Annales de l'institut Fourier

Robert Moussu

Fernand Pelletier

Sur le théorème de Poincaré-Bendixson

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 1 (1974), p. 131-148

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_1_131_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,1 (1974), 131-148

SUR LE THÉORÈME DE POINCARE-BENDIXSON

par R. MOUSSU et F. PELLETIER

Introduction.

Une des premières questions qui se pose lorsque l'on cherche à classifier qualitativement les feuilletages F de codimension 1, d'une variété compacte M^n est : quelle est l'adhérence d'une feuille L de F. Pour y répondre on est amené à étudier les sous-ensembles minimaux $\mathfrak{M}$ de F. Ils sont de l'un des types suivants :

i) $\mathfrak{M}$ est une feuille compacte de F.

ii) $\mathfrak{M}$ est la variété M^n (toute feuille de F est dense dans M).

iii) $\mathfrak{M}$ est un ensemble minimal exceptionnel s'il n'est pas de l'un des types précédents.

Comme le montre les exemples classiques de A. Denjoy et R. Sacksteder, il semble difficile de classifier les feuilletages de M qui possèdent des ensembles minimaux exceptionnels. Il est donc intéressant de connaître des conditions suffisantes de non existence de tel ensemble. Rappelons le résultat fondamental suivant :

THEOREME DE SACKSTEDER [16]. – *Un feuilletage* F *de classe* $r \geqslant 2$ *d'une variété compacte possède un ensemble minimal exceptionnel seulement s'il a une holonomie linéaire non nulle.*

B. Raymond [12] a construit un feuilletage F_0 de $D^2 \times S^1$ qui possède un ensemble minimal exceptionnel. Ainsi, tout feuilletage F d'une variété M^3 fermée peut être modifié par tourbillonnement en un feuilletage F' qui possède un ensemble minimal exceptionnel. Par construction F' possède au moins un cycle évanouissant [8]. Ainsi, dans la recherche de conditions suffisantes de non existence d'ensemble minimal exceptionnel pour les feuilletages d'une variété M, il est naturel de supposer que ces feuilletages n'ont pas de cycle évanouissant. Dans [6], il est montré que cette condition est suffisante lorsque π_1(M) est abélien. Un des buts de cet article est d'améliorer ce résultat avec le suivant.

THEOREME. – *Un feuilletage* F *de classe* $r > 2$, *sans cycle évanouissant d'une variété compacte* M *possède un ensemble minimal exceptionnel seulement si* π_1(M) *a une croissance exponentielle (Définition 1).*

En fait, les théorèmes 1 et 2 que nous démontrerons sont plus précis. Le premier répond à une conjecture de Plante [11]. Ils sont respectivement démontrés dans les paragraphes 2 et 3. Dans le paragraphe 4 nous appliquons ces résultats à des problèmes de classification. Enfin, dans un appendice nous démontrons une proposition sur la croissance de boules dans une variété qui est énoncée dans le paragraphe 1.

1. Préliminaires sur les fonctions croissances.

Soient f et g deux applications croissantes de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$. On dit que f domine g s'il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$ et γ telles que

$$g(x) \leqslant \alpha f(\beta x + \gamma) \quad \text{pour} \quad x \in \mathbf{R}^+ .$$

Si f domine g et g domine f nous dirons que f et g ont le même type de croissance.

DEFINITION 1. – *Une application f croissante de* $\mathbf{R}^+$ *dans* $\mathbf{R}^+$ *a une croissance*

i) *polynomiale si f est dominée par une fonction polynôme.*

ii) *exponentielle si f domine l'application* $x \to e^x$.

iii) *non-exponentielle si* $\lim_{x \to \infty} \inf(f(x))^{1/x} \leqslant 1$.

Croissance des groupes : Soit $S = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ un système de générateurs d'un groupe G de type fini. On appelle fonction croissance de G (associée à S) toute application croissante $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ telle que :

"$f(n)$ est le nombre d'éléments de G représentables par des mots de S de longueur inférieure ou égale à n".

Il est montré dans [3] que $l_G = \lim_{x \to \infty} (f(x))^{1/x}$ existe toujours et que toutes les fonctions croissances de G ont le même type de croissance. Ainsi on dit d'un groupe qu'il a une croissance polynomiale, . . .

Croissances des boules dans une variété : Soient V^p une variété de classe $r > 2$ munie d'une métrique riemannienne g complète et Vol_k, la mesure définie à partir de g sur les sous-variétés de dimension k de V^p. Un sous-ensemble A de V^p est de k-mesure nulle s'il existe une sous-variété W^k de V^p qui contient A telle $\mathrm{Vol}_k(A) = 0$.

DEFINITION 2. – [18] *Un domaine "standard"* D *de* V^p *est un compact qui possède les propriétés suivantes :*

i) *l'intérieur* $\overset{\circ}{D}$ *de* D *est une sous-variété de* V^p *de dimension* p.

ii) *la frontière* ∂D *est la réunion de* 2 *sous-ensembles* ∂D_0 *et* ∂D_1 *tels que :*

– ∂D_1 *est un compact de* $(p - 1)$*-mesure nulle.*

– *en tout point* $x \in \partial D_0$, *il existe une carte* $h : U \to \mathbf{R}^n$ *telle que* $h(\partial D_0 \cap U) = \mathbf{R}^{p-1} \times \{0\}$ *et* $h(U \cap D) = \mathbf{R}^{p-1} \times (-\infty, 0]$.

