}(x , \xi') + \xi_n e_{-k-1}(x , \xi) \qquad (5.5)$$

ce qui, d'après la formule de Taylor au premier ordre, donne

$$a_{-k}(x , \xi') = e_{-k}(x , \xi' , 0)$$

$$e_{-k-1}(x , \xi) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi_n} c_{-k}(x , \xi' , t\xi_n)\, dt$$

qui sont respectivement dans $S^{-k}(\mathbf{R}^{n-1})$ et $S^{-k-1}(\mathbf{R}^n)$.

Bien entendu, la même technique de démonstration permet de prouver un analogue de ce théorème pour les opérateurs scalaires.

Remarque 5.1. – L'égalité (5.1) montre que l'on peut se contenter d'étudier l'équation $(D_n + A(x , D'))\, U = F$ car, l'opérateur E étant elliptique, il ne change pas le spectre singulier des solutions.

6. Réduction à la forme $D_n \cdot I$.

Partant de la forme $(D_n + A(x , D'))$, on va montrer que l'on peut, dans un certain sens, réduire cet opérateur à la forme $D_n \cdot I$. Pour préciser le sens de cette réduction, on a besoin d'introduire une classe d'opérateurs qui jouera le rôle des opérateurs négligeables dans les calculs de réduction.

DEFINITION 6.1. – *Etant donné une application*

$$C^\infty : \mathbf{R} \to L^{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$$

notée $x_n \to R(x_n) = R(x_n , x' , D')$, *on lui associe sur* $\mathbf{R}^n$ *l'opérateur* $R = R(x_n , x' , D) \in L^0(\mathbf{R}^n)$, *la classe de ces opérateurs est notée* $L^{-\infty,0}$.

L'intérêt de cette classe réside dans la propriété suivante.

Etant donné une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ telle que son spectre singulier ne contient aucun point de la forme $(x ; 0 , \xi_n)$, alors $Ru \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. En effet, on a

$$\text{S.S.}(Ru) \subset \text{S.S}'.R \circ \text{S.S.}u$$

et cet ensemble est vide puisque S.S$'$.R ne contient que des points de la forme $(x ; 0 , \xi_n)$.

On peut dire, en gros, que les opérateurs de $L^{-\infty,0}$ régularisent en la variable x' et multiplient par une fonction C^∞ en la variable x_n. Dans toute la suite, on fera un calcul modulo $L^{-\infty,0}$ en utilisant le signe $\equiv$ pour désigner les égalités. La réduction finale est contenue dans le résultat suivant.

THEOREME 6.1. – *Il existe des opérateurs* $T(x , D')$, $\widetilde{T}(x , D')$ *dans* $L^0(\mathbf{R}^n)$ *à valeurs matrices* $r \times r$, *tels que :*

$$(D_n + A(x , D'))\, T(x , D') \equiv T(x , D') \,.\, D_n \quad \mathrm{mod}\ L^{-\infty,0} \tag{6.1}$$

$$\widetilde{T}(x , D')\,(D_n + A(x , D')) \equiv D_n \cdot \widetilde{T}(x , D') \quad \mathrm{mod}\ L^{-\infty,0} \tag{6.2}$$

$$T \cdot \widetilde{T} \equiv \widetilde{T} \cdot T \equiv I \quad \mathrm{mod}\ L^{-\infty,0}\ . \tag{6.3}$$

Un résultat de ce type a déjà été démontré par Sato-Kawai-Kashiwara [6] dans le cadre des opérateurs d'ordre $+\infty$ et à symbole analytique ; aussi, la démonstration diffèrera-t-elle au point de vue technique de façon à s'appliquer à des symboles qui sont C^∞.

