

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GÉRARD RAUCH

Effacement et déformation

Annales de l'institut Fourier, tome 22, n° 1 (1972), p. 239-269

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_1_239_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_1_239_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EFFACEMENT ET DÉFORMATION

par Gérard RAUCH

Cet article a pour but de démontrer d'une part que l'idéal des relations de Jacobi des algèbres de Lie de dimension finie sur un corps k de caractéristique zéro, n'est, en général, pas réduit (théorème 4 de la deuxième partie et annoncé dans [9]), d'autre part que l'application quadratique $Sq : H^2(L, L) \rightarrow H^3(L, L)$ définie par S.S. Rim dans [10] se factorise à travers le sous-espace $H_e^3(L, L)$ des trois-classes de cohomologie effaçables (théorème 2 de la deuxième partie).

Dans la première partie on donne une description, fonctorielle en V , du sous-espace $H_e^3(L, V)$ des trois classes de cohomologie effaçables, à valeurs dans un L -module de dimension finie V . L'idée est de considérer, comme Yonéda dans [11], des suites exactes d'algèbres de Lie à quatre termes

$$0 \rightarrow V \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0,$$

et des noyaux $(P, \varphi : L \rightarrow \text{Der } P / \text{Int } P)$ définis par Mori dans [7], avec certaines conditions de cohérence.

Dans la deuxième partie on donne une description, du point de vue de la géométrie algébrique, de la variété des algèbres de Lie. On y trouvera les deux résultats annoncés.

Première partie.

Dans toute cette première partie L désigne une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps k de caractéristique zéro et on note $\mathfrak{V}$ la catégorie des L -modules de k -dimension finie, $\mathfrak{V}(V, M)$ l'ensemble des flèches $V \rightarrow W$, $V, W \in \text{Ob}(\mathfrak{V})$, et $H^n(L, \quad)$, $n = 0, 1, \dots$, le fonc-

teur qui à tout objet V de $\mathfrak{V}$ associe le k -espace vectoriel $H^n(L, V)$ des n -classes de cohomologie de L à valeurs dans V .

1. Rappel sur l'effacement des classes de cohomologie.

On dit qu'une classe de cohomologie $q \in H^n(L, V)$, $n \in \mathbb{N}$, $V \in \text{Ob}(\mathfrak{V})$, est effaçable s'il existe un objet $W \in \text{Ob}(\mathfrak{V})$ et un monomorphisme $f \in \mathfrak{V}(V, W)$ tels que $H^n(L, f)(q) = 0$. On note $H_e^n(L, V)$ le sous-espace de $H^n(L, V)$ formé des classes de cohomologie effaçables. Le théorème suivant (théorème 6 de [1]) caractérise alors les classes de cohomologie effaçables.

THEOREME 1. — *Pour qu'une classe de cohomologie soit effaçable il faut et il suffit qu'elle soit annulée par la restriction de L à une sous-algèbre semi-simple maximale.*

Si $S \subset L$ est une sous-algèbre semi-simple maximale et r l'application restriction induite en cohomologie on a donc la suite exacte

$$0 \rightarrow H_e^n(L, V) \rightarrow H^n(L, V) \xrightarrow{r} H^n(S, V), n \in \mathbb{N}, V \in \text{Ob}(\mathfrak{V}).$$

On en déduit le caractère fonctoriel de $H_e^n(L, V)$, $V \in \text{Ob}(\mathfrak{V})$, et les égalités

$$H_e^0(L, V) = 0, H_e^1(L, V) = H^1(L, V), H_e^2(L, V) = H^2(L, V).$$

De plus si L est résoluble (resp. semi-simple) on voit que

$$H_e^n(L, V) = H^n(L, V) \text{ (resp. } H_e^n(L, V) = 0 \text{)}.$$

Soit $0 \rightarrow V' \xrightarrow{i} V \rightarrow V'' \xrightarrow{p} 0$ une suite exacte de $\mathfrak{V}$. On a la suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^n(L, V'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(L, V') \rightarrow H^{n+1}(L, V) \rightarrow \\ \rightarrow H^{n+1}(L, V'') \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (1)$$

LEMME 1. — *L'opérateur de cohomologie δ se factorise à travers $H_e^{n+1}(L, V')$.*

En effet, soit $q'' \in H^n(L, V'')$, on a $H^{n+1}(L, i) \circ \delta(q'') = 0$ et l'injection i réalise alors l'effacement de $\delta(q'')$.