Dans la suite,on note Vol D et Vol ∂D respectivement la p-mesure de D et la $(p - 1)$-mesure de ∂D_0. Dans [18] Whitney montre que le théorème de Stokes s'applique aux domaines "standard".

Soient a un point de V^p, d la distance sur V^p définie par g et $B_a(R) = \{x \in V^p / d(a, x) \leq R\}$, la boule de centre a et de rayon R dans V^p.

PROPOSITION 1. – *La boule* $B_a(R)$ *est un domaine standard de* V^p *pour* $R \in \mathbf{R}^+ - A$ *où* A *est un sous-ensemble dénombrable de* $\mathbf{R}^+$ *et l'application*

$$\mathrm{Vol}\, B_a : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+ \text{ définie par } \mathrm{Vol}\, B_a : \mathbf{R} \to \mathrm{Vol}\, B_a(R)$$

a une croissance exponentielle si

$$\liminf_{\substack{R \to \infty \\ R \in \mathbf{R}^+ - A}} \frac{\mathrm{Vol}\, \partial B(R)}{\mathrm{Vol}\, B(R)} > 0$$

Supposons maintenant que $p : V^p \to W^p$ est un revêtement galoisien de la variété compacte W^p et que la métrique g de V^p est l'image réciproque par p d'une métrique riemannienne $\overline{g}$ de W^p.

PROPOSITION 2. — *L'application* Vol $B_a : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *a le même type de croissance que le groupe* $G = \pi_1(W^p, p(a))/p_{\#}(\pi_1(V^p, a))$.

La démonstration de la proposition 1 étant longue et sans intérêt pour la suite, sera traitée dans l'appendice.

La démonstration de la proposition 2 est bien connue lorsque V^p est simplement connexe [4]. Nous allons seulement montrer comment elle peut-être généralisée.

Démonstration de la proposition 2. — Soit $K \subset V^p$ un compact fondamental du revêtement contenant a. Identifions G au groupe des automorphismes du revêtement. Alors $S_k = \{h \in G/h(K) \cap K \neq \phi\}$ est un système de générateurs de G et le sous-ensemble

$$C = \bigcup_{h \in G - S_K} h(K)$$

est un fermé de V^p disjoint de K. Soient ν leur distance et δ le diamètre de K. Alors, $k \in \mathbf{N}$ étant fixé si $d(a, h(K)) < \nu k + \delta$, h peut s'écrire comme un mot de longueur k sur S_K. Ainsi une fonction croissance f_K de G construite sur S_K domine Vol B_a. Réciproquement, si ϵ et μ sont deux constantes telles que

$$B_a(\epsilon) \subset K \quad \text{et} \quad \mu \geqslant \sup\{d(a, h(a)),\ h \in S_K\}$$

alors, on a quel que soit $h \in G$ de longueur k :

$$d(a, h(a)) \leqslant \mu k \quad \text{et} \quad h(B_a(\epsilon)) \subset B_a(\mu k + \epsilon)$$

On en déduit que Vol B_a domine f_K puisque :

$$f_K(k) \cdot \mathrm{Vol}\, B_a(\epsilon) \leqslant \mathrm{Vol}\, B_a(\mu k + \epsilon) .$$

2. Conjecture de Plante.

Avant d'énoncer le résultat, précisons quelques hypothèses. Dans toute la suite nous désignons

– par M^n une variété compacte, de dimension n, orientée, munie d'une métrique riemannienne g et par Ω la forme volume sur M correspondant à g et à l'orientation de M.

– par F un feuilletage de codimension 1, de classe $r > 2$, de M qui est transversalement orienté par un champ de vecteurs unitaires X, normal aux feuilles de F.

– par $i_L : L \hookrightarrow M$ l'immersion d'une feuille L de F dans M et par d_L la distance dans L correspondant à la métrique g_L induite sur L par g.

La $(n-1)$ forme Ω_L sur L définie par :

$$\Omega_L = i_L^*(i_X \Omega) \quad \text{avec} \quad i_X \Omega(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \Omega(X_1, \ldots, X_{n-1}, X)$$

est une forme volume sur L qui correspond à g_L. Finalement, a étant un point fixé de L nous notons

$$B_a(R) = \{x \in L / d_L(x, a) \leqslant R\}$$

la boule de centre a et de rayon R dans L.

DEFINITION 3. – [9] *L'application* Vol B_a ; $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *définie par* Vol $B_a(R) = \int_{B_a(R)} \Omega_L$ *s'appelle la fonction croissance de* L *en* a.

Le type de croissance de Vol B_a étant indépendant de $a \in L$ et de g nous dirons dans la suite qu'une feuille a une croissance polynomiale, ou...

THEOREME 1. – *Dans un feuilletage* F (*de classe* > 2) *qui possède un ensemble minimal exceptionnel, il existe au moins une feuille* F *qui a une croissance de type exponentiel*(1).

Ce théorème répond à la conjecture de [11] Il peut essentiellement être appliqué aux feuilletages F définis par une action localement libre $\phi : M \times G \to M$ d'un groupe de Lie G sur M (voir [10] et [11]) de la façon suivante. Soit g_G une métrique riemannienne sur G, invariante à gauche. On peut choisir sur M une métrique riemannienne g telle que pour toute feuille L de F (orbite de ϕ), g_G soit l'image réciproque par $\phi / G \times \{a\}$ $(a \in L)$ de g_L. L'application

(1) En fait, il suffit que F soit de classe $\geqslant 2$ et que pour toute feuille L de F l'immersion $i_L : L \hookrightarrow M^n$ soit de classe C^3.

$$\phi_L : G \to L \quad \text{définie par} \quad \phi_L(x) = \phi(x, a)$$

est un revêtement et localement une isométrie. Soit $B_e(R)$ la boule dans G de centre e et de rayon R. Alors l'application $\mathrm{Vol}\, B_e : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ domine l'application $\mathrm{Vol}\, B_a$. Si $\mathrm{Vol}\, B_e$ a une croissance non exponentielle, nous dirons que G n'est pas exponentiel.