Sur l'espace des classes d'opérateurs pseudo-différentiels de $L^m(\mathbf{R}^{n-1})/L^{-\infty}(\mathbf{R}^{n-1})$ on utilise la topologie transportée de celle définie sur les symboles $S^m(\mathbf{R}^{n-1})$ qui en fait un espace de Fréchet (cf. Hormander [5]). Pour construire T, on va le considérer comme une application

$$\begin{aligned} C^\infty &: \mathbf{R} \to L^0(\mathbf{R}^{n-1})/L^{-\infty} \\ T &: x_n \to T(x_n) \end{aligned}$$

qui vérifie une équation différentielle à valeurs opérateurs

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx_n} + A(x_n)\right) T(x_n) = 0 \quad \text{dans} \quad L^0/L^{-\infty} \\ &T(x_n) = I \end{aligned} \right. \tag{6.4}$$

où pour x_n fixé, $A(x_n) = A(x_n, x', D')$ est un opérateur continu de $L^0(R^{n-1})/L^{-\infty}$ dans lui-même. On écrit l'opérateur pseudo-différentiel $T(x_n)$ sous la forme

$$T(x_n)\, g(x') = (2\Pi)^{-n+1} \int e^{ix'\xi'}\, t(x_n, x', \xi')\, \hat{g}(\xi')\, d\xi'$$

avec $t(x_n, \ldots) \in S^0(\mathbf{R}^{n-1})$ à valeurs matrices $r \times r$.

Les équations (6.4) donnent les conditions suivantes sur t

$$\left\{ \begin{aligned} &e^{-ix'\xi'}(D_n + A(x, D'))\,(e^{ix'\xi'}\, t(x, \xi')) \approx 0 \\ &t(x', 0, \xi') \approx 0 \end{aligned} \right. \tag{6.5}$$

d'où il vient

$$D_n\, t(x, \xi') + \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{1}{\alpha\,!}\, D^\alpha_{\xi'}\, a(x, \xi')\, D^\alpha_{x'}\, t(x, \xi') \approx 0 \tag{6.6}$$

que l'on résoud en cherchant t sous la forme

$$t \approx \Sigma\, t_{-j}\,.$$

On détermine successivement les symboles $t_{-j} \in S^{-j}$ par les conditions

$$\left\{ \begin{aligned} &\Big(D_n + \sum_{\alpha > 0} D^\alpha_{\xi'}\, a(x, \xi')\, D^\alpha_{x'}\Big)(t_0 + \cdots + t_{-k}) \in S^{-k-1} \\ &(t_0 + \cdots + t_{-k} - I)_{|x_n=0} \in S^{-k-1} \end{aligned} \right. \tag{6.7}$$

qui se réduisent finalement à une suite d'équations différentielles ordinaires de la forme

$$\left\{\begin{aligned} D_n t_{-k}(x_n, x', \xi') + a_0(x, \xi')\, t_{-k} &= b_{-k}(x, \xi') \\ t_{-k}|_{x_n=0} &= I \cdot \delta_{0,k} \end{aligned}\right. \tag{6.8}$$

où b_{-k} est déterminé à partir de $t_0, \ldots, t_{k+1}$.

A l'application $x_n \to T(x_n) \in L^0(\mathbf{R}^{n-1})$ ainsi construite, on associe l'opérateur $T = T(x_n, x', D') \in L^0(\mathbf{R}^n)$; la formule de Leibniz donne immédiatement

$$\left\{\begin{aligned} (D_n + A) \cdot T \equiv T \cdot D_n \quad & \mathrm{mod}\ L^{-\infty,0} \\ T|_{x_n=0} \equiv I \quad & \mathrm{mod}\ L^{-\infty} \end{aligned}\right. \tag{6.9}$$

Pour construire $\widetilde{T}$, on procède par transposition ; de façon plus précise, soit Z l'analogue de T relativement à l'opérateur ${}^t(D_n + A)$, alors il suffit de poser

$$\widetilde{T} = {}^t Z$$

pour avoir

$$\left\{\begin{aligned} \widetilde{T} \cdot (D_n + A) \equiv D_n \cdot \widetilde{T} \quad & \mathrm{mod}\ L^{-\infty,0} \\ \widetilde{T}|_{x_n=0} \equiv I \quad & \mathrm{mod}\ L^{-\infty}\ . \end{aligned}\right. \tag{6.10}$$

