Annales de l'institut Fourier

Jean-Louis Clerc

Sommes de Riesz et multiplicateurs sur un groupe de Lie compact

Annales de l'institut Fourier, tome 24, n° 1 (1974), p. 149-172

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_1_149_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,1 (1974), 149-172

SOMMES DE RIESZ ET MULTIPLICATEURS SUR UN GROUPE DE LIE COMPACT

par Jean-Louis CLERC

Le but principal de cet article est d'étudier les moyennes de Riesz des fonctions définies sur un groupe de Lie compact. Plus précisément, si G est un groupe de Lie compact, et Λ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G, on sait d'après la théorie de Peter-Weyl que l'on obtient une décomposition orthogonale de $L^2(G)$ en sous-espaces invariants minimaux :

$$f \sim \Sigma_{\lambda \in \Lambda} d_\lambda \chi_\lambda * f$$

où χ_λ est le caractère, et d_λ la dimension, d'une représentation de la classe λ. Soit Δ un Laplacien biinvariant sur G (non-unique en général) ; χ_λ est une fonction propre de Δ avec la valeur propre $-\mu_\lambda$. Si Φ est une fonction bornée sur $(0\,, +\infty)$, on appelle Φ-moyennes de la fonction f les fonctions

$$S_R^\Phi(f) \sim \Sigma_{\lambda \in \Lambda} \Phi\left(\frac{\mu_\lambda}{R}\right) d_\lambda \chi_\lambda * f \quad , \quad R > 0\ .$$

Sont particulièrement intéressantes les moyennes associées aux fonctions suivantes :

(1) $\Phi(t) = e^{-t^{1/2}}$ (moyennes d'Abel-Poisson)

(2) $\Phi(t) = e^{-t}$ (moyennes de Gauss-Sommerfeld)

(3_δ) $\Phi_\delta(t) = \begin{cases} (1-t)^\delta & t \leqslant 1 \\ 0 & t \geqslant 1 \end{cases}$ (moyennes de Riesz)

Les cas (1) et (2) sont susceptibles d'un traitement général (par exemple dans le cadre des variétés riemanniennes compactes), lié principalement à la théorie des processus de Markov (voir [10b]). Le type (3_δ) fait intervenir la dimension de l'espace en cause. Si n est la dimension du groupe de Lie, nous montrons en effet que $\delta_0 = (n-1)/2$

est un indice critique pour la convergence en moyenne dans L^p, résultat déjà connu pour le tore à n dimensions (Bochner [1], puis Stein [10a], [10c]). Dans un travail récent, Mme A. Bonami et l'auteur ont étudié un problème voisin dans le cas des sphères, et plus généralement des espaces symétriques compacts de rang 1.

Les résultats positifs (convergence dans L^p, convergence presque partout...) se déduisent d'une inégalité maximale :

$$\sup_{R>0} |S_R^\delta f(x)| \leqslant C \cdot Mf(x) + C' \cdot k * |f|(x) ,$$

où Mf désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood, et k une fonction positive d'intégrale finie sur G. On notera que lorsque $\delta \geqslant n - 1$, Hörmander a obtenu dans [7a] et [7b] une estimation semblable (dans un cadre beaucoup plus vaste d'ailleurs), où ne figure pas le "terme complémentaire" $\int k(xy^{-1}) |f(y)| \cdot dy$. Sommairement on peut dire que la présence de ce terme (pour des valeurs de δ inférieures à $n - 1$) correspond au "mauvais" comportement des noyaux des projecteurs spectraux au voisinage de *points conjugués* au sens de la géométrie riemannienne. D'où une éventuelle généralisation de nos résultats.

Les résultats négatifs s'obtiennent grâce à un théorème de "passage" liant les multiplicateurs (biinvariants) de $L^p(G)$ à certains multiplicateurs de $L^p(R^n)$, où $n = \dim G$. Ce dernier théorème a d'ailleurs son intérêt propre en ce qu'il jette un pont entre l'analyse harmonique des groupes de Lie compacts (non commutative) et l'analyse harmonique de R^n (commutative).

1. Analyse harmonique sur un groupe de Lie compact semi-simple.

Soit G un groupe de Lie réel, semi-simple, compact, connexe et simplement connexe. On verra au § 7 que l'étude dans le cas d'un groupe de Lie compact quelconque n'offre pas de difficultés supplémentaires, grâce aux théorèmes de structure des groupes de Lie.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, n sa dimension. On choisit dans G un tore maximal T, et on désigne par $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie, de dimension

l égale au rang du groupe G. $\mathfrak{t}^*$ désigne le dual de $\mathfrak{t}$, et $i\mathfrak{t}^*$ l'espace vectoriel réel des formes linéaires sur $\mathfrak{t}$ à valeurs imaginaires pures. La forme bilinéaire naturelle de dualité est notée $(\ ,\ )$. Enfin, on munit ces espaces d'un produit scalaire euclidien, obtenu à l'aide de la forme de Killing, et noté $\langle\ ,\ \rangle$.

Soit $R \subset i\mathfrak{t}^*$ le système des racines ; on choisit un ordre sur $\mathfrak{t}^*$, on note R^+ l'ensemble des racines positives et $m = \operatorname{card} R^+$. On a alors $n = 2m + l$. Les racines simples sont notées $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$, et $\mathfrak{W}$ désigne le groupe de Weyl. A chaque racine α, on associe le vecteur H_α, défini par $\forall H \in \mathfrak{t}$, $\langle H, H_\alpha \rangle = (\alpha, iH)$. Notons encore

$$\Delta = \{H \in \mathfrak{t} \mid \exists \alpha \in R,\ (\alpha, H) \in 2i\pi(\mathbf{Z}\setminus\{0\})\};$$

c'est l'ensemble des points conjugués de l'origine dans $\mathfrak{t}$.

Enfin, $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{t}'$) désigne l'ensemble des points *réguliers* de $\mathfrak{g}$ (resp. de $\mathfrak{t}$). En particulier, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \setminus \{H \in \mathfrak{t} \mid \exists \alpha \in R,\ (\alpha, H) \in 2i\pi\mathbf{Z}\}$.

Soit $\mathfrak{t}_e$ le réseau-unité, c'est-à-dire $\mathfrak{t}_e = \{H \in \mathfrak{t} \mid \exp H = e\}$ et $i\mathfrak{t}_e^* = \{\lambda \in i\mathfrak{t}^* \mid \forall H \in \mathfrak{t}_e,\ (\lambda, H) \in 2i\pi\mathbf{Z}\} \cdot i\mathfrak{t}_e^*$ s'identifie ainsi à l'ensemble des caractères du groupe abélien T. Mais c'est aussi l'ensemble des poids des représentations de G. En particulier on définit les poids fondamentaux $(\pi_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ par $2 \cdot \dfrac{\langle \pi_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle} = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant l)$. Ceux-ci forment une base du $\mathbf{Z}$-module $\mathfrak{t}_e^*$, et on pose

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in i\mathfrak{t}_e^* \mid \lambda = \sum_{j=1}^{l} m_j \pi_j,\ m_i \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad m_i \geqslant 0 \right\}.$$

Tout $\lambda \in \Lambda$ est poids dominant d'une représentation unitaire irréductible de G, et réciproquement toute représentation unitaire irréductible est équivalente à une représentation de ce type. Λ s'identifie par conséquent à l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles.