Le théorème précédent permet d'affirmer qu'un feuilletage F défini par une action localement libre d'un groupe de Lie non exponentiel n'a pas d'ensemble minimal exceptionnel.

COROLLAIRE 1. – *Un feuilletage (de classe* > 2), *sans feuille compacte est sans holonomie si chacune de ses feuilles a une croissance non exponentielle. Réciproquement les feuilles d'un feuilletage sans holonomie ont une croissance polynomiale.*

De la remarque précédente et du théorème de Tischler [17] et [5] on déduit la généralisation suivante d'un résultat bien connu sur les actions localement libres de $\mathbf{R}^{n-1}$.

COROLLAIRE 2. – *Soit* $\phi : G \times M^n \to M^n$ *une action localement libre d'un groupe de Lie non exponentiel* (dim $G = n - 1$). *Alors si* ϕ *n'a pas d'orbite compacte la variété* M *est un fibré sur* S^1 *et* G *est un revêtement de la fibre type de cette fibration.*

La démonstration de ces résultats reposent sur un théorème de [10] que l'on peut énoncer de la façon suivante.

LEMME 1. – *Soit* L *une feuille de* F *appartenant à un ensemble minimal qui possède la propriété* (1) *suivante : il existe une suite* $\{D_k\}\, k \in \mathbf{N}$ *de domaines "standard" qui sont des boules dans* L *de centre* $a \in L$ *dont le rayon tend vers l'infini avec k telle que*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\mathrm{Vol}\, \partial D_k}{\mathrm{Vol}\, D_k} = 0 .$$

Alors, toute courbe transverse à F *qui coupe* L *représente un élément non nul de* $H_1(M)$.

En fait, dans [10] le résultat est démontré pour des domaines "standard" D_k qui sont des sous-variétés à bord de M^n. Mais le théorème de Stokes pouvant s'appliquer sur des domaines "standard", il est facile de voir que la démonstration de Plante est encore valable dans ce cas.

Désignons par $\phi : M \times \mathbf{R} \to M$, le groupe à un paramètre engendré par le champ de vecteurs X normal à F. Soit α un lacet dans une feuille L, en un point a. L'image réciproque de F par l'application

$$\overline{\alpha} : S^1 \times \mathbf{R} \to M \quad \text{définie par} \quad \overline{\alpha}(\theta , t) = \phi(\alpha(\theta) , t)$$

est un feuilletage F_α de $S^1 \times \mathbf{R}$. Nous dirons que l'holonomie qui correspond à α est contractante du côté positif (resp. négatif) s'il existe $\epsilon > 0$, tel que $S^1 \times \{0\}$ est la seule feuille compacte de F qui coupe $S^1 \times [0 , \epsilon)$ (resp. $S^1 \times (-\epsilon , 0]$).

LEMME 2. — *Soit α un lacet en a dans une feuille* L.

i) *Si β est une courbe transverse à* F *qui représente un élément de $\pi_1(M , a)$, il existe une courbe γ, transverse à* F, *homotope à $\alpha \cdot \beta$.*

ii) *Si* L *n'est pas propre et si α a une holonomie contractante d'un côté au moins, il existe une courbe γ transverse à* F *qui coupe* L *et qui est homologue à zéro dans* M.

Démonstration. — La première partie de ce lemme est démontrée dans [5] page 26. Supposons maintenant que α a une holonomie contractante du côté positif et que $\alpha(\theta_0) = \phi(\theta_0 , 0) = a$. Une feuille de F qui coupe $\{\theta_0\} \times (0 , \epsilon)$ vient s'enrouler en spiralant autour de $S^1 \times \{0\}$. Ainsi, par tout point $b = \phi(a , t)$ avec $0 < t < \epsilon$ il passe une courbe β transverse à F qui est homologue à α. Puisque L n'est pas une feuille propre on peut supposer que b est un point de L.

Soit c un chemin dans L qui joint a et b. Le lacet $\alpha' = c \cdot \alpha \cdot c^{-1}$ représente un élément de $\pi_1(M , b)$ et il est homologue à la courbe transverse β. D'après la première partie du lemme il existe une courbe γ transverse à F homotope à $\alpha' . \beta^{-1}$. Cette courbe est donc homologue à zéro et elle coupe L en b.

Démonstration du théorème 1. — Supposons que F possède un ensemble minimal exceptionnel $\mathcal{M}$. Le théorème de Sacksteder implique qu'il existe un lacet α dans une feuille L de $\mathcal{M}$ qui a une holonomie linéaire non nulle. Puisque L n'est pas propre et que l'holonomie correspondant à α est contractante, il existe d'après le lemme 2 une courbe transverse à F qui coupe L et qui est homologue à zéro.

Le lemme 1 implique que L ne possède pas la propriété (1). On peut en particulier affirmer que

$$\liminf_{\substack{R\to\infty \\ R\in \mathbf{R}^+ - A}} \frac{\operatorname{Vol} \partial B_a(R)}{\operatorname{Vol} B_a(R)} > 0$$

La feuille L a une croissance exponentielle d'après la proposition 1.

