ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES NEVEU

Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 2 (1972), p. 85-130

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_85_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 2 (1972), 85-130.

POTENTIEL MARKOVIEN RÉCURRENT DES CHAINES DE HARRIS

par Jacques NEVEU

1. Introduction.

Soit $P = (P(x, A)\,;\ x \in E,\ A \in \mathcal{A})$ une probabilité de transition définie sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ que sans restreindre essentiellement la généralité, nous pourrons supposer séparable. Le point de départ de ce travail est alors d'étudier les minorations du type $U_h(x, dy) \geqslant a(x)m(dy)$ que peuvent satisfaire les opérateurs de potentiel tabou

$$U_h = \sum_{N} (PM_{1-h})^n P \quad (h : E \to [0, 1])$$

associés à P; nous notons M_k l'opération de multiplication par la fonction k. Par exemple pour une chaîne vérifiant la condition de récurrence de Harris, nous trouverons qu'il existe des fonctions strictement positives h telles que $U_h(x, dy) \geqslant \mu\,(dy)$ pour tout $x \in E$, si μ désigne la mesure positive σ-finie P-invariante dont l'existence a été démontrée par Harris. Dans les conséquences que nous tirerons de ce résultat, nous verrons que l'idée de considérer des potentiels tabous par rapport à des fonctions plutôt que seulement par rapport à des ensembles (comme les interprétations probabilistes en avaient donné l'habitude) simplifie notablement les démonstrations et les idées.

Pour une chaîne de Harris, l'existence de fonctions strictement positives et « bornées au sens de Brunel » [1] résulte immédiatement de la minoration ci-dessus. Nous montrerons en fait beaucoup plus : les fonctions bornées positives f pour lesquelles la fonction $U_{1_A}f$ est bornée quel que soit l'ensemble A non négligeable (fonctions « bornées » de Brunel) coïncident exactement avec les fonctions f telles que $U_{\theta f}(x, dy) \geqslant m(dy)$ pour une mesure positive $m \neq 0$ ($=$ pour une mesure m équivalente à la mesure invariante μ) si θ est un réel > 0 bien choisi. Pour éviter la confusion entre les fonctions bornées et les fonctions « bornées de Brunel », nous appellerons ces dernières les fonctions spéciales. Nous pensons que le cône des fonctions spéciales est un cône très important dans la théorie du potentiel récurrent.

Dans la dernière partie de ce travail nous montrons qu'une chaîne de Harris admet des opérateurs de potentiel *positifs* qui ont les bonnes propriétés; ils satisfont notamment à un principe du balayage et à un principe du maximum. En outre nous sommes à même de résoudre les équations de Poisson $u - Pu = f$ et $\nu - P\nu = \lambda$ pour toute fonction f telle que $|f|$ soit spéciale et que $\mu(f) = 0$ et pour toute mesure bornée λ de masse totale $\lambda(E) = 0$ (les solutions sont essentiellement uniques dans des espaces convenables).

Notations. — Dans toute la suite $(E, \mathcal{A})$ désignera un espace mesurable séparable. Toute mesure de transition positive $\{T = T(x, A);\ x \in E,\ A \in \mathcal{A}\}$, sur $(E, \mathcal{A})$, c'est-à-dire toute famille mesurable $(T(x, .),\ x \in E)$ de mesures positives (σ-finies ou non) sur $(E, \mathcal{A})$ définit deux opérateurs $f \to Tf$ et $\lambda \to \lambda T$, opérant le premier sur les fonctions mesurables $f\colon E \to \overline{R}_+ \equiv [0, \infty]$ et le second sur les mesures positives (σ-finies ou non) définies sur $(E, \mathcal{A})$. Nous appellerons en abrégé « opérateur positif » la donnée d'un tel T. Il est clair que le produit $T_1 \ldots T_n$ de n opérateurs positifs ou la somme dénombrable (finie ou infinie) $\sum_k T_k$ d'opérateurs positifs sont encore des opérateurs positifs. Lorsque f est une fonction mesurable positive et m une mesure positive sur $(E, \mathcal{A})$, nous noterons $f \otimes m$ l'opérateur positif associé à la mesure de transition

$$f \otimes m(x, dy) = f(x)m(dy).$$

Dans toute la suite nous nous donnerons aussi une probabilité de transition P sur $(E, \mathcal{A})$ et l'opérateur positif markovien qui lui est associé.

Nous noterons dorénavant H l'ensemble des fonctions réelles mesurables $h\colon (E, \mathcal{A}) \to [0, 1]$. Si $h \in H$, nous désignerons par M_h l'opérateur de multiplication par la fonction h qui opère à droite sur les fonctions positives et à gauche sur les mesures positives suivant les formules

$$M_h(f) = fh, \quad mM_h = h.m$$

où $h.m$ désigne la mesure de densité h par rapport à m. Nous écrirons M_A au lieu de M_{1_A} lorsque $A \in \mathcal{A}$.

Lorsqu'il s'agira d'interprétations probabilistes, $(X_n, n \in N)$ désignera la suite des applications coordonnées de $(E, \mathcal{A})^{N\otimes}$ dans $(E, \mathcal{A})$ et $\mathbf{P}_x(x \in E)$ désignera la probabilité unique sur $(E, \mathcal{A})^{N\otimes}$ pour laquelle $(X_n, n \in N)$ soit une chaîne de Markov d'état initial x et de probabilité de transition P. [9].

2. Les opérateurs U_h.

L'objet de ce paragraphe est de passer rapidement en revue les propriétés des opérateurs positifs U_h définis pour toute fonction $h \in H$ par

$$U_h = \sum_N (PM_{1-h})^n P = \sum_N P(M_{1-h} P)^n.$$

Il est facile de vérifier que ces opérateurs admettent l'interprétation probabiliste suivante

$$U_h f(x) = \mathbf{E}_x\Big(\sum_{n \in N^*} (1 - h(X_1))(1 - h(X_2)) \ldots (1 - h(X_{n-1}))f(X_n)\Big).$$

Lorsque $h = 1_A$ $(A \in \mathcal{A})$ et à condition d'écrire U_A au lieu de U_{1_A}, cette formule se réduit à

$$U_A f(x) = E_x\Big(\sum_{1 \leqslant n \leqslant \nu_A^1} f(X_n)\Big)$$

où ν_A^1 désigne le premier instant $n \in N^*$ auquel $X_n \in A$ $(\nu_A^1 = \infty$ si $X_n \notin A$ pour tout $n \in N^*)$.

Les études de potentiel markovien introduisent une foule d'opérateurs (que chaque auteur note à sa manière!) qui peuvent tous se déduire des opérateurs U_A; nous pensons notamment aux opérateurs de balayage, de cobalayage, opérateurs de transition des chaînes induites, etc... Nous croyons que les opérateurs U_A sont les plus « fondamentaux » de tous ces opérateurs, car ce sont eux qui vérifient les équations les plus simples, à savoir les équations de la proposition II.1. ci-dessous.

Lorsque $h = 1$, l'opérateur U_h se réduit à P. Lorsque $h = 0$, l'opérateur U_0 est à l'addition de l'opérateur identique I près, égal à l'opérateur potentiel de la chaîne :

$$I + U_0 = \sum_{N} P^n.$$

La proposition suivante montre comment les opérateurs U_h dépendent de $h (h \in H)$.

PROPOSITION 2.1. — *Quelles que soient les fonctions $h, k \in H$ telles que $h \leqslant k$, les opérateurs U_h et U_k qui leur sont associés vérifient l'égalité*

$$U_h = \sum_{N} (U_k M_{k-h})^n U_k \equiv \sum_{N} U_k (M_{k-h} U_k)^n.$$

Ces opérateurs vérifient donc les « équations résolvantes »

$$U_h = U_k + U_h M_{k-h} U_k = U_k + U_k M_{k-h} U_h.$$

Ici comme dans toute la suite, nous prendrons soin de n'écrire jamais que des relations additives entre opérateurs positifs de manière à éviter d'introduire des expressions indéterminées $+\infty - \infty$; cela simplifie beaucoup les énoncés et les démonstrations.

Démonstration. — Les égalités de cette proposition sont des cas particuliers des formules du lemme élémentaire suivant.

LEMME 2.2. — *Si Q et A sont deux opérateurs positifs sur $(E, \mathcal{A})$, l'opérateur S défini par $S = \sum_{N} (QA)^n Q$ vérifie la double égalité*

$$S = Q + QAS = Q + SAQ.$$

De plus si B est un troisième opérateur positif sur $(E, \mathcal{A})$, alors

$$\sum_{N} (SB)^n S = \sum_{N} [Q(A + B)]^n Q.$$

Il suffit d'écrire que par définition

$$S = Q + \sum_{N} (QA)^{n+1} Q$$

pour voir que $S = Q + QAS$. Comme S s'écrit encore $S = \sum_{N} Q(AQ)^n$, il est clair que nous avons aussi

$S = Q + SAQ$. Pour démontrer la deuxième égalité du lemme, il suffit d'écrire que pour tout $n \in N$

$$(QA + QB)^n Q = \sum_{\substack{k, n_0, \dots, n_k \in N \\ k + n_0 + \dots + n_k = n}} ((QA)^{n_0}Q)B((QA)^{n_1}Q)B \dots B((QA)^{n_k}Q)$$

et de sommer ensuite sur $n (n \in N)$; en échangeant l'ordre des sommations, ce qui est permis parce que tous les opérateurs considérés sont positifs, nous obtenons que

$$\sum_N (QA + QB)^n Q = \sum_{k \in N} \sum_{n_0, \dots, n_k \in N} ((QA)^{n_0}Q)B \dots ((QA)^{n_k}Q) = \sum_{k \in N} (SB)^k S.$$

Le lemme est ainsi démontré. Sa seconde égalité appliquée à $Q = P$, $A = M_{1-k}$ et $B = M_{k-h}$ donne la première égalité de la proposition. Ses premières égalités appliquées à $Q = U_k$, $A = M_{k-h}$ donnent les équations résolvantes de la proposition. ▌

Lorsque $h = \theta k (\theta \in [0, 1])$, la première formule de la proposition ci-dessus s'écrit

$$U_{\theta k} = \sum_N (1 - \theta)^n (U_k M_k)^n U_k \quad (k \in H;\ \theta \in [0, 1]).$$

PROPOSITION 2.3. — *Soit* P *une probabilité de transition sur* $(E, \mathcal{A})$ *et soit* f *une fonction* P-*excessive, c'est-à-dire une fonction mesurable* $f\colon E \to \overline{R}_+$ *telle que* $Pf \leqslant f$. *Alors* $U_h M_h f \leqslant f$ *pour tout* $h \in H$ *et*

$$U_h M_h f \leqslant U_k M_k f \leqslant f \quad \text{si} \quad h \leqslant k \quad (h, k \in H).$$

Un résultat analogue est valable pour les mesures P-excessives.

Démonstration. — Il suffira de démontrer que si $f\colon E \to \overline{R}_+$ est une fonction mesurable telle que $U_k M_k f \leqslant f$ pour une fonction $k \in H$ donnée, alors $U_h M_h f \leqslant U_k M_k f$ pour tout $h \in H$, $h \leqslant k$. En effet pour $k = 1$, ce résultat constitue la première partie de la proposition; ensuite pour k quelconque il fournit la seconde inégalité de la proposition.

L'inégalité $U_k M_k f \leqslant f$ entraîne que

$$\sum_{n<p} (U_k M_{k-h})^n U_k M_h(f) + (U_k M_{k-h})^p U_k M_k(f) \leqslant U_k M_k(f) \leqslant f$$

pour tout $p \in \mathbf{N}^*$. Montrons-le en procédant par récurrence sur p. Pour $p = 1$, l'inégalité se réduit à l'hypothèse; d'autre part, si elle est vraie pour la valeur p du paramètre, nous obtenons en multipliant les membres extrêmes à gauche par $U_k M_{k-h}$ et en additionnant le résultat à $U_k M_h(f)$, que :

$$\begin{aligned} U_k M_h(f) + \sum_{n<p} (U_k M_{k-h})^{n+1} U_k M_h(f) + (U_k M_{k-h})^{p+1} U_k M_k(f) \\ \leqslant U_k M_h(f) + U_k M_{k-h}(f) \\ = U_k M_k f \leqslant f. \end{aligned}$$

La récurrence est ainsi établie. En faisant tendre $p \uparrow \infty$, nous trouvons que

$$U_h M_h(f) = \sum_{\mathbf{N}} (U_k M_{k-h})^n U_k M_h(f) \leqslant U_k M_k(f)$$

grâce à la formule de la proposition 1. ▌

Il résulte en particulier de la proposition précédente que $U_h(h) \leqslant 1$ et que $U_h(h)$ croît avec $h (h \in H)$; nous nous servirons plusieurs fois de ce double résultat. Notons qu'il entraîne le corollaire suivant :

Corollaire 2.4. — *Pour toute fonction* $h \in H$ *telle que* $\inf_E h > 0$, *nous avons* $U_h(h) = 1$.

Par contre il n'est pas nécessairement vrai que $U_h(h) = 1$ lorsque $h = 1_A$ $(A \in \mathcal{A}, A \neq E)$ puisque $U_A 1_A$ est la probabilité $\mathbf{P}.(\nu_A^1 < \infty)$ d'entrée dans A après 0.

Démonstration. — Puisque $U_h(h)$ croît avec h et est majorée par 1, il suffit de démontrer le corollaire lorsque h est constante et non nulle, soit $h = \theta$ avec $\theta \in]0, 1]$. Mais dans ce cas évidemment

$$U_\theta(1) = \sum_{\mathbf{N}} (1-\theta)^n P^{n+1}\, 1 = \sum_{\mathbf{N}} (1-\theta)^n = \theta^{-1}$$

de sorte que $U_\theta(\theta) = 1$. ▌

3. Chaînes irréductibles.

L'objet de ce paragraphe est d'établir que pour toute probabilité de transition irréductible (définition 1 ci-dessous), il existe une fonction strictement positive h_0 au moins pour laquelle l'opérateur U_{h_0} soit minoré par $U_{h_0}(h_0) \otimes m_0$ pour une mesure positive $m_0 \neq 0$. Suivant que $U_{h_0}(h_0)$ est ou non p.p. égale à 1, nous verrons que la chaîne est récurrente ou transitoire.