Le caractère χ_λ de la représentation de poids dominant λ est donné par la formule de Weyl : χ_λ est central, de sorte qu'il suffit de le connaître sur T, et alors

$$\chi_\lambda(\exp H) = \frac{\displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{W}} (\det \sigma)\, e^{(\sigma(\lambda+\beta), H)}}{\displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{W}} (\det \sigma)\, e^{(\sigma(\beta), H)}}\ ;$$

on en déduit que la dimension d_λ de l'espace de la représentation est donnée par

$$d_\lambda = \frac{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \lambda + \beta , \alpha \rangle}{\prod_{\alpha \in R^+} \langle \beta , \alpha \rangle} .$$

β désigne ici comme d'habitude $\frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha \left(= \sum_{j=1}^{l} \pi_j \right)$. Notons d'ailleurs que

$$D(\exp H) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{W}} (\text{dét}\ \sigma)\, e^{(\sigma(\beta), H)} = \prod_{\alpha \in R^+} \left(e^{\frac{1}{2}(\alpha , H)} - e^{-\frac{1}{2}(\alpha , H)} \right) =$$

$$= (-2i)^m \prod_{\alpha \in R^+} \sin \frac{(\alpha , iH)}{2} \cdot$$

La mesure de Haar sur G est notée dx, et dh désigne la mesure de Haar sur T, toutes deux de masse 1. Si f est une fonction centrale, alors

$$\int_G f(x)\, dx = \frac{1}{w} \int_T D(h)\, \overline{D(h)}\, f(h)\, dh\ , \quad \text{où} \quad w = \text{card}\ \mathfrak{W} .$$

Soit Δ l'opérateur différentiel associé au Casimir. χ_λ est une fonction propre de Δ (ainsi d'ailleurs que tout coefficient de la représentation λ) pour la valeur propre $-\mu_\lambda$, où $\mu_\lambda = \langle \lambda + \beta , \lambda + \beta \rangle - \langle \beta , \beta \rangle$; on posera pour la suite

$$\nu_\lambda = \langle \lambda + \beta , \lambda + \beta \rangle .$$

2. Calcul du noyau des Φ-moyennes.

Soit Φ une fonction définie et bornée sur $]0 , + \infty)$; on appelle moyennes de type Φ(1) d'une fonction f de $L^2(G)$ les expressions

$$S_R^\Phi f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi \left(\frac{\sqrt{\nu_\lambda}}{R} \right) d_\lambda \chi_\lambda * f\ ;$$

(1) La définition présente une modification par rapport au schéma général esquissé dans l'introduction. Toutefois, en ce qui concerne les résultats de convergence, les deux études sont équivalentes, d'après le deuxième théorème de consistance de Hardy et Zygmund (voir [3] ch. II).

où Φ est une fonction définie et bornée sur $[0\,,+\infty)$ et R un nombre réel strictement positif. Au moins formellement $S_R^\Phi f$ est la convolution avec la distribution centrale

$$s_R^\Phi = \sum_{\lambda\in\Lambda} \Phi\left(\frac{\sqrt{\nu_\lambda}}{R}\right) d_\lambda \chi_\lambda \,.$$

Si Φ est suffisamment décroissante à l'infini(²), la série est sommable et définit une fonction ; explicitement :

$$s_R^\Phi(\exp H) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \Phi\left(\frac{\sqrt{\langle\lambda+\beta\,,\lambda+\beta\rangle}}{R}\right) \frac{\prod_{\alpha\in R^+}\langle\lambda+\beta\,,\alpha\rangle}{\prod_{\alpha\in R^+}\langle\beta\,,\alpha\rangle} \cdot \frac{\sum_{\sigma\in\mathfrak{W}} (\det\sigma)\, e^{(\sigma(\lambda+\beta),H)}}{\sum_{\sigma\in\mathfrak{W}} (\det\sigma)\, e^{(\sigma(\beta),H)}}$$

151^{1}

$$= \frac{C}{\sum_{\sigma\in\mathfrak{W}} (\det\sigma)\, e^{(\sigma(\beta),H)}}$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \Phi\left(\frac{\sqrt{\langle\lambda+\beta\,,\lambda+\beta\rangle}}{R}\right) \prod_{\alpha\in R^+}\langle\lambda+\beta\,,\alpha\rangle \sum_{\sigma\in\mathfrak{W}} (\det\sigma)\, e^{(\sigma(\lambda+\beta),H)} \,.$$

Mais $\prod_{\alpha\in R^+}\langle\lambda+\beta\,,\alpha\rangle$ est antisymétrique par rapport au groupe de Weyl ; par suite dét $\sigma \prod_{\alpha\in R^+}\langle\lambda+\beta\,,\alpha\rangle = \prod_{\alpha\in R^+}\langle\sigma(\lambda+\beta)\,,\alpha\rangle$; de plus σ est une isométrie de $\mathfrak{t}^*$, et

$$\langle\lambda+\beta\,,\lambda+\beta\rangle = \langle\sigma(\lambda+\beta)\,,\sigma(\lambda+\beta)\rangle \,.$$

Donc,

$$s_R^\Phi(\exp H) = \frac{C}{\sum_{\sigma\in\mathfrak{W}} (\det\sigma)\, e^{(\sigma(\beta),H)}} \cdot$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\sigma\in\mathfrak{W}} \Phi\left(\frac{\sqrt{\langle\sigma(\lambda+\beta)\,,\sigma(\lambda+\beta)\rangle}}{R}\right) \prod_{\alpha\in R^+}\langle\sigma(\lambda+\beta)\,,\alpha\rangle\, e^{(\sigma(\lambda+\beta),H)}$$

Pour poursuivre le calcul, nous aurons besoin d'un lemme.

LEMME 1(³). – *Soit* $\mu\in i\mathfrak{t}_e^*$, *tel que* $\prod_{\alpha\in R^+}\langle\mu\,,\alpha\rangle\neq 0$. *Il existe alors un unique* $\lambda\in\Lambda$, *et un unique* $\sigma\in\mathfrak{W}$, *tels que* $\mu=\sigma(\lambda+\beta)$.

(²) La condition $|\Phi(\rho)|\leqslant C\cdot\rho^{-n-\epsilon}$ $(\epsilon>0)$ suffit ; en effet on a $d_\lambda = 0(|\lambda|^m)$, et χ_λ est la trace d'une matrice unitaire de dimension d_λ ; d'où aussi

$$\|\chi_\lambda\|_\infty \leqslant C\cdot|\lambda|^m \;;\quad \text{et} \quad \sum_{\lambda\in\Lambda}|\lambda|^{-l-\epsilon} < +\infty \,.$$

(³) Ce lemme figure dans l'exposé 21 de [9].

L'hypothèse entraîne en effet que μ n'appartient à aucun mur d'une chambre de Weyl ; comme le groupe de Weyl opère transitivement sur les chambres, il en résulte que μ est conjugué d'un élément $\widetilde{\mu}$ situé à l'intérieur de la chambre de Weyl dominante ; mais comme tout élément du groupe de Weyl conserve $\mathfrak{t}_e^*$, $\widetilde{\mu}$ est combinaison linéaire à coefficients entiers des π_i. Comme ces coefficients sont strictement positifs, ils sont supérieurs ou égaux à 1 ; d'où $\widetilde{\mu} = \lambda + \beta$, avec $\lambda \in \Lambda$. L'unicité résulte de ce que le groupe de Weyl est *simplement* transitif sur les chambres.

