

LÊ DŨNG TRÁNG

**Calcul du nombre de cycles évanouissants
d'une hypersurface complexe**

Annales de l'institut Fourier, tome 23, n° 4 (1973), p. 261-270

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_4_261_0

© Annales de l'institut Fourier, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CALCUL DU NOMBRE DE CYCLES ÉVANOUISSANTS D'UNE HYPERSURFACE COMPLEXE

par LÊ DŨNG TRÁNG

0. Introduction.

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique définie sur un voisinage ouvert de l'origine 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$. On suppose que f est une fonction *réduite* en 0, i.e. sans facteur carré dans sa décomposition en produit de fonctions analytiques irréductibles en 0.

Si B est une boule fermée centrée en 0 de rayon assez petit, de bord S et d'intérieur $\dot{B}$, dans [8] J. Milnor a montré que $f/|f|$ définit une fibration différentiable localement triviale de $S - \{f=0\}$ sur S^1 . De plus si $c > 0$ est suffisamment petit, ∂D_c étant le cercle de rayon c dans $\mathbb{C}$ centré en 0, $f/|f|$ définit une fibration différentiable localement triviale de $\dot{B} \cap f^{-1}(\partial D_c)$ sur S^1 isomorphe à la précédente par un isomorphisme qui est l'identité sur S^1 . On appelle *fibration de Milnor* de f en 0 une telle fibration. Les nombres de Betti d'une fibre F de la fibration de Milnor de f en 0 sont appelés *nombres de cycles évanouissants* de f en 0.

Nous remarquons tout d'abord que les nombres de cycles évanouissants de f en 0 sont des invariants topologiques. Précisément soit $g: U' \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique définie sur un voisinage ouvert U' de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Supposons également que g soit réduite en 0. Alors :

PROPOSITION. — *Si les hypersurfaces $f=0$ et $g=0$ ont le même type topologique en 0, les nombres de cycles évanouissants en 0 de f et g sont égaux.*

Démonstration. — On procède comme pour la démonstration de (3.3) dans [5].

On remarque que les fibrations de Milnor de f et de g en 0 ont des espaces totaux E_1, E_2 qui ont le même type d'homotopie. De plus les hypersurfaces $f=0$ et $g=0$ ont en 0 le même nombre de composantes analytiques. En effet le groupe fondamental de E_1 (resp. E_2) égale le groupe fondamental local du complémentaire de $f=0$ (resp. $g=0$) en 0. En utilisant un résultat de [2], on trouve alors :

$$H_1(E_i) = \mathbf{Z}^{k_i} \quad i = 1, 2$$

où k_1 (resp. k_2) est le nombre de composantes irréductibles de $f=0$ (resp. $g=0$) en 0. Comme $H_1(E_i)$ est l'abélianisé du groupe fondamental de E_i , on obtient :

$$k_1 = k_2.$$

D'autre part les fibrations $\varphi_i : E_i \rightarrow \mathbf{S}^1$ ($i = 1, 2$) donnent les morphismes $(\varphi_i)_* : \pi_1(E_i, x_i) \rightarrow \pi_1(\mathbf{S}^1, \varphi_i(x_i))$ avec $x_i \in E_i$. On remarque que $(\varphi_i)_*$ est le composé de l'abélianisation $\pi_1(E_i, x_i) \rightarrow H_1(E_i)$ et du morphisme

$$H_1(E_i) \rightarrow H_1(\mathbf{S}^1)$$

qui envoie les éléments de la base de $H_1(E_i)$ sur un générateur de $H_1(\mathbf{S}^1)$. Par conséquent les espaces totaux des revêtements cycliques infinis $\tilde{E}_i \rightarrow E_i$ ($i = 1, 2$) définis par ces morphismes ont le même type d'homotopie. Or, comme dans [5], on remarque que $\tilde{E}_i$ a le type d'homotopie de la fibre de la fibration de Milnor correspondante.

Le but de cet article est de montrer comment on peut calculer à l'aide de la théorie de Morse les nombres de cycles évanouissants d'une fonction analytique réduite en 0.

Certains des concepts introduits ici sont la généralisation aux singularités d'hypersurfaces complexes d'idées de R. Thom sur l'étude des singularités isolées d'hypersurfaces complexes.

