

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL HERVÉ

ROSE-MARIE HERVÉ

## **Les fonctions surharmoniques dans l'axiomatique de M. Brelot associées à un opérateur elliptique dégénéré**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 22, n° 2 (1972), p. 131-145

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1972\\_\\_22\\_2\\_131\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_131_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**LES FONCTIONS SURHARMONIQUES  
DANS L'AXIOMATIQUE  
DE M. BRELOT ASSOCIÉES  
A UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE DÉGÉNÉRÉ**  
**par Rose-Marie et Michel HERVÉ**

---

Cet article fait suite aux travaux de J. M. Bony sur les opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel [3] et s'intéresse essentiellement à l'axiomatique de M. Brelot associée à un opérateur elliptique dégénéré  $Lu = \sum_{k=1}^r X_k^2 u + Yu + au$ , où  $X_1, \dots, X_r$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  définis sur un ouvert connexe  $\subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in C^\infty$  et l'algèbre de Lie engendrée par  $X_1, \dots, X_r$  est de rang  $n$ .

Les principaux résultats démontrés ici sont :

1) Les fonctions surharmoniques  $u$  d'une telle axiomatique sont localement intégrables (théorème 3) et sont caractérisées par  $Lu \leq 0$  (théorème 5);

2) Les potentiels à support ponctuel donné sont proportionnels (théorème 4).

Le premier résultat se démontre par étapes : on commence par étendre aux fonctions surharmoniques localement intégrables la propriété  $Lu \leq 0$ , vraie pour les fonctions surharmoniques de classe  $C^2$ ; la propriété d'intégrabilité locale des fonctions surharmoniques résulte d'une inégalité du type  $u(x) \geq C^{\text{ste}} \int_K u(y) dy$ , démontrée par J. M. Bony pour les fonctions harmoniques  $\geq 0$  et qu'on étend aux fonctions surharmoniques  $\geq 0$  localement inté-

grables. Enfin la surharmonicité des solutions de  $Lu \leq 0$  et l'unicité des potentiels à support ponctuel se démontrent en utilisant notamment la fonction de Green construite par J. M. Bony dans certains ouverts assez réguliers formant une base.

Partant maintenant d'une axiomatique de M. Brelot contenant « suffisamment » de fonctions harmoniques de classe  $C^\infty$ , on peut lui associer un opérateur du type précédent défini sur un ouvert dense [3]. Du résultat 2 on peut alors déduire, pour de telles axiomatiques, l'unicité des potentiels de support  $y$ , pour  $y$  appartenant à un ouvert dense.

*Notations.* — Sur un ouvert  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ , on se donne un opérateur elliptique <sup>(1)</sup> dégénéré de la forme

$$Lu = \sum_{k=1}^r X_k^2 u + Yu + au = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u'_{x_i} + au,$$

où  $X_k(x) = (\alpha_1^k(x), \dots, \alpha_n^k(x))$ ,  $k = 1, \dots, r$ , et  $Y$  sont des champs de vecteurs de classe  $C^\infty(\Omega_0)$  et  $a$  une fonction  $\in C^\infty(\Omega_0)$ .

Soit  $L^*u = \sum_{k=1}^r X_k^2 u + Y'u + a'u$  l'adjoint de  $L$  <sup>(2)</sup>;  $Y + Y'$  est une combinaison linéaire des  $X_k$ ,  $k = 1, \dots, r$ , à coefficients  $\in C^\infty(\Omega_0)$ , si bien que l'algèbre de Lie engendrée par  $X_1, \dots, X_r$  et  $Y$ , soit  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r, Y)$ , coïncide avec  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r, Y')$ .

On suppose que  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$  est de rang  $n$  en tout point  $\in \Omega_0$ . Par suite l'opérateur  $L$  est non totalement dégénéré, c'est-à-dire qu'en chaque point  $x \in \Omega_0$ , la matrice  $(a_{ij}(x))$  est  $\neq 0$  ou encore que l'un au moins des vecteurs  $X_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, r$ , est  $\neq 0$ . On en déduit un changement local de fonction inconnue (cf. proposition 5.1, [2]), permettant de se ramener au cas où  $a < 0$  et  $a' < 0$  pour traiter certaines questions locales telles que : vérifier les axiomes 2 et 3 de M. Brelot; montrer que toute fonction surharmonique  $u$  est localement intégrable et définit une distribution  $Lu \leq 0$ .

<sup>(1)</sup> L'ellipticité résulte de  $a_{ij} = \sum_{k=1}^r \alpha_i^k \alpha_j^k$ , d'où  $\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{k=1}^r (X_k \cdot \xi)^2$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ .

<sup>(2)</sup> Tel que  $\langle LS, \varphi \rangle = \langle S, L^* \varphi \rangle \forall S \in \mathcal{D}'(\Omega_0)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$ .

### *Rappel des résultats utilisés.*

1. COROLLAIRE 3.1, [2]. — Si  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$  est de rang  $n$  en tout point  $\in \Omega_0$  et  $a \leq 0$ , une fonction  $u \in C^2(\Omega_0)$  et vérifiant  $Lu \geq 0$  dans  $\Omega_0$  ne peut atteindre son maximum positif en un point sans être constante sur la composante connexe de  $\Omega_0$  contenant ce point.