Par suite, on en déduit aisément que

$$s_{\mathrm{R}}^{\Phi}(\exp \mathrm{H}) = \frac{c^{\mathrm{te}}}{\sum\limits_{\sigma \in \mathcal{W}} (\det \sigma)\, e^{(\sigma(\beta),\mathrm{H})}} \cdot \sum_{\mu \in \mathfrak{t}_e^*} \Phi\left(\frac{\sqrt{\langle \mu , \mu \rangle}}{\mathrm{R}}\right) \prod_{\alpha \in \mathrm{R}^+} \langle \mu , \alpha \rangle \cdot e^{i(\mu,\mathrm{H})}$$

Notons maintenant $\dfrac{\partial}{\partial \alpha}$ la dérivation par rapport au vecteur tangent H_α ; de sorte que $\dfrac{\partial}{\partial \alpha} e^{i(\mu,\mathrm{H})} = i \langle \mu , \alpha \rangle\, e^{i(\mu,\mathrm{H})}$, et par suite

$$s_{\mathrm{R}}^{\Phi}(\exp \mathrm{H}) = \frac{c^{\mathrm{te}}}{\sum\limits_{\sigma \in \mathcal{W}} (\det \sigma)\, e^{(\sigma(\beta),\mathrm{H})}} \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{R}^+} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sum_{\mu \in \mathfrak{t}_e^*} \Phi\left(\frac{\sqrt{\langle \mu , \mu \rangle}}{\mathrm{R}}\right) e^{i(\mu,\mathrm{H})}\right) .$$

Le calcul de moyenne des Φ-moyennes est donc ramené au calcul des Φ-moyennes sur un tore de dimension l. En fait, on ne connaît pas de formule explicite satisfaisante ; on va utiliser un développement en série donné par la formule de Poisson[4].

Lemme 2 (formule de Poisson). – *Soit f une fonction sommable définie sur $\mathfrak{t}$, et* F *une fonction sommable définie sur $\mathfrak{t}^*$, telles que*

1) $|f(x)| \leqslant \mathrm{C} \cdot |x|^{-l-\epsilon} \quad (\epsilon > 0)$

2) $|\mathrm{F}(y)| \leqslant \mathrm{C} \cdot |y|^{-l-\epsilon}$

3) $\mathrm{F}(y) = \displaystyle\int_{\mathfrak{t}} f(x)\, e^{-i(x,y)}\, dx$,

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^l \int_{\mathfrak{t}^*} \mathrm{F}(y)\, e^{i(x,y)}\, dy .$$

(4) Confer. [10c].

Alors $\forall H \in \mathfrak{t} \sum_{\mu \in \mathfrak{t}_e^*} F(\mu)\, e^{i(\mu, H)} = v \cdot \sum_{\zeta \in \mathfrak{t}_e} f(H + \zeta)$, *où* v *désigne la mesure euclidienne d'un domaine fondamental du tore* $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_e$.

En effet les hypothèses 1) et 2) montrent que les séries sont absolument convergentes, et définissent deux fonctions continues $\mathfrak{t}_e$-périodiques. On vérifie, grâce à 3) qu'elles ont même coefficients de Fourier.

Enfin, on pourra expliciter la dérivation au moyen du résultat suivant.

LEMME 3. – *Soit* $\widetilde{f}(x) = f(|x|)$ *une fonction radiale sur* $\mathfrak{t}$, m-*fois différentiable ; alors*

$$\Big(\prod_{\alpha \in R^+} \frac{\partial}{\partial \alpha} \widetilde{f}\Big)(x) = \Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^m f(|x|) \cdot \prod_{\alpha \in R^+} \alpha(x) .$$

Démonstration. – Soit $P(D)$ un opérateur différentiel homogène d'ordre m à coefficients constants sur $\mathfrak{t}$. Alors il existe des polynômes uniques P_h, homogènes de degré $2h - m$, ne dépendant que de P et tels que :

$$P(D)\, \widetilde{f}(x) = \Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^m f(|x|)\, P(x) + \sum_{h<m} \Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big)^h f(|x|)\, P_h(x) ,$$

comme on le voit facilement par récurrence. Si maintenant $P(D) = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\partial}{\partial \alpha}$, on doit montrer que les polynômes P_h qui sont homogènes et de degrés strictement inférieurs à m sont identiquement nuls. Mais $\widetilde{f}$ est invariante par les isométries de $\mathfrak{t}$, en particulier par le groupe de Weyl, pendant que l'opérateur $\prod_{\alpha \in R^+} \frac{\partial}{\partial \alpha}$ est antisymétrique par rapport au groupe de Weyl. On en déduit que les polynômes P_h sont eux-mêmes antisymétriques par rapport au groupe de Weyl. Mais un polynôme non identiquement nul antisymétrique par rapport au groupe de Weyl est nécessairement divisible par $\prod_{\alpha \in R^+} \alpha$, comme on le voit en utilisant le fait que l'anneau $C[X_1, \ldots, X_l]$ est factoriel (cf. [9], exposé 19, p. 04). D'où le lemme.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat final du calcul.

THEOREME 1. – *Soit* Φ *une fonction bornée sur* $[0, +\infty)$, *satisfaisant à la condition*

$$|\Phi(\rho)| \leqslant C\rho^{-n-\epsilon} ; \tag{1}$$

posons $$\varphi(r) = 2\pi \cdot r^{-\left(\frac{l-2}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \Phi(\rho)\, J_{\frac{l-2}{2}}(r\rho)\, \rho^{l/2}\, d\rho .$$

Supposons de plus que φ *satisfasse aux conditions*

$$\forall p,\ 0 \leqslant p \leqslant m \quad \left| \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^p \varphi(r) \right| \leqslant C \cdot r^{-l-p-\epsilon} \tag{2}$$

alors

$$s_{\mathrm{R}}^{\Phi}(\exp \mathrm{H}) = \frac{c^{\mathrm{te}}}{\sum_{\sigma \in \mathfrak{W}} (\text{dét}\ \sigma)\, e^{(\sigma(\beta), \mathrm{H})}} \cdot \mathrm{R}^n$$

$$\sum_{\zeta \in \mathfrak{l}_e} \left(\prod_{\alpha \in \mathrm{R}^+} \alpha(\mathrm{H} + \zeta) \right) \left(\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^m \varphi \right) (\mathrm{R}\,|\mathrm{H} + \zeta|) .$$

On utilise le lemme 2 pour transformer $\sum_{\mu \in \mathfrak{l}_e^*} \Phi\left(\frac{|\mu|}{\mathrm{R}}\right) e^{i(\mu, \mathrm{H})}$, puis on dérive sous le signe Σ, ce qui est possible grâce aux conditions (2) ; enfin, il ne reste dans la dérivation qu'un seul terme grâce au lemme 3.

3. Estimation des noyaux de Riesz.

Soit Q un domaine fondamental (parallélogramme des périodes) du tore T, centré en 0. On appellera Q_0 un voisinage fixé de l'origine 0 dans Q, qui soit à une distance strictement positive des points conjugués dans $\mathfrak{l}$, par exemple

$$\mathrm{Q}_0 = \{\mathrm{H} \in \mathrm{Q} \mid \forall \alpha \in \mathrm{R}^+ ,\ |(\alpha, \mathrm{H})| \leqslant \pi\} .$$

Pour obtenir des estimations des noyaux s_{R}^{Φ}, on va utiliser la formule du théorème 1, en supposant – ce qui est bien sûr possible – que $\mathrm{H} \in \mathrm{Q}$. On distinguera alors dans la sommation le terme $\zeta = 0$, qui représente en quelque sorte le terme prépondérant, et le "reste" $\sum_{\zeta \neq 0}$. La même méthode a été utilisée par Stein dans [10c].