DÉFINITION 3.1. — *Une probabilité de transition* P *définie sur un espace mesurable* $(E, \mathcal{A})$ *est dite irréductible par rapport à une mesure positive* σ*-finie* m *définie sur* $(E, \mathcal{A})$ *si* $m \ll U_0(x, .)$ *pour tout* $x \in E$.

Puisque $U_0 = \sum_{N^*} P_n$ la condition de cette définition exprime que pour tout $x \in E$ et tout $A \in \mathcal{A}$ de mesure $m(A) > 0$, il existe un $n \in N^*$ tel que $P_n(x, A) > 0$.

Voici alors le point de départ des résultats ultérieurs de ce travail.

THÉORÈME 3.2. — *Soit* P *une probabilité de transition sur* $(E, \mathcal{A})$, *irréductible par rapport à la mesure positive* σ*-finie* m. *Il existe alors une fonction* $h_0 \in H$ *strictement positive sur* E *et une mesure positive* m_0 *équivalente à la mesure* m *telle que*

$$U_{h_0} \geqslant U_{h_0}(h_0) \otimes m_0.$$

Démonstration. — Puisque $U_\theta = \sum_N (1-\theta)^n P^{n+1}$ par définition, il est facile de voir que la m-irréductibilité de la probabilité de transition P entraîne que

$$m \ll U_\theta(x, .) \quad \text{pour tout} \quad x \in E \quad \text{et tout} \quad \theta \in [0, 1[.$$

D'autre part quitte à remplacer la mesure m par une mesure $f.m$ où $f > 0$, nous pourrons supposer que la mesure σ-finie m est en fait une probabilité sur E; nous ne changerons pas ainsi les ensembles m-négligeables, ce qui est la seule chose qui compte dans ce qui précède.

L'hypothèse de séparabilité de l'espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ permet de trouver pour tout $\theta \in [0, 1]$ une fonction mesurable $p_\theta : (E^2, \mathcal{A}^{2\otimes}) \to R_+$ telle que pour tout $x \in E$, $p_\theta(x, .)m$ soit la partie absolument continue par rapport à m de la mesure $U_\theta(x, .)$. La propriété d'irréductibilité $m \ll U_\theta(x, .)$ entraîne alors que $p_\theta(x, .) > 0 (m)$-presque partout sur E; en ajoutant éventuellement à la fonction p_θ la fonction $1_{\{p_\theta = 0\}}$ dont les sections sont m-négligeables, nous pourrons supposer dorénavant que la fonction p_θ est strictement positive sur tout E^2.

Nous avons ainsi déduit de l'hypothèse d'irréductibilité de la probabilité de transition P qu'il existait une fonction mesurable strictement positive sur E^2 telle que

$$U_\theta(x, .) \geqslant p_\theta(x, .)m \quad \text{pour tout} \quad x \in E$$

$(0 \leqslant \theta < 1)$. Ce résultat est bien connu mais par contre il ne semble pas qu'il ait été remarqué que cette minoration pouvait être améliorée de la manière suivante.

Proposition 3.3. — *Si* P *est m-irréductible, il existe pour tout* $\theta \in [0, 1[$ *deux fonctions mesurables strictement positives sur* $(E, \mathcal{A})$, *soient* a_θ *et* b_θ, *telles que*

$$U_\theta \geqslant a_\theta \otimes b_\theta m.$$

Remarque. — Il importe d'observer à propos de cette proposition qu'une fonction mesurable p strictement positive sur $(E^2, \mathcal{A}^{2\otimes})$ n'est pas minorable en général par une fonction de la forme $a \otimes b$ où a et b sont strictement positives; pour s'en convaincre il suffit de considérer l'exemple de la fonction borélienne $p(x, y) = |x - y| + 1_{\{x=y\}}$ sur $[0, 1]^2$. Néanmoins lorsque $E = N$ (donc aussi lorsque E est dénombrable) toute fonction strictement positive p sur E^2 est minorée par exemple par le produit $a \otimes b$ des fonctions strictement positives que l'on obtient en posant

$$a(x) = \min(1, p(x, 0), p(x, 1), \dots p(x, x))$$
$$b(y) = \min(1, p(0, y), p(1, y), \dots p(y, y)) \quad (x, y \in N).$$

La démonstration de la proposition précédente s'appuie sur le résultat suivant, dont la démonstration s'inspire du travail de Harris [4].

Lemme 3.4. — *Soit* $(E, \mathcal{A}, m)$ *un espace de probabilité et soient* p_1, p_2 *deux fonctions mesurables strictement positives définies sur* $(E^2, \mathcal{A}^{2\otimes})$. *Alors la fonction mesurable* q *définie sur* $(E, \mathcal{A})^2$ *par la formule*

$$q(x, z) = \int_E p_1(x, y)p_2(y, z)\, dm(y)$$

est non seulement strictement positive sur E^2, *mais elle admet même une minoration de la forme*

$$q \geqslant a \otimes b \quad (\textit{soit } q(x, z) \geqslant a(x)b(z))$$

pour deux fonctions mesurables strictement positives a, b *définies sur* $(E, \mathcal{A})$.

En effet pour tout x fixé, la stricte positivité de la fonction $p_1(x, .)$ sur E entraîne que

$$m\left(p_1(x), . \geqslant \frac{1}{k}\right) \uparrow 1 \quad \text{lorsque} \qquad k \uparrow \infty;$$

désignons alors par $k(x)$ le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que

$$m\left(p_1(x, .) \geqslant \frac{1}{k(x)}\right) \geqslant \frac{3}{4}.$$

Comme la fonction de x définie par la probabilité $m(p_1(x, .) \geqslant 1/k)$ est mesurable sur $(E, \mathcal{A})$, il est clair que $k(.) : E \to N^*$ est mesurable. En posant $a(x) = \frac{1}{k(x)}$, nous avons donc construit une fonction mesurable strictement positive sur $(E, \mathcal{A})$ telle que $m(p_1(x, .) \geqslant a(x)) \geqslant 3/4$ pour tout $x \in E$.

De manière analogue nous pouvons construire une fonction mesurable strictement positive b sur $(E, \mathcal{A})$ telle que $m(p_2(., z) \geqslant b(z)) \geqslant 3/4$ pour tout $z \in E$. Mais alors nous pouvons écrire pour tout couple $x, z \in E^2$ que :

$$\begin{aligned} q(x, z) &= \int_E p_1(x, y)p_2(y, z)\, dm(y) \\ &\geqslant \int_{\{p_1(x, .) \geqslant a(x),\, p_2(., z) \geqslant b(z)\}} p_1(x, y)p_2(y, z)\, dm(y) \\ &\geqslant a(x)b(z)m(p_1(x, .) \geqslant a(x), p_2(., z) \geqslant b(z)) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\, a(x)b(z) \end{aligned}$$

et le lemme 4 est ainsi démontré à condition de remplacer a par $\frac{a}{2}$.

La proposition 3 découle immédiatement du lemme 4 que nous venons de démontrer et de l'équation résolvante. En effet si θ est un réel de $[0, 1[$, choisissons un réel θ' tel que $\theta < \theta' < 1$; puisque

$$U_\theta(x, .) \geqslant p_\theta(x, .)m \quad \text{et} \quad U_{\theta'}(x, .) \geqslant p_{\theta'}(x, .)m$$

pour des fonctions strictement positives p_θ et $p_{\theta'}$ sur E^2, l'équation résolvante montre que

$$\begin{aligned} U_\theta &\geqslant (\theta' - \theta)U_\theta U_{\theta'} \\ &\geqslant (\theta' - \theta) \int p_\theta(., y)p_{\theta'}(y, .)\, dm(y).m \end{aligned}$$

et d'après le lemme 4 il existe donc des fonctions mesurables strictement positives a_θ et b_θ sur $(E, \mathcal{A})$ telles que

$$U_\theta \geqslant a_\theta \otimes b_\theta.m.$$

Achevons maintenant la démonstration du théorème 2. A cet effet fixons-nous un θ dans $]0, 1[$; en remplaçant éventuellement la fonction a_θ par $\min\left(\frac{\theta}{2}, a_\theta\right)$, nous pouvons supposer que la fonction strictement positive a_θ vérifie l'inégalité $a_\theta \leqslant \frac{\theta}{2}$. Posons $h_0 = a_\theta$. L'équation résolvante entraîne alors que

$$U_{h_0} \geqslant U_{h_0}M_{\theta - h_0}U_\theta \geqslant \frac{\theta}{2} U_{h_0}U_\theta$$

puisque $h_0 \leqslant \frac{\theta}{2}$; par conséquent

$$U_{h_0} \geqslant \frac{\theta}{2} U_{h_0}(h_0 \otimes b_\theta.m)$$

et il reste à poser $m_0 = \frac{\theta}{2} b_\theta.m$, pour que l'inégalité $U_{h_0} \geqslant U_{h_0}(h_0) \otimes m_0$ soit démontrée. D'après ce qui précède h_0 est strictement positive sur E et la mesure m_0 est équivalente à m puisque b_θ est strictement positive. ▌

N. Jain et B. Jamison ont montré qu'une probabilité de transition m-irréductible était ou bien transitoire ou bien récurrente modulo un ensemble négligeable. Nous reprenons la démonstration de ce résultat en partant du théorème 2.

PROPOSITION 3.5. — *Soit* P *une probabilité de transition sur* $(E, \mathcal{A})$, *irréductible relativement à la mesure positive* σ-*finie* m. *Alors deux cas seulement sont possibles* :

1) *Il existe une fonction mesurable strictement positive* h_0 *sur* $(E, \mathcal{A})$ *dont le potentiel* Uh_0 *soit une fonction bornée sur* E;

2) *Il existe un sous-ensemble mesurable* E^* *de* E *tel que*

$$a)\quad m((E^*)^c) = 0, \qquad b)\quad P(\,.\,, E^*) = 1 \quad sur \quad E^*$$

et tel que pour la probabilité de transition P^* *obtenue en restreignant* P *à* E^*, *il existe une fonction mesurable* $h_0^*: E^* \to [0, 1]$ *jouissant des trois propriétés suivantes*

$$a)\ h_0^* > 0 \ sur\ E^*, \quad b)\ U^*_{h_0^*}(h_0^*) = 1 \ sur\ E^*, \quad c)\ U^*_{h_0^*} \geqslant 1 \otimes m^*$$

pour une mesure positive m^* *équivalente à* m.

Le cas (1) est appelé le cas transitoire : l'intégrabilité de la v.a. positive $\sum\limits_{N^*} h_0(X_n)$ par rapport à toutes les probabilités $\mathbf{P}_x (x \in E)$ entraîne que la chaîne ne visite p.s. qu'un nombre fini de fois chacun des ensembles $A_k = \{h_0 > 1/k\}$; or $A_k \uparrow E$ lorsque $k \uparrow \infty$. Nous verrons au paragraphe suivant que le cas (2) correspond à celui d'une chaîne récurrente au sens de Harris, sur E^* : pour tout $x \in E^*$ et tout A de mesure $m(A) > 0$, nous montrerons que

$$P_x\Big(\sum_{N^*} 1_A(X_n) = \infty\Big) = 1.$$

Démonstration. — Soit h_0 une fonction de H jouissant des propriétés énoncées dans le théorème 2. Nous pouvons supposer en outre que $h_0 < 1$ sur E car la fonction construite dans ce théorème jouit effectivement de cette propriété. Nous distinguerons alors deux cas, suivant que la fonction $U_{h_0}(h_0)$ est égale à 1 m-presque partout ou non.

1) Si la fonction positive $1 - U_{h_0}(h_0)$ n'est pas m-négligeable, le nombre réel $c = m_0(h_0(1 - U_{h_0}(h_0)))$ est strictement positif puisque $h_0 > 0$ sur E et puisque les mesures m_0 et m sont équivalentes. Alors

$$\begin{aligned}(U_{h_0}M_{h_0})1 - (U_{h_0}M_{h_0})^2 1 &= U_{h_0}M_{h_0}(1 - U_{h_0}(h_0)) \\ &\geqslant U_{h_0}(h_0)c\end{aligned}$$

d'après l'inégalité $U_{h_0} \geqslant U_{h_0}(h_0) \otimes m_0$ vérifiée par l'opérateur U_{h_0}. Ceci peut encore s'écrire

$$(U_{h_0}M_{h_0})^2 1 \leqslant (1 - c)(U_{h_0}M_{h_0})1.$$

Par itération, il vient

$$(U_{h_0}M_{h_0})^{n+1}1 \leqslant (1 - c)^n(U_{h_0}M_{h_0})1 \quad (n \in \mathrm{N})$$

et l'équation résolvante permet alors de majorer le potentiel Uh_0 de h_0 comme suit

$$\begin{aligned} Uh_0 &= \sum_{\mathrm{N}} (U_{h_0}M_{h_0})^n U_{h_0}(h_0) \\ &= \sum_{\mathrm{N}} (U_{h_0}M_{h_0})^{n+1}1 \\ &\leqslant \frac{1}{c} U_{h_0}(h_0) \leqslant \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Nous avons démontré que ce potentiel Uh_0 est borné sur E.

2) Si la fonction $U_{h_0}(h_0)$ est égale à 1 m-presque partout, l'ensemble mesurable $E^* = (U_{h_0}(h_0) = 1)$ est m-plein. L'équation résolvante $U_{h_0} = P + PM_{1-h_0}U_{h_0}$ entraîne d'autre part que

$$\begin{aligned} 1 - U_{h_0}(h_0) &= 1 - P(h_0 + (1 - h_0)U_{h_0}(h_0)) \\ &= P((1 - h_0)(1 - U_{h_0}(h_0))); \end{aligned}$$

le premier membre s'annule en tout point $x \in E^*$ et pour un tel x $P(x, .)$ ne peut donc charger que l'ensemble

$$\{(1 - h_0)(1 - U_{h_0}(h_0)) = 0\}$$

qui coïncide avec E^* puisque $h_0 < 1$ sur E. Nous avons ainsi démontré que $P(., E^*) = 1$ sur E^*.