La suite exacte (1) donne alors la suite

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_e^n(L, V'') \rightarrow H_e^{n+1}(L, V') \rightarrow H_e^{n+1}(L, V) \rightarrow \\ \rightarrow H_e^{n+1}(L, V'') \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (2)$$

LEMME 2. — *La suite $H_e^n(L, V') \rightarrow H_e^n(L, V) \rightarrow H_e^n(L, V'')$ est exacte.*

En effet soit $q \in H_e^n(L, V)$ tel que $H_e^n(L, p)(q) = 0$. Puisque (1) est exacte il existe $q' \in H^n(L, V')$ tel que $H^n(L, i)(q') = q$. On voit alors que si $f : V \rightarrow W$ réalise l'effacement de q , $f \circ i : V' \rightarrow W$ réalise celui de q' .

Des deux lemmes précédents on déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *La suite tronquée :*

$$H_e^1(L, V') \rightarrow H_e^1(L, V) \rightarrow \dots \rightarrow H_e^3(L, V) \rightarrow H_e^3(L, V'')$$

est exacte.

Remarque. — La suite (2) n'est pas en général exacte en $H_e^1(L, V')$. Je ne sais pas ce qu'il en est en degré $n \geq 4$ en $H_e^n(L, V')$, ni d'ailleurs pour $n \geq 3$ en $H_e^n(L, V'')$.

2. Le foncteur $\mathfrak{h}$.

a) Rappel sur les noyaux.

DEFINITION 1. — *On appelle noyau la donnée d'un couple (P, φ) formé d'une algèbre de Lie P de k -dimension finie et d'un morphisme d'algèbres de Lie : $\varphi : L \rightarrow \text{Der } P / \text{Int } P$.*

Exemple 1. — Soit $0 \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$ une suite exacte d'algèbres de Lie. Une section k -linéaire (dans toute la suite une section sera toujours supposée être k -linéaire) de $N \rightarrow L$ permet de définir une application k -linéaire $\tilde{\varphi} : L \rightarrow \text{Der } P$ en posant

$$\tilde{\varphi}(l)(p) = [s(l), p]_N$$

(on identifie bien sûr P à un idéal de N). On vérifie que l'application composée φ , de $\tilde{\varphi}$ et de la projection canonique $\text{Der } P \rightarrow \text{Der } P/\text{Int } P$, est un morphisme d'algèbres de Lie indépendant de la section s choisie. Le couple (P, φ) est un noyau. Un noyau qui peut se définir à partir d'une suite exacte d'algèbres de Lie comme précédemment est dit réalisable.

Exemple 2. — Soit V un objet de $\mathfrak{V}$. On lui associe un noyau (V) en prenant pour algèbre de Lie V muni de la structure abélienne et pour morphisme l'opération de L sur V .

Soient (P, φ) un noyau et C le centre de P . Si $\tilde{\varphi} : L \rightarrow \text{Der } P$ est un relèvement k -linéaire (ici aussi on convient qu'un relèvement sera toujours k -linéaire) de φ ; on pose :

$$l \cdot v = \tilde{\varphi}(l)(v), \quad l \in L, \quad v \in C.$$

On munit ainsi C d'une structure de L -module indépendante du relèvement choisi (dans l'exemple 2 l'opération donnée sur V et celle induite par le noyau (V) coïncident). Si I est un idéal caractéristique de P ou un L -sous-module de C alors le noyau (P, φ) passe au quotient et donne un noyau $(P/I, \varphi_I)$.

Remarque. — Soit (P, φ) un noyau. Le noyau quotient $(P/\text{Cent } P, \varphi_{\text{Cent } P})$ est réalisable. En effet on détermine une extension

$$0 \rightarrow P/\text{Cent } P \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0$$

induisant le morphisme $\varphi_{\text{Cent } P}$ comme suit. On choisit un relèvement $\tilde{\varphi} : L \rightarrow \text{Der } P$ de φ , une application $\theta \in \text{Hom}_k(\overset{2}{\wedge} L, P/\text{Cent } P)$ et une section σ de la projection canonique $P \rightarrow P/\text{Cent } P$ tels que l'on ait

$$[\tilde{\varphi}(l), \tilde{\varphi}(l')] - \tilde{\varphi}([l, l']) = \text{Int}_P \sigma \circ \theta(l, l'), \quad l, l' \in L.$$