Démonstration du corollaire 1. – Puisque F ne possède pas de feuille compacte, ni d'ensemble minimal exceptionnel chacune de ses feuilles appartient à un ensemble minimal (voir l'introduction).

Supposons que F ait une holonomie non nulle. Il existe au moins un lacet α dans une feuille L de F qui a une holonomie contractante du côté positif ou du côté négatif. Le raisonnement de la démonstration du théorème 1 implique que L a une croissance exponentielle.

La réciproque est une conséquence immédiate de la proposition 3 du paragraphe suivant.

Remarque 1. – Dans les exemples classiques de feuilletages F ayant un invariant de Godbillon-Vey non nul, les feuilles de F ont une croissance exponentielle. Il serait intéressant de savoir si la non nullité de l'invariant G.V. pour un feuilletage F est liée à l'existence dans F d'une feuille qui a une croissance exponentielle.

3. La π_1-croissance des feuilles.

Dans tout ce paragraphe nous ne considérons que des feuilletages sans cycle évanouissant. Rappelons un résultat de [8]. Un feuilletage F de M (compacte) n'a pas de cycle évanouissant si et seulement si : quelle que soit la feuille L de F et $a \in L$, le morphisme :

$$i_L \; : \pi_1(L\,,a) \hookrightarrow \pi_1(M\,,a)$$

est injectif. Nous considérons alors que $\pi_1(L\,,a)$ est un sous groupe de $\pi_1(M\,,a)$.

DEFINITION 4. – *Soit* L *une feuille de* F *et* a *un point de* L. *Nous dirons que* L *a une* π_1*-croissance non exponentielle (resp. polynomiale), si* $\pi_1(L\,,a)$ *possède un sous groupe* H *distingué dans* $\pi_1(M\,,a)$, *tel que* $\pi_1(M\,,a)/H$ *ait une croissance non exponentielle* (resp. polynomiale). *Dans le cas contraire nous dirons que* L *a une* π_1*-croissance exponentielle.*

Le type de π_1-croissance d'une feuille L est indépendant du point $a \in$ L choisi pour le définir. Il est bien connu qu'un feuilletage sans holonomie n'a pas de cycle évanouissant et que, pour chacune de ses feuilles L, $\pi_1(M)/\pi_1(L)$ est un groupe abélien. Tout groupe abélien ayant une croissance polynomiale, toutes les feuilles d'un feuilletage sans holonomie ont une π_1-croissance polynomiale.

THEOREME 2. — *Dans un feuilletage* F *(sans cycle évanouissant) qui possède un ensemble minimal exceptionnel, il existe au moins une feuille qui a une π_1-croissance exponentielle.*

COROLLAIRE 3. — *Un feuilletage* F *(sans cycle évanouissant) sans feuille compacte est sans holonomie si et seulement si ses feuilles ont une π_1-croissance non exponentielle (ou polynomiale).*

Ces deux résultats sont des conséquences immédiates de ceux du paragraphe précédent et de la proposition suivante qui lie la croissance et la π_1-croissance d'une feuille.

PROPOSITION 3. — *Soit* L *une feuille d'un feuilletage* F *(sans cycle évanouissant) et a un point de* L, *alors la π_1-croissance de* L *domine la croissance de* L (de Vol B_a). *Plus précisément, si* H *est un sous-groupe de $\pi_1(L, a)$ distingué dans $\pi_1(M, a)$ toute fonction croissance du groupe quotient $\pi_1(M, a)/H$ domine la fonction croissance* Vol B_a *de* L.

La réciproque du corollaire 1 est une conséquence évidente de cette proposition et du fait que toutes les feuilles d'un feuilletage sans holonomie ont une π_1-croissance polynomiale.

Plante a démontré la proposition 3 dans le cas particulier $H = \{e\}$. Dans le cas général la démonstration se faisant de la même façon nous n'en indiquerons que les grandes lignes.

Démonstration de la proposition 3. — Soit $p : \hat{M} \to M$ le revêtement galoisien de M associé à H. Désignons par $\hat{F}$, $\hat{X}$, $\hat{\phi}$, $\hat{\Omega}$, $\hat{g}$ les images réciproques par p de F, X, ϕ, Ω, g (voir paragraphe 1). Soit L une feuille de F et a un point de L.

La restriction de p à la feuille $\hat{L}$ de $\hat{F}$ passant par $a \in p^{-1}(a)$ est un revêtement qui est localement une isométrie pour les métriques

g_L et $g_{\hat{L}}$ (induites par g et $\hat{g}$ sur L et $\hat{L}$ respectivement). Soient $B_{\hat{a}}(R)$ et $D_{\hat{a}}(R)$ les boules de centre $\hat{a}$ et de rayon R dans $\hat{L}$ et $\hat{M}$ respectivement. Nous avons quel que soit $R \in \mathbf{R}^+$

$$B_a(R) \subset p(B_{\hat{a}}(R)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}\, B_a(R) \leqslant \mathrm{Vol}\, B_{\hat{a}}(R)$$

D'autre part, il résulte de la proposition 2 que toute fonction croissance de $\pi_1(M, a)/H$ domine l'application, $\mathrm{Vol}\, D_{\hat{a}} : R \to \mathrm{Vol}\, D_{\hat{a}}(R)$.