Cette dernière propriété entraîne que la restriction P^* de P à E^* est encore une probabilité de transition et il est facile de voir que les opérateurs U_h admettent les U_h^* comme restrictions à E^* si h^* est la restriction de h à E^*. La restriction h_0^* de h_0 à E^* et la restriction m_0^* de m_0 à E^* jouissant alors manifestement des propriétés (a, b, c) énoncées dans la proposition. ▌

Terminons ce paragraphe par l'énoncé d'un résultat concernant l'existence de mesures σ-finies P-invariantes dans le cas d'une chaîne transitoire.

Proposition 3.6. — *Soit* P *une probabilité de transition sur* $(E, \mathcal{A})$, *irréductible relativement à la mesure positive* σ-*finie* m. *Supposons que le premier cas de l'alternative de la proposition* 5 *soit réalisé et désignons par* h_0 *une fonction strictement positive de* H *telle que*

$$U_{h_0} \geqslant U_{h_0}(h_0) \otimes m_0$$

et que Uh_0 *soit bornée sur* E.

Alors les mesures positives σ-*finies* μ *qui sont* P-*invariantes coïncident bi-univoquement avec les mesures de la forme*

$$\lambda + \lambda M_{h_0} U_0$$

où λ *est une mesure positive telle que* $\lambda(h_0 \,.\, U_0 h_0) < \infty$ *et que* $\lambda M_{1-h_0} P = \lambda$.

L'intérêt de cette proposition par rapport aux résultats existant dans la littérature, nous semble tenir dans le fait que la mesure P-invariante μ est supposée σ-finie sans plus, c'est-à-dire sans que nous nous donnions à l'avance aucun ensemble sur lequel μ soit finie. Notons en effet que si μ est σ-finie et P-invariante, nous montrons dans la démonstration ci-dessous que automatiquement $\mu(h_0 \,.\, U_{h_0}(h_0)) < \infty$. (D'ailleurs la démonstration qui suit serait beaucoup plus courte s'il n'y avait à être très précis en ce qui concerne les finitudes).

Démonstration. — Toute mesure μ de la forme $\mu = \lambda + \lambda M_{h_0} U_0$ est positive et σ-finie si λ est une mesure positive telle que $\lambda(h_0 \,.\, U_0 h_0) < \infty$; en effet la mesure λ est σ-finie car la fonction $h_0 \,.\, U_0 h_0$ est strictement positive sur E et la mesure $\lambda M_{h_0} U$ est σ-finie car

$$(\lambda M_{h_0} U_0) h_0 = \lambda(h_0 \,.\, U_0 h_0)$$

est fini, alors que h_0 est strictement positive sur E. De plus l'invariance de λ par $M_{1-h_0}P$ entraîne celle de μ par P car :

$$\begin{aligned} \mu P &= \lambda P + \lambda M_{h_0} UP \\ &= \lambda M_{1-h_0} P + \lambda M_{h_0}(P + U_0 P) \\ &= \lambda + \lambda M_{h_0} U_0 \end{aligned}$$

puisque $P + U_0 P = U_0$.

Inversement si la mesure positive μ est P-invariante, la proposition 2.3 appliquée aux mesures montre que $\mu \geqslant \mu M_{h_0} U_{h_0}$; si μ est σ-finie, il existe alors une et une seule mesure positive λ telle que

$$\mu = \mu M_{h_0} U_{h_0} + \lambda.$$

Il est facile de déduire de cette unicité que $\lambda = \lambda M_{1-h_0} P$; nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \mu = \mu P &= \mu M_{h_0} P + \mu M_{1-h_0} P \\ &= \mu M_{h_0} P + (\mu M_{h_0} U_{h_0} + \lambda) M_{1-h_0} P \\ &= \mu M_{h_0}(P + U_{h_0} M_{1-h_0} P) + \lambda M_{1-h_0} P \\ &= \mu M_{h_0} U_{h_0} + \lambda M_{1-h_0} P \end{aligned}$$

en vertu de l'équation résolvante.

La minoration $U_{h_0} \geqslant U_{h_0}(h_0) \otimes m_0$ entraîne que

$$\mu \geqslant \mu M_{h_0} U_{h_0} \geqslant \mu(h_0 \,.\, U_{h_0}(h_0)) m_0 ;$$

puisque la mesure positive m_0 n'est pas identiquement nulle, la mesure μ ne peut être σ-finie et vérifier l'inégalité précédente que si l'intégrale $\mu(h_0 \,.\, U_{h_0}(h_0))$ est finie. Grâce à l'inégalité

$$(U_{h_0} M_{h_0})^{n+1} 1 \leqslant c^n U_{h_0}(h_0) \qquad \text{où} \qquad c < 1$$

de la démonstration de la proposition 3.5, cela entraîne que

$$\begin{aligned} \mu(M_{h_0} U_{h_0})^{n+1}(h_0) &= \mu(h_0 \,.\, (U_{h_0} M_{h_0})^{n+1} 1) \\ &\leqslant c^n \mu(h_0 \,.\, U_{h_0}(h_0)) \end{aligned}$$

décroît vers 0 lorsque $n \uparrow \infty$. Mais alors l'égalité de définition de la mesure λ, qui entraîne par itération que

$$\mu = \mu(M_{h_0} U_{h_0})^{n+1} + \lambda \sum_0^n (M_{h_0} U_{h_0})^m$$

implique que

$$\begin{aligned} \mu &= \lambda \sum_{n \in \mathbf{N}} (M_{h_0} U_{h_0})^m \\ &= \lambda + \lambda M_{h_0} \sum_{\mathbf{N}} U_{h_0}(M_{h_0} U_{h_0})^m = \lambda + \lambda M_{h_0} U_0. \end{aligned}$$

Enfin, cette égalité et l'équation résolvante montrent que

$$\begin{aligned} \mu(h_0 \,.\, U_{h_0}(h_0)) &= \mu M_{h_0} U_{h_0}(h_0) \\ &= (\lambda + \lambda M_{h_0} U_0) M_{h_0} U_{h_0}(h_0) \\ &= \lambda M_{h_0}(U_0(h_0)) \end{aligned}$$

ce qui implique que $\lambda(h_0 \,.\, U_0(h_0)) < \infty$. ▌

4. Chaînes de Harris et fonctions « spéciales ».

Le premier objet de ce paragraphe est d'étudier les chaînes de Markov pour lesquelles l'opérateur U_{h_0} est minoré par une expression de la forme $1 \otimes m_0$, pour une fonction strictement positive h_0 au moins. Nous déduirons de la proposition suivante que ces chaînes sont exactement celles qui remplissent la condition de Harris.

PROPOSITION 4.1. — *Soit* P *une probabilité de transition sur l'espace mesurable* $(E, \mathcal{A})$. *Soit* $h_0 \in H$ *une fonction telle que*

$$a)\ h_0 > 0 \ \textit{sur}\ E, \quad b)\ U_{h_0}(h_0) = 1, \quad c)\ U_{h_0} \geqslant 1 \otimes m_0$$

pour une mesure positive m_0 *sur* $(E, \mathcal{A})$ *distincte de* 0.

Alors il existe une mesure positive P-*invariante* μ *telle que* $\mu(h_0) = 1$ *et que* $\mu \geqslant m$. *En outre*

$$U_f(f) = 1, \qquad (f.\mu)U_f = \mu$$

pour toute fonction $f \in H$ *qui n'est pas* μ-*négligeable.*

Enfin μ *est à une constante multiplicative près, la seule mesure positive* σ-*finie telle que* $\mu \geqslant \mu P$.

Démonstration. — 1) Nous commencerons par démontrer que l'opérateur $U_{h_0}M_{h_0}$ qui est markovien en vertu de l'hypothèse (b) possède une probabilité invariante. Nous nous appuierons à cet effet sur le lemme classique suivant.

LEMME 4.2. — *Toute probabilité de transition* Q *sur l'espace mesurable* $(E, \mathcal{A})$ *définit un opérateur linéaire de norme* 1 *sur l'espace de Banach des mesures bornées sur* $(E, \mathcal{A})$; *cet opérateur laisse invariant le sous-espace fermé*

$$M_0 = \{m : m(E) = 0\}$$

de M. *Lorsque la norme* Δ *de la restriction de l'opérateur* Q *à* M_0 *est strictement inférieure à* 1, *il existe une probabilité* Q-*invariante unique sur* $(E, \mathcal{A})$, *soit* ν; *en outre pour tout* $x \in E$, *nous avons*

$$\|Q^n(x, .) - \nu\| \leqslant 2\Delta^n \to 0 \quad \textit{lorsque} \quad n \uparrow \infty.$$

La première partie de ce lemme est bien connue. Ensuite si m est une probabilité sur $(E, \mathcal{A})$ et si $l \in N$, la mesure $m - mQ^l$ appartient à M_0 et possède une norme au plus égale à 2; l'hypothèse entraîne donc que

$$\|mQ^n - mQ^{n+l}\| = \|(m - mQ^l)Q^n\| \leqslant 2\Delta^n \quad (l, n \in N)$$

de sorte que $(mQ^n, n \in N)$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach M. La limite $\nu = \lim_n mQ^n$ de cette suite vérifie alors l'inégalité

$$\|mQ^n - \nu\| \leqslant 2\Delta^n \quad (n \in N)$$

et est évidemment invariante par l'opérateur Q; en outre cette limite ne dépend pas de la probabilité m choisie, puisque si m' est une autre probabilité sur $(E, \mathcal{A})$

$$\|m'Q^n - \nu\| = \|(m' - \nu)Q^n\| \leqslant 2\Delta^n \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \uparrow \infty.$$

Il est clair que ν est l'unique probabilité Q-invariante sur $(E, \mathcal{A})$.

Le lemme précédent s'applique en particulier à toute probabilité de transition Q telle que $Q \geqslant 1 \otimes m_0$ pour une mesure positive non-nulle m_0 sur E; la norme Δ de Q sur M_0 est en effet majorée par $1 - m_0(E) < 1$ puisque l'égalité $mQ = m(Q - 1 \otimes m_0)$ valable pour toute mesure m de M_0 entraîne que

$$\|mQ\| \leqslant \|m\|(Q - 1 \otimes m_0)(1) = \|m\|(1 - m_0(E)) \quad (m \in M_0),$$

l'opérateur $Q - 1 \otimes m_0$ étant positif. En outre la mesure Q-invariante ν dont le lemme précédent affirme l'existence, est telle que $\nu \geqslant m_0$, puisque

$$\nu = \nu Q \geqslant \nu(1 \otimes m_0) = m_0.$$

Si h_0 est une fonction de H vérifiant les hypothèses (a, b, c) de la proposition, l'opérateur $U_{h_0}M_{h_0}$ est markovien et minoré par $1 \otimes h_0 . m_0$; comme $m_0(h_0) \neq 0$, le lemme précédent montre que cet opérateur admet une probabilité invariante ν qui d'après la remarque précédente est telle $\nu \geqslant h_0 . m_0$, Ce lemme montre aussi que

$$\|(U_{h_0}M_{h_0})^n(x, .) - \nu\| \leqslant 2(1 - h_0 m_0(E))^n \to 0$$

lorsque $n \uparrow \infty$, quel que soit $x \in E$.

2) Posons $\mu = \frac{1}{h_0}\nu$, ce qui donne une mesure positive σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$ puisque la fonction h_0 est strictement positive sur E; nous avons $\mu(h_0) = \nu(1) = 1$ et $\mu \geqslant m_0$ car $\nu \geqslant h_0 m_0$. L'invariance $\nu = \nu(U_{h_0}M_{h_0})$ peut encore s'écrire $\mu = \nu U_{h_0}$. L'équation résolvante (proposition 2.1) $U_{h_0} = P + U_{h_0}M_{1-h_0}P$ entraîne alors que μ est P-invariante car

$$\begin{aligned}\mu = \nu U_{h_0} &= \nu P + \nu U_{h_0} M_{1-h_0} P \\ &= (h_0\mu + (1 - h_0).\mu)P = \mu P.\end{aligned}$$

3) Montrons ensuite que $U_f(f) = 1$ pour toute fonction $f \in H$ telle que $\mu(f) \neq 0$. Comme $U_f(f)$ décroît avec f et comme la fonction h_0 est strictement positive, il suffit de montrer cette égalité lorsque $f \leqslant h_0$ (en effet pour toute fonction $f \in H$, nous avons $U_{f'}(f') \leqslant U_f(f) \leqslant 1$ si $f' = f \wedge h_0$ et $\mu(f') \neq 0$ si $\mu(f) > 0$).

Or si $f \in H$ est majorée par h_0, l'équation résolvante de la proposition 2.1. montre que

$$U_f(f) = U_{h_0}(f) + U_{h_0}((h_0 - f)U_f(f)).$$

Comme l'égalité $1 = U_{h_0}(h_0)$ peut encore s'écrire

$$1 = U_{h_0}(f) + U_{h_0}(h_0 - f),$$

la différence des deux égalités précédentes montre que la fonction $g = 1 - U_f(f)$ qui prend ses valeurs dans $[0, 1]$ vérifie l'équation

$$g = U_{h_0}((h_0 - f)g).$$

Cette équation entraîne d'abord que $g \leqslant (U_{h_0}M_{h_0})g$ et donc que $g \leqslant (U_{h_0}M_{h_0})^n g$ pour tout $n \in \mathbf{N}$; la convergence forte des mesures $(U_{h_0}M_{h_0})^n(x, .)$ vers la probabilité ν que nous avons établie dans le lemme 5.2. implique donc que

$$g \leqslant \nu(g) \quad \text{sur} \quad E.$$

L'équation vérifiée par g montre alors que

$$g \leqslant U_{h_0}(h_0 - f)\nu(g)$$

et donc, puisque $\nu U_{h_0}(h_0 - f) = \nu(1 - U_{h_0}f) = 1 - \mu(f)$, que

$$\nu(g) \leqslant (1 - \mu(f))\nu(g).$$

Si $\mu(f) \neq 0$, cela n'est possible que si $\nu(g) = 0$ et alors la fonction positive g qui est majorée par la constante $\nu(g)$ est identiquement nulle. L'égalité $U_f(f) = 1$ est ainsi établie lorsque $\mu(f) \neq 0$.