THEOREME 2. — *Soit* $\delta > l - 1$, *et*

$$s_R^\delta = \sum_{|\lambda+\beta|<R} \left(1 - \frac{\langle \lambda+\beta, \lambda+\beta \rangle}{R^2}\right)^\delta d_\lambda \chi_\lambda .$$

Alors $|s_R^\delta| \leqslant \sigma_R^\delta + \tau_R^\delta$, *où* σ_R^δ *et* τ_R^δ *sont les fonctions centrales données par :*

$$\sigma_R^\delta(\exp H) = \begin{cases} C \cdot R^n & si\ |H| < \dfrac{1}{R} \\ C \cdot R^{\left(\frac{n-1}{2}\right)-\delta} |H|^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}-\delta} & si\ |H| > \dfrac{1}{R} \text{ et } H \in Q_0 \\ 0 & si\ H \notin Q_0 \end{cases}$$

$$\tau_R^\delta(\exp H) = C \cdot R^{\left(\frac{n-1}{2}-\delta\right)} |D(\exp H)|^{-1}.$$

Remarque. — On peut également obtenir des estimations d'autres noyaux, par exemple si $\Phi(t) = e^{-t}$, on obtient une estimation analogue de S_R^Φ, avec

$$\sigma_R(\exp H) = \begin{cases} C \cdot R^n & si\ \ |H| < \dfrac{1}{R} \\ C \cdot R^{-1} |H|^{-n-1} & si\ \ |H| > \dfrac{1}{R} \quad \text{et} \quad H \in Q_0 \\ 0 & si\ \ H \notin Q_0 \end{cases}$$

$$\tau_R(\exp H) = R^{-1} |D(\exp H)|^{-1}$$

Posons $\Phi_\delta(\rho) = \begin{cases} (1-\rho^2)^\delta, & \rho \leqslant 1 \\ 0, & \rho \geqslant 1 \end{cases}$; la fonction φ_δ associée se calcule aisément (voir [1]) et

$$\varphi_\delta(\rho) = C \cdot \rho^{-l/2-\delta} J_{l/2+\delta}(\rho) .$$

Grâce aux formules habituelles sur les fonctions de Bessel, on obtient aisément que $\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^p \varphi_\delta = C \cdot \rho^{-l/2-\delta-p} J_{l/2+\delta+p}(\rho)$.

Par suite si $\delta > \dfrac{l-1}{2}$, on voit en utilisant l'estimation à l'infini des fonctions de Bessel que les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites. On en déduit que

$s_{\mathrm{R}}^{\delta}(\exp \mathrm{H}) =$

$$= \mathrm{C} \cdot \mathrm{R}^n \prod_{\alpha \in \mathrm{R}^+} \frac{(\alpha , \mathrm{H})}{\sin \dfrac{(i\alpha , \mathrm{H})}{2}} \cdot (\mathrm{R} \,|\, \mathrm{H} \,|)^{-\frac{n}{2}-\delta} \; \mathrm{J}_{\frac{n}{2}+\delta}(\mathrm{R} \,|\, \mathrm{H} \,|) + \mathrm{I}_{\mathrm{R}}^{\delta}(\mathrm{H})$$

où

$$\mathrm{I}_{\mathrm{R}}^{\delta}(\mathrm{H}) = \mathrm{C} \cdot \mathrm{R}^n \cdot |\, \mathrm{D}(\exp \mathrm{H}) \,|^{-1} \cdot$$

$$\sum_{\substack{\zeta \in \mathfrak{l}_e \\ \zeta \neq 0}} \prod_{\alpha \in \mathrm{R}^+} (\alpha , \mathrm{H} + \zeta) (\mathrm{R} \,|\, \mathrm{H} + \zeta \,|)^{-\frac{n}{2}-\delta} \; \mathrm{J}_{\frac{n}{2}+\delta}(\mathrm{R} \,|\, \mathrm{H} + \zeta \,|) \,.$$

Majorons d'abord le terme principal :

a) si $|\, \mathrm{H} \,| < \dfrac{1}{\mathrm{R}}$, on majore $\left| \dfrac{(\alpha , \mathrm{H})}{\sin \dfrac{(i\alpha , \mathrm{H})}{2}} \right|$ par une constante, et comme $\mathrm{R} \,|\, \mathrm{H} \,| < 1$, l'estimation des fonctions de Bessel près de l'origine montre que $|\, (\mathrm{R} \,|\, \mathrm{H} \,|)^{-\frac{n}{2}-\delta} \; \mathrm{J}_{\frac{n}{2}+\delta}(\mathrm{R} \,|\, \mathrm{H} \,|) \,| \leqslant c^{te}$. Le terme est donc $0(\mathrm{R}^n)$.

b) si $\mathrm{H} \in \mathrm{Q}_0$, on majore encore $\left| \dfrac{(\alpha , \mathrm{H})}{\sin \dfrac{(i\alpha , \mathrm{H})}{2}} \right|$ par une constante, mais on utilise maintenant l'estimation à l'infini des fonctions de Bessel $|\, \mathrm{J}_{\frac{n}{2}+\delta}(\mathrm{R} \,|\, \mathrm{H} \,|) \,| \leqslant \mathrm{C} \cdot (\mathrm{R} \,|\, \mathrm{H} \,|)^{-\frac{1}{2}}$. D'où la majoration désirée.

c) enfin si $\mathrm{H} \notin \mathrm{Q}_0$, alors $|\, \mathrm{H} \,|$ est minorée et majorée ; on majore $\alpha(\mathrm{H})$ par une constante, et la fonction de Bessel comme en b). D'où la majoration par $\mathrm{C} \cdot \mathrm{R}^{(\frac{n-1}{2}-\delta)} \,|\, \mathrm{D}(\exp \mathrm{H}) \,|^{-1}$.

Dans la majoration de $\mathrm{I}_{\mathrm{R}}^{\delta}$, notons d'abord que l'hypothèse $\mathrm{H} \in \mathrm{Q}$ entraîne qu'il existe deux constantes strictement positives c_1 , c_2 , telles que $\forall \, \zeta \in \mathfrak{l}_e$, $\zeta \neq 0$, $c_1 \,|\, \zeta \,| < |\, \zeta + \mathrm{H} \,| < c_2 \,|\, \zeta \,|$.

Utilisant l'estimation des fonctions de Bessel à l'infini, il vient :

$$|S_R^\delta(H)| \leqslant C \cdot |D(\exp H)|^{-1} R^n \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{\zeta \in \mathfrak{T}_e \\ \zeta \neq 0}} |\zeta|^m \cdot R^{-\frac{n}{2}-\delta} |\zeta|^{-\frac{n}{2}-\delta} \cdot R^{-\frac{1}{2}} \cdot |\zeta|^{-\frac{1}{2}} .$$

$$\leqslant C \cdot |D(\exp H)|^{-1} R^{\left(\frac{n-1}{2}-\delta\right)} \cdot \sum_{\substack{\zeta \in \mathfrak{T}_e \\ \zeta \neq 0}} |\zeta|^{m-\frac{n}{2}-\delta-\frac{1}{2}} .$$

Mais comme

$$m - \frac{n}{2} - \delta - \frac{1}{2} = -\frac{l}{2} - \delta - \frac{1}{2} < -\frac{l}{2} - \frac{l-1}{2} - \frac{1}{2} < -l ,$$

la série est convergente. D'où le résultat.

Remarque. – Ces majorations vont se révéler très suffisantes pour établir les principaux résultats de convergence. Notons toutefois que les résultats de localisation ne peuvent s'obtenir grâce à ces estimations. Dans le cas de $G = SU(2)$ qui se réalise aussi comme Σ_3, on pourra comparer ces estimations avec celles obtenues dans [2] pour les sommes de Cesaro sur Σ_n.

4. Résultats de convergence pour les sommes de Riesz.

A – *Convergence en moyenne.*

THEOREME 3. – *Soit* $\delta > \dfrac{n-1}{2}$;

alors $S_R^\delta f \to f$ *dans* $L^p \ (1 \leqslant p < +\infty)$.

Pour cela, on estime simplement $\| s_R^\delta \|_1$.

$$\| s_R^\delta \|_1 \leqslant C \cdot \int_Q |s_R^\delta(\exp H)| \cdot |D(\exp H)|^2 \, dH .$$

Or $\qquad |s_R^\delta(\exp H)| \leqslant |\sigma_R(\exp H)| + |\tau_R(\exp H)|$.