Pour démontrer l'égalité (6.3), on pose

$$V = \widetilde{T} \cdot T \quad \text{et} \quad W = T\widetilde{T}$$

et on déduit des égalités (6.9) et (6.10) que les opérateurs V, W considérés comme application $\mathbf{R} \to L^0(\mathbf{R}^{n-1})$ vérifient les équations d'évolution suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dx_n} V(x_n) \equiv 0 \quad & \mathrm{mod}\ L^{-\infty} \\ V(0) \equiv I \quad & \mathrm{mod}\ L^{-\infty} \end{aligned}\right. \tag{6.11}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{i}\frac{d}{dx_n} W(x_n) + WA - AW \equiv 0 \quad & \mathrm{mod}\ L^{-\infty} \\ W(0) \equiv I \quad & \mathrm{mod}\ L^{-\infty} \end{aligned}\right. \tag{6.12}$$

Mais on vérifie facilement, en se ramenant aux équations vérifiées par les symboles, que la solution des équations (6.11) (6.12) est unique modulo $L^{-\infty,0}$ et, comme l'application $x_n \to I(x_n) =$ Identité est une solution, on a prouvé que $V \equiv I \equiv W$; ce qui démontre (6.3).

7. Propagation des singularités des solutions de Pu = f.

Grâce aux réductions successives de l'opérateur P, on va se ramener à démontrer le théorème 1.1 dans un cas très simple. Il s'agit d'étudier le spectre singulier d'une distribution u vérifiant P$u = f$. De façon plus précise, on se donne $(x^0, \xi^0) \in$ S.S.u\S.S.f, on sait que nécessairement $(x^0, \xi^0) \in p^{-1}(0)$ (cf Hörmander [5]) alors on considère la bicaractéristique de p passant par (x^0, ξ^0) et tout revient à démontrer qu'il y a un voisinage de (x^0, ξ^0) sur cette bicaractéristique qui est encore inclus dans S.S.u\S.S.f. Comme cet ensemble est un cône dans $T^*X\backslash 0$, on peut supposer que $H_p(x^0, \xi^0)$ est indépendant de la direction de l'axe du cône sinon le théorème est immédiat. D'après les résultats du § 4 et la remarque 5.1, il suffit d'étudier ce problème pour l'équation

$$(D_n + A(x, D'))\ U = F. \tag{7.1}$$

L'appartenance $(x^0, \xi^0) \in$ S.S.U\S.S.F. implique l'égalité $\xi_n^0 = 0$ et la bicaractéristique passant par (x^0, ξ^0) est la droite

$$\Delta = \{(x^0, \xi^0) + t(0, \ldots 0, 1; 0) \mid \text{avec } t \in \mathbf{R}\}.$$

En appliquant l'opérateur $\widetilde{T}$ du théorème 6.1 à l'égalité (7.1), il vient

$$D_n \widetilde{T}\, U = \widetilde{T}\, F + R\, U \qquad \text{où} \qquad R \in L^{-\infty,0}\ ; \tag{7.2}$$

posons $\qquad U_1 = \widetilde{T}\, U \qquad F_1 = \widetilde{T}\, F + R\, U,$

on est donc ramené à l'équation

$$D_n U_1 = F_1. \tag{7.3}$$

Montrons que l'on a encore $(x^0, \xi^0) \in$ S.S.U_1\S.S.F_1. On a

$(x^0, \xi^0) \notin$ S.S.(RU) car

S.S.(RU) $\subset \{(x, \xi) \mid (x, \xi) \in$ S.S.U et $\xi' = 0\}$

et comme S.S.$\widetilde{T}$ F $\subset$ S.S.F il vient, par conséquent,

$$(x^0, \xi^0) \notin \text{S.S.}F_1.$$

D'autre part, l'égalité $U_1 = \widetilde{T}\, U$ entraîne que

$$U = T\, U_1 + R'\, U \quad \text{avec} \quad R' \in L^{-\infty,0},$$

d'où $$\mathrm{S.S.U} \subset (\mathrm{S.S.U}_1) \cup (\mathrm{S.S.(R'\,U)}) \ ;$$

comme $$(x^0\,,\xi^0) \notin \mathrm{S.S.(R'\,U)},$$

il vient $$(x^0\,,\xi^0) \in \mathrm{S.S.U}_1\,.$$

On est donc ramené au même problème pour l'équation (7.3) pour laquelle le théorème est connu et d'ailleurs se démontre facilement (cf. Duistermaat-Hörmander [4]) ; par conséquent $\mathrm{S.S.U}_1$ contient un voisinage de $(x^0\,,\xi^0)$ sur la bicaractéristique Δ et l'inclusion $\mathrm{S.S.U}_1 \subset \mathrm{S.S.U}$ montre qu'il en est de même pour S.S.U.