4) La démonstration de l'égalité $(f.\mu)U_f = \mu$ lorsque f est une fonction de H telle que $\mu(f) \neq 0$ suit de très près la démonstration de l'égalité $U_f(f) = 1$ que nous venons de faire. D'abord, d'après la proposition 2.3. traduite à des mesures excessives l'inégalité $\mu P \leqslant \mu$ (qui est en fait une égalité) implique que $(f.\mu)U_f \leqslant \mu$ pour toute fonction $f \in H$ et que en outre les mesures $(f.\mu)U_f$ croissent avec $f (f \in H)$. Nous pouvons donc nous contenter d'établir l'égalité $(f.\mu)U_f = \mu$ lorsque la fonction f est majorée par h_0. (En effet $(f'.\mu)U_{f'} \leqslant (f.\mu)U_f \leqslant \mu$ si $f' = f \wedge h_0$ et $\mu(f') > 0$ si $\mu(f) > 0$).

Lorsque $f \in H$ est majorée par h_0, l'équation résolvante montre que

$$(f.\mu)U_f = (f.\mu)U_{h_0} + (f.\mu)U_f M_{h_0 - f} U_{h_0}$$

et comme l'équation $\mu = (h_0 . \mu)U_{h_0}$ s'écrit encore

$$\mu = (f.\mu)U_{h_0} + \mu M_{h_0 - f} U_{h_0},$$

nous voyons que la mesure positive $\lambda = \mu - (f.\mu)U_f$ vérifie l'équation

$$\lambda = ((h_0 - f).\lambda)U_{h_0}.$$

Puisque $U_{h_0}(h_0) = 1$, cette équation entraîne d'abord que $\lambda(h_0) = \lambda(h_0 - f)$; comme $\lambda(h_0)$ est fini puisque

$$\lambda(h_0) \leqslant \mu(g_0) = 1,$$

nous voyons que $\lambda(f) = 0$. La mesure $f.\lambda$ est donc nulle et l'équation précédente s'écrit encore $\lambda = (h_0 . \lambda)U_{h_0}$. Donc

$$h_0 . \lambda = (h_0 . \lambda)U_{h_0} M_{h_0}$$

et comme $\nu = h_0 . \mu$ est l'unique probabilité $(U_{h_0} M_{h_0})$-invariante, nous trouvons que $h_0 . \lambda = c h_0 . \mu$, donc que $\lambda = c . \mu$ pour une constante $c \geqslant 0$. Mais cette constante doit être nulle puisque nous savons que $\lambda(f) = 0$ et que nous avons supposé que $\mu(f) \neq 0$; nous avons ainsi démontré que $\lambda = 0$, c'est-à-dire que $(f.\mu)U_f = \mu$ si $\mu(f) \neq 0$.

5) Il reste à démontrer l'unicité de μ. Soit donc λ une mesure positive et σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$ telle que $\lambda \geqslant \lambda P$.

La proposition 2.3. (traduite aux mesures excessives) montre que $\lambda \geqslant \lambda M_h U_h$ pour tout $h \in H$ et donc que en particulier

$$\lambda \geqslant (h_0 . \lambda) U_{h_0} \geqslant \lambda(h_0) m_0$$

(grâce à l'inégalité $U_{h_0} \geqslant 1 \otimes m_0$). Puisque λ est σ-finie et que m_0 n'est pas nulle, l'inégalité entre les membres extrêmes entraîne que $\lambda(h_0) < \infty$; la mesure $h_0 . \lambda$ est donc finie et l'inégalité

$$h_0 . \lambda \geqslant (h_0 . \lambda) U_{h_0} M_{h_0}$$

qu'elle vérifie ne peut être en fait qu'une égalité puisque ses deux membres ont la même masse totale $\lambda(h_0) < +\infty$. Or $h_0 . \mu$ est la seule probabilité invariante par $U_{h_0} M_{h_0}$ de sorte que

$$h_0 . \lambda = \lambda(h_0) h_0 . \mu ;$$

il s'en suit que $\lambda = \lambda(h_0)\mu$ puisque h_0 est strictement positive. ▌

PROPOSITION 4.3. — *Soit* P *une probabilité de transition sur l'espace mesurable* $(E, \mathcal{A})$ *et soit* m *une mesure positive* σ*-finie sur cet espace. Pour qu'il existe alors une fonction* $h_0 \in H$ *telle que*

a) $h_0 > 0$ *sur* E, *b)* $U_{h_0}(h_0) = 1$ *sur* E, *c)* $U_{h_0} \geqslant 1 \otimes m_0$ *pour une mesure positive* m_0 *équivalente à* m, *il faut et il suffit que la condition de Harris*

$$U_A(1_A) = 1 \text{ sur } E \qquad si \qquad m(A) \neq 0$$

soit satisfaite.

Démonstration. — La condition nécessaire est une conséquence de la proposition 1 puisque cette proposition montre même que l'existence de h_0 entraîne que $U_A(1_A) = 1$ sur E pour tout ensemble A non négligeable pour la mesure invariante μ (qui domine m).

La condition de Harris entraîne que $U_h(h) = 1$ sur E pour toute fonction $h \in H$ qui n'est pas m-négligeable. En effet comme $U_h(h)$ croît avec $h (h \in H)$, il suffit de démontrer l'égalité précédente lorsque $h = \theta 1_A$ pour un réel $\theta \in)0, 1)$ et un ensemble $A \in \mathcal{A}$ de mesure $m(A) \neq 0$. (En effet $h \geqslant \theta 1_{(h \geqslant \theta)}$ et si $m(h) \neq 0$, tous les ensembles $(h \geqslant \theta)$ ne peuvent être m-négligeables). Or

$$U_{\theta 1_A} = \sum_N (1 - \theta)^n (U_A M_A)^n U_A$$

d'après l'équation résolvante (corollaire 2.2) et par conséquent la condition de Harris entraîne que

$$U_{\theta 1_A}(\theta 1_A) = \theta \sum_N (1 - \theta)^n (U_A M_A)^{n+1} 1 = \theta \sum_N (1 - \theta)^n = 1$$

si $m(A) \neq 0$.

Nous avons ainsi démontré que $U_h(h) = 1$ pour tout $h \in H$ qui n'est pas m-négligeable. Il reste alors à appliquer la proposition 3.2., ce qui est permis puisque toute probabilité de transition vérifiant la condition de Harris relativement à la mesure m est nécessairement m-irréductible .(En effet si $x \in E$ et $A \in \mathcal{A}$ sont tels que $U_0(x, A) = 0$, alors $U_A(x, A) = 0$ car $U_A \leqslant U$ et d'après la condition de Harris, cela implique que $m(A) = 0$; donc $m \ll U(x, .)$ pour tout $x \in E$).

La proposition 4.3 précédente montre notamment que pour toute probabilité de transition P vérifiant la condition de Harris relativement à la mesure m, il existe une fonction $h_0 \in H$ strictement positive telle que $U_{h_0} \geqslant 1 \otimes m_0$ pour une mesure m_0 équivalente à m. Ce résultat peut être amélioré de la manière suivante.

Proposition 4.4. — *Soit* P *une probabilité de transition sur* $(E, \mathcal{A})$ *vérifiant la condition de Harris et soit* μ *la mesure* σ-*finie* P-*invariante qui lui est associée. Il existe alors au moins une fonction* $h_1 \in H$, *strictement positive sur* E *telle que*

$$U_{h_1} \geqslant 1 \otimes \mu.$$

Démonstration. — Soit P une probabilité de transition sur $(E, \mathcal{A})$ vérifiant la condition $U_A 1_A = 1$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ de mesure $m(A) > 0$. Les propositions 3 et 1 montrent alors que $U_h(h) = 1$ si $h \in H$ n'est pas μ-négligeable, donc P vérifie la condition de Harris relativement à la mesure invariante μ. La proposition 3 implique donc qu'il existe une fonction strictement positive $k_0 \in \mathrm{H}$ et une mesure μ_0 équivalente à μ telle que $\mathrm{U}_{k_0} \geqslant 1 \otimes \mu_0$.

Puisque les mesures μ_0 et μ sont équivalentes, il existe une fonction mesurable strictement positive f telle que $\mu_0 = f.\mu$. Posons alors

$$h_1 = k_0 \frac{f}{1+f}.$$

Cette fonction h_1 appartient à H, est strictement positive sur E et puisque $h_1 < k_0$ l'équation résolvante entraîne que

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_{h_1} &\geqslant \mathrm{U}_{k_0}\mathrm{M}_{k_0-h_1}\mathrm{U}_{h_1} \\ &\geqslant 1 \otimes ((k_0 - h_1).\mu_0)\mathrm{U}_{h_1} = 1 \otimes (h_1.\mu)\mathrm{U}_{h_1} \end{aligned}$$

car $(k_0 - h_1)\mu_0 = k_0 \dfrac{1}{1+f}.\mu_0 = h_1\mu$; mais $(h_1.\mu)\mathrm{U}_{h_1} = \mu$ en vertu de la proposition 4.1 puisque $\mu(h_1) \neq 0$ et nous avons donc démontré que $\mathrm{U}_{h_1} \geqslant 1 \otimes \mu$. ▌

La suite de ce paragraphe est consacrée à l'étude d'un cône de fonctions que nous croyons très importantes. Ces fonctions ont déjà été considérées de manière systématique par A. Brunel [1].

Définition 4.5. — *Soit* P *une probabilité de transition sur* (E. $\mathcal{A}$) *vérifiant la condition de Harris et soit* μ *sa mesure invariante associée. Une fonction mesurable positive* $f\colon \mathrm{E} \to \mathrm{R}_+$ *sera dite spéciale si pour toute fonction* $h \in \mathrm{H}$ *telle que* $\mu(h) \neq 0$, *la fonction* $\mathrm{U}_h f$ *est bornée sur* E. *Nous noterons* S *l'ensemble de ces fonctions spéciales.*

Il est clair que S est un sous-cône convexe héréditaire du cône des fonctions mesurables positives et finies définies sur (E, $\mathcal{A}$). De plus toute fonction spéciale f est intégrable pour la mesure invariante μ puisque si h est une fonction de H telle que $0 < \mu(h) < \infty$, nous avons

$$\mu(f) = \mu(h.\mathrm{U}_h f) \leqslant \mu(h)\|\mathrm{U}_h f\|_\infty < \infty.$$

Une fonction spéciale n'est pas nécessairement bornée, mais la fonction $\mathrm{P}g = \mathrm{U}_1 g$ l'est par définition.

Commençons par donner un critère de « spécialité ».

Proposition 4.6. — *Soit* h_0 *une fonction strictement positive de* H *telle que* $\mathrm{U}_{h_0} \geqslant 1 \otimes m_0$ *pour une mesure positive*

$m_0 \neq 0$. Les fonctions spéciales sont alors les fonctions mesurables, positives $f: \mathrm{E} \to \mathrm{R}_+$ telle que $\mathrm{U}_{h_0}(f)$ soit bornée sur E.

Démonstration. — Tout revient à démontrer qu'une fonction mesurable positive f rendant $\mathrm{U}_{h_0}(f)$ bornée sur E est spéciale. Or, pour toute fonction mesurable h telle que $0 < h \leqslant h_0$, nous avons

$$\begin{aligned}(\mathrm{U}_{h_0}\mathrm{M}_{h_0-h})1 &= \mathrm{U}_{h_0}(h_0 - h)\\ &= 1 - \mathrm{U}_{h_0}(h) \leqslant 1 - m_0(h) < 1\end{aligned}$$

puisque $m_0(h) > 0$; par conséquent si $\mathrm{U}_{h_0}f$ est majorée par la constante a sur E, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_h(f) &= \sum_{\mathrm{N}} (\mathrm{U}_{h_0}\mathrm{M}_{h_0-h})^n \mathrm{U}_{h_0}(f)\\ &\leqslant a \sum_{\mathrm{N}} (\mathrm{U}_{h_0}\mathrm{M}_{h_0-h})^n 1\\ &= a \sum_{\mathrm{N}} (1 - m_0(h))^n = \frac{a}{m_0(h)} < \infty \quad \text{sur} \quad \mathrm{E}.\end{aligned}$$

Prenons maintenant pour fonction h la fonction strictement positive h_1 fournie par la proposition 4; si cette fonction h_1 n'était pas inférieure à h_0, il suffirait de la remplacer par la fonction strictement positive $h_0 \wedge h_1$, ce qui ne ferait que renforcer l'inégalité $\mathrm{U}_{h_1} \geqslant 1 \otimes \mu$. D'après ce qui précède, la fonction $\mathrm{U}_{h_1}(f)$ est majorée sur E par la constante $a' = \dfrac{a}{m_0(h_1)}$.

En outre, en reprenant le raisonnement précédent nous voyons que pour toute fonction $h \in \mathrm{H}$, majorée par h_1 et telle que $\mu(h) \neq 0$ nous avons

$$\mathrm{U}_h f = \sum_{\mathrm{N}} (\mathrm{U}_{h_1}\mathrm{M}_{h_1-h})^n \mathrm{U}_{h_1}(f) \leqslant \frac{a'}{\mu(h)} < \infty \quad \text{sur} \quad \mathrm{E}.$$

La fonction $\mathrm{U}_h f$ est donc bornée pour toute fonction $h \in \mathrm{H}$ non μ-négligeable telle que $h \leqslant h_1$; mais cette dernière hypothèse peut être levée car si $h \in \mathrm{H}$ et $\mu(h) \neq 0$, la fonction $h \wedge h_1$ jouit des mêmes propriétés et est majorée par h_1, tandis que $\mathrm{U}_h f \leqslant \mathrm{U}_{h \wedge h_1} f$. ▌

Corollaire 4.7. — *Le cône* S *des fonctions spéciales est stable par l'opérateur* $\mathrm{M}_h\mathrm{U}_h$ *si* h *est une fonction strictement positive de* H. *Il est stable en particulier par* P.