2. THÉORÈME de Hörmander [5]. — Si  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r, Y)$  est de rang  $n$  en tout point,  $L$  est hypoelliptique, ce qui signifie que toute distribution  $u$  telle que  $Lu$  soit de classe  $C^\infty$  est elle-même de classe  $C^\infty$ .

3. THÉORÈME 5.2, [2]. — On suppose  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r, Y)$  de rang  $n$  en tout point et  $a(x) \leq a_0 < 0$ . Soit  $\omega$  un ouvert borné tel que  $\bar{\omega} \subset \Omega_0$  et qu'en tout point  $x \in \partial\omega$ , il existe une normale  $\nu$  à  $\bar{\omega}$  avec  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\nu_i\nu_j > 0$  (un tel ouvert sera dit très régulier). Alors, pour toute fonction  $f$  continue sur  $\bar{\omega}$  et toute fonction  $\varphi$  continue sur  $\partial\omega$ , il existe une fonction unique  $u \in C(\bar{\omega})$  telle que  $\begin{cases} Lu = -f \text{ au sens des distributions dans } \omega, \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\omega, \end{cases}$  et si  $f$  et  $\varphi$  sont  $\geq 0$ ,  $u$  l'est aussi.

On en déduit l'existence d'une base d'ouverts réguliers (axiome 2) pour le faisceau  $\mathcal{H}_0$  des solutions continues de  $Lu = 0$  (Corollaire 5.2, [2]).

4. On reprend les hypothèses et les notations du théorème 5.2; on fait en outre les mêmes hypothèses pour l'opérateur adjoint  $L^*$ . On appelle opérateur de Green dans  $\omega$ , et on note  $G$ , l'opérateur positif de  $C(\bar{\omega})$  dans  $C(\bar{\omega})$  qui à  $f$  fait correspondre la solution  $u = Gf$  de  $Lu = -f$  dans  $\omega$ ,  $u = 0$  sur  $\partial\omega$ .

THÉORÈME 6.1, [2]. —  $L$  admet dans  $\omega$  une fonction de Green  $g(x, y) \geq 0$ , intégrable dans  $\omega \times \omega$ , définie et continue hors de la diagonale, telle que  $\forall f \in C(\bar{\omega})$ ,  $Gf(x) = \int_{\omega} g(x, y)f(y) dy$ . De plus  $g(x, y) = g^*(y, x)$  en désignant par  $g^*$  la fonction de Green de  $L^*$ .

5. PROPOSITION 7.1, [2]. — *Sous les hypothèses du théorème 5.2, soit  $u$  une fonction positive  $\in C^2(\bar{\omega})$ , vérifiant  $Lu \leq 0$  dans  $\omega$ <sup>(3)</sup>. Pour  $\beta > 0$ , soit  $g_\beta$  la fonction de Green dans  $\omega$  relative à l'opérateur  $L - \beta$ . On a alors*

$$u(x) \geq \beta \int_{\omega} g_{\beta}(x, y) u(y) dy.$$

6. THÉORÈME 8.2, [2]. — *Si  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$  est de rang  $n$  en tout point  $\in \Omega_0$ ,  $\mathcal{H}_0$  vérifie l'axiome de convergence 3 de M. Brelot.*

On peut donc appliquer la théorie axiomatique de M. Brelot, avec les axiomes 1, 2, 3, dans tout ouvert connexe  $\Omega \subset \Omega_0$  où il existe un potentiel  $> 0$ . Si  $a$  est négatif, sans être  $\equiv 0$ , dans  $\Omega$ , cette existence est assurée, car alors les constantes  $> 0$  sont surharmoniques sans être harmoniques dans  $\Omega$ .

On déduit facilement du principe du maximum (rappel 1), pour toute fonction  $u$  de classe  $C^2$  sur un ouvert  $\omega \subset \Omega_0$ :

$u$  surharmonique sur  $\omega$  équivaut à  $Lu \leq 0$  sur  $\omega$  (cf. par exemple le th. 4.2, [1]).

### 1. Signe de $Lu$ pour $u$ surharmonique localement intégrable.

DÉFINITION. — *Étant donné un ouvert  $\omega \subset \Omega_0$ , soit  $A(\omega)$  l'adhérence de l'ensemble des fonctions surharmoniques  $\in C^2(\omega)$  dans  $\mathcal{L}_{loc}^1(\omega)$  muni des semi-normes  $u \mapsto \int_K |u| dx$ ,  $K$  compact  $\subset \omega$ .*

LEMME 1. — *Si  $u \in A(\omega)$ , alors  $Lu \leq 0$  dans  $\omega$  au sens des distributions.*

En effet,  $Lu \leq 0$  équivaut à  $\int_{\omega} u L^* \varphi dx \leq 0$  pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}^+(\omega)$ , et  $u_n \rightarrow u$  dans  $\mathcal{L}_{loc}^1(\omega)$  entraîne  $\int_{\omega} u L^* \varphi dx = \lim \int_{\omega} u_n L^* \varphi dx$ .

Les trois lemmes suivants ont pour but de montrer que, si des fonctions surharmoniques en nombre fini appartiennent à  $C^2(\omega)$ , leur enveloppe inférieure appartient à  $A(\omega)$ . On suppose  $a \leq 0$  dans les lemmes 2 à 5.

<sup>(3)</sup> L'énoncé de la proposition 7.1 suppose  $Lu = 0$ , mais la démonstration est en fait valable pour  $Lu \leq 0$ .