Pour σ_R, on utilise seulement le fait que

$$|D(\exp H)|^2 \leqslant C \cdot |H|^{2m} .$$

Ensuite $\int_{|H|<\frac{1}{R}} R^n \cdot |H|^{2m} dH \leqslant C \cdot R^n \cdot \left(\frac{1}{R}\right)^{2m} \cdot \left(\frac{1}{R}\right)^{l} \leqslant C$

$$\int_{\substack{|H|>\frac{1}{R} \\ H \in Q_0}} R^{\left(\frac{n-1}{2}-\delta\right)} |H|^{-\frac{n}{2}-\delta-\frac{1}{2}} |H|^{2m} dH \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot R^{\frac{n-1}{2}-\delta} \int_{\frac{1}{R}}^{+\infty} \rho^{-\frac{n}{2}-\delta-\frac{1}{2}+2m+l-1} d\rho$$

$$\leqslant C \cdot R^{\frac{n-1}{2}-\delta} \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{n-1}{2}-\delta} \leqslant C ,$$

compte tenu de ce que $\delta > \dfrac{n-1}{2}$.

Pour τ_R, il vient immédiatement

$$\int_T |\tau_R(h)| \, |D(h)|^2 \, dh \leqslant C \cdot R^{\left(\frac{n-1}{2}\right)-\delta}$$

D'où finalement $\| s_R^\delta \|_1 \leqslant C$, uniformément en R.

De ce résultat, on déduit que $\| S_R^\delta f \|_p \leqslant C \cdot \| f \|_p$. Mais si f est combinaison linéaire *finie* de coefficients de représentations irréductibles, alors $S_R^\delta f \to f$, en particulier dans L^p. Or ce sous-ensemble est partout dense dans L^p $(1 \leqslant p < +\infty)$. D'où le théorème.

Le théorème 3 dégage ainsi l'indice critique $\delta_0 = \dfrac{n-1}{2}$, qui est le même que dans le cas du tore T^n (voir [1]), ou de la sphère Σ_n (voir [2]). On va voir maintenant que si $\delta > \dfrac{n-1}{2}$, on peut obtenir des résultats de convergence supplémentaires.

B – *Inégalité maximale.*

THEOREME 4. – *Soit* $\delta > \dfrac{n-1}{2}$. *Alors*

$$\sup_{R>0} |S_R^\delta f(x)| \leqslant C(Mf(x) + k * |f|(x)) ,$$

où $Mf(x) = \sup_{\rho>0} \dfrac{\int_{d(x,y)<\rho} |f(y)|\,dy}{\int_{d(x,y)<\rho} dy}$ *est la fonction maximale de Hardy-Littlewood, et* k *est une fonction positive et sommable sur* G.

Somme S_R^δ commute à l'action de G, et que la distance est invariante, il suffit de démontrer l'inégalité lorsque $x = e$. De sorte que

$$S_R^\delta f(e) = \int_G s_R^\delta(x) f(x^{-1})\,dx .$$

L'inégalité obtenue au § 3 se récrit, compte-tenu de ce que les fonctions qui interviennent sont centrales :

$$|s_R^\delta(x)| \leqslant \eta_R^\delta(d(x, e)) + k(x) ,$$

où

$$\eta_R^\delta(\rho) = R^{\left(\frac{n-1}{2}-\delta\right)}(R^{-2}+\rho^2)^{\frac{-\left(\frac{n-1}{2}\right)-\delta-1}{2}}$$

$$k(\exp H) = C \cdot |D(\exp H)|^{-1} .$$

Remarquons que η_R^δ est une fonction décroissante, et que

$$\int_0^{+\infty} \eta_R^\delta(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho = R^{\left(\frac{n-1}{2}-\delta\right)} \int_0^{+\infty} (R^{-2}+\rho^2)^{\frac{-\left(\frac{n-1}{2}\right)-\delta-1}{2}} \rho^{n-1}d\rho$$

$$= \int_0^{+\infty} (1+t^2)^{\frac{-\left(\frac{n-1}{2}\right)-\delta-1}{2}} t^{n-1}\,dt < +\infty ,$$

car quand $t \to \infty$, $(1+t^2)^{\frac{-\left(\frac{n-1}{2}\right)-\delta-1}{2}} \cdot t^{n-1} \sim t^{\left(\frac{n-1}{2}-\delta\right)-1}$

Le théorème résulte alors du lemme suivant, dont la version dans $\mathbf{R}^n$ est classique.

LEMME 4. – *Soit* $\mathfrak{M}$ *une variété riemannienne, compacte et connexe, de dimension* n, *et soit* φ *une fonction décroissante et positive sur* $[0, +\infty)$. *Alors*

$$\left| \int_{\mathfrak{M}} f(y)\,\varphi(d(x\,,y))\,dv(y) \right| \leqslant \mathrm{C} \left(\int_0^{+\infty} \varphi(\rho)\,\rho^{n-1}\,d\rho \right) \cdot \mathrm{M}f(x)\ ,$$

où Mf *est la fonction maximale de Hardy-Littlewood, et la constante* C *ne dépend ni de f, ni de φ.*

Soit Ω un ouvert du plan tangent en x à $\mathfrak{M}$, identifié à $\mathbf{R}^n$, tel que la carte exponentielle soit un difféomorphisme de Ω sur un ouvert de $\mathfrak{M}$ dont le complémentaire soit de v-mesure nulle (v désigne la mesure riemannienne canonique). Alors par définition,

$$\mathrm{I} = \int_{\mathfrak{M}} f(y)\,\varphi(d(x\,,y))\,dv(y) =$$

$$= \int_{\Omega} f(\exp_x \xi)\,\varphi(|\xi|)\,|\,\text{dét}\,d\,\exp_x(\xi)\,|\,d\xi\ .$$

Posons provisoirement

$$g(\xi) = \begin{cases} f(\exp_x \xi)\,|\,\text{dét}\,d\,\exp_x(\xi)\,| & \text{si} \quad \xi \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \xi \notin \Omega\ . \end{cases}$$

On déduit du résultat sur $\mathbf{R}^n$ que

$$|\,\mathrm{I}\,| \leqslant \left(\int_0^{+\infty} \varphi(\rho)\,\rho^{r-1}\,d\rho \right) \cdot g^*(0), \quad \text{où}$$

$$g^*(0) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|\xi|<r} |\,f(\exp_x \xi)\,|\,|\,\text{dét} \quad \exp_x(\xi)\,|\,d\xi\ .$$

L'intégrale vaut précisément $\int_{d(x,y)<r} |\,f(y)\,|\,dv(y)$, et, au moins pour r assez petit, la v-mesure de la boule de rayon r est de l'ordre de r^n. De sorte que $g^*(0) \leqslant \mathrm{C} \cdot \mathrm{M}f(x)$.

C – *Convergence presque-partout.*

L'inégalité maximale obtenue permet de déduire facilement des résultats de convergence.

THEOREME 5. – *Soit* $\delta > \dfrac{n-1}{2}$. *Il existe une constante* A *telle que, pour tout* $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$, $m\left\{\sup_{\mathrm{R}} |\,\mathrm{S}_{\mathrm{R}}^{\delta} f\,| > \alpha\right\} \leqslant \dfrac{\mathrm{A}}{\alpha}\,\|\,f\,\|_1$. *Les moyen-*

nes de Riesz d'ordre δ d'une fonction de $L^1(G)$ *convergent presque partout vers f.*

L'inégalité faible résulte de l'inégalité maximale, et des propriétés de la fonction maximale de Hardy-Littlewood(5). La convergence presque partout s'en déduit classiquement.

COROLLAIRE. – *Soit* $1 < p \leqslant 2$; $\delta > (n-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$, *il existe une constante* A_p *telle que, pour tout* $f \in L^p(G)$,

$$\| \sup_R | S_R^\delta f | \|_p \leqslant A_p \| f \|_p .$$

Les moyennes de Riesz d'ordre δ d'une fonction de $L^p(G)$ *convergent presque partout.*

On commence par montrer le résultat dans L^2, grâce à un résultat de Kaczmarcz (voir [7a]), puis on interpole.