Ainsi, pour achever la démonstration, il suffit de montrer l'existence d'une constance $\alpha > 0$ telle que

$$\alpha \cdot \mathrm{Vol}\, B_{\hat{a}}(R) \leqslant \mathrm{Vol}\, D_{\hat{a}}(R+1) \tag{2}$$

Un raisonnement de Plante [9] permet de montrer cette inégalité si l'affirmation suivante est vraie :

A) La restriction de $\hat{\phi}$ à $B_{\hat{a}}(R) \times [-1, 1]$ est un plongement dans $D_{\hat{a}}(R+1)$. En effet on a alors :

$$\mathrm{Vol}\, D_{\hat{a}}(R+1) \geqslant \mathrm{Vol}\, \phi(B_{\hat{a}}(R) \times [-1, 1]) = \int_{B_{\hat{a}}(R)} \int_{-1}^{1} i_{\hat{X}} \hat{\Omega}\, dt$$

Ainsi il existe une application $g : \hat{M} \to \mathbf{R}^+$ telle que

$$\int_{B_{\hat{a}}(R)} \int_{-1}^{1} i_{\hat{X}} \hat{\Omega}\, dt = \int_{B_{\hat{a}}(R)} g\, \hat{\Omega}_{\hat{L}}$$

La compacité de M implique que pour $x \in \hat{M}$:

$$g(x) \geqslant \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}\, D_{\hat{a}}(R+1) \geqslant \alpha\, \mathrm{Vol}\, B_{\hat{a}}(R)$$

Pour démontrer l'affirmation A, démontrons tout d'abord que $\hat{\phi}/\hat{L} \times \mathbf{R}$ est un plongement de $\hat{L} \times \mathbf{R}$ dans $\hat{M}$. Il suffit pour cela de montrer que toute trajectoire $\hat{\phi}_x$ de $\hat{\phi}$, passant par un point $x \in \hat{L}$, ne recoupe pas $\hat{L}$ en un point x_1 distinct de x. Supposons le contraire et soit c un chemin dans $\hat{L}$ qui joint x_1 et x et qui passe par le point de base $\hat{a}$. En lissant le lacet $c \cdot \hat{\phi}_x/[0, t_1]$, où $\hat{\phi}(x, t_1) = x_1$, on obtient une courbe $\hat{\beta}$ passant par a qui est transverse au feuilletage F.

La projection $\beta = p \circ \hat{\beta}$ est une courbe transverse à F qui représente un élément de $p_{\#}(\pi_1(\hat{M}, \hat{a})) = H \subset \pi_1(L, a)$. Soit alors α un lacet en a homotope à β. D'après le lemme 2, il existe une courbe γ transverse à F, homotope à $\alpha^{-1} \cdot \beta \sim 0 \in \pi_1(M, a)$. S'il en était ainsi le feuilletage posséderait au moins un cycle évanouissant. Il nous suffit maintenant de montrer que

$$\hat{\phi}(B_{\hat{a}}(R) \times [-1, 1]) \subset D_{\hat{a}}(R + 1)$$

Soient $\hat{d}$ et $d_{\hat{L}}$ les distances dans $\hat{M}$ et $\hat{L}$. Le champ de vecteurs $\hat{X}$ tangent à $\hat{\phi}$ étant unitaire on a pour $(x, t) \in B_{\hat{a}}(R) \times [-1, 1]$

$$\hat{d}(\hat{a}, \hat{\phi}(x, t)) \leqslant \hat{d}(\hat{a}, x) + t \leqslant d_{\hat{L}}(\hat{a}, x) + t \leqslant R + 1$$

4. Applications.

a) *Feuilletages des variétés fibrées sur* S^1 *de fibre* T^{n-1}.

Soient f un difféomorphisme de T^{n-1} et T^n_f le fibré sur S^1 de fibre T^{n-1} obtenu en identifiant $T^{n-1} \times \{0\}$ et $T^{n-1} \times \{1\}$ dans $T^{n-1} \times [0, 1]$ par f. Le difféomorphisme f est homotope au difféomorphisme "linéaire" $\overline{f}$ défini de la façon suivante :

Soit $\overline{f}_\#$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{n-1}$ qui prolonge l'homorphisme $f_\# : \pi_1(T^{n-1}) \to \pi_1(T^{n-1}) \equiv Z^{n-1}$ et $p : \mathbf{R}^{n-1} \to T^{n-1}$ l'application de revêtement canonique. Alors $\overline{f}$ est déterminé par la relation $p \circ \overline{f}_\# = \overline{f} \circ p$. Avec ces notations nous avons le lemme suivant[3]:

LEMME 3. – *Le groupe fondamental de* T^n_f *a une croissance polynomiale si toutes les valeurs propres de* $\overline{f}_\#$ *ont un module égal à* 1. *Réciproquement, si une valeur propre de* $\overline{f}_\#$ *a un module distinct de* 1, $\pi_1(T_f)$ *a une croissance exponentielle.*

COROLLAIRE 4. – *Soit* f *un difféomorphisme de* T^{n-1} *tel que les valeurs propres de* $\overline{f}_\#$ *sont toutes de module égal à 1. Un feuilletage* F *sans cycle évanouissant de* T_f *n'a pas d'ensemble minimal exceptionnel ; de plus, s'il ne possède pas de feuilles compactes c'est un feuilletage sans holonomie.*

Soient f un difféomorphisme "linéaire" de T^2 et F_α un feuilletage linéaire de T^2 (défini par $\alpha\, dx + dy = 0$) invariant par f. On appelle suspension de F_α par f le feuilletage de T^3_f obtenu en identifiant par f les feuilletages induits par $F_\alpha \times [0, 1]$ sur $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$. Si maintenant F est un feuilletage de $T^2 \times [0, 1]$, C^∞ tangent au bord nous notons F_f le feuilletage de T^3_f obtenu en identifiant par f les feuilles $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ de F.