LEMME 2. — Soient  $u$  et  $v$  surharmoniques  $\in C^2(\omega)$ . Si  $\varphi$  appartient à  $C^2(\mathbb{R})$ , est concave,  $|\varphi'| \leq 1$  et  $\varphi(0) = 0$ , on a aussi  $w = u + v + \varphi \circ (u - v)$  surharmonique  $\in C^2(\omega)$ .

Il suffit de vérifier  $Lw \leq 0$  sur  $\omega$ . On trouve

$$\begin{aligned} Lw = \varphi'' \circ (u - v) \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial(u - v)}{\partial x_i} \frac{\partial(u - v)}{\partial x_j} \\ + [1 + \varphi' \circ (u - v)] Lu + [1 - \varphi' \circ (u - v)] Lv \\ + a[\varphi \circ (u - v) - (u - v)\varphi' \circ (u - v)]. \end{aligned}$$

Le premier terme est  $\leq 0$  car  $\varphi''$  est  $\leq 0$ , les deux termes suivants aussi car  $|\varphi'| \leq 1$ ; enfin le dernier terme est  $\leq 0$  car  $\varphi(t) - t\varphi'(t)$  est l'ordonnée à l'origine d'une tangente au graphe de  $\varphi$  donc  $\geq 0$  grâce à  $\varphi(0) = 0$ .

LEMME 3. — Soient  $u$  et  $v \in A(\omega)$ . Si  $\varphi$  satisfait aux hypothèses du lemme 2,  $u + v + \varphi \circ (u - v) \in A(\omega)$ .

La topologie de  $\mathcal{L}_{loc}^1(\omega)$  étant métrisable, il suffit de raisonner sur des suites: soient  $u_n$  et  $v_n$  surharmoniques  $\in C^2(\omega)$  et tendant respectivement vers  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}_{loc}^1(\omega)$ .  $|\varphi \circ (u - v) - \varphi \circ (u_n - v_n)| \leq |u - u_n| + |v - v_n|$ , donc  $u_n + v_n + \varphi \circ (u_n - v_n)$  tend vers  $u + v + \varphi \circ (u - v)$  dans  $\mathcal{L}_{loc}^1(\omega)$ .

LEMME 4. — Soient  $u$  et  $v \in A(\omega)$ ; alors  $\inf(u, v) \in A(\omega)$ .

$2 \inf(u, v) = u + v - |u - v|$ . On considère une suite de fonctions  $\varphi_n$  concaves,  $|\varphi'_n| \leq 1$ ,  $\varphi_n(0) = 0$ , telles que  $\varphi_n(t) \rightarrow -|t|$  uniformément sur  $\mathbb{R}$ : on peut prendre

$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} - \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}$ . Alors  $\varphi_n \circ (u - v) \rightarrow -|u - v|$  dans  $\mathcal{L}_{loc}^1(\omega)$  et  $u + v - |u - v|$  est limite dans  $\mathcal{L}_{loc}^1(\omega)$  de  $u + v + \varphi_n \circ (u - v) \in A(\omega)$ .

COROLLAIRE. — Si  $u$  est localement sur  $\omega$  l'enveloppe inférieure d'un nombre fini de fonctions surharmoniques de classe  $C^2$ ,  $Lu$  est  $\leq 0$  dans  $\omega$  au sens des distributions.

On utilise maintenant des propriétés des fonctions surharmoniques. Pour  $u$  surharmonique sur  $\omega$  et  $\delta$  ouvert régulier,  $\bar{\delta} \subset \omega$ , la fonction  $u_\delta$  définie par  $u_\delta(x) = \begin{cases} u(x) & \text{pour } x \in \omega - \delta \\ \int u d\rho_x^\delta & \text{pour } x \in \delta \end{cases}$ , est surharmonique  $\leq u$

sur  $\omega$ , et même  $< u$  sur  $\delta$  si  $u$  est strictement surharmonique sur  $\omega$ , c'est-à-dire n'est harmonique sur aucun ouvert partiel. En outre  $u_\delta(x) \rightarrow u(x)$  pour  $x$  donné quand le diamètre de  $\delta$  tend vers 0.

LEMME 5. — *Étant donné  $u$  strictement surharmonique sur  $\omega$  et  $p$  ouverts réguliers  $\delta_1, \dots, \delta_p$  d'adhérences contenues dans  $\omega$ , la fonction surharmonique  $\nu = \inf (u_{\delta_1}, \dots, u_{\delta_p})$  est localement intégrable (et même continue) sur l'ouvert  $\Delta = \delta_1 \cup \dots \cup \delta_p$ , et l'on a  $L\nu \leq 0$  dans  $\Delta$  au sens des distributions.*

Si  $a \in \delta_1 \cap \dots \cap \delta_q \cap \left( \delta_{q+1} \cap \dots \cap \delta_p \right)$ , on a

$$u_{\delta_1}(a), \dots, u_{\delta_q}(a) < u(a) = u_{\delta_{q+1}}(a) = \dots = u_{\delta_p}(a);$$

comme  $u_{\delta_1}, \dots, u_{\delta_q}$  sont continues au point  $a$  et  $u_{\delta_{q+1}}, \dots, u_{\delta_p}$  s.c.i., il existe un voisinage de  $a$  où  $u_{\delta_i} < u_{\delta_j}$ ,  $\forall i = 1, \dots, q$  et  $j = q+1, \dots, p$ , donc

$$\inf (u_{\delta_1}, \dots, u_{\delta_p}) = \inf (u_{\delta_1}, \dots, u_{\delta_q}).$$

Par suite  $\nu$  est localement sur  $\Delta$  enveloppe inférieure d'un nombre fini de fonctions harmoniques, d'où  $L\nu \leq 0$  dans  $\Delta$ .