Démonstration. — Soit h_0 une fonction strictement positive de H telle que $U_{h_0} \geqslant 1 \otimes m_0$ pour une mesure $m_0 \neq 0$. Quitte à remplacer h_0 par la fonction strictement positive $h_0 \wedge h$, ce qui ne fait qu'augmenter U_{h_0}, nous pouvons supposer que $h_0 \leqslant h$. Il résulte alors de l'équation résolvante que si f est spéciale, nous avons

$$\begin{aligned} U_{h_0}(hU_h(f)) &= U_{h_0}(h_0 \,.\, U_h(f)) + U_{h_0}M_{h-h_0}U_h(f) \\ &\leqslant U_{h_0}(h_0 \,.\, U_h(f)) + U_{h_0}(f) \\ &\leqslant \|U_h(f)\| + \|U_{h_0}(f)\| < \infty . \end{aligned}$$

D'après la proposition précédente la fonction $hU_h(f)$ est donc spéciale. ▌

La proposition 3 et le corollaire suivant établissent l'existence de fonctions spéciales strictement positives sur E.

Corollaire 4.8. — *Toute fonction strictement positive* $h_0 \in H$ *telle que* $U_{h_0} \geqslant 1 \otimes m_0$ *pour une mesure positive* $m_0 \neq 0$ *est spéciale.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition puisque $U_{h_0}(h_0) = 1$. ▌

Ce corollaire admet la réciproque suivante qui constitue sans doute le résultat principal sur les fonctions spéciales de de paragraphe.

Proposition 4.9. — *Soit* f *une fonction spéciale bornée sur* E. *Pour tout réel positif* $\theta < \dfrac{1}{\|f\|}$ *où* $\|f\| = \sup\limits_{E} f$, *il existe alors une mesure positive équivalente à la mesure invariante* μ, *soit* μ_θ, *telle que*

$$U_{\theta f} \geqslant 1 \otimes \mu_\theta .$$

Démonstration. — Nous commençerons par démontrer un lemme que nous croyons nouveau dans la théorie des processus de Markov.

Lemme 4.10. — *Soient* h *une fonction de* H, θ *un réel de* $[0, 1[$ *et* A *une partie de* E *dans* $\mathcal{A}$. *Alors, sans hypothèse sur la probabilité de transition* P *définie sur* $(E, \mathcal{A})$ *nous avons*

$$U_{\theta h}1_A \geqslant (1-\theta)^{U_A(h)} \qquad \textit{sur} \qquad \{U_A 1_A = 1\}.$$

La démonstration suivante de ce lemme est basée sur les interprétations probabilistes des opérateurs U_h. Nous avons

$$\begin{aligned} U_{\theta h}1_A(x) &= \mathbf{E}_x\Big(\sum_{N^*} (1 - \theta h(X_1)) \dots (1 - \theta h(X_{n-1}))1_A(X_n)\Big) \\ &\geqslant \mathbf{E}_x\{(1 - \theta h(X_1)) \dots (1 - \theta h(X_{\nu_A^1 - 1}))\} \end{aligned}$$

en désignant par ν_A^1 le premier instant $n \geqslant 1$ auquel la chaîne $(X_n, n \in N)$ pénètre dans A; si $U_A1_A(x) = 1$ comme nous le supposerons, ce temps ν_A^1 est défini $\mathbf{P}_x p.p.$ L'inégalité élémentaire $1 - \theta h(x) \geqslant (1 - \theta)^{h(x)}$ qui est valable parce que θ et $h(x)$ sont compris entre 0 et 1 et l'inégalité de Jensen entraînent alors successivement que

$$\begin{aligned} U_{\theta h}1_A(x) &\geqslant \mathbf{E}_x((1 - \theta)^{h(X_1) + \dots + h(X_{\nu_A^1 - 1})}) \\ &\geqslant (1 - \theta)^{\mathbf{E}_x(h(X_1) + \dots + h(X_{\nu_A^1 - 1}))}. \end{aligned}$$

Or, $U_Ah(x) = \mathbf{E}_x(h(X_1) + \dots + h(X_{\nu_A^1}))$ majore l'exposant précédent; nous avons ainsi démontré que $U_{\theta h}1_A \geqslant (1 - \theta)^{U_Ah}$ au point x.

Passons à la démonstration proprement dite de la proposition 9. Soit θ un réel de $[0, 1[$; il existe alors d'après la prop. 3.3, puisque P est μ-irréductible deux fonctions mesurables strictement positives a_θ et b_θ telles que

$$U_\theta \geqslant a_\theta \otimes b_\theta . \mu.$$

D'autre part soit f une fonction spéciale et bornée; il n'est pas difficile de voir que nous pourrons nous limiter à ne considérer que le cas où $\sup_E f < 1$ (strictement!). L'équation résolvante montre alors que

$$U_{\theta f} \geqslant U_{\theta f}M_{\theta(1-f)}U_\theta \geqslant U_{\theta f}(\theta(1 - f)a_\theta) \otimes b_\theta . \mu.$$

Comme la fonction $\theta(1 - f)a_\theta$ est strictement positive sur E, il existe certainement un réel $\varepsilon > 0$ et un ensemble mesurable A de mesure $\mu(A) > 0$ tel que $\varepsilon 1_A$ minore cette fonction. Alors $U_A1_A = 1$ sur E et le lemme précédent montre que

$$U_{\theta f}(\theta(1 - f)a_\theta) \geqslant \varepsilon U_{\theta f}(1_A) \geqslant \varepsilon(1 - \theta)^{U_Af}.$$

Or, U_Af est bornée sur E d'après le caractère spécial de f de sorte que nous pouvons conclure que $U_{\theta f} \geqslant c\, 1 \otimes b_\theta . \mu$ pour la constante $c = \varepsilon(1 - \theta)^{\|U_Af\|_\infty} > 0$. Il reste à poser $\mu_\theta = cb_\theta\mu$ pour que la proposition soit démontrée. ▌

5. Potentiel récurrent.

Dans tout ce paragraphe P désignera une probabilité de transition sur $(E, \mathcal{A})$ vérifiant la condition de Harris de la proposition 4.3, comme d'habitude μ sera une mesure σ-finie positive P-invariante. En outre nous désignerons par h_1 une fonction strictement positive de H telle que $U_{h_1} \geqslant 1 \otimes \mu$ (proposition 4.5).

THÉORÈME 5.1. — *Sous les hypothèses précédentes, la formule*

$$W = \sum_{N} (VM_{h_1})^n V \quad \textit{où} \quad V = U_{h_1} - 1 \otimes \mu$$

définit un opérateur positif sur $(E, \mathcal{A})$ *tel que*

$$W(h_1) = c, \qquad (h_1 . \mu)W = c\mu$$

où c *désigne la constante* $c = \dfrac{1 - \mu(h_1)}{\mu(h_1)}$.

Cet opérateur est tel que

$$P + PW = W + \frac{1}{\mu(h_1)} Ph_1 \otimes \mu;$$

plus généralement d'ailleurs pour toute fonction $h \in H$ *qui n'est pas* μ*-négligeable, nous avons*

$$U_h + U_h M_h W = W + \frac{1}{\mu(h_1)} U_h(h_1) \otimes \mu$$

(*dans cette relation la fonction* $U_h(h_1)$ *est bornée sur* E).

L'opérateur W *vérifie aussi l'égalité*

$$P + WP = W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu)P$$

et plus généralement, pour toute fonction $h \in H$ *qui n'est pas* μ*-négligeable, nous avons*

$$U_h + WM_h U_h = W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu)U_h$$

(*dans cette relation la mesure* $(h_1 . \mu)U_h$ *est majorée par un multiple de* μ).

Remarque. — Il n'est pas difficile de vérifier que

$$(U_{h_1}M_{h_1})^n U_{h_1} = (VM_{h_1})^n V + a_n 1 \otimes \mu \quad (n \in N)$$

si $a_n = \dfrac{1}{\mu(h_1)}(1 - (1 - \mu(h_1))^{n+1})$. La série $\sum_N (U_{h_1}M_{h_1})^n U_{h_1}$ qui vaut U_0 ne diffère donc de la série $\sum_N (VM_{h_1})^n V$ que par un multiple de $1 \otimes \mu$; mais ce multiple est infini (!) et l'opérateur U_0 est infini au sens où :

$$U_0(.,A) = \infty \text{ sur E, pour tout A de mesure } \mu(A) \neq 0.$$

L'objet du théorème précédent est donc de montrer que l'opérateur W peut être avantageusement substitué à U_0.

Démonstration. — 1) Grâce à la proposition 4.4, la formule

$$U_{h_1} = V + 1 \otimes \mu$$

définit un opérateur positif V sur $(E, \mathcal{A})$. En outre, puisque $U_{h_1}(h_1) = 1$ et $(h_1 . \mu)U_{h_1} = \mu$, il n'est pas difficile de vérifier que

$$Vh_1 = 1 - \mu(h_1),\ (h_1 . \mu)V = (1 - \mu(h_1))\mu.$$

Il est donc clair aussi que W est un opérateur positif et que

$$W(h_1) = \sum_N (1 - \mu(h_1))^{n+1} = c,$$
$$(h_1 . \mu)W = \sum_N (1 - \mu(h_1))^{n+1} . \mu = c . \mu.$$

2) Les opérateurs P et V sont liés par l'égalité

$$P + PM_{1-h_1}V = V + Ph_1 \otimes \mu$$

que l'on obtient en soustrayant des deux membres de l'équation résolvante $P + PM_{1-h_1}U_{h_1} = U_{h_1}$ le terme

$$(PM_{1-h_1})(1 \otimes \mu) = (1 - Ph_1) \otimes \mu.$$

Multiplions à droite les deux membres de l'égalité ci-dessus par l'opérateur positif $\sum_N (M_{h_1}V)^n$; en tenant compte des trois relations

$$\sum_N (M_{h_1}V)^n = I + M_{h_1}W, \qquad V \sum_N (M_{h_1}V)^n = W$$
$$\mu \sum_N (M_{h_1}V)^n = \sum_N (1 - \mu(h_1))^n . \mu = \frac{1}{\mu(h_1)}\mu$$

nous obtenons que

$$(P + PM_{h_1}W) + PM_{1-h_1}W = W + \frac{1}{\mu(h_1)} Ph_1 \otimes \mu.$$

Comme le premier membre de cette égalité est égal à $P + PW$, nous avons établi que

$$P + PW = W + \frac{1}{\mu(h_1)} Ph_1 \otimes \mu.$$

Soit h une fonction arbitraire de H et écrivons alors la dernière relation obtenue sous la forme

$$(P + PM_h W) + PM_{1-h}W = W + \frac{1}{\mu(h_1)} Ph_1 \otimes \mu.$$

Cette égalité est la première de la suite d'égalités suivantes qu'il est facile de démontrer par récurrence :

$$\Big(\sum_{n \leq p} (PM_{1-h})^n P\Big)(I + M_h W) + (PM_{1-h})^{p+1}W$$
$$= W + \frac{1}{\mu(h_1)} \Big(\sum_{n \leq p} (PM_{1-h})^n P\Big)(h_1 \otimes \mu) \quad (p \in N);$$

en effet si cette égalité est vérifiée pour la valeur n du paramètre, en multipliant les deux membres à gauche par PM_{1-h} et en leur ajoutant ensuite $P + PM_h W$, on obtient l'égalité précédente pour la valeur $n + 1$. Faisons tendre $p \uparrow \infty$; sans étudier la limite de $(PM_{1-h})^{p+1}W$ lorsque $p \uparrow \infty$, nous trouvons déjà que

$$U_h(I + M_h W) \leqslant W + \frac{1}{\mu(h_1)} U_h(h_1) \otimes \mu.$$

Or, les opérateurs des deux membres appliqués à h_1 donnent :

$$U_h(I + M_h W)(h_1) = U_h(h_1 + ch) = U_h(h_1) + cU_h(h),$$
$$\Big(W + \frac{1}{\mu(h_1)} U_h(h_1) \otimes \mu\Big)(h_1) = W(h_1) + U_h(h_1) = c + U_h(h_1).$$

Lorsque h n'est pas μ-négligeable, la proposition 1 montre que $U_h(h) = 1$ et les deux expressions précédentes sont égales ; elles sont aussi finies puisque $U_h(h_1)$ est bornée si $\mu(h) \neq 0$. Mais alors, la fonction h_1 étant strictement positive sur E, les deux opérateurs de l'inégalité ci-dessus ne peuvent que coïncider.

3) La troisième partie du théorème se démontre comme la deuxième, sauf en ce qui concerne la fin du raisonnement. Nous sommes donc forcés de faire cette démonstration. D'abord nous déduisons de l'égalité

$$P + VM_{1-h_1}P = V + 1 \otimes (h_1 . \mu)P$$

qui provient d'une égalité analogue vérifiée par U_{h_1}, que

$$P + WP = W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu)P ;$$

il suffit en effet pour obtenir cette égalité de multiplier les 2 membres de l'égalité précédente à gauche par $\sum_{N} (VM_{h_1})^n$.

Ensuite pour toute fonction $h \in H$, nous pouvons écrire grâce à l'égalité précédente que

$$(P + WM_hP) + WM_{1-h}P = W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu)P$$

et en déduire, grâce à un calcul par récurrence que

$$(1 + WM_h) \sum_{n \leqslant p} P(M_{1-h}P)^n + W(M_{1-h}P)^{p+1}$$
$$= W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu) \sum_{n \leqslant p} P(M_{1-h}P)^n.$$

En faisant tendre $p \uparrow \infty$, il vient, sans étudier le comportement de l'opérateur positif $W(M_{1-h}P)^{p+1}$:

$$U_h + WM_hU_h \leqslant W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu)U_h.$$

Remarquons en outre que puisque chacun des opérateurs $W(M_{1-h}P)^{p+1}$ décroît lorsque h croit, il suffit déjà pour établir que l'inégalité précédente est une égalité, de l'établir lorsque $h \leqslant h_1$.

Supposons donc que $h \leqslant h_1$ et aussi que $\mu(h) \neq 0$. Pour toute fonction mesurable f telle que $0 \leqslant f \leqslant h_1$, les fonctions positives

$$(U_h + WM_h)f \quad \text{et} \quad \left(W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu)U_h\right)f$$

sont bornées car $U_h(h_1)$ et Wh_1 sont bornées sur E. Montrons que la différence de ces fonctions, que nous noterons

g, est telle que $g = Pg$ et que $\mu(h_1 g) = 0$; il s'en suivra que g est nulle et nous aurons ainsi montré que les deux opérateurs de l'inégalité ci-dessus sont égaux.