1. Courbes polaires et diagrammes de Cerf.

Soit l une forme linéaire non nulle de $\mathbf{C}^{n+1}$. On peut définir un morphisme $\Phi_l : U \rightarrow \mathbf{C}^2$ dont la première compo-

sante est f et la deuxième composante est la restriction de l à U . On appelle C_l le lieu critique de Φ_l , i.e. le lieu des points de U où Φ_l n'est pas de rang maximum. On appelle Γ_l l'union des composantes irréductibles de C_l en 0 qui ne sont pas contenues dans $f = 0$.

Remarquons que pour un voisinage ouvert U_1 de 0 , f n'a aucun point critique dans $U_1 - \{f = 0\}$. Par conséquent les points de $\Gamma_l \cap U_1 - \{f = 0\}$ sont les points x de $U_1 - \{f = 0\}$ où l'espace tangent $T(x, H_{f(x)})$ de $f = f(x)$ (appelé $H_{f(x)}$) en x est parallèle à l'hyperplan $l = 0$.

On a alors :

THÉORÈME (1.1). — *Pour toute forme linéaire d'un ouvert analytique dense Ω dans l'espace des formes linéaires non nulles, l'ensemble Γ_l est une courbe analytique en 0 , la restriction de Φ_l à Γ_l est finie en 0 et pour un voisinage ouvert V assez petit de 0 , pour tout point $x \in \Gamma_l \cap V - \{0\}$, la restriction de la matrice Hessienne $(\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)_{0 \leq i, j \leq n}$ à $T(x, H_{f(x)})$ est non dégénérée et l'hypersurface $f = f(x)$, $l = l(x)$ a en x une singularité quadratique ordinaire.*

Ce théorème est en fait déjà démontré dans [4] (§ 2).

Quitte à choisir V assez petit, $\Phi_l(\Gamma_l \cap V)$ est un sous-ensemble analytique de $\mathbf{C}^2$ et le germe $(\Phi_l(\Gamma_l \cap V), 0)$ ne dépend pas de V dès que V est assez petit.

On appelle Γ_l la courbe polaire de f relative à la direction définie par l .

On appelle $\Phi_l(\Gamma_l \cap V) = \Delta_l$ le diagramme de Cerf de f relatif à la direction définie par l .

Remarquons que :

PROPOSITION (1.2). — *Si $df(0) = 0$, alors Δ_l est une courbe analytique dont le cône tangent en 0 est $\{0\} \times \mathbf{C}$.*

Démonstration. — Soient (λ, t) les coordonnées de $\mathbf{C}^2$. Soit $p: D \rightarrow \Gamma_l \cap V$ un chemin analytique de $\Gamma_l \cap V$ défini sur un disque ouvert de $\mathbf{C}$ centré en 0 tel que $p(0) = 0$. On a :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(p(\tau))}{l(p(\tau))} = 0$$

En effet on peut supposer que l soit défini par la première coordonnée X_0 de $\mathbf{C}^{n+1}$. Dans ce cas C_l est défini par $\partial f / \partial X_1 = \dots = \partial f / \partial X_n = 0$. Aussi :

$$\frac{d}{d\tau} f(p(\tau)) = \partial f / \partial X_0(p(\tau)) \frac{dX_0(p(\tau))}{d\tau}$$

et la partie principale de $f(p(\tau))$ égale celle de

$$K \partial f / \partial X_0(p(\tau)) X_0(p(\tau)),$$

où K est une constante convenable. La partie principale de $\frac{f(p(\tau))}{X_0(p(\tau))}$ est alors $K \partial f / \partial X_0(p(\tau))$ et tend vers 0 quand τ tend vers 0 car $df(0) = 0$.

Pour chaque branche de Δ_l on obtient donc un chemin analytique non trivial de cette branche tel que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\lambda(q(\tau))}{t(q(\tau))} = 0,$$

ceci montre bien que le cône tangent de Δ_l est défini par $\lambda = 0$.

2. Calcul des nombres de cycles évanouissants.

Nous allons nous placer dans un voisinage $D \times B$ de l'origine dans $\mathbf{C}^{n+1}$, où D est un disque fermé de $\mathbf{C}$ centré en 0 et B une boule fermée de $\mathbf{C}^n$ centrée en 0. Nous allons choisir par la suite B et D suffisamment petits.