THÉORÈME 1. — *Si  $u$  est surharmonique sur un ouvert  $\omega$  et  $\in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\omega)$  <sup>(4)</sup>, la distribution  $Lu$  est  $\leq 0$  sur  $\omega$ .*

Il suffit de montrer que la distribution  $Lu$  est  $\leq 0$  localement; par suite on peut supposer  $a < 0$ , de sorte que les constantes  $> 0$  sont strictement surharmoniques.

Soit d'abord  $u$  strictement surharmonique  $\in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\omega)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}^+(\omega)$  et  $\omega'$  un ouvert borné contenant  $\text{Supp } \varphi$ ,  $\bar{\omega}' \subset \omega$ . On peut couvrir  $\text{Supp } \varphi$  d'un nombre fini d'ouverts réguliers  $\subset \omega'$  et de diamètre  $\leq \frac{1}{n}$ ; le lemme 5 leur fait correspondre  $\nu_n$  surharmonique sur  $\omega$ ,  $\nu_n \leq u$  et  $\int \nu_n L^* \varphi \, dx \leq 0$ . La suite  $\nu_n$  converge simplement vers  $u$ , et  $\nu_n \leq u$  qui est intégrable sur  $\text{Supp } \varphi$ . D'autre part, choisissons une constante  $m \leq 0$  et  $\leq \inf u$ ;  $m$  est sousharmonique et  $m \leq u$  sur  $\bar{\omega}'$  entraîne  $m \leq m_\delta \leq u_\delta \leq u$  sur  $\omega'$  pour tout

(4) On montrera qu'en fait toute fonction surharmonique  $\in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$  (th. 3).

ouvert régulier  $\delta \subset \omega'$ . D'où  $m \leq \nu_n$  sur  $\text{Supp } \varphi$  et  $\int u L^* \varphi \, dx \leq 0$ .

Dans le cas général, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $u + \varepsilon$  est strictement surharmonique, donc  $\int (u + \varepsilon) L^* \varphi \, dx \leq 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ , et  $\int u L^* \varphi \, dx \leq 0$ .

## 2. Les G-potentiels dans un ouvert très régulier.

Dans toute la suite,  $\omega$  désigne un ouvert très régulier assez petit pour qu'on puisse supposer  $a(x) \leq a_0 < 0$  et  $a'(x) \leq a'_0 < 0$  et appliquer le rappel 4. Soient  $g(x, y)$  la fonction de Green dans  $\omega$  déterminée par le théorème 6.1, [2] (cf. rappel 4) et  $g_y(x) = g(x, y)$ : on sait que  $g_y \in \mathcal{L}^1(\omega)$  et que la distribution  $Lg_y$  est  $-\varepsilon_y$ .

LEMME 6. — En posant  $g_y(y) = \liminf_{\substack{x \rightarrow y \\ x \neq y}} g_y(x)$  pour chaque  $y \in \omega$ ,  $g_y$  est un potentiel dans  $\omega$  de support  $y$  et  $(x, y) \mapsto g(x, y)$  est s.c.i. sur  $\omega \times \omega$ .

Pour  $f \in C(\bar{\omega}) \cap C^\infty(\omega)$  et  $f \geq 0$ , la formule

$$Gf(x) = \int_{\omega} g(x, y) f(y) \, dy$$

définit une fonction  $Gf \in C(\bar{\omega}) \cap C^\infty(\omega)$ , surharmonique et  $\geq 0$  sur  $\omega$ ; comme  $Gf$  s'annule en tout point de  $\partial\omega$ , c'est un potentiel dans  $\omega$ .

Étant donné  $g_{y_0}$ , on considère une suite régularisante  $f_n$  de  $\varepsilon_{y_0}$  ( $f_n \in \mathcal{D}^+(\omega)$ ,  $\int f_n(y) \, dy = 1$  et  $\text{Supp } f_n$  contenu dans la boule de centre  $y_0$  et de rayon  $\frac{1}{n}$ ):

$$g_{y_0}(x) - Gf_n(x) = \int_{\omega} [g(x, y_0) - g(x, y)] f_n(y) \, dy \rightarrow 0$$

uniformément sur tout compact  $K \subset \omega - \{y_0\}$ , grâce à la continuité uniforme de  $g(x, y)$  pour  $x \in K$ ,  $y \in Y$  voisinage compact de  $y_0$  disjoint à  $K$ . On en déduit l'inégalité  $g_{y_0} \geq H_{g_{y_0}}^\delta$  sur tout ouvert régulier  $\delta$  de frontière  $\subset \omega - \{y_0\}$ , puis le fait que  $g_{y_0}$  est un potentiel,



comme limite des potentiels  $Gf_n$  dont les supports sont contenus dans un même compact  $Y$  et qui convergent uniformément sur tout compact  $\subset \omega - Y$  (lemme 3.2, [4]).