Or

$$\begin{aligned} P + P(U_h + WM_hU_h) &= P + (PM_{1-h}U_h + PM_hU_h) + PWM_hU_h \\ &= (P + PM_{1-h}U_h) + (P + PW)M_hU_h \\ &= (U_h + WM_hU_h) + \frac{1}{\mu(h_1)} Ph_1 \otimes \mu \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P + P&\left(W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu)U_h\right) \\ &= \left(W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu)U_h\right) + \frac{1}{\mu(h_1)} Ph_1 \otimes \mu; \end{aligned}$$

par différence, nous trouvons bien que $Pg = g$. D'autre part la mesure $h_1 . \mu$ est telle que

$$(h_1 . \mu)(U_h + WM_hU_h) = (h_1 . \mu)U_h + \frac{1 - \mu(h_1)}{\mu(h_1)} \mu$$

$$(h_1 . \mu)\left(W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu)U_h\right) = \frac{1 - \mu(h_1)}{\mu(h_1)} \mu + (h_1 . \mu)U_h$$

et puisque cette mesure $h_1 . \mu$ est bornée, nous trouvons par différence que $(h_1 . \mu)(g) = 0$. ▌

Nous nous servirons souvent par la suite de la première partie du corollaire suivant; par contre la seconde partie n'interviendra pas.

Corollaire 5.2. — *Pour toute fonction spéciale* $f (f \in S)$, *la fonction* Wf *est bornée sur* E. *En outre la suite de fonctions* $(W(M_{1-h}P)^p f,\ p \in N)$ *est majorée par une constante et tend en chaque point vers* 0 *lorsque* $p \uparrow \infty$, *quelle que soit la fonction* $h \in H$ *telle que* $\mu(h) \neq 0$.

Démonstration. — En écrivant la dernière formule de la proposition 1 pour la fonction h_1 du début, nous trouvons que si $f \in S$

$$\begin{aligned} Wf + \frac{\mu(f)}{\mu(h_1)} &= U_{h_1}f + W(h_1 . U_{h_1}f) \\ &\leqslant \|U_{h_1}f\|(1 + W(h_1)) = \frac{\|U_{h_1}f\|}{\mu(h_1)} < \infty. \end{aligned}$$

La fonction Wf est donc bornée sur E; nous retrouvons en outre que $\mu(f) < \infty$.

Il suffit de démontrer la deuxième partie du corollaire lorsque $h \leqslant h_1$; reprenons alors la troisième partie de la démonstration précédente. Nous voyons d'abord que pour tout $p \in N$:

$$\begin{aligned} W(M_{1-h}P)^{p+1}f &\leqslant Wf + \frac{1}{\mu(h_1)}\,\mu\Big(h_1 . \sum_{n \leqslant p} P(M_{1-h}P)^n f\Big) \\ &\leqslant Wf + \frac{1}{\mu(h_1)}\,\mu(h_1 . U_h f); \end{aligned}$$

puisque les fonctions Wf et $U_h f$ sont bornées lorsque $f \in S$ et puisque $\mu(h_1) < \infty$, les fonctions de la suite

$$(W(M_{1-h}P)^p f, \quad p \in N)$$

sont donc majorées par la même constante $\|Wf\| + \|U_h f\|$.

Ensuite comme les deux fonctions

$$(1 + WM_h)\Big(\sum_{n \leqslant p} P(M_{1-h}P)^n\Big)f$$

et

$$Wf + \frac{1}{\mu(h_1)}\,\mu\Big(h_1 . \sum_{n \leqslant p} P(M_{1-h}P)^n f\Big)$$

tendent en croissant lorsque $n \uparrow \infty$ vers les limites

$$(1 + WM_h)U_h f \qquad \text{et} \qquad Wf + \frac{1}{\mu(h_1)}\,\mu(h_1 . U_h f)$$

qui sont égales d'après la proposition précédente et bornées d'après ce qui précède, il est clair que

$$W(M_{1-h}P)^{p+1}f \to 0 \quad \text{sur} \quad E \quad \text{lorsque} \quad p \uparrow \infty. \ \blacksquare$$

Les trois propositions suivantes sont des corollaires « classiques » du théorème 5.1.

PROPOSITION 5.3. (principe du balayage). — *Pour toute partie* A *de l'espace des états qui n'est pas* μ*-négligeable et pour toute probabilité* ν *sur cet espace, la probabilité* $\nu_A = \nu U_A M_A$ *est l'unique probabilité portée par* A *telle que l'on ait*

$$\nu_A(I + W) = \nu W + k . \mu \quad \textit{sur} \quad A$$

pour une constante $k > 0$.

Démonstration. — Il résulte de la formule

$$U_A + U_A M_A W = W + \frac{1}{\mu(h_1)} U_A h_1 \otimes \mu$$

démontrée dans la proposition précédente que

$$\nu U_A + \nu_A W = \nu W + k\mu$$

si $k = \dfrac{1}{\mu(h_1)} \nu U_A h_1$ (cette constante est finie car $U_A h_1$ est une fonction bornée). Par restriction à A, nous trouvons bien que $\nu_A + \nu_A W = \nu W + k.\mu$ sur A.

Soit λ une deuxième probabilité portée par A et telle que $\lambda(1 + W) = \nu W + k'\mu$ sur A, pour une constante k'. Alors

$$\lambda(I + W)M_A = \nu_A(I + W)M_A + (k' - k)\mu M_A$$

D'autre part la formule

$$U_A + WM_A U_A = W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu)U_A$$

démontrée dans la proposition précédente, entraîne que

$$\begin{aligned} \lambda(I + W)M_A U_A &= \lambda(U_A + WM_A U_A) \qquad \text{car} \qquad \lambda = \lambda M_A \\ &= \lambda W + \frac{1}{\mu(h_1)} (h_1 . \mu)U_A \end{aligned}$$

et de même que

$$\nu_A(I + W)M_A U_A = \nu_A W + \frac{1}{\mu(h_1)} (h_1 . \mu)U_A.$$

Il résulte donc de l'égalité du début que

$$\begin{aligned} \lambda W + \frac{1}{\mu(h_1)} (h_1 . \mu)U_A & \\ &= \lambda(I + W)M_A U_A \\ &= \nu_A(I + W)M_A U_A + (k' - k)\,\mu M_A U_A \\ &= \nu_A W + \frac{1}{\mu(h_1)} (h_1 . \mu)U_A + (k' - k)\,\mu M_A U_A \end{aligned}$$

et donc après simplification que

$$\lambda W = \nu_A W + (k' - k)\mu$$

puisque $\mu M_A U_A = \mu$. Mais en rapprochant cette égalité de l'égalité $\lambda(I + W) = \nu_A(I + W) + (k' - k)\mu$ sur A, nous trouvons que $\lambda = \nu_A$ sur A et donc enfin que $\lambda = \nu_A$. ∎

En probabilités, les opérateurs $U_A M_A$, $M_A U_A$ et $M_A U_A M_A$ sont fréquemment considérés. Ces opérateurs vérifient les équations (*) ci-dessous, dans lesquelles les fonctions u_A et les mesures v_A sont déterminées par la proposition suivante.

Proposition 5.4. (principe d'équilibre). — *Pour tout ensemble* A *de mesure* $\mu(A) > 0$, *la fonction* $u_A = \frac{1}{\mu(h_1)} M_A U_A h_1$ *est la seule fonction mesurable positive* u *telle que*

$$u = 0 \quad sur \quad A^c, \qquad \mu(u) = 1, \qquad (I + W)u = c \quad sur \quad A$$

pour une constante c. *Semblablement* $v_A = \frac{1}{\mu(h_1)} (h_1 . \mu) U_A M_A$ *est la seule mesure positive* v *telle que*

$$v = 0 \quad sur \quad A^c, \qquad v(1) = 0, \qquad v(I + W) = c.\mu \quad sur \quad A$$

pour une constante c. *En outre les deux constantes introduites par ces relations sont égales.*

La fonction u_A et la mesure v_A permettent d'écrire les relations

$$(*) \qquad \begin{aligned} U_A M_A + W(M_A U_A M_A) &= W M_A + 1 \otimes v_A \\ M_A U_A + (M_A U_A M_A) W &= M_A W + u_A \otimes \mu \end{aligned}$$

entre les opérateurs $U_A M_A$, $M_A U_A$ et $M_A U_A M_A$ d'une part et l'opérateur potentiel W d'autre part. Ces relations s'obtiennent en effet immédiatement à partir des relations du théorème 5.1. en prenant $h = 1_A$ et en multipliant ces relations à droite ou à gauche par M_A.

Démonstration. — Il est clair que la fonction u_A est une fonction positive, nulle hors de A telle que $\mu(u_A) = 1$ (puisque $\mu M_A U_A = \mu$). D'autre part le théorème 5.1 montre que

$$U_A h_1 + W M_A U_A h_1 = W h_1 + \frac{(h_1 . \mu) U_A h_1}{\mu(h_1)} . 1$$

et on notera que le second membre est une fonction constante, puisque $Wh_1 = \frac{1 - \mu(h_1)}{\mu(h_1)}$. Par restriction à A, nous trouvons bien que $u_A = Wu_A =$ constante sur A.

Si u est une seconde fonction mesurable positive jouissant des propriétés de la proposition, la deuxième relation $(*)$ entraîne que

$$\begin{aligned} M_A W u + u_A &= (M_A U_A + M_A U_A M_A W)u \\ &= (M_A U_A M_A)(u + Wu) \end{aligned}$$

car $u = M_A u$. Or la fonction $u + Wu$ est égale à une constante c sur A et nous savons que $U_A M_A A = 1$ sur E; donc

$$\begin{aligned} M_A U_A M_A (u + Wu) &= c M_A U_A M_A 1 \\ &= c M_A 1 \\ &= M_A (u + Wu) = u + M_A W u. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu que

$$M_A W u + u_A = u + M_A W u$$

ce qui entraîne que $u = u_A$ puisque $Wu \leqslant c < \infty$ sur A.

La deuxième partie de la proposition relative à la mesure ν_A se démontre de manière analogue. Dans les deux parties de cette proposition la constante obtenue vaut

$$c_A = \frac{1 - \mu(h_1)}{\mu(h_1)} + \frac{1}{\mu(h_1)} (h_1 \cdot \mu) U_A h_1. \quad \blacksquare$$

La proposition suivante n'est pas la moindre des propriétés de l'opérateur W.

PROPOSITION 5.5. (principe du maximum). — *Pour tout réel* a *et pour toute fonction réelle mesurable* f *définie sur* $(E, \mathcal{A})$ *telle que* $|f|$ *soit spéciale et que* $\mu(f) = 0$, *l'inégalité*

$$f + Wf \leqslant a$$

est vraie partout dès qu'elle est vraie sur l'ensemble $\{f > 0\}$.

Démonstration. — Posons $A = \{f + Wf \leqslant a\}$. Cet ensemble contient l'ensemble $\{f > 0\}$ par hypothèse de sorte que $f \leqslant 0$ sur A^c. En outre l'ensemble A n'est pas μ-négligeable; en effet ou bien f n'est pas μ-négligeable et dans ce cas l'égalité $\mu(f) = 0$ implique que $\mu(f > 0) \neq 0$ et donc à fortiori que $\mu(A) \neq 0$, ou bien f est μ-négligeable et dans ce cas Wf l'est aussi car

$$0 \leqslant \int h_1 |Wf| \, d\mu \leqslant \int h_1 W(|f|) \, d\mu = c \int |f| \, d\mu = 0$$

si bien que $f + Wf = 0$ p.p. et que A est de μ-mesure pleine.

Appliquons alors l'identité

$$U_A + U_A M_A W = W + \frac{1}{\mu(h_1)} U_A h_1 \otimes \mu$$

du théorème 1 à l'ensemble non négligeable A introduit ci-dessus.

Cette identité nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} Wf^+ + \frac{\mu(f^+)}{\mu(h_1)} U_A h_1 &= (U_A + U_A M_A W) f^+ \\ &= U_A M_A (I + W) f^+ \\ &\leqslant U_A M_A (I + W) f^- + a \end{aligned}$$

car $M_A f^+ = f^+$ (puisque $f^+ = 0$ sur A^c), car

$$(I + W) f^+ \leqslant (I + W) f^- + a$$

sur A, et car $U_A M_A 1 = 1$. Or $M_A f^- \leqslant f^-$ et par conséquent

$$\begin{aligned} U_A M_A (I + W) f^- &\leqslant (U_A + U_A M_A W) f^- \\ &= Wf^- + \frac{\mu(f^-)}{\mu(h_1)} U_A h_1 \end{aligned}$$

d'après l'identité du début. Puisque $\mu(f^+) = \mu(f^-) < \infty$, nous avons ainsi démontré que $Wf^+ \leqslant Wf^- + a$ partout; la fonction bornée Wf est donc négative et par conséquent $f + Wf \leqslant a$ sur $\{f \leqslant 0\}$. Cela établit la proposition. ∎

Le corollaire suivant ne représente qu'une autre manière d'exprimer le résultat de la proposition précédente.

Corollaire 5.6. — *Si f_1 et f_2 sont deux fonctions spéciales (donc positives) telles que $\mu(f_1) = \mu(f_2)$ et si a est un réel > 0, l'inégalité*

$$f_1 + Wf_1 \leqslant f_2 + Wf_2 + a$$

a lieu partout dès qu'elle a lieu sur $\{f_1 > 0\}$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction $f = f_1 - f_2$ en remarquant que

$$\{f > 0\} \subset \{f_1 > 0\} \quad \blacksquare.$$

L'opérateur positif W construit dans la proposition 5.1. dépend manifestement de la fonction h_1 choisie auparavant. Il est donc naturel de se demander quelle relation existe entre les deux opérateurs W_1 et W_2 associés à deux fonctions h_1 et h_2 différentes.