THEOREME 3. – *Soient* M^3 *un fibré sur* S^1 *de fibre* T^2 *dont le groupe fondamental a une croissance polynomiale et* F *un feuilletage sans composante de Reeb de* M^3. *Alors il existe un difféomorphisme linéaire* f *de* T^2 *tel que* M^3 *est difféomorphe à* T^3_f *et tel que*

i) F *est topologiquement conjugué à une suspension d'un feuilletage linéaire de* T^2 *s'il n'a pas de feuille compacte.*

ii) *Si* F *possède au moins une feuille compacte, il est topologiquement conjugué à un feuilletage* F'_f *où* F' *désigne un feuilletage de* $T^2 \times [0,1]$ *sans composante de Reeb.*

Ce théorème classifie complètement les feuilletages F de M^3 sans composante de Reeb puisque les feuilletages de $T^2 \times [0,1]$ sans composante de Reeb sont classifiés par le théorème 2.II de [7].

Démonstration. – D'après le théorème de Novikov [8], F n'a pas de cycle évanouissant et nous pouvons appliquer le corollaire 4.

i) Si F n'a pas de feuilles compactes, c'est un feuilletage sans holonomie et toutes ses feuilles sont difféomorphes. Deux cas sont possibles (voir [5]).

– les feuilles de F sont homéomorphes à $\mathbf{R}^2$. Alors M est le tore T^3 et F est conjugué à un feuilletage linéaire à T^3 (voir [14]).

– les feuilles de F sont des cylindres $S^1 \times \mathbf{R}$. Désignons par T^2_0 une fibre de la fibration de M^3 sur S^1. D'après [15] il existe une C^∞-isotopie qui rend T^2_0 transverse à F. Le feuilletage induit par F sur T^2_0 étant sans holonomie, il est topologiquement conjugué à un feuilletage linéaire. Ceci entraîne le résultat de i).

ii) Soit L une feuille compacte de F. Montrons que L est homéomorphe à T^2. $\pi_1(L)$ est un sous-groupe du groupe polycyclique $\pi_1(M^3)$ qui possède un sous-groupe nilpotent H d'indice fini (voir [3] et [19]). Ainsi $\pi_1(L)$ a une croissance polynomiale puisque c'est aussi un groupe polycyclique dont $H \cap \pi_1(L)$ est un sous-groupe nilpotent d'indice fini [19]. Or T^2 est la seule surface fermée non simplement connexe dont le groupe fondamental a une croissance polynomiale.

Un raisonnement de [5] page 86 permet alors de montrer l'existence d'une fibration $p : M^3 \to S^1$ telle que le plongement $i_L : L \to M^3$ est isotope à celui d'une fibre de p, ce qui implique ii).

b) *Feuilletages des variétés fibrées en cercles et sous-groupes de* $\mathit{Diff}^r\, S^1$.

Soit V^{n-1} une variété compacte. Il est bien connu qu'à toute représentation $\varphi : \pi_1(V) \to \mathrm{Diff}^r\, S^1$ correspond une variété M^n_φ fibrée en cercle sur V et un C^r-feuilletage F de M^n_φ transverse aux fibres de la fibration $p : M_\varphi \to V$. Si L est une feuille de F la restriction $p_L : L \to V$ de p à L est un revêtement de V.

La construction de F sur M_φ implique l'existence d'une métrique riemannienne g sur M_φ et g_V sur V telle que pour toute feuille L de F, l'application p/L soit localement une isométrie de L munie de la métrique g_L sur V munie de g. On en déduit que le type de croissance de L est majoré par celui de $\pi_1(V)$ (voir paragraphe 3).

Réciproquement, soit F un C^r-feuilletage d'une variété M fibrée en cercle sur une variété V qui est transverse à la fibration. Alors F est C^r-conjugué au feuilletage construit par la méthode précédente à partir de l'homomorphisme d'holonomie globale $\varphi : \pi_1(V) \to \mathrm{Diff}^r\, S^1$ associé à F. On en déduit le théorème suivant qui généralise un résultat de [11].

THEOREME 4. – *Soit* F *un feuilletage (de classe* > 2*) d'une variété* M *(compacte) fibrée en cercle sur une variété* V. *Si* $\pi_1(V)$ *a une croissance non exponentielle* F *n'a pas d'ensemble minimal exceptionnel ; de plus, si* F *n'a pas de feuille compacte, c'est un feuilletage sans holonomie.*

COROLLAIRE 5. – *Soit* G *un sous-groupe de type fini de* $\mathrm{Diff}^r\, S^1$, $r > 2$, *qui a une croissance non exponentielle et* ϕ :

$$S^1 \times G \to S^1 (\phi(x\,,g) = g(x))$$

l'action de G *sur* S^1 *correspondante. Deux cas sont possibles :*

i) *Tous les éléments de* G *ont au moins un point périodique commun.*

ii) G *est topologiquement conjugué à un sous-groupe de* $0(2)$.

Démonstration. – Soient V une variété compacte dont le groupe fondamental est G. Appliquons le théorème précédent au feuilletage F_i de la variété M_i correspondant à l'inclusion $i : G \hookrightarrow \mathrm{Diff}^r.\, S^1$. Identifions la fibre S^1_a de M_i en a avec S^1.