Un théorème général (proposition 18.1, [4]) montre alors que  $(x, y) \mapsto g(x, y)$  est s.c.i. sur  $\omega \times \omega$ .

**THÉORÈME 2.** — Soit  $\omega$  un ouvert très régulier tel que  $a$  et  $a'$  aient des bornes supérieures  $< 0$  sur  $\omega$ . Si  $\mu$  est une mesure  $\geq 0$  sur  $\omega$  et de masse finie,  $G\mu(x) = \int g_y(x) d\mu(y)$  est un potentiel intégrable sur  $\omega$ , de même support que  $\mu$ , et les solutions de  $Lu = -\mu$  au sens des distributions sont égales p.p. dans  $\omega$  à  $G\mu$  + une fonction harmonique sur  $\omega$ .

Pour toute mesure  $\mu \geq 0$  sur  $\omega$ ,  $G\mu(x) = \int g_y(x) d\mu(y)$  est hyperharmonique sur  $\omega$  (théorème 18.3, [4]). Si en outre  $\mu$  est de masse finie,

$$\int_{\omega} G\mu(x) dx = \int \left[ \int_{\omega} g_y(x) dx \right] d\mu(y) < +\infty,$$

car  $y \mapsto \int_{\omega} g_y(x) dx$  est continue sur  $\bar{\omega}$ ; donc  $G\mu$  est surharmonique et le théorème 18.3, [4] montre alors que c'est un potentiel dans  $\omega$ , de même support que  $\mu$  (d'après la formule (1) du théorème 18.3).

$G\mu$  est solution de  $Lu = -\mu$  dans  $\omega$ , car si  $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ :

$$\langle LG\mu, \varphi \rangle = \langle G\mu, L^*\varphi \rangle = \iint g_y(x) L^*\varphi(x) d\mu(y) dx = - \int \varphi d\mu.$$

Par suite, toute solution  $u$  de  $Lu = -\mu$  dans  $\omega$  diffère de  $G\mu$  d'une fonction égale p.p. à une fonction harmonique sur  $\omega$ .

**COROLLAIRE <sup>(5)</sup>.** — Tout potentiel dans  $\omega$ , localement intégrable et de support  $y$ , est proportionnel à  $g_y$ .

Si  $u$  est un tel potentiel,  $Lu$  est  $\leq 0$  (théorème 1), donc  $Lu = -k\varepsilon_y$ ,  $k > 0$ , et  $u = kg_y$  + (une fonction  $h$  harmonique sur  $\omega$ ) p.p. sur  $\omega$ , donc en tout point  $\neq y$  par continuité, et enfin au point  $y$  car pour tout ouvert régulier  $\delta \ni y$ ,  $u_{\delta} = (kg_y)_{\delta} + h$ .

<sup>(5)</sup> Ce corollaire donnera la proportionnalité des potentiels à support ponctuel donné quand on saura que toute fonction surharmonique est localement intégrable.

### 3. Intégrabilité locale des fonctions surharmoniques.

$\omega$  désigne toujours un ouvert très régulier où  $a$  et  $a'$  ont des bornes supérieures  $< 0$ .

LEMME 7. — *Tout potentiel  $u \in \mathcal{Q}_{loc}^1(\omega)$  et à support compact dans  $\omega$  admet une représentation intégrale de la forme  $\int g_\gamma(x) d\mu(\gamma)$ , où  $\mu$  est une mesure  $\geq 0$  de même support que  $u$ .*

On peut supposer  $\omega$  connexe. La démonstration s'appuie sur les propriétés de la représentation intégrale des fonctions surharmoniques  $\geq 0$  dans  $\omega$  ( $\in S^+(\omega)$ ). On sait que toute fonction  $u \in S^+(\omega)$  admet une représentation intégrale unique  $u(x) = \int p(x) d\nu(p)$ , où  $\nu$  est une mesure de Radon  $\geq 0$  sur une base compacte  $A$  du cône  $S^+(\omega)$ , portée par l'ensemble  $\mathcal{E}$  des éléments extrémaux de  $A$  (théorème 22.1, [4]), et que  $\mathcal{E}$  est contenu dans l'ensemble  $E^+(\omega)$  des potentiels à support ponctuel et des fonctions harmoniques  $> 0$  sur  $\omega$  (théorème 16.2, [4]). En outre,  $u$  étant un potentiel dans  $\omega$ , harmonique hors d'un compact  $K_0 \subset \omega$ ,  $\nu$  est portée par le compact  $A \cap \varphi^{-1}(K_0)$  (lemme 22.1, [4], formule 2), où  $\varphi$  est l'application continue (proposition 19.1, [4]) qui à tout potentiel  $p \in E^+(\omega)$  fait correspondre son support. Enfin l'application  $(p, x) \mapsto p(x)$  est s.c.i.  $> 0$  sur  $E^+(\omega) \times \omega$  (proposition 19.1, [4]), et continue pour  $x \neq \varphi(p)$ .

On suppose  $u \in \mathcal{Q}_{loc}^1(\omega)$ , donc pour chaque compact  $K \subset \omega$ ,  $p$  est intégrable sur  $K$  pour  $\nu$ -presque tout  $p$  (théorème de Fubini), et en considérant une suite croissante de compacts  $K_n$ , de réunion  $\omega$  et tels que tout compact  $K$  soit contenu dans  $K_n$  pour  $n$  assez grand, on en déduit que  $\nu$  ne charge que les potentiels localement intégrables.