PROPOSITION 5.7. — *Soient h_1 et h_2 deux fonctions de* H *strictement positives sur* E *telles que* $U_{h_i} \geqslant 1 \otimes \mu (i = 1, 2)$. *Les deux opérateurs* W_1 *et* W_2 *que le théorème* 5.1. *associe à ces fonctions vérifient alors l'égalité :*

$$W_1 + \frac{1}{\mu(h_1)} W_2 h_1 \otimes \mu = W_2 + \frac{1}{\mu(h_2)} 1 \otimes (h_2 . \mu) W_1.$$

(Notons que dans cette égalité tous les termes sont positifs, que la fonction $W_2(h_1)$ est bornée et que la mesure $(h_2 . \mu) W_1$ est majorée par un multiple de μ).

Démonstration. — 1) Pour démontrer cette proposition, il suffira d'établir l'existence d'une fonction positive f et d'une mesure positive ν telles que :

$$W_1 + f \otimes \mu = W_2 + 1 \otimes \nu.$$

En effet, cette dernière formule entraîne déjà que

$$\mu(h_1) f = W_2 h_1 + a \quad (a \in R)$$

puisque $W_1 h_1$ est constante sur E, et que

$$\mu(h_2) \nu = (h_2 . \mu) W_1 + b\mu \quad (b \in R)$$

puisque $(h_2 . \mu) W_2$ est proportionnelle à μ. Nous voyons ainsi que la formule ci-dessus implique que

$$W_1 + \frac{1}{\mu(h_1)} W_2 h_1 \otimes \mu = \left(W_2 + \frac{1}{\mu(h_2)} 1 \otimes (h_2 . \mu) W_1 \right) + c1 \otimes \mu$$

pour une constante c. Mais comme

$$h_2.\mu\left(W_1 + \frac{1}{\mu(h_1)} W_2 h_1 \otimes \mu\right) h_1 = \mu(h_2)c_1 + c_2\mu(h_1)$$
$$h_2.\mu\left(W_2 + \frac{1}{\mu(h_2)} 1 \otimes (h_2.\mu)W_1\right) h_1 = c_2\mu(h_1) + \mu(h_2)c_1$$

si $c_i = \dfrac{1 - \mu(h_i)}{\mu(h_i)}$ $(i = 1, 2)$, nous voyons que $c = 0$.

2) D'après l'alinéa précédent, il est évident qu'il suffit de démontrer la proposition lorsque $h_2 \leqslant h_1$. Sous cette hypothèse, la décomposition $U_{h_1} = V_1 + 1 \otimes \mu$ entraîne que

$$\sum_N (U_{h_1}M_{h_1-h_2})^n U_{h_1}$$
$$= \sum_N (V_1 M_{h_1-h_2})^n V_1 + \left(\sum_N (V_1 M_{h_1-h_2})^n\right) 1 \otimes \mu \left(\sum_N (M_{h_1-h_2}U_{h_1})^n\right)$$

A condition d'introduire l'opérateur $T = \sum_N (V_1 M_{h_1-h_2})^n V_1$, ceci peut encore s'écrire :

$$U_{h_2} = T + (I + TM_{h_1-h_2}) 1 \otimes \mu (I + M_{h_1-h_2} U_{h_2})$$

grâce à la proposition 2.1. La formule

$$A = (I + TM_{h_1-h_2}) 1 \otimes \mu (I + M_{h_1-h_2}U_{h_2}) - 1 \otimes \mu$$

définit alors un opérateur positif tel que

$$V_2 \overset{\text{déf.}}{=} U_{h_2} - 1 \otimes \mu = T + A.$$

Par conséquent

$$W_2 = \sum_N (V_2 M_{h_2})^n V_2$$
$$= \sum_N (TM_{h_2})^n T + \left(\sum_N (TM_{h_2})^n\right) A \left(\sum_N (M_{h_2}V_2)^n\right);$$

mais le premier terme du second membre est égal à

$$\sum_N (V_1(M_{h_1-h_2} + M_{h_2}))^n V_1 = W_1$$

d'après le lemme 2.2, tandis que le second terme est de la forme $(1 \otimes \nu - f \otimes \mu)$ puisque

$$\sum_N (TM_{h_2})^n (I + TM_{h_1-h_2}) 1 = \left\{ I + \left(\sum_N (TM_{h_2})^n T\right)(M_{h_2} + M_{h_1-h_2}) \right\} 1$$
$$= 1 + W_1(h_1) = \frac{1}{\mu(h_1)}$$

et puisque

$$\mu \sum_{\mathrm{N}} (\mathrm{M}_{h_2}\mathrm{V}_2)^n = \mu(\mathrm{I} + \mathrm{M}_{h_2}\mathrm{W}_2) = \frac{1}{\mu(h_2)}.$$

La proposition est ainsi démontrée. ▌

6. L'équation de Poisson.

Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'équation de Poisson sur les fonctions et sur les mesures. La proposition suivante est connue [2] dans le cas particulier des fonctions bornées g dont le support $\{g \neq 0\}$ est un ensemble spécial ($1_{\{g\neq 0\}}$ est spécial).

PROPOSITION 6.1. — *Soit* $g : \mathrm{E} \to \mathrm{R}$ *une fonction réelle mesurable définie sur* $(\mathrm{E}, \mathcal{A})$ *telle que* $|g|$ *soit spéciale et que* $\mu(g) = 0$. *Alors l'équation de Poisson*

$$\mathrm{P}g = u - \mathrm{P}u$$

possède une solution mesurable bornée u, *et cette solution est unique à l'addition d'une fonction constante près.*

Bien entendu, on peut considérer aussi l'équation de Poisson avec la fonction g au lieu de $\mathrm{P}g$ dans le premier membre (si u est solution de $\mathrm{P}g = u - \mathrm{P}u$; alors $u - g$ est solution de $g = u - \mathrm{P}u$ et réciproquement). Mais la suite montrera qu'il est plus naturel de prendre $\mathrm{P}g$ plutôt que g.

Démonstration. — Puisque les fonctions g^+ et g^- sont spéciales par hypothèse, les fonctions $\mathrm{W}g^+$ et $\mathrm{W}g^-$ sont bornées sur E; nous pourrons donc introduire une fonction mesurable bornée sur E en posant $u = \mathrm{W}g^+ - \mathrm{W}g^-$. D'après le théorème 5.1, nous avons

$$\mathrm{P}(g^\pm + \mathrm{W}g^\pm) = \mathrm{W}g^\pm + \frac{\mu(g^\pm)}{\mu(h_1)}\,\mathrm{P}h_1;$$

par différence il vient

$$\mathrm{P}g + \mathrm{P}u = u$$

puisque $\mu(g^+) - \mu(g^-) = \mu(g) = 0$ par hypothèse. La fonction u est donc solution de l'équation de Poisson.

Il reste à montrer que les constantes sont les seules fonctions bornées P-invariantes. Or si φ est une solution de $P\varphi = \varphi$ telle que $a \leqslant \varphi \leqslant b$ sur E pour deux constantes a et b, la proposition 2.3. appliquée séparément aux fonctions positives $\varphi - a$ et $b - \varphi$ entraîne que

$$(U_{h_1}M_{h_1})(\varphi - a) \leqslant \varphi - a, \quad (U_{h_1}M_{h_1})(b - \varphi) \leqslant b - \varphi$$

ce qui n'est possible, puisque $(U_{h_1}M_{h_1})1 = 1$ que si $(U_{h_1}M_{h_1})\varphi = \varphi$. Mais alors

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} (U_{h_1}M_{h_1})^n\varphi = \frac{\mu(h_1\varphi)}{\mu(h_1)} \quad \text{sur} \quad E. \ \blacksquare$$

Corollaire 6.2. — *Pour toute fonction réelle mesurable* g *définie sur* $(E, \mathcal{A})$ *telle que* $|g|$ *soit spéciale et que* $\mu(g) = 0$, *nous avons*

$$\sup_{N\times E} \left| \sum_1^n P^m g(x) \right| < \infty. \ \blacksquare$$

Démonstration. — En effet si u est une solution mesurable bornée de l'équation de Poisson $Pg = u - Pu$, nous avons

$$\sum_1^n P^m g = \sum_0^{n-1} P^m(u - Pu) = u - P^n u$$

et la borne supérieure du corollaire est donc majorée par $2 \sup_E |u(x)| < \infty$. $\blacksquare$

Pour étudier l'équation de Poisson sur les mesures, nous nous servirons du cône de mesures positives défini ci-dessous; l'introduction de ce cône de mesures nous paraît plus naturelle que celle des mesures policées définies par Meyer [8].

Définition 6.3. — *Une mesure positive* ν *sur* $(E, \mathcal{A})$ *sera dite spéciale s'il existe une mesure positive bornée* σ *sur* $(E, \mathcal{A})$ *et une fonction* $h \in H$ *non* μ*-négligeable telles que*

$$\nu \leqslant \sigma U_h.$$

Nous avons alors le résultat suivant, qui implique notamment que la mesure invariante μ est spéciale (puisque $\mu = (h_1 . \mu)U_{h_1}$ et $\mu(h_1) < \infty$).

Proposition 6.4. — *Soit* h_1 *une fonction strictement positive de* H *telle que* $U_{h_1} \geqslant 1 \otimes \mu$. *Alors, pour qu'une mesure positive*

ν *sur* $(E, \mathcal{A})$ *soit spéciale il faut et il suffit qu'il existe une mesure positive et bornée* ρ *sur* $(E, \mathcal{A})$ *telle que* $\nu \leqslant \rho U_{h_1}$.

Démonstration. — La condition est évidemment suffisante; montrons qu'elle est nécessaire. Supposons donc que ν soit une mesure positive vérifiant l'inégalité de la définition 6; quitte à remplacer la fonction h par la fonction $h \wedge h_1$, nous pouvons supposer que $h \leqslant h_1$ (la fonction $h \wedge h_1$ n'est pas μ-négligeable si h ne l'est pas).

La formule $U_h = \sum_N (U_{h_1} M_{h_1 - h})^n U_{h_1}$ de la proposition 2.1 montre alors que

$$\sigma U_h = \rho U_{h_1} \qquad \text{si} \qquad \rho = \sum_N \sigma (U_{h_1} M_{h_1 - h})^n.$$

En outre la mesure ρ est bornée parce que la mesure σ l'est par hypothèse et parce que

$$(U_{h_1} M_{h_1 - h}) 1 = 1 - U_{h_1}(h) \leqslant 1 - \mu(h)$$

de sorte que

$$\rho(E) \leqslant \sigma(E) \sum_N (1 - \mu(h))^n = \frac{\sigma(E)}{\mu(h)} < \infty. \quad \blacksquare$$

Corollaire 6.5. — *Toute mesure positive sur* $(E, \mathcal{A})$ *qui est spéciale est finie sur le cône* S *des fonctions spéciales.* (Une telle mesure est donc nécessairement σ-finie).

Démonstration. — Soit h_1 une fonction strictement positive de H telle que $U_{h_1} \geqslant 1 \otimes \mu$. Soient f et ν respectivement une fonction et une mesure spéciale; alors la fonction $U_{h_1}(f)$ est bornée (proposition 4.6) tandis qu'il existe une mesure positive bornée ρ telle que $\nu \leqslant \rho U_{h_1}$ (proposition 4). Donc

$$\nu(f) \leqslant \rho U_{h_1}(f) \leqslant \rho(E) \| U_{h_1}(f) \| < \infty. \quad \blacksquare$$

Il est facile de voir que les mesures positives spéciales forment un cône convexe et héréditaire de mesures positives. En outre, nous avons le résultat suivant de stabilité par les opérateurs $M_h U_h$.

Corollaire 6.6. — *Pour toute fonction* $h \in H$ *strictement positive sur* E, *la mesure* $\nu M_h U_h$ *est spéciale dès que la mesure* ν *l'est.*

Démonstration. — Soit h_1 une fonction strictement positive de H telle que $U_{h_1} \geqslant 1 \otimes \mu$; quitte à remplacer h_1 par la fonction $h_1 \wedge h$ qui est encore strictement positive, nous pouvons supposer que $h_1 \leqslant h$. Si ν est alors une mesure positive majorée par ρU_{h_1} où ρ est bornée, nous avons

$$\begin{aligned} \nu M_h U_h \leqslant \rho U_{h_1} M_h U_h &= \rho U_{h_1} M_{h_1} U_h + \rho U_{h_1} M_{h-h_1} U_h \\ &\leqslant (\rho U_{h_1} M_{h_1}) U_h + \rho U_{h_1} \\ &\leqslant (\rho U_{h_1} M_{h_1} + \rho) U_{h_1} \end{aligned}$$

Comme $\rho U_{h_1} M_{h_1}$ et ρ sont des mesures bornées, il est clair que la mesure $\nu M_h U_h$ est spéciale. ▌

Voici alors le résultat en vue duquel les mesures spéciales ont été introduites.

Proposition 6.7. — *Pour toute mesure bornée λ sur $(E, \mathcal{A})$ de masse totale $\lambda(E) = 0$, il existe une mesure ν sur $(E, \mathcal{A})$ telle que la mesure positive $|\nu|$ soit spéciale et que*

$$\nu - \nu P = \lambda P.$$

En outre cette mesure ν est unique, à l'addition d'un multiple de la mesure invariante μ près.

Démonstration. — Soit h_1 une fonction de H strictement positive telle que $U_{h_1} \geqslant 1 \otimes \mu$. Soit

$$W = \sum_N (VM_{h_1})^n V \quad (V = U_{h_1} - 1 \otimes \mu)$$

l'opérateur que la proposition 1 associe à h_1. Pour toute mesure positive bornée ρ sur $(E, \mathcal{A})$, la mesure ρW est spéciale car

$$\rho W \leqslant \Big(\sum_N \rho (VM_{h_1})^n \Big) U_{h_1}$$

et car $\sum_N \rho(VM_{h_1}))$ est une mesure bornée puisque

$$(VM_{h_1})1 = 1 - \mu(h_1) < 1.$$

Si λ est une mesure bornée sur $(E, \mathcal{A})$, la formule

$$\nu = \lambda^+ W - \lambda^- W$$

définit alors une mesure ν sur E telle que $|\nu|$ soit spéciale.

En outre la proposition 1 montre que

$$(\lambda^{\pm} + \lambda^{\pm}W)P = \lambda^{\pm}W + \frac{\lambda^{\pm}(E)}{\mu(h_1)}(h_1 . \mu)P$$

et par différence, nous obtenons donc que

$$\lambda P + \nu P = \nu$$

puisque $\lambda^{+}(E) = \lambda^{-}(E)$.