La trace d'une feuille L de F est l'orbite (par ϕ) d'un point de $L \cap S^1_a$. Ainsi deux cas sont possibles :

i) F a au moins une feuille compacte L. Les points de la trace de L sur S^1_a sont des points périodiques de tous les éléments de G.

ii) Toutes les feuilles de F sont denses dans M. Alors, un élément $g_0 \in G$ est un difféomorphisme de S^1, de classe > 2 sans point périodique. D'après [1] il existe un homéomorphisme h de S^1 qui conjugue g_0 à une rotation.

De plus F est sans holonomie. Si L est une de ces feuilles, $\pi_1(M)/\pi_1(L) = G$ est un groupe abélien. Un raisonnement de Nancy Kopell [2] permet alors d'affirmer que h conjugue chaque élément de G à une rotation.

5. Appendice.

(*démonstration de la proposition 1*).

Nous utiliserons dans la suite les notations du paragraphe 1 et celles de Kobayashi dans Foundations of Differential geometry volume 2 – page 96 à 100, c'est-à-dire que nous désignons :

– par $C(a)$ et $\hat{C}(a)$ respectivement le cut-Locus de a dans V^p et $T_a V$.

– par exp l'application exponentielle de $T_a V \equiv \mathbf{R}^p$ sur V^p (de classe C^1 au moins).

– par $S(R)$ la sphère de rayon R dans $\mathbf{R}^p$ et par $\mu : S(1) \to \mathbf{R}^+$ l'application définie par : $\mu(X) \cdot X$ est le point de $\hat{C}(a)$ sur la 1/2 droite correspondant à X.

– par E la composante connexe de $\mathbf{R}^p - \hat{C}(a)$ qui contient $0 \in \mathbf{R}^p$.

Rappelons que exp/E est un difféomorphisme sur $V^p - C(a)$ et que $C(a)$ est l'image par exp de $\hat{C}(a)$.

LEMME 5. – *La boule* $B(R)$ *de centre* a *et de rayon* R *dans* V^p *est un domaine standard de* V^p *sauf pour* $R \in A$ *un sous-ensemble dénombrable de* $\mathbf{R}^+$.

Démonstration. – Décomposons $\partial B(R)$ en les sous-ensembles

$$\partial B_0(R) = \partial B(R) \cap \exp(E) \quad \text{et} \quad \partial B_1(R) = \partial B(R) \cap C(a)$$

Alors, $\partial B(R)$, $\partial B_0(R)$, $\partial B_1(R)$ sont respectivement les images par exp de

$$\partial \hat{B}(R) = S(R) \cap \bar{E}, \quad \partial \hat{B}_0(R) = S(R) \cap E, \quad \partial \hat{B}_1(R) = S(R) \cap \hat{C}(a)$$

Puisque $\partial B_0(R)$ est l'image d'une sous-variété de dimension $p-1$ par un difféomorphisme, il suffit de prouver que $\partial \hat{B}_1(R)$ est un sous-ensemble de $(p-1)$ mesure nulle de R^p pour $R \notin A$.

Or $\partial \hat{B}_1(R)$ est l'image par l'homothétie $X \to RX$ du sous-ensemble $\mu^{-1}(R)$ de $S(1)$. Un raisonnement élémentaire permet de montrer que $\mu^{-1}(R)$ est un sous-ensemble de mesure nulle de $S(1)$ sauf pour R appartenant à un sous-ensemble dénombrable A de $\mathbf{R}^+$.

LEMME 6. – *Soient* $R \in \mathbf{R}^+ - A$ *et* $\mathrm{Vol}\, \partial B(R) = \mathrm{Vol}_{p-1}\, \partial B_0(R)$ *la* $(p-1)$ *mesure de* $\partial B(R)$. *Alors dès que h est suffisamment petit*

$$\mathrm{Vol}\, B(R) - \mathrm{Vol}\, B(R-h) \geqslant \frac{h}{2} \mathrm{Vol}\, \partial B(R) \qquad \text{(I)}$$

$$\mathrm{Vol}\, B(R) - \mathrm{Vol}\, B(R-h) \leqslant 2h\, \mathrm{Vol}\, \partial B(R) \qquad \text{(II)}$$

Démonstration. – Soient $\alpha > 0$ et U un voisinage ouvert de $\mu^{-1}(R)$ dont la $(p-1)$-mesure est inférieure à ϵ. Désignons par $\hat{U}_\lambda$ l'image de U par l'homothétie $X \to \lambda X$ de $\mathbf{R}^p$. Un raisonnement simple par l'absurde permet de montrer l'existence de $h_0 > 0$ tel que pour $h < h_0$

$$\hat{C}(R, h) = \bigcup_{R-h \leqslant \lambda \leqslant R} \hat{U}_\lambda \supset \bigcup_{R-h \leqslant \lambda \leqslant R} \partial \hat{B}_1(\lambda)$$

Désignons par $C(R, h)$ et U_λ, les images respectives de $\hat{C}(R, h)$ et $\hat{U}_\lambda$ par exp. Il existe des constantes α, β indépendantes de ϵ et h tel que :

$$\mathrm{Vol}\, C(R, h) < \alpha \cdot \epsilon \cdot h \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}_{p-1}\, U_\lambda < \beta \cdot \epsilon \qquad (1)$$

Soit maintenant $\partial B_0(R, h)$ le complémentaire de $C(R, h)$ dans $B(R) - B(R-h)$. Son volume se calcule de la façon suivante

$$\mathrm{Vol}\, \partial B_0(R, h) = \int_{R-h}^{R} \mathrm{Vol}_{p-1}(\partial B_0(\lambda) - U_\lambda)\, d\lambda \qquad (2)$$