Afin d'énoncer l'analogue du théorème 1.1 dans les espaces de Sobolev, rappelons la définition du spectre singulier dans $\mathrm{H}_{(s)}(\mathrm{X})$ d'une distribution u :

$$\mathrm{S.S}_s(u) = \bigcap_{\mathrm{A}u \in \mathrm{H}_{(s)}} a^{-1}(0)$$

cette intersection étant prise pour les opérateurs propres $\mathrm{A} \in \mathrm{L}^0(\mathrm{X})$. De cette définition, il découle immédiatement l'inclusion suivante

$$\mathrm{S.S}_{s+m}(u) \subset p^{-1}(0) \cup \mathrm{S.S}_s(\mathrm{P}u) \quad \text{où} \quad \mathrm{P} \in \mathrm{L}^m(\mathrm{X}).$$

Alors, une simple adaptation de la démonstration du théorème 1.1, donne le

THEOREME 1.1. – *Soit* $\mathrm{P} \in \mathrm{L}^m(\mathrm{X})$ *un opérateur propre à partie principale réelle de multiplicité constante* $p = q_1^{r_1} \dots q_d^{r_d}$ *et on suppose la condition de Lévi vérifiée sur* X. *Soit* $u \in \mathcal{D}'(\mathrm{X})$ *et posons* $f = \mathrm{P}u$ *alors pour* $j = 1, \dots, d$

$$\mathrm{S.S}_{s+m-r_j}(u) \backslash \mathrm{S.S}_s(f) \subset p^{-1}(0)$$

et sur $q_j^{-1}(0)$ *l'ensemble* $\mathrm{S.S}_{s+m-r_j}(u) \backslash \mathrm{S.S}_s(f)$ *est invariant par le flot hamiltonien relatif au symbole* q_j.

Indiquons pour terminer, qu'à partir des résultats obtenus il semble ne pas y avoir de difficultés nouvelles à étendre à ces opérateurs les résultats de Duistermaat-Hörmander [4] relatif à la résolubilité de l'équation $\mathrm{P}u = f$. Par exemple, esquissons l'étude de la résolubilité locale en procédant exactement comme ces auteurs.

Tout d'abord énonçons un résultat de régularité :

COROLLAIRE 7.1. — *Soit* P *un opérateur qui vérifie les hypothèses du théorème précédant et* K *un compact de* X *ne contenant aucune courbe bicaractéristique maximale. Soit* $u \in \mathcal{E}'(\mathrm{K})$ *telle que* $\mathrm{P}u \in \mathrm{H}_{(s)}$ *alors on a* $u \in \mathrm{H}_{(s+m-\bar{r})}$ où $\bar{r} = \max\limits_{j}(r_j)$.

En effet $\mathrm{S.S}_s(f) = \phi$, par conséquent $\mathrm{S.S}_{s+m-r_j}(u) \mid q_j^{-1}(0)$ est invariant par le flot hamiltonien, il en découle que cet ensemble est vide à cause de l'hypothèse faite sur K. Et comme ceci est vrai pour tout j, le corollaire est démontré.

Donnons maintenant un résultat de résolubilité locale pour P.

THEOREME 7.1. — *Soit* P *un opérateur qui vérifie les hypothèses du corollaire précèdant en prenant pour* K *un compact réduit à un point* $\{x_0\}$. *Alors il existe un voisinage ouvert* V *de* x_0 *dans lequel l'équation* $\mathrm{P}u = f$ *est résoluble. De façon plus précise, pour* f *donnée dans* $\mathrm{H}_{(s)}(\mathrm{V})$ (resp. *dans* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{V})$) *il existe* u *dans* $\mathrm{H}_{(s+m-\bar{r})}(\mathrm{V})$ (resp. *dans* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{V})$) *solution de* $\mathrm{P}u = f$ *dans* V.