L'algèbre de Lie M a alors comme espèce vectoriel sous-jacent le produit $P/\text{Cent } P \times L$ et son crochet est donné par la formule

$$\begin{aligned} [(r, l), (r', l')]_M &= ([rr']_{P/\text{Cent } P} + \tilde{\varphi}_{\text{Cent } P}(l)(r') - \tilde{\varphi}_{\text{Cent } P}(l')(r) \\ &\quad + \theta(l, l'), [l, l']_L), \quad r, r' \in P/\text{Cent } P, \quad l, l' \in L \end{aligned}$$

($\tilde{\varphi}_{\text{Cent } P}$ est déduit de $\tilde{\varphi}$ par passage au quotient).

b) *Notion de lien.*

1. DEFINITION 2. — On appelle lien la donnée d'un objet V de $\mathfrak{V}$, d'un noyau (P, φ) , d'un monomorphisme $i \in \mathfrak{V}(V, \text{Cent } P)$ (le centre de P est muni de la structure de L -module induite par le noyau), et d'une extension M de L par $P/i(V) = R$ induisant le noyau quotient $(P/i(V), \varphi_{i(V)})$ et plus précisément telle qu'il existe une section s de $M \rightarrow L$ et un relèvement $\tilde{\varphi} : L \rightarrow \text{Der } P$ de φ vérifiant si on pose

$$\theta(l, l') = [s(l), s(l')]_M - s([l, l']_L), \quad l, l' \in L,$$

les deux conditions suivantes :

$$\text{i) } \tilde{\varphi}_{i(V)}(l)(r) = [s(l), r]_M, \quad l \in L, \quad r \in R,$$

$$\text{ii) } [\tilde{\varphi}(l), \tilde{\varphi}(l')] - \tilde{\varphi}([l, l']_L) = \text{Int}_P \sigma \circ \theta(l, l'),$$

$$\sigma \text{ section de } P \rightarrow P/i(V), \quad l, l' \in L.$$

Puisque $i(V)$ est dans le centre de P la condition ii) ne dépend pas du choix de la section σ .

Deux liens Λ_1 et Λ_2 , de même module $V \in \text{Ob}(\mathfrak{V})$ et de composantes $V, P_i, \varphi_i, i_i, M_i, \iota = 1, 2$, sont dits isomorphes (notation $\Lambda_1 \simeq \Lambda_2$) s'il existe deux isomorphismes d'algèbres de Lie $\tau : P_1 \rightarrow P_2$ et $\rho : M_1 \rightarrow M_2$ tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{\tau} & P_2 & & \\ i_1 \swarrow & & \searrow i_2 & & \\ & V & & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1/i(V) & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tau & & \downarrow \rho & & \downarrow id \\ 0 & \longrightarrow & P_2/i(V) & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Der } P_1 / \text{Int } P_1 & \xrightarrow{\tau} & \text{Der } P_2 / \text{Int } P_2 \\ \swarrow \varphi_1 & & \searrow \varphi_2 \\ & L & \end{array}$$

(par abus d'écriture on note encore τ les flèches $P_1/i(V) \rightarrow P_2/i(V)$ et $\text{Der } P_1 / \text{Int } P_1 \rightarrow \text{Der } P_2 / \text{Int } P_2$ induites par τ ; cette dernière est définie par $\bar{d} \rightarrow (\tau d \tau^{-1})$, $d \in \text{Der } P_1$, $\bar{d}$ sa classe dans le quotient $\text{Der } P_1 / \text{Int } P_1$ et $(\tau d \tau^{-1})$ la classe de $\tau d \tau^{-1} \in \text{Der } P_2$ dans le quotient $\text{Der } P_2 / \text{Int } P_2$). La relation d'isomorphie est, bien entendu, une relation d'équivalence sur les liens de même module $V \in \text{Ob}(\mathfrak{V})$.

2. COMPOSITIONS. — Soient $\Lambda_\iota = (V, P_\iota, \varphi_\iota, i_\iota, M_\iota)$, $\iota = 1, 2$, deux liens de même module V . Le composé $\Lambda = \Lambda_1 * \Lambda_2 = (V, P, \varphi, i, M)$ est défini par le noyau (P, φ) , noyau quotient du noyau produit

$$(P_1, \varphi_1) \times (P_2, \varphi_2) = (P_1 \times P_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$$