Pour montrer l'unicité de la solution ν de l'équation de Poisson à l'addition d'un multiple de μ près, il reste à montrer que toute mesure ν sur $(E, \mathcal{A})$ telle que $|\nu|$ soit spéciale et que $\nu P = \nu$, est nécessairement de la forme $c.\mu (c \in R)$. Comme l'équation $\nu P = \nu$ entraîne que $\nu^{\pm}P \geqslant \nu^{\pm}$, il suffit d'établir que les mesures $c\mu (c \in R_{+})$ sont les seules mesures positives spéciales λ telles que $\lambda \leqslant \lambda P$.

Or, si λ est une mesure positive telle que $\lambda \leqslant \lambda P$, il n'est pas difficile de montrer par récurrence sur n que

$$\lambda \leqslant \lambda M_{h_1} P \sum_{l<n} (M_{1-h_1})^{l} + \lambda(M_{1-h_1}P)^{n} \quad (n \in N).$$

Mais si λ est spéciale, il existe une mesure positive bornée ρ telle que $\lambda \leqslant \rho U_{h_1}$ et alors

$$\lambda(M_{1-h_1}P)^{n} \leqslant \rho U_{h_1}(M_{1-h_1}P)^{n} = \sum_{l \geqslant n} \rho P(M_{1-h_1}P)^{l};$$

comme $\rho U_{h_1}(h_1) = \rho(1) < \infty$, nous voyons que

$$\lambda(M_{1-h_1}P)^{n} h_1 \to 0 \qquad \text{lorsque} \qquad n \uparrow \infty$$

ce qui permet, puisque h_1 est strictement positive, de déduire de ce qui précède que

$$\lambda \leqslant \lambda M_{h_1} P \sum_{l} (M_{1-h_1}P)^{l} = \lambda M_{h_1} U_{h_1}.$$

La mesure positive $h_1 . \lambda$ qui est bornée (car

$$\lambda(h_1) \leqslant \rho U_{h_1}(h_1) = \rho(1) < \infty)$$

vérifie donc l'inégalité $h_1 . \lambda \leqslant (h_1 . \lambda) U_{h_1} M_{h_1}$; comme les mesures des deux membres ont la même masse totale finie, cette inégalité est une égalité et comme $h_1 . \mu$ est à une constante multiplicative près la seule mesure invariante par $U_{h_1} M_{h_1}$, nous avons montré que $h_1 . \lambda = c h_1 . \mu$ et donc, puisque h_1 est strictement positive, que $\lambda = c . \mu$. ▌

7. Résolvantes markoviennes et exemples.

Il n'est pas difficile d'adapter les résultats antérieurs de ce travail au cas des processus de Markov à temps continu. Donnons-nous en effet une résolvante markovienne $(V_\alpha, \alpha > 0)$ sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{A})$, c'est-à-dire une famille d'opérateurs positifs sur cet espace tels que

$$\alpha V_\alpha 1 = 1 \quad (\alpha > 0),$$

$$V_\alpha = V_\beta + (\beta - \alpha) V_\alpha V_\beta = V_\beta + (\beta - \alpha) V_\beta V_\alpha \quad (0 < \alpha < \beta);$$

notons que ces relations entraînent que

$$V_\alpha = \sum_{N} (\beta - \alpha)^n V_\beta^{n+1} \qquad \text{si} \qquad 0 < \alpha \leqslant \beta.$$

Pour toute fonction réelle mesurable, positive et bornée h définie sur $(E, \mathcal{A})$, nous définirons un nouvel opérateur positif, soit V_h, en posant

$$V_h = \sum_{N} V_\alpha (M_{\alpha-h} V_\alpha)^n$$

après avoir choisi une constante $\alpha > 0$ majorant h sur E; cette définition ne dépend pas de la constante α choisie pour majorer h et les opérateurs V_h sont tels que

$$V_h = \sum_{N} V_k (M_{k-h} V_k)^n,$$

$$V_h = V_k + V_h M_{k-h} V_k = V_k + V_k M_{k-h} V_h \quad \text{si} \quad 0 \leqslant h \leqslant k \text{ sur E.}$$

Ces propriétés sont des conséquences immédiates de la proposition 2.1. puisque nous avons $V_h = \alpha^{-1} U_{\alpha-1h}$ si nous désignons (pour un α fixé majorant la fonction h) par $\{U_k, k \in H\}$ la famille d'opérateurs associés dans cette proposition à la probabilité de transition $P = \alpha V_\alpha$. Notons aussi que si $(X_t, t \in R_+)$ est un processus de Hunt de résolvante $(V_\alpha, \alpha > 0)$, nous avons la formule

$$V_h f(x) = E_x \left(\int_0^\infty e^{-\int_0^t h(X_s)\, ds} f(X_t)\, dt \right).$$

Le lien que nous venons d'établir entre les opérateurs V_h définis ci-dessus et les opérateurs U_k associés à un opérateur markovien P (ici $P = \alpha V_\alpha$) entraîne immédiatement les résultats suivants :

1) Si $(V_\alpha, \alpha > 0)$ est une résolvante m-irréductible pour une mesure positive σ-finie $m \neq 0$, c'est-à-dire si $m \ll V_\alpha(x, .)$ pour tout $x \in E$ et pour un (= pour tout) $\alpha > 0$, alors ou bien il existe une fonction mesurable strictement positive h_0 sur E telle que $V_0 h_0$ soit bornée sur E, ou bien il existe une mesure positive σ-finie μ dominant m telle que

$$V_h(h) = 1, \qquad (h.\mu)V_h = \mu$$

pour toute fonction mesurable, positive et bornée h telle que $\mu(h) \neq 0$ (en particulier pour toute fonction constante strictement positive). En outre le deuxième cas se présente si (et seulement si) la résolvante $(V_\alpha, \alpha > 0)$ vérifie la condition de Harris

$$V_A(1_A) = 1 \quad \text{sur} \quad E, \qquad \text{si} \qquad m(A) \neq 0;$$

m désignant encore ici une mesure positive σ-finie, distincte de 0.

2) Pour une « résolvante de Harris » de mesure invariante μ, il existe une fonction mesurable bornée strictement positive h_1 telle que $V_{h_1} \geqslant 1 \otimes \mu$. L'opérateur W associé à une telle fonction par la formule

$$W = \sum_N V'_{h_1}(M_{h_1}V'_{h_1})^n \qquad \text{où} \qquad V'_{h_1} = V_{h_1} - 1 \otimes \mu \geqslant 0$$

vérifie alors les deux relations fondamentales

$$V_h + V_h M_h W = W + \frac{1}{\mu(h_1)} V_h(h_1) \otimes \mu$$
$$V_h + W M_h V_h = W + \frac{1}{\mu(h_1)} 1 \otimes (h_1 . \mu)V_h$$

(h : fonction mesurable, bornée positive telle que $\mu(h) \neq 0$) et ces relations permettent d'établir les « principes » de la théorie du potentiel, notamment un principe du maximum.

3) Pour une résolvante de Harris de mesure invariante μ, une fonction mesurable positive f définie sur E est dite spéciale si les fonctions $V_h(f)$ sont bornées, quelle que soit la fonction mesurable, bornée et positive h telle que $\mu(h) \neq 0$. La proposition 4.9. prend alors la forme simple suivante :

une fonction mesurable positive et *bornée* h est spéciale si et seulement si $V_h \geqslant 1 \otimes m_0$ pour une mesure positive non nulle m_0 (= pour une mesure positive m_0 équivalente à μ). Ensuite si g est une fonction mesurable telle que $|g|$ soit spéciale et que $\mu(g) = 0$, l'équation de Poisson

$$u - (\alpha V_\alpha)u = V_\alpha g$$

possède pour toute constante $\alpha > 0$ une solution mesurable bornée u; cette solution est unique à l'addition d'une fonction constante près et en outre elle ne dépend pas de la constante α choisie.

Une mesure positive ν sur E sera dite spéciale si elle est majorée par le potentiel σU_h d'une mesure bornée pour une fonction mesurable, positive et bornée h qui n'est pas μ-négligeable. Pour toute mesure bornée λ de masse totale nulle sur E, il existe une mesure ν solution de l'équation de Poisson

$$\nu - \nu(\alpha V_\alpha) = \lambda V_\alpha$$

telle que $|\nu|$ soit spéciale; cette solution est unique à l'addition d'un multiple de la mesure invariante μ près et elle ne dépend pas de la constante $\alpha > 0$ choisie.

Enfin les cônes des fonctions spéciales et des mesures spéciales sont des cônes convexes stables par les opérateurs $V_h M_h$ (resp. $M_h V_h$) pour toute fonction h mesurable, bornée et strictement positive; la considération de ces cônes est donc bien naturelle en théorie du potentiel et les résultats qui précèdent nous semblent justifier cette affirmation.

Exemple. — Le mouvement brownien sur R. La résolvante $(V_\alpha, \alpha > 0)$ du mouvement brownien linéaire possède les densités

$$v_\alpha(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\sqrt{2\alpha}|y-x|} \quad (x, y \in \mathrm{R}; \alpha > 0)$$

et il est facile de voir que pour toute fonction mesurable, bornée et positive h qui n'est pas négligeable l'opérateur V_h possède une densité de la forme

$$v_h(x, y) = v_h(y, x) = \xi_h(x)\eta_h(y) \quad (x \leqslant y \text{ dans R})$$

où ξ_h (resp. η_h) est une solution croissante (resp. décroissante) de l'équation $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}u = hu$ p.p. A partir de ce résultat on montre que les conditions suivantes sur la fonction h sont équivalentes :

1) $V_h \geqslant 1 \otimes m$ pour une mesure positive $m \neq 0$,

2) $\xi_h(-\infty) > 0$ et $\eta_h(+\infty) > 0$,

2′) $\inf\limits_{R\times R} \varphi_h(x, y) > 0$,

3) la fonction h est telle que $\int_R |x| h(x)\, dx < \infty$,

et les fonctions spéciales bornées sont dans cet exemple, les fonctions vérifiant ces conditions équivalentes.

Quant aux mesures spéciales, ce sont ici les mesures positives sur R qui possèdent une densité f vérifiant les deux conditions suivantes :

(*a*) $f(y) \leqslant A(1 + |y|)$ p.p. pour une constante finie A,

(*b*) $\lim\limits_{|y|\to\infty} \frac{f(y)}{|y|} = 0$.

(Notons que $x\, dx$ est une mesure invariante puisque $\alpha \int x\varphi_\alpha(x, y)\, dx = y$ pour tout $\alpha > 0$ mais que la valeur absolue $|x|\, dx$ de cette mesure n'est pas une mesure spéciale, puisqu'elle ne vérifie pas la condition (*b*)).

Si h est une fonction bornée strictement positive telle que $\int_R |x|\, h(x)\, dx < \infty$, il existe, d'après l'équivalence des conditions 2′ et 3 ci-dessus, une constante $c > 0$ telle que $V_h \geqslant c1 \otimes dx$. Après avoir choisi cette constante c la plus grande possible, nous prendrons $\mu = c\, dx$ pour mesure invariante et considérons alors l'opérateur W du texte qui est associé à h; l'opérateur W que l'on obtient ainsi possède une densité $w(x, y)$ évidemment positive qui ne diffère de la densité classique $-|x-y|$ qui est négative que par l'addition d'une fonction de la forme $f(x) + f(y)$. De manière plus précise on trouve que

$$w(x, y) = \frac{\int_R (|z-x| + |z-y| - |x-y|)h(z)\, dz}{\int_R h(z)\, dz} + c \quad (x, y \in R).$$

où c est une constante > 0.

Un résultat analogue est valable pour le mouvement brownien à deux dimensions. Les fonctions bornées qui sont spéciales sont celles qui rendent la fonction $h(x) \log |x|$ intégrable sur R^2 et les opérateurs W que l'on obtient ici ne diffèrent de la fonction $\frac{-1}{2\pi} \log |x-y|$ que par une fonction de la forme $f(x) + f(y)$; plus précisément, nous avons

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi \int_{R^2} h(z)\, dz} \int_{R} \log \left(\frac{|z-x||z-y|}{|x-y|} \right) h(z)\, dz + \text{cte}$$

sur R^2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BRUNEL, Chaînes abstraites de Markov vérifiant une condition de Orey, à paraître.
[2] M. DUFLO, Opérateurs potentiels des chaînes et des processus de Markov irréductibles, *Bull. Soc. Math.*, 98 (1970), 127-163.
[3] S. FOGUEL, Ergodic theory of Markov process, Van Nostrand, (1970).
[4] T. E. HARRIS, The existence of stationary measures for certain Markov processes, *Third Berkeley Symp. Math Stat.*, Proba. II (1956), 113-124.
[5] S. HOROWICZ, Transitions probabilities and Contractions of L^∞ (à paraître).
[6] G. A. HUNT, La théorie du potentiel et les processus récurrents. *Ann. Inst. Fourier*, 15 (1965), 3-12.
[7] N. JAIN et B. JAMISON, Contributions to Doeblin's theory of Markov processes, *Z. für Wahrsch.*, 8 (1967), 19-40.
[8] M. METIVIER, Existence of an invariant measure and an Ornstein ergodic Theorem., *Ann. Math. Stat.*, 40 (1969), 79-96.
[9] P. A. MEYER, Équation de Poisson. Séminaire de Strasbourg, 1969-1970.
[10] J. NEVEU, Potentiel markovien discret, *Ann. Fac. Sc. Clermont*, 24 (1964), 37-89.
[11] J. NEVEU, Bases Mathématiques des Probabilités, Masson, 2e édition (1970).
[12] J. NEVEU, Potentiel markovien récurrent pour une chaîne de Harris, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 272 (1971), 270-272.
[13] S. OREY, Lecture notes for Markov chain transition probability functions. *Univ. of Minnesota, Minneapolis* (1968) 92 p.

Manuscrit reçu le 27 avril 1971,

J. NEVEU,
Laboratoire de Calcul des Probabilités,
Faculté des Sciences, Tour 56,
9, quai St-Bernard, Paris, Ve.