Rappelons les grandes lignes de la démonstration qui est basée sur des arguments d'analyse fonctionnelle. Tout d'abord on remarque que ${}^t\mathrm{P}$ vérifie la condition de Lévi (cf. [1]) et donc aussi les hypothèses du corollaire. On en déduit que le noyau

$$\mathrm{N}(\mathrm{K}) = \{u \ ;\ u \in \mathcal{E}'(\mathrm{K}) \quad \text{et} \quad {}^t\mathrm{P}u = 0\}$$

est inclus dans C^∞ si K est assez voisin de $\{x_0\}$. De plus, le théorème du graphe fermé implique la finitude de dim N(K) et comme d'autre part on a $\mathrm{N}(\{x_0\}) = \{0\}$, on en déduit l'existence d'un petit voisinage ouvert V de x_0 tel que l'opérateur ${}^t\mathrm{P}$ soit injectif dans $\mathcal{E}'(\mathrm{V})$. Alors une nouvelle utilisation du théorème du graphe fermé montre l'existence d'une constance C_t pour laquelle on a

$$\|v\|_{t+m-\bar{r}} \leqslant C_t \, \|{}^t\mathrm{P}v\|_t \qquad \text{pour} \qquad v \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{V}),$$

et finalement le théorème d'Hahn-Banach permet d'en déduire l'inclusion

$$\mathrm{P}\,\mathrm{H}_{(s+m-\bar{r})}(\mathrm{V}) \supset \mathrm{H}_{(s)}(\mathrm{V}).$$

La surjection dans $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{V})$ se démontre en vérifiant en plus que l'espace ${}^t\mathrm{P}\ \mathcal{E}'(\mathrm{V})$ est fermé dans $\mathcal{E}'(\mathrm{V})$, on renvoie à [4] pour les détails.

Enfin, explicitons la condition de Lévi sur un exemple très simple. On considère un opérateur de la forme

$$P = A \cdot B + D$$

où $A \in L^p(X)$, $B \in L^q(X)$ et $D \in L^{p+q-1}(X)$ et on suppose que a et b sont des symboles de type principal réels dont les zéros communs définissent une hypersurface N dans $T^*X \backslash 0$:

$$a^{-1}(0) \cap b^{-1}(0) = N.$$

Le symbole principal de P s'annule donc à l'ordre deux sur N, dans ce cas de multiplicité deux un calcul simple (cf. [1]) montre que la condition de Lévi correspond à l'annulation du symbole sous principal $c_P(x, \xi)$ sur N, avec

$$c_P(x, \xi) = p_{m-1} - \frac{1}{2i} \sum_i \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_i \partial \xi_i}.$$

En explicitant on trouve l'équivalence

$$[\text{condition de Lévi pour P}] \Leftrightarrow \left[\frac{i}{2}\{a, b\} = d_{p+q-1} \quad \text{sur} \quad N\right]$$

où l'on posé

$$\{a, b\} = \sum_j (\partial_{\xi_j} a \cdot \partial_{x_j} b - \partial_{\xi_j} b \cdot \partial_{x_j} a).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. CHAZARAIN, Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, *Ann. Inst. Fourier,* ce fascicule.

[2] J. CHAZARAIN, Sur une classe d'opérateurs à caractéristique de multiplicité constante, *Colloque C.N.R.S.* Orsay, *Astérisque* n° 2 et 3.

[3] J.J. DUISTERMAAT, Applications of Fourier Integral Opérators, Séminaire Goulaouic-Schwartz 71/72, n° 27.

[4] J.J. DUISTERMAAT, L. HÖRMANDER, Fourier Integral Operators II, *Acta Math.*, 128 (1972).

[5] L. HÖRMANDER, Fourier Integral Operators I, *Acta Math.*, 127 (1971).

[6] M. SATO, T. KAWAI, M. KASHIWARA, Microfunctions and Pseudo Differential Equations, *Proc. Katata Conference,* Springer Lecture Note in Mathematics n° 287.

Manuscrit reçu le 1er mars 1973
accepté par B. Malgrange.

Jacques CHAZARAIN,
Département de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
06 – Nice