Tout d'abord nous munissons H_0 d'une bonne stratification Σ au sens de [4].

D'autre part nous choisissons l de telle sorte que l'hyperplan $l = 0$ soit transverse à toutes les strates de la bonne stratification, sauf éventuellement la strate $\{0\}$, et que $l \in \Omega$, défini dans le théorème (1.1). On remarque, comme dans [4], que Σ induit une bonne stratification Σ_1 de $l = 0$, $f = 0$.

Pour simplifier on supposera que l est la coordonnée X_0 et on notera $\Sigma_1 = \Sigma_l$, $\Gamma_l = \Gamma_l$, $\Delta_1 = \Delta_0$, etc...

Choisissons alors B et D de telle sorte que

- i) $D \times B \subset U_1 \cap V$;

ii) toutes les sphères de $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ centrées en 0 contenues dans $\{0\} \times B$ soient transverses aux strates de Σ_0 ;

iii) $(\{0\} \times D) \cap \Delta_0 = \{0\}$;

iv) la projection $D \times B \cap \Gamma_0$ sur $\dot{D}$ est un revêtement analytique qui n'est ramifié qu'en 0 et $(D \times \partial B) \cap \Gamma_0 = \emptyset$.

D'après le théorème (1.3.2) de [4], on peut choisir B pour que ii) soit vérifié et les autres propriétés sont immédiates.

Nous allons encore imposer une propriété pour D . Mais auparavant nous faisons la remarque suivante.

PROPOSITION (2.1). — *Pour tout $(\varepsilon, \eta) \in \mathbb{C}^2$ assez petit, $\varepsilon \neq 0$ dans l'hyperplan affine $X_0 = \eta$, la fibre $f = \varepsilon$, $X_0 = \eta$ de Φ_0 est transverse à $\{\eta\} \times \partial B$.*

Preuve. — On remarque que pour tout $\varepsilon \neq 0$ assez petit $f = \varepsilon$ n'a aucun point singulier dans U_1 et coupe $X_0 = \eta$ transversalement en tout point de $\{\eta\} \times \partial B$ quand $\eta \in D$ d'après la condition iv) ci-dessus.

Supposons que l'on ait une suite de points $x_n \in D \times \partial B$ tendant vers un point x de $(\{0\} \times \partial B) \cap H_0$ telle qu'en x_n le plan tangent à $f = f(x_n)$, $X_0 = X_0(x_n)$ ne soit pas transverse à $\{X_0(x_n)\} \times \partial B$ dans l'hyperplan $X_0 = X_0(x_n)$, i.e.

$$T(x_n, H_{f(x_n)}) \cap T(x_n, L_{X_0(x_n)}) \subset T(x_n, \{X_0(x_n)\} \times \partial B) \quad (*)$$

où $L_{X_0(x_n)}$ est l'hyperplan $X_0 = X_0(x_n)$.

On peut supposer que $T(x_n, H_{f(x_n)})$ a une limite T . Comme Σ est une bonne stratification, si V_x est la strate de Σ qui contient x , on a $T(x, V_x) \subset T$. Comme $X_0 = 0$ est transverse à V_x en x , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n \cap H_{f(x_n)}) \cap T(x_n, L_{X_0(x_n)}) = T \cap L_0.$$

D'autre part $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n, \{X_0(x_n)\} \times \partial B) = T(x, \{0\} \times \partial B)$ et (*) implique :

$$T \cap L_0 \subset T(x, \{0\} \times \partial B)$$

mais ceci contredit la condition (ii) ci-dessus.