On choisit alors  $x_0 \in \omega - K_0$  : pour  $p \in \varphi^{-1}(K_0)$ ,  $p(x_0)$  et  $g_{\varphi(p)}(x_0)$  sont fonctions continues  $> 0$  de  $p$ , donc  $p(x_0) = \lambda(p)g_{\varphi(p)}(x_0)$ , où  $\lambda$  est continue  $> 0$ . Pour  $p \in \mathcal{Q}_{loc}^1(\omega)$ , donc pour  $\nu$ -presque tout  $p$ , on a  $p = C^{ste}g_{\varphi(p)}$ , et cette constante est  $\lambda(p)$ .

Pour  $c$  continue sur  $K_0$  :  $p \mapsto \lambda(p) \cdot c \circ \varphi(p)$  est continue

sur  $\varphi^{-1}(K_0)$ , donc l'application linéaire

$$c \longmapsto \int \lambda(p) \cdot c \circ \varphi(p) \, d\nu(p)$$

a un sens et c'est une mesure  $\mu \geq 0$  sur  $K_0$ . La relation  $\int c(y) \, d\mu(y) = \int \lambda(p) \cdot c \circ \varphi(p) \, d\nu(p)$  subsiste pour  $c$  s.c.i.; en particulier, pour  $c(y) = g_\gamma(x)$ ,  $x$  donné  $\in \omega$ , elle donne  $\int g_\gamma(x) \, d\mu(y) = \int \lambda(p) \cdot g_{\varphi(p)}(x) \, d\nu(p) = \int p(x) \, d\nu(p)$ .

LEMME 8. — Soient  $\omega$  et  $\omega_0$  deux ouverts très réguliers,  $\bar{\omega}_0 \subset \omega$ ,  $\omega_0$  connexe,  $x_0 \in \omega_0$  et  $K$  un compact  $\subset \omega_0$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$(1) \quad u(x_0) \geq C \int_K u(x) \, dx$$

pour toute  $u$  surharmonique  $\geq 0$  et localement intégrable sur  $\omega$ .

1) Soit  $u = Gf$  où  $G$  est l'opérateur de Green dans  $\omega$  et  $f \in C^+(\bar{\omega}) \cap C^\infty(\omega)$ .  $u \in C^2(\bar{\omega}_0)$ , donc d'après la proposition 7.1, [2] (rappel 5) appliquée à  $\omega_0$ , pour  $\beta > 0$ :

$$u(x_0) \geq \beta \int_{\omega_0} g_\beta(x_0, y) u(y) \, dy \geq \beta \int_K g_\beta(x_0, y) u(y) \, dy,$$

d'où l'inégalité (1) pour de telles  $u$ , avec  $C = \beta \inf_{y \in K} g_\beta(x_0, y)$ .

2) Soit  $u$  un potentiel localement intégrable dans  $\omega$  et à support compact  $\subset \omega - \{x_0\}$ , ou, ce qui revient au même d'après le théorème 2 et le lemme 7,  $u = G\mu$ ,  $\mu$  mesure  $\geq 0$  sur  $\omega$  à support compact  $\subset \omega - \{x_0\}$ .

Soit  $\rho \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^n)$ ,  $\int \rho \, dx = 1$ ,  $\text{Supp } \rho$  voisinage de 0 assez petit pour que  $\text{Supp } \mu + \text{Supp } \rho \subset \omega - \{x_0\}$ : puisque  $y \longmapsto g(x_0, y)$  est continue sur  $\omega - \{x_0\}$ ,

$$\int g(x_0, y) \, d(\mu * \rho)(y) \rightarrow \int g(x_0, y) \, d\mu(y),$$

c'est-à-dire  $G(\mu * \rho)(x_0) \rightarrow G\mu(x_0)$ , quand le diamètre de  $\text{Supp } \rho$  tend vers 0.

Or  $\mu * \rho$  est défini relativement à la mesure de Lebesgue par la fonction  $\sigma \in \mathcal{D}^+(\omega)$ :  $\sigma(y) = \int \rho(y - z) \, d\mu(z)$ ; on sait

donc que  $G(\mu * \rho)(x_0) \geq C \int_K G(\mu * \rho) dx$  et il suffit d'étudier les intégrales sur  $K$ .  $h(y) = \int_K g(x, y) dx$  est, d'une part s.c.i. comme potentiel\* de la restriction à  $K$  de la mesure de Lebesgue, d'autre part s.c.s. comme limite de la suite décroissante  $G^* f_n$ , où la suite  $(f_n) \subset \mathcal{K}^+(\omega)$  décroît vers  $\chi_K$ : ainsi  $h$  est continue sur  $\omega$ .

$$\int_K G\mu dx = \iint_{K \times \omega} g(x, y) dx d\mu(y) = \int h d\mu,$$

de même

$$\begin{aligned} \int_K G(\mu * \rho) dx &= \iint_{K \times \omega} g(x, y) dx d(\mu * \rho)(y) \\ &= \int h d(\mu * \rho) \rightarrow \int h d\mu \end{aligned}$$

quand  $\text{Diam Supp } \rho \rightarrow 0$ .