D – *Inégalité de Zygmund ; fonctions g ; théorème de multiplicateurs.*

THEOREME 6. – *Soit* $p \geqslant 1$, *et* $\delta \geqslant \frac{n-1}{2}$. *Il existe une constante* A_p *telle que pour toute suite de fonctions* f_k *et toute suite de nombres réels* $R_k > 0$,

$$\| (\Sigma \, | S_{R_k}^\delta f_k |^2)^{\frac{1}{2}} \|_p \leqslant A_p \| (\Sigma \, | f_k |^2)^{\frac{1}{2}} \|_p .$$

Pour une démonstration, voir [2].

Définissons d'abord la fonction g construite à partir du noyau de Gauss : soit $\Gamma_t = \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-t\langle \lambda+\beta, \lambda+\beta \rangle} d_\lambda \cdot \chi_\lambda$; on pose, pour $f \in L^1(G)$,

$g(f)(x) = \left(\int_0^{+\infty} t \left| \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_t * f \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$. Notons que

$$\Gamma_t = e^{-t\langle \beta, \beta \rangle} \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-\mu_\lambda \cdot t} d_\lambda \chi_\lambda = e^{-t\langle \beta, \beta \rangle} \cdot G_t \, .$$

(5) Pour un exposé très général des propriétés de la fonction maximale, voir [4].

G_t est précisément le noyau envisagé par Stein dans [10b] ; par suite il est facile de voir que les résultats qu'il contient pour G_t sont encore valables pour Γ_t. Par exemple

THEOREME 7. – *Soit* $p > 1$; *il existe une constante* A_p *telle que*

i) $\forall f \in L^p$, $\| g(f) \|_p \leqslant A_p \| f \|_p$

ii) si $\int_G f(x)\, dx = 0$, $\| f \|_p \leqslant A_p \| g(f) \|_p$.

Suivant la méthode exposée dans [2], notamment au § 7, il n'est pas difficile de démontrer le théorème de multiplicateurs suivant, où $N = \left[\frac{n}{2} \right] + 1$.

THEOREME 8. – *Soit* m *une fonction définie et de classe* $\mathcal{C}^N$ *sur* $[0, +\infty)$, *satisfaisant aux conditions :*

(A_0) $|m(\rho)| \leqslant A < +\infty$

(A_N) $\sup \frac{1}{R} \int_0^R \rho^N \left| \left(\frac{d}{d\rho}\right)^N m(\rho) \right| d\rho \leqslant A < +\infty$,

alors la distribution $\sum_{\lambda \in \Lambda} m(\mu_\lambda)\, d_\lambda\, \chi_\lambda$ *est un convoluteur de* L^p $(1 < p < +\infty)$.

Pour les multiplicateurs radiaux, ce théorème améliore partiellement le résultat de N. Weiss [13], qui porte lui sur des multiplicateurs biinvariants quelconques.

5. Le théorème de passage.

On revient à la situation du premier paragraphe. Nous aurons besoin dans la suite d'une formule d'intégration en "coordonnées polaires" sur $\mathfrak{g}$ [6] (voir [6], ch. X, § 1) :

$$\int_{\mathfrak{g}} f(Z)\, dZ = \frac{1}{w} \int_{\mathfrak{t}'} \left| \prod_{\alpha \in R^+} (\alpha, H) \right|^2 \int_{G/T} f(\mathrm{Ad}\,\bar{g}\,(H))\, d\bar{g}_T\, dH$$

[6] On utilisera en fait la formule tout à fait analogue sur $i\mathfrak{g}^*$.

où on note par $\overline{g}$ une classe d'équivalence dans G/T, et où $d\overline{g}_{\mathrm{T}}$ est *la* mesure de masse 1 sur G/T invariante sous l'action de G. Notons enfin qu'une fonction sur $\mathfrak{g}$ invariante sur Ad G s'identifie par restriction à une fonction sur $\mathfrak{t}$ invariante par le groupe de Weyl $\mathfrak{W}$.

Soit m une fonction mesurable et bornée sur $i\mathfrak{g}^*$ invariante par Ad(G). On note M l'opérateur de $\mathrm{L}^2(\mathfrak{g})$ défini par $\widehat{\mathrm{M}f} = m \cdot \hat{f}$, la transformée de Fourier étant la transformée usuelle sur un espace euclidien de dimension n. On peut associer à m une famille de multiplicateurs centraux de $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$, en posant pour tout $\epsilon > 0$ $m_\epsilon(\lambda) = m(\epsilon\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. On note M_ϵ l'opérateur de $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ associé, défini par

$$f \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} d_\lambda \chi_\lambda * f \qquad \mathrm{M}_\epsilon f = \sum_{\lambda \in \Lambda} d_\lambda m_\epsilon(\lambda) \chi_\lambda * f .$$

Avec ces notations, on a le théorème de passage suivant :

THEOREME 9. – *Soit m une fonction continue et bornée sur $i\mathfrak{g}^*$, invariante par* Ad G ; *supposons que, pour chaque $\epsilon > 0$, M_ϵ s'étende en un opérateur continu dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{G})$, et que $\sup_{\epsilon > 0} \| \mathrm{M}_\epsilon \|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^p)} < +\infty$. Alors* M *s'étend en un opérateur continu de $\mathrm{L}^p(\mathfrak{g})$.*

Pour faire la démonstration, on peut tout d'abord supposer que m a une décroissance à l'infini en $\mathrm{C}_1 \cdot e^{-\mathrm{C}_2 |\mathrm{Z}|}$, ceci en utilisant une régularisation par le noyau de Poisson (voir [2]). Cela étant, le lecteur vérifiera sans difficulté que toutes les intégrales qui interviennent dans la suite sont absolument convergentes ; on fera donc libre usage de la formule de Fubini.

Pour montrer que M s'étend en un opérateur continu de $\mathrm{L}^p(\mathfrak{g})$, il suffit de prouver l'existence d'une constante A, telle que pour toutes fonctions f, g qu'on peut supposer nulles hors d'un compact et telles que $\|f\|_p \leqslant 1$, $\|g\|_{p'} \leqslant 1$ $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1\right)$, on ait :

$$|\mathrm{I}| = \left| \int_{\mathfrak{g}} \mathrm{M}f(\mathrm{X})\, g(\mathrm{X})\, d\mathrm{X} \right| \leqslant \mathrm{C} .$$

Mais il vient

$$\mathrm{I} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \int_{\mathfrak{g}} \int_{\mathfrak{g}} \int_{i\mathfrak{t}^*} \int_{\mathrm{G/T}} m(\xi)\, e^{(\mathrm{X}-\mathrm{Y},\, \mathrm{A}d\,\overline{g}(\xi))} \left| \prod_{\alpha \in \mathrm{R}^+} \langle \alpha , \xi \rangle \right|^2 f(\mathrm{X})\, g(\mathrm{Y})\, d\overline{g}_{\mathrm{T}}\, d\xi\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y} .$$

Pour R assez grand, on peut définir sans ambiguité des fonctions f_R et g_R sur G, vérifiant $f_R(\exp X) = f(RX)$, $g_R(\exp Y) = g(RY)$, pour $X, Y \in \operatorname{Supp} f \cup \operatorname{Supp} g$.

$$\| f_R \|_p = \left(\int |f(RX)|^p \, |\text{dét}\, d \exp_e(X)| \, dX \right)^{1/p} \leqslant C \cdot R^{-n.1/p} .$$

De même $\| g_R \|_{p'} \leqslant C \cdot R^{-n.1/p'}$.