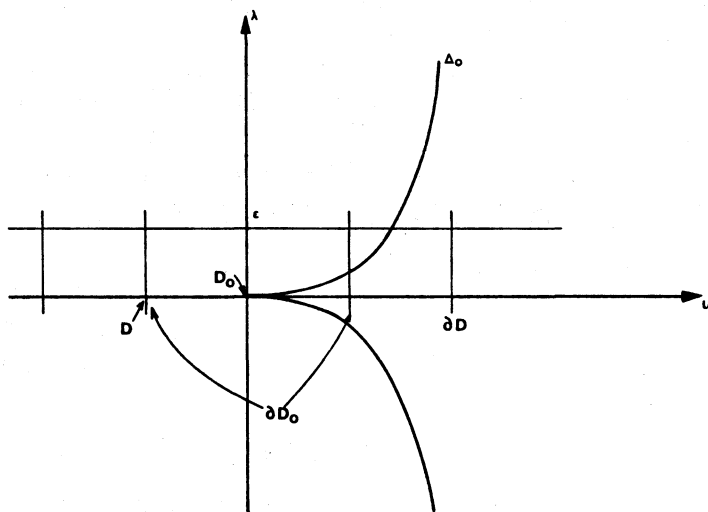
La proposition (2.1) est donc démontrée et on peut imposer à D de vérifier :

v) pour tout $\eta \in D$ et tout $\varepsilon \in D_1 - \{0\}$, $f = \varepsilon$, $X_0 = \eta$ est transverse à $\{\eta\} \times \partial B$ dans l'hyperplan affine $X_0 = \eta$.

vi) De plus on suppose B et D assez petits pour que, pour tout ε assez petit, $H_\varepsilon \cap (\overline{D} \times B)$ soit homéomorphe à la fibre de Milnor F de f en 0 et que $H_\varepsilon \cap \{0\} \times \dot{B}$ soit homéomorphe à la fibre de Milnor F_0 de la restriction f_0 de f à L_0 en 0 .

Enfin on choisit ε pour que l'image de $H_\varepsilon \cap \Gamma_0 \cap (D \times B)$ par la projection sur D soit contenue dans un disque D' centré en 0 de rayon strictement plus petit que D . Remarquons que $H_\varepsilon \cap \Gamma_0 \cap (D \times B)$ est un ensemble fini de points dont le nombre égale la multiplicité d'intersection de H_0 et Γ_0 en 0 .

Soit σ la restriction de $|X_0|$ à $H_\varepsilon \cap (D \times B)$. Comme Δ_0 a pour cône tangent $\lambda = 0$ dans $\mathbb{C}^2$, $\sigma^{-1}(0)$ est non singulière et homéomorphe à la fibre de Milnor F_0 de la restriction de f à L_0 en 0 .



Comme l'image de $H_\varepsilon \cap \Gamma_0 \cap (D \times B)$ par la projection sur D est un ensemble fini de points différents de 0 , il existe un disque ouvert $\dot{D}_0$ centré en 0 tel que la projection $X_0^{-1}(\dot{D}_0) \cap H_\varepsilon \cap (D \times B) \rightarrow \dot{D}_0$ soit une fibration localement triviale. En effet Φ_0 induit un morphisme

$$X_0^{-1}(\dot{D}_0) \cap H_\varepsilon \cap (D \times B)$$

sur $\{\varepsilon\} \times \dot{D}_0$ qui n'a pas de point critique puisque ses fibres sont transverses au bord d'après la condition v) et que

$$H_\varepsilon \cap (D \times B) \cap X_0^{-1}(\dot{D}_0) \cap \Gamma_0 = \emptyset.$$

Par conséquent $\sigma^{-1}(\dot{D}_0)$ a le type d'homotopie de $\sigma^{-1}(0)$.

Les points critiques de σ hors de $\sigma^{-1}(0)$ sont alors les points de

$$H_\varepsilon \cap (D \times B) \cap \Gamma_0.$$

En effet les points critiques de σ sont les points x de H_ε où $T(x, H_\varepsilon)$ est contenu dans l'espace tangent en x à l'hyper-surface réelle $|X_0| = |X_0(x)|$, i.e. coïncide avec l'unique hyperplan complexe $L_{X_0(x)}$ contenu dans cet hyperplan réel. De ceci résulte que $x \in \Gamma_0$.

Montrons qu'en un des points de $H_\varepsilon \cap (D \times B) \cap \Gamma_0$, σ est non dégénérée et que l'indice de ce point critique de σ est n . Pour cela on calcule le Hessien de σ en x .