3) Soit  $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\omega)$ , potentiel dans  $\omega$  à support compact: si  $\delta$  est un ouvert régulier  $\ni x_0$ ,  $\bar{\delta} \subset \omega$ ,  $u_\delta$  est un potentiel  $\leq u$ , donc  $\in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\omega)$ , tendant vers  $u$  quand  $\text{Diam } \delta \rightarrow 0$ , et  $\text{Supp } u_\delta$  est contenu dans  $\text{Supp } u \cup \partial\delta$ , mais disjoint à  $\delta$ : on a donc l'inégalité pour  $u_\delta$ .

Le cas général se ramène au 3 par balayage sur  $\omega_0$ .

**THÉORÈME 3.** — *Toute fonction  $u$  surharmonique sur un ouvert  $\Omega \subset \Omega_0$   $y$  est localement intégrable.*

Soit  $\omega$  très régulier où  $a$  et  $a'$  ont des bornes supérieures  $< 0$ ,  $\bar{\omega} \subset \Omega$ .  $u$  admet des minorantes sousesharmoniques sur  $\omega$ , à savoir des constantes  $\leq 0$ , donc aussi une p.g.m.h. (plus grande minorante harmonique), et on peut supposer  $u \in S^+(\omega)$ .

On reprend les notations du lemme 8: il suffit de montrer que  $u$  est intégrable sur  $K$ . On choisit  $x_0 \in \omega_0 - K$  tel que  $u(x_0) < +\infty$ , et d'autre part une fonction surharmonique  $\nu$  continue  $> 0$  sur  $\omega$ , par exemple la constante 1.  $u$  est limite de la suite croissante  $u_n = \inf(u, n\nu)$ ; comme  $u_n \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\omega)$ , on sait que

$$\int_K u_n dx \leq \frac{1}{C} u_n(x_0) \leq \frac{1}{C} u(x_0) < +\infty,$$

donc  $u$  est intégrable sur  $K$ .

#### 4. Diverses conséquences des théorèmes 1,2,3.

A) THÉORÈME 4. — *Dans tout ouvert  $\Omega \subset \Omega_0$  où il existe un potentiel  $> 0$ , les potentiels de support ponctuel donné sont proportionnels.*

Dans un ouvert  $\omega$  très régulier où  $a$  et  $a'$  ont des bornes supérieures  $< 0$ , cette proportionnalité résulte du théorème 3 et du corollaire du théorème 2; le théorème 16.4 de [4] l'étend aux potentiels dans  $\Omega$ .

Conséquence. — D'après le théorème 18.1 de [4], pour chaque  $y \in \Omega$  on peut choisir un potentiel  $p_y$  de support  $y$  tel que l'application  $y \mapsto p_y(x)$  soit continue sur  $\Omega - \{x\}$ ,  $\forall x \in \Omega$ . Alors (théorème 16.4, [4]), si  $\omega$  est un ouvert très régulier où  $a$  et  $a'$  ont des bornes supérieures  $< 0$ , pour  $y \in \omega$  on a  $p_y = \lambda(y) g_y +$  une fonction harmonique dans  $\omega$ , avec  $\lambda$  continue  $> 0$  sur  $\omega$ , d'où, au sens des distributions,  $Lp_y = -\lambda(y)\varepsilon_y$ , d'abord dans  $\omega$ , puis dans  $\Omega$  avec  $\lambda$  continue  $> 0$  sur  $\Omega$ . On peut donc choisir  $p_y$  de manière que  $Lp_y = -\varepsilon_y$ .

Cela étant, par le théorème 18.2 de [4], tout potentiel  $P$  dans  $\Omega$  admet une représentation intégrale unique  $P(x) = \int p_y(x) d\mu(y)$ ,  $\mu$  mesure  $\geq 0$  sur  $\Omega$ , et la relation  $LP = -\mu$  s'établit comme dans le théorème 2.

B) PROPOSITION 1. — *Si deux fonctions  $u_1$  et  $u_2$ , surharmoniques sur un ouvert, sont égales p. p., elles le sont partout.*

Dans un ouvert connexe  $\Omega$  où chaque  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , a une p.g.m.h.  $h_i$ , si  $u_i \neq h_i$ , il existe un potentiel  $> 0$ , donc  $u_i = \int p_y d\mu_i(y) + h_i$  (cf. A);  $\mu_1 = -Lu_1 = -Lu_2 = \mu_2$ , d'où  $h_1 = h_2$  p. p. donc partout.

C) Caractérisation des fonctions  $u \in \mathcal{L}_{loc}^1$  telles que  $Lu \leq 0$ .

THÉORÈME 5. — *Dans tout ouvert  $\Omega \subset \Omega_0$  : u.p.p. égale à une fonction surharmonique équivaut à  $u \in \mathcal{L}_{loc}^1$  et  $Lu \leq 0$ .*

Compte tenu des théorèmes 1 et 3, il reste à montrer que si  $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$  et  $Lu = -\mu$ ,  $\mu$  mesure  $\geq 0$  dans  $\Omega$ ,  $u =$  p. p.

une fonction surharmonique sur  $\Omega$ . Soit  $\underline{g}^\omega$  la fonction de Green dans un ouvert très régulier  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ , où  $a$  et  $a'$  ont des bornes supérieures  $< 0$ :  $Lu|_\omega = -\mu_\omega$ , où  $\mu_\omega$  est la restriction de  $\mu$  à  $\omega$ , donc (théorème 2)

$u|_\omega = \int g_y^\omega d\mu_\omega(y) + (\text{une fonction harmonique } h_\omega)$  p. p. dans  $\omega$ , et les fonctions  $\int g_y^\omega d\mu_\omega(y) + h_\omega$  définissent bien une fonction surharmonique dans  $\Omega$  car si  $\omega'$  très régulier rencontre  $\omega$ :  $\int g_y^{\omega'} d\mu_{\omega'}(y) + h_{\omega'}$ , égale p. p. dans  $\omega \cap \omega'$  à

$$\int g_x^\omega d\mu_\omega(y) + h_\omega,$$

coïncide avec elle (proposition 1).