Utilisant l'hypothèse du théorème, avec $\epsilon = 1/R$, on en déduit que

$$\left| \int_G M_\epsilon f_R(x) \, g_R(x) \, dx \right| \leqslant C \cdot R^{-n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)} = C \cdot R^{-n} .$$

Posons $I_R = R^n \int_G M_\epsilon f_R(x) \, g(x) \, dx$; on vient de voir que $|I_R| \leqslant C$, où C ne dépend ni de R, ni de f et g. Nous allons montrer que lorsque R tend vers l'infini I_R tend vers I (à une constante près), d'où le résultat.

Récrivons d'abord I_R en utilisant la carte exponentielle, puis l'homothétie de rapport R :

$$I_R = R^n \int_G \int_G \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\epsilon(\lambda) \, d_\lambda \, \chi_\lambda(xy^{-1}) \, f_R(x) \, g_R(y) \, dx \, dy$$

$$= R^n \int_{\mathfrak{g}} \int_{\mathfrak{g}} \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\epsilon(\lambda) \, d_\lambda \, \chi_\lambda(\exp X \exp - Y) \, f(RX) \, g(RY)$$

$$|\text{dét}\, d \exp_e X| \, |\text{dét}\, d \exp_e Y| \, dX \, dY$$

$$= \int_{\mathfrak{g}} \int_{\mathfrak{g}} \frac{1}{R^n} \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\epsilon(\lambda) \, d_\lambda \, \chi_\lambda \left(\exp \frac{X}{R} \exp - \frac{Y}{R} \right) f(X) \, g(Y) \, |$$

$$\left| \text{dét}\, d \exp_e \frac{X}{R} \right| \left| \text{dét}\, d \exp_e \frac{Y}{R} \right| dX \, dY .$$

Par application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue (f et g sont nulles hors d'un compact, et on a déjà noté que la majoration uniforme en R est facile pour les termes restants grâce à la décroissance à l'infini de m), il nous suffit de montrer que

$$\frac{1}{R^n} \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\epsilon(\lambda) \, d_\lambda \, \chi_\lambda \left(\exp \frac{X}{R} \exp - \frac{Y}{R} \right) \to \frac{C^{te}}{w} \int_{i\mathfrak{t}^*} m(\xi)$$

$$\int_{G/T} e^{(X - Y, \, Ad\bar{g}\, \xi)} \, d\bar{g}_T \left| \prod_{\alpha \in R^+} \langle \alpha , \xi \rangle \right|^2 d\xi .$$

Soit ξ un élément de la chambre de Weyl dominante $i\mathfrak{t}_+^*$; on note $[\xi]$ l'élément de A obtenu de la façon suivante : si $\xi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant l} \xi_i \pi_i$, alors $\xi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant l} [\xi_i] \pi_i$. Si $\lambda \in \Lambda$, on note Q_λ le "parallélipipède au nord-est de λ", c'est-à-dire $Q_\lambda = \{\xi \in i\mathfrak{t}_+^*, [\xi] = \lambda\}$. Cela étant, définissons une fonction z_R sur $i\mathfrak{t}^* \times \mathfrak{g}$ comme suit : z_R est invariante par $\mathfrak{W}$ en la première variable, et si $\xi \in i\mathfrak{t}_+^*$, alors

$$z_R(\xi, Z) = \frac{1}{R^{2m}} d_{[R\xi]} \chi_{[R\xi]}(\exp Z)(^7) .$$

Si $\lambda \in \Lambda$, il est clair que z_R est constante sur le parallélipipède (en ξ) $\frac{1}{R} Q_\lambda$, de sorte que $\int_{\frac{1}{R} \cdot Q_\lambda} z_R(\xi, Z)\, d\xi = \frac{\mathrm{vol}(Q_\lambda)}{R^l} \cdot z_R(\lambda, Z)$. Par suite,

$$\frac{1}{R^n} \sum_{\lambda \in \Lambda} m_{1/R}(\lambda)\, d_\lambda\, \chi_\lambda \left(\exp \frac{X}{R} \exp - \frac{Y}{R}\right) =$$
$$= C^{te} \int_{i\mathfrak{t}^*} m\left(\frac{1}{R}[R\xi]\right) z_R\left(\xi, Z\left(\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}\right)\right) d\xi ,$$

où $Z\left(\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}\right)$ est tel que $\exp Z\left(\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}\right) = \exp \frac{X}{R} \cdot \exp \frac{Y}{R}$.

Quand R tend vers l'infini, $m\left(\frac{1}{R}[R\xi]\right) \to m(\xi)$, grâce à la continuité de m. Par suite, il nous suffit de montrer que pour presque tous X, Y, ξ,

$$z_R\left(\xi, Z\left(\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}\right)\right) \to \left| \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{\langle \alpha, \beta \rangle} \right|^2 \int_{G/T} e^{(X - Y, Ad\bar{g}\,\xi)}\, d\bar{g}_T .$$

X et Y ayant leur support dans un compact,

$$\exp \frac{X}{R} \exp - \frac{Y}{R} = \exp\left(\frac{X - Y}{R} + 0\left(\frac{1}{R^2}\right)\right) \quad \text{(voir [6], p. 96)} .$$

Or, on a la formule asymptotique suivante :

(7) Rappelons que $m = \mathrm{card}\, R^+$, de sorte que $n = 2m + l$.

LEMME 1. – *Soit* $Z \in \mathfrak{g}'$ *; alors*

$$z_R\left(\xi, \frac{Z}{R} + 0\left(\frac{1}{R^2}\right)\right) \to \left|\prod_{\alpha \in R^+} \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{\langle \alpha, \beta \rangle}\right|^2 \cdot \int_{G/T} e^{(Z, Ad\bar{g})}\, d\bar{g}_T$$

(et même uniformément pour Z dans un compact de $\mathfrak{g}'$).

Notons d'abord que les deux membres sont (comme fonctions de Z) invariants par AdG ; par suite on peut supposer que $Z \in \mathfrak{t}'$. Pour R assez grand, $Z + R \cdot O\left(\frac{1}{R^2}\right)$ est dans $\mathfrak{g}'$, et sa "composante radiale" est $Z + 0\left(\frac{1}{R}\right)$, grâce à la régularité de la "décomposition polaire" en $(\bar{e}, Z)$. Par suite il suffit de montrer le lemme lorsque $Z \in \mathfrak{t}'$ et $0\left(\frac{1}{R^2}\right)$ est à valeurs dans $\mathfrak{t}$. Alors, d'après les formules classiques de Hermann Weyl,

$$z_R\left(\xi, \frac{Z}{R} + 0\left(\frac{1}{R^2}\right)\right) = \frac{1}{R^{2m}} \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\langle [R\xi] + \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \alpha \rangle} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sum_{\sigma \in \mathfrak{W}} \text{dét}\, \sigma\, e^{(\sigma([R\xi] + \beta), \frac{Z}{R} + 0(\frac{1}{R^2}))}}{\sum_{\sigma \in \mathfrak{W}} \text{dét}\, \sigma\, e^{(\sigma(\beta), \frac{Z}{R} + 0(\frac{1}{R^2}))}} .$$

Pour calculer la limite quand R tend vers $+\infty$, d'abord

$$\frac{\prod_{\alpha \in R^+} \langle [R\xi] + \beta, \alpha \rangle}{R^m} \to \prod_{\alpha \in R^+} \langle \xi, \alpha \rangle ;$$

ensuite

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{W}} (\text{dét}\, \sigma)\, e^{(\sigma([R\xi] + \beta), \frac{Z}{R} + 0(\frac{1}{R^2}))} \to \sum_{\sigma \in \mathfrak{W}} \text{dét}\, \sigma\, e^{(\sigma(\xi), Z)} ;$$

enfin comme

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{W}} (\text{dét}\, \sigma)\, e^{(\sigma(\beta), H)} = \prod_{\alpha \in R^+} \left(e^{\frac{(\alpha, H)}{2}} - e^{-\frac{(\alpha, H)}{2}}\right),$$

il vient

$$\frac{1}{R^m} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{W}} \text{dét}\, \sigma\, e^{i\langle \sigma(\beta) , \frac{Z}{R} + 0\left(\frac{1}{R^2}\right)\rangle}} \to \frac{1}{\prod\limits_{\alpha \in R^+} (\alpha , Z)} \, ;$$

d'où

$$z_R\left(\xi , \frac{Z}{R} + 0\left(\frac{1}{R^2}\right)\right) \to \frac{\prod\limits_{\alpha \in R^+} \langle \xi , \alpha \rangle}{\prod\limits_{\alpha \in R^+} (Z , \alpha)} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{W}} \text{dét}\, \sigma\, e^{(\sigma(\xi) , Z)} \, .$$

Le lemme 1 est démontré, moyennant le cas particulier suivant d'un lemme dû à Harish-Chandra (voir [12], p. 204).