$\mathrm{Vol}\,(\partial B_0(\lambda) - U_\lambda)$ étant une fonction continue sur $[R - h\,,\, R]$, on peut supposer que pour $h < h_0$

$$|\,\mathrm{Vol}\,(\partial B_0(\lambda) - U_\lambda) - \mathrm{Vol}\,(\partial B_0(R) - U_R)\,| < \epsilon \tag{3}$$

De (1), (2) et (3) nous déduisons :

$$\mathrm{Vol}\,B(R) - \mathrm{Vol}\,B(R-h) \geqslant \mathrm{Vol}\,\partial B_0(R\,,h) \geqslant h\cdot \mathrm{Vol}\,\partial B_0(R) - \epsilon h(1+\beta)$$

ce qui implique (I). De la même façon nous obtenons II avec :

$$\mathrm{Vol}\,B(R) - \mathrm{Vol}\,B(R-h) \leqslant \mathrm{Vol}\,\partial B_0(R\,,h) + \alpha\cdot\epsilon\cdot h \leqslant \leqslant h\,\mathrm{Vol}\,\partial B_0(R) + \epsilon h(1+\alpha+\beta)$$

Démonstration de la proposition 1. — Supposons que

$$\liminf_{\substack{R\to\infty \\ R\in \mathbf{R}^+ - A}} \frac{\mathrm{Vol}\,\partial B(R)}{\mathrm{Vol}\ \ B(R)} = \alpha > 0$$

L'inégalité I implique l'existence d'une suite $\{R_n\}$ telle que pour $n \in \mathbf{N}$

$$\mathrm{Vol}\,B(R_n) - \mathrm{Vol}\,B(R_{n-1}) \geqslant \frac{\alpha}{2}\,(R_n - R_{n-1})\,\mathrm{Vol}\,B(R_n)$$

$$\text{avec}\quad 0 < R_n - R_{n-1} < h_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} R_n = \infty$$

Cette suite d'inégalités implique

$$\mathrm{Vol}\,B(R_n) - \mathrm{Vol}\,B(R_0) \geqslant \frac{\alpha}{2}\int_{R_0}^{R_n} \mathrm{Vol}\,B(R)\,dR$$

L'application F définie par $F(R) = \displaystyle\int_{R_0}^{R} \mathrm{Vol}\,B(t)\,dt$ est de classe C^1 et on a pour $R \geqslant R_0$

$$\mathrm{Vol}\,B(R) - \mathrm{Vol}\,B(R_0) \geqslant \frac{\alpha}{2}\int_{R_0}^{R-h_0} \mathrm{Vol}\,B(t)\,dt$$

$$F'(R) \geqslant \frac{\alpha}{2}\,F(R-h_0) + \mathrm{Vol}\,B(R_0)$$

On en déduit que

$$\liminf_{R \to \infty} \frac{F'(R)}{F(R)} \geqslant \frac{\alpha}{2}$$

Ainsi F(R) domine $e^{\frac{\alpha R}{2}}$ et $F'(R) = \mathrm{Vol}\, B(R)$ a une croissance exponentielle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DENJOY, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal de Math.* Vol. 11 (1932).

[2] N. KOPELL, Commuting diffeomorphisms – thèse (Université de Berkeley) (1967).

[3] E. MAZET, Sur les travaux de Milnor-Wolf – Séminaire Berger (1972).

[4] J. MILNOR, A note on curvature and fundamental group, *Journal of differential Geometry* 2 (1968).

[5] R. MOUSSU, Sur les feuilletages de codimension 1 – thèse Orsay (1971).

[6] R. MOUSSU et R. ROUSSARIE, Une condition suffisante pour qu'un feuilletage soit sans holonomie – *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* Tome 271, Série A (1970) 240-243.

[7] R. MOUSSU et R. ROUSSARIE, Relations de conjugaison et de cobordisme entre certains feuilletages (à paraître aux publications de l'I.H.E.S.).

[8] S.P. NOVIKOV, Topology of foliations – *Trudy Mark – Math. Obsch* – Vol. 14. (1965).

[9] J.F. PLANTE, Asymptotic properties of foliations (à paraıtre dans *commentarii Math. Hel*).

[10] J.F. PLANTE, A generalisation of the Poincaré-Bendixson theorem for foliations of codimension one (à paraître dans *Topology*).

[11] J.F. PLANTE, On the existence of exceptional minimal sets in foliations of codimension one (à paraître).

[12] B. RAYMOND, Notes multigraphiées.

[13] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées; *Actualités scientifiques et industrielles,* Hermann (1952).

[14] H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE, Topological equivalence of Reeb foliations, *Topology* Vol. 9 (1970).

[15] R. ROUSSARIE, Plongements dans les variétés feuilletées et classification des feuilletages sans holonomie, à paraître aux publications de l'I.H.E.S.

[16] R. SACKSTEDER, Foliations and pseudo-groups, *American journal of Math.* Vol. 87 (1965).

[17] D. TISCHLER, On fibering certain foliated manifolds, *Topology,* Vol. 9, n° 2 (1970).

[18] H. WHITNEY, Geometric integration theory, Princeton University, Press (1957).

[19] J. WOLF, Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds, *Journal of differential Geometry* 2 (1968) 421-446.

Manuscrit reçu le 2 mars 1973
accepté par G. Reeb.

R. MOUSSU et F. PELLETIER,
Département de Mathématiques
Université de Dijon
21000 – Dijon