En procédant comme dans [4], on trouve :

PROPOSITION (2.2). — *Le Hessien de σ en un point critique $x \in H_\varepsilon \cap (D \times B) \cap \Gamma_0$ est défini pour tout $v \in T(x, H_\varepsilon)$ par*

$$\mathcal{H}(v) = + \lambda_x \operatorname{Re} (\Sigma \partial^2 f / \partial X_i \partial X_j v_i v_j)$$

ou λ_x est une constante non nulle qui ne dépend que de x et les v_i sont les composantes de v dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

Comme la restriction de la forme quadratique

$$(\partial^2 f / \partial X_i \partial X_j)_{0 \leq i, j \leq n}$$

à $T(x, H_\varepsilon)$ est non dégénérée d'après le théorème (1.1), la forme quadratique réelle obtenue est donc non dégénérée. De plus la partie réelle d'une forme quadratique complexe non dégénérée dans un espace complexe de dimension n a toujours la signature (n, n) . L'indice des points critiques de σ est donc n .

On obtient donc le théorème :

THÉORÈME (2.3). — *Si $b_1^{(n+1)}, \dots, b_r^{(n+1)}, \dots$ sont les nombres de cycles évanouissants de f en 0 et $b_1^{(n)}, \dots, b_r^{(n)}, \dots$ les nombres de cycles évanouissants de la restriction de f à*

l'hyperplan L_0 passant par 0, alors :

$$\begin{aligned} b_i^{(n+1)} &= b_i^{(n)} & \text{si } i \neq n-1, n \\ b_n^{(n+1)} &= b_{n-1}^{(n+1)} + b_{n-1}^{(n)} = (H_0 \cdot \Gamma_0)_0. \end{aligned}$$

ou $(H_0 \cdot \Gamma_0)_0$ est le nombre d'intersection de H_0 et Γ_0 en 0.

Et on retrouve le résultat déjà connu (cf. [5]) :

COROLLAIRE (2.4). — Pour tout $r > n$ on a :

$$b_r^{(n+1)} = 0.$$

La démonstration du théorème est immédiate compte tenu de ce que $\sigma^{-1}(D')$ a le type d'homotopie de $\sigma^{-1}(0)$ auquel on a adjoint des cellules de dimension n d'après les résultats précédents et la condition v) ci-dessus qui nous garantit la transversalité de σ sur le bord de $H_i \cap (D \times B)$. De plus on remarque que $\sigma^{-1}(D')$ et $\sigma^{-1}(D)$ sont homéomorphes.

Le corollaire se démontre facilement par récurrence sur n .

3. Quelques commentaires.

(3.1) La démonstration précédente peut s'énoncer en termes de CW-complexes. Par exemple si F désigne la fibre de Milnor de f en 0 et F_0 la fibre de Milnor de la restriction f_0 de f à L_0 en 0, on a obtenu que F a le type d'homotopie de F_0 auquel on a adjoint $(H_0 \cdot \Gamma_0)_0$ cellules de dimension n .

Le corollaire nous dirait alors que F a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini de dimension n .

(3.2) Si $\Gamma_0 = \emptyset$, la démonstration précédente montre que F serait difféomorphe à $F_0 \times D$. Les nombres de cycles évanouissants ne changent alors pas (comparer avec § 4 et 5 [4]).

(3.3) Dans le cas où f a une singularité isolée en 0, on obtient une formule bien connue (cf. [9]) :

$$\begin{aligned} \mu^{(n+1)} + \mu^{(n)} &= (H_0 \cdot \Gamma_0)_0 \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{X_0, \dots, X_n\} / (f, \partial f / \partial X_1, \dots, \partial f / \partial X_n) \end{aligned}$$

si $X_1, \dots, X_n$ sont des coordonnées génériques, avec $\mu^{(n+1)}$ égal au nombre de Milnor de f en 0 et $\mu^{(n)}$ le nombre de Milnor en 0 de la restriction de f à un hyperplan générique de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Ainsi si $n = 1$, on sait que $\mu^{(1)} = m - 1$, où m est la multiplicité de f en 0 et on retrouve une formule de Zariski (cf. [10]) :

$$\mu^{(2)} + \mu^{(1)} = \mu^{(2)} + m - 1 = \Delta$$

où Δ est le discriminant de la courbe $f = 0$ en 0 .