LEMME 2. — $\forall Z \in \mathfrak{t}$, $\forall \xi \in i\mathfrak{t}^*$

$$\prod_{\alpha \in R^+} \langle \alpha , \xi \rangle \prod_{\alpha \in R^+} (\alpha , Z) \int_{G/T} e^{(\mathrm{Ad}\, \bar{g}\, \xi , Z)}\, d g_T =$$

$$= \prod_{\alpha \in R^+} \langle \alpha , \beta \rangle \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{W}} \text{dét}\, \sigma\, e^{(\sigma(\xi) , Z)} \, .$$

Remarque. — Le lemme 1 peut s'interpréter de la façon suivante(8) : $\frac{1}{R^{2m}} \left| \prod\limits_{\alpha \in R^+} \frac{\langle \alpha , \beta \rangle}{\langle \alpha , \xi \rangle} \right|^2 d_{[R\xi]}\, \chi_{[R\xi]}$ est une zonale de l'espace symétrique $G \times G/G$, normalisée de manière que sa valeur au neutre tend vers 1 quand $R \to +\infty$, pendant que $\int_{G/T} e^{(\mathrm{Ad}\, \bar{g}\, \xi , .)}\, d\bar{g}_T$ est la zonale de l'espace symétrique euclidien $G * \mathfrak{g}/G \approx \mathfrak{g}$ qui vaut 1 à l'origine (on fait agir G sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe). En faisant tendre R vers l'infini, on voit alors qu'un "passage à la limite" sur les zonales est possible. On notera l'analogie de ce lemme avec la formule classique de Melher-Heine (voir [11], p. 190) dont on retrouve un cas particulier lorsque $G = SU(2) \approx \Sigma_3$.

6. Conséquences.

THEOREME 10. — *Soit* G *un groupe de Lie réel, compact, semi-simple, connexe et simplement connexe.*

(8) Pour les notions et les résultats utilisés dans cette remarque, voir [5], ch. X.

a) *les sommes partielles radiales* $S_R f = \sum_{\mu_\lambda \leqslant R^2} d_\lambda \chi_\lambda * f$ *ne sont pas uniformément bornées dans* $L^p(G)$ $(p \neq 2)$; *en particulier, il existe des fonctions* f *de* $L^p(G)$ $(p \neq 2)$ *pour lesquelles* $(S_R f)_{R>0}$ *ne converge pas vers* f *dans* L^p.

b) *Soit* δ, $0 < \delta < \dfrac{n-1}{2}$; *les sommes de Riesz* $S_R^\delta f$ *ne sont pas uniformément bornées dans* L^p, *lorsque* $1 \leqslant p \leqslant \dfrac{2n}{n+1+2\delta}$ *ou* $p \geqslant \dfrac{2n}{n-1-2\delta}$.

Le théorème 2 se démontre par l'absurde, le cas de $\mathbf{R}^n$ étant classique depuis les travaux de Fefferman ([3], [4]) ; pour a), on observera que la démonstration du théorème 1 n'exige pas que m soit continue en tout point.

7. Cas général.

Soit d'abord $G = G' \times T''$, où G' est semi-simple et T'' un tore ; de manière générale, l'indice $'$ est affecté à tout ce qui se rapporte à G', pendant que l'indice $''$ se rapporte à T''. On choisit sur T'' une métrique et un Laplacien, tels que Λ'' apparaisse comme un réseau orthogonal et que les valeurs propres de Δ'' soient $-\langle \lambda'', \lambda'' \rangle$. Les caractères des représentations irréductibles sont les produits $\chi_{\lambda'} \cdot \chi_{\lambda''}$, et peuvent être regardés comme des fonctions sur $T' \times T''$. Le raisonnement qui conduit au théorème 1 ne doit subir que des modifications triviales ; les théorèmes de convergence sont eux aussi valables.

Soit enfin G un groupe de Lie compact et connexe ; alors il possède un revêtement du type précédent (voir [13]) ; soit $\widetilde{G}$ ce revêtement et $\pi : \widetilde{G} \to G$ la projection canonique. Toute fonction sur G se relève en une fonction sur $\widetilde{G}$, avec même norme L^p $(1 \leqslant p < +\infty)$. Enfin les représentations unitaires irréductibles de G sont identiques à celles de $\widetilde{G}$ qui sont égales à l'identité sur le noyau de π. Les théorèmes de convergence sur $\widetilde{G}$ s'appliquent donc aussi aux fonctions de G.

Il n'y a pas non plus de modifications substantielles à faire pour obtenir le théorème de passage ; le théorème 10 en particulier est encore valable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BOCHNER, Summation of multiple Fourier series by spherical means. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40 (1936), 175-207.

[2] A. BONAMI et J.L. CLERC, Sommes de Cesaro et multiplicateurs des développements en harmoniques sphériques, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 183 (1973), 223-263.

[3] CHANDRASEKHARAN et MINAKSHISUNDARAM, Typical means, Bombay 1952.

[4] R. COIFMAN et G. WEISS, Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes, *Lecture Notes in mathematics*, n° 242. Springer Verlag (1971).

[5a] C. FEFFERMAN, Inequalities for strongly singular convolution operators. *Acta Math.*, 124 (1970), 9-36.

[5b] C. FEFFERMAN, The multiplier problem for the ball, *Amer. J. Math.*, 94 (1971), 330-336.

[6] S. HELGASON, Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press New-York (1962).

[7a] L. HÖRMANDER, On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators, Recent Advances in the Basic Sciences, *Yeshiva University Conference*, Nov. 1966, 155-202.

[7b] L. HÖRMANDER. The spectral function of an elliptic operator, *Acta Math.*. 121 (1968), 193-218.

[8] KUNG SUN, Fourier analysis on unitary groups, V ; spherical summability and Fourier integrals, *Chinese Math.*, 7 (1965), 1-20.

[9] Séminaire S. Lie.

[10a] E.M. SEIN, Localization and summability of multiple Fourier series, *Acta Math.*, 100 (1958), 93-147.

[10b] E.M. STEIN, Topics in harmonic analysis. *Annals of Math. Studies* 63. Princeton Univ. Press, New-Jersey (1970).

[10c] E.M. STEIN, On certain exponential sums arising in multiple Fourier series, *Ann. of Math.*, 73 (1961), 87-109.

[11] G. SZEGÖ, Orthogonal polynomials, *Amer Math. Soc. Coll.* Publ. n° 23, 1939.

[12] G. WARNER, Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I, Springer-Verlag 1972.

[13] N. WEISS, L^p-estimates for bi-invariant operators on compact Lie groups, *Amer. J. of Math.*, 94 (1972), 103-118.

Manuscrit reçu le 29 janvier 1973
accepté par G. Choquet.

Jean-Louis CLERC,
Mathématiques, Bât. 425
91405 – Orsay