D) Généralisation du lemme 8.

LEMME 9. — Si  $K$  et  $K'$  sont deux compacts de mesures  $> 0$  contenus dans un ouvert connexe  $\Omega$ , il existe deux constantes  $k_1$  et  $k_2 > 0$  telles que, pour toute fonction  $u$  surharmonique  $> 0$  sur  $\Omega$

$$k_1 \leq \frac{\int_K u \, dx}{\int_{K'} u \, dx} \leq k_2.$$

On suppose qu'il existe une suite  $u_n$  de fonctions surharmoniques  $> 0$  sur  $\Omega$  telles que

$$(1) \quad \int_K u_n \, dx = 1 \quad \text{et} \quad (2) \quad \int_{K'} u_n \, dx \geq \frac{1}{n^2}.$$

Alors  $\nu = \sum_{n \geq 1} u_n \in S^+(\Omega)$  grâce à (2), alors que (1) entraîne  $\int \nu \, dx = +\infty$ , ce qui est contraire au théorème 3.

PROPOSITION 2. — Soient  $\Omega \subset \Omega_0$  un ouvert connexe,  $K$  un compact  $\subset \Omega$  et  $x \in \Omega$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute  $u \in S^+(\Omega)$

$$u(x) \geq C \int_K u(y) \, dy.$$

Cela résulte des lemmes 8 et 9.

### 5. Application à l'axiomatique de M. Brelot.

On considère maintenant un faisceau  $\mathcal{H}_1$  de fonctions harmoniques définies sur un ouvert  $\Omega_1$  connexe  $\subset \mathbb{R}^n$ , satisfaisant aux axiomes 1, 2, 3 de M. Brelot, tel que les constantes soient harmoniques et contenant « suffisamment » de fonctions harmoniques de classe  $C^\infty$ , ce qui signifie que, pour tout compact  $K$  et toute fonction harmonique  $u$  au voisinage de  $K$ , il existe une suite de fonctions  $u_n$  harmoniques et de classe  $C^\infty$  au voisinage de  $K$  telles que  $u_n \rightarrow u$  uniformément sur  $K$  ([3], définition 1. 2).

Alors il existe un ouvert  $\Omega_0$  dense dans  $\Omega_1$ , une fonction  $a$  et des champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_r$  et  $Y$ , définis et de classe  $C^\infty$  dans  $\Omega_0$ , avec les deux propriétés :

a) pour toute fonction  $u$  harmonique dans un ouvert  $\subset \Omega_0$  on a  $Lu = \sum_{k=1}^r X_k^2 u + Yu + au = 0$  au sens des distributions ([3], théorème 3.1);

b) l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$  est de rang  $n$  en tout point  $\in \Omega_0$  ([3], théorème 3.2).

D'après le théorème de Hörmander, les solutions de  $Lu = 0$  sont de classe  $C^\infty$ , et par suite, pour  $u$  continue :

$u$  harmonique dans un ouvert partiel équivaut à  $Lu = 0$  dans cet ouvert ([3], théorème 2.2).

Il en résulte que le faisceau  $\mathcal{H}_0$  des solutions continues de  $Lu = 0$  est la restriction du faisceau  $\mathcal{H}_1$  à  $\Omega_0$ .

**THÉORÈME 6.** — *Étant donnée une axiomatique de M. Brelot définie sur  $\Omega_1$  et contenant « suffisamment » de fonctions harmoniques de classe  $C^\infty$ , les potentiels de support ponctuel  $y$  sont proportionnels, pour  $y$  appartenant à un ouvert dense dans  $\Omega_1$ .*

En divisant les fonctions harmoniques par une même fonction  $\in C^\infty$  et harmonique  $> 0$  sur un ouvert  $\subset \Omega_1$ , on se ramène au cas d'un faisceau  $\mathcal{H}_1$  satisfaisant aux mêmes hypothèses et contenant les constantes. Le théorème résulte alors du théorème 4 et du caractère local de l'unicité, à un facteur près, des potentiels à support ponctuel.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. M. BONY, Détermination des axiomatiques de Théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont différentiables, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 17/1, 1967, 353-382.
- [2] J. M. BONY, Principe du maximum et inégalité de Harnack pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Séminaire de la théorie du potentiel. IHP, 12<sup>e</sup> année (1967-68), n° 10.
- [3] J. M. BONY, Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la Théorie du potentiel, Cours du C.I.M.E. Stresa, Juillet 1969.
- [4] R. M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 12, 1962, 415-571.
- [5] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.*, Uppsala, 119, 1967, 147-171.

Manuscrit reçu le 20 octobre 1971.

accepté par M. Brelot

Rose-Marie et Michel HERVÉ,

Université de Paris VI,

Mathématiques,

Quai St-Bernard, Paris 5<sup>e</sup>.

---