(3.4) Si f a un point critique isolé en 0 et si $X_0, \dots, X_n$ sont génériquement choisis on a :

$$\begin{aligned} \mu^{(n+1)} + (-1)^n = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{X_0, \dots, X_n\} / (f, \partial f / \partial X_{n-1}, \dots, \partial f / \partial X_0) \\ + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{X_0, \dots, X_n\} / \\ (f, X_n, \dots, X_{n-k}, \partial f / \partial X_{n-k-2}, \dots, \partial f / \partial X_0). \end{aligned}$$

Cette formule est un cas particulier d'une formule donnant le nombre de Milnor d'une intersection complète (cf. [3] et [6]).

(3.5) Il serait intéressant d'utiliser la méthode du § 2 d'obtenir explicitement les groupes d'homologie et d'homotopie de la fibre de Milnor. Pour cela il faudrait savoir comment ont lieu les adjonctions d'anses qui interviennent en théorie de Morse.

De plus il serait déjà intéressant de savoir comment on pourrait calculer $(H_0 \cdot \Gamma_0)_0$.

(3.6) R. Thom avait introduit des techniques similaires dans le cas où f a un point critique isolé pour étudier la monodromie relative à une section hyperplane générique. Très précisément on peut montrer que l'on peut construire un homéomorphisme caractéristique de la fibration de Milnor de f en 0 qui induise un homéomorphisme caractéristique de la fibration de Milnor en 0 de la restriction f_0 de f à un hyperplan générique. On obtient alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_*(F_0) & \rightarrow & H_*(F) & \rightarrow & H_*(F, F_0) & \rightarrow \\ & \downarrow h_0 & & \downarrow h & & \downarrow h_1 & \\ \rightarrow & H_*(F_0) & \rightarrow & H_*(F) & \rightarrow & H_*(F, F_0) & \rightarrow \end{array}$$

où h_0 et h sont les monodromies locales de f_0 et f en 0 et h_1 la monodromie relative.

La question est de savoir quelles sont les propriétés intéressantes de cette monodromie relative. Remarquons que

$H_n(F, F_0)$ est un groupe abélien libre de rang $(H_0 \cdot \Gamma_0)_0$ et que $H_i(F, F_0) = \{0\}$ $i \neq n$ et que ce résultat est vrai même si f n'a pas une singularité isolée en 0.

(3.7) La proposition (1.2) est essentielle pour montrer que, si $f(0) = 0$, $df(0) = 0$, on peut construire un homéomorphisme caractéristique de la fibration de Milnor de f en 0 sans point fixe dont le nombre de Lefschetz est nul (cf. [7]). Ce résultat implique donc le résultat de N. A'Campo (cf. [1]) sur la nullité du nombre de Lefschetz de la monodromie locale en un point effectivement critique de f .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. A'CAMPO, Le nombre de Lefschetz d'une monodromie, *Indag. Math.*, 1973.
- [2] D. CHÉNIOT et LÊ DŨNG TRÁNG, Quelques remarques sur les exposés précédents in *Singularités à Cargèse*, à paraître dans *Astérisque*.
- [3] GREUEL, Thèse 1973 (Göttingen).
- [4] H. HAMM et LÊ DŨNG TRÁNG, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, à paraître dans les *Ann. Éc. Norm. Sup.*, Paris.
- [5] LÊ DŨNG TRÁNG, Topologie des hypersurfaces complexes, in *Singularités à Cargèse*, à paraître dans *Astérisque*.
- [6] LÊ DŨNG TRÁNG, Calcul du nombre de cycles évanouissants pour les intersections complètes, à paraître.
- [7] LÊ DŨNG TRÁNG, La monodromie n'a pas de point fixe, à paraître.
- [8] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. of Math. Stud.*, 61, Princeton (1968).
- [9] B. TEISSIER, Cycles évanescents et conditions de Whitney in *Singularités à Cargèse*, à paraître dans *Astérisque*.
- [10] O. ZARISKI, Exposés au C.I.M.E., 1969, Éd. Crémone.

Manuscrit reçu le 25 juillet 1973,
accepté par B. MALGRANGE.

LÊ DŨNG TRÁNG,
Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75230 Paris-Cedex 05.