par l'idéal $I = \{(i_1(v), -i_2(v)), v \in V\}$, l'injection $i : V \rightarrow \text{Cent } P$, $i(v) = (v, o)$ et l'extension M , image réciproque par le morphisme diagonal $\Delta : L \rightarrow L \times L$, $l \rightarrow (l, l)$, de l'extension produit $M_1 \times M_2$, compte tenu de l'isomorphisme $P_1/i_1(V) \times P_2/i_2(V) \xrightarrow{\sim} P/i(V)$ (si $o \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{p} C \rightarrow o$ est une suite exacte d'algèbres de Lie et $f : D \rightarrow C$ un morphisme, l'image réciproque de l'extension par f est l'extension $o \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow o$ avec

$$F = \{(b, d) \in B \times D, p(b) = f(d)\}$$

muni de la structure d'algèbre de Lie produit, les flèches $A \rightarrow F$ et $F \rightarrow D$ étant telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccccc} o & \longrightarrow & A & \longrightarrow & F & \longrightarrow & D & \longrightarrow & o \\ & & \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow f & & \\ o & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & o \end{array} .$$

On vérifie facilement la commutativité et l'associativité, à un isomorphisme près, de cette loi de composition.

On définit aussi le produit d'un lien par un scalaire du corps k . Plus généralement soient W un objet de $\mathfrak{V}$ et $f \in \mathfrak{V}(V, W)$ un morphisme. Au lien $\Lambda = (V, P, \varphi, i, M)$ on associe le lien

$$\Lambda_f = (W, P_f, \varphi_f, i_f, M_f)$$

où

i) (P_f, φ_f) est le noyau quotient par l'idéal

$$I_f = \{(v, -f(v)), v \in V\}$$

du noyau produit $(P, \varphi) \times (W)$,

ii) $i_f : W \rightarrow \text{Cent } P_f$ est défini par $i_f(w) = (o, w)$, $w \in W$,

iii) $M_f = M$ compte tenu de l'isomorphisme $P/V \xrightarrow{\sim} P_f/W$.

Il est facile de voir que si $U \in \text{Ob}(\mathfrak{V})$ est un troisième objet et $g \in \mathfrak{V}(W, U)$ un morphisme on a $(\Lambda_f)_g \cong \Lambda_{gf}$.

c) *Obstruction associée à un lien.*

Soit Λ un lien de composantes (V, P, φ, i, M) . On a la suite exacte d'algèbres de Lie $\mathfrak{o} \rightarrow R \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow \mathfrak{o}$ avec $R = P/i(V)$. Soient $\tilde{\varphi} : L \rightarrow \text{Der } P$ un relèvement de φ , s (resp. σ) une section de $M \rightarrow L$ (resp. $P \rightarrow R$) et $\theta \in \text{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda} L, R)$ comme dans la définition 2. La section σ permet d'écrire $P = V \oplus R$ et

$$\tilde{\varphi}(l)(v, r) = (l.v + \Psi(l, r), \tilde{\varphi}_{i(V)}(l)(r)), \quad v \in V, \quad r \in R,$$

$$\Psi \in \text{Hom}_k(L \otimes R, V).$$

(on note $l.v$ le transformé de $v \in V$ par l'opération de $l \in L$ pour la structure de L module donnée). Soit alors $\Phi \in \text{Hom}_k(\overset{3}{\Lambda} L, V)$ défini par la formule

$$\Phi(l, l', l'') = \sum_{s^+(l, l', l'')} \Psi(l, \theta(l', l'')), \quad l, l', l'' \in L$$

(cette fonction intervient dans le développement de la condition de Jacobi

$$\sum_{s^+(l, l', l'')} [\tilde{\varphi}(l), [\tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}(l')), \tilde{\varphi}(l'')]] = 0, \quad l, l', l'' \in L;$$

on note $S^+(a, b, c)$ le groupe des permutations paires des trois lettres a, b, c).

PROPOSITION 2. — *L'application Φ est un trois-cycle de L à valeurs dans V .*

La vérification se fait directement. Pour la décomposition $P = V \oplus R$ associée à σ , le crochet dans P est de la forme

$$[(v, r), (v', r')]_P = (\alpha(r, r'), [r, r']_R), \quad v, v' \in V, \quad r, r' \in R,$$

$$\alpha \in \text{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda} R, V).$$

De même à la section s on associe une décomposition $M = R \oplus L$ et le crochet de M est donné par la formule

$$[(r, l), (r', l')]_M = ([r, r']_R + l \odot r' - l' \odot r + \theta(l, l'), [l, l']_L),$$

$$r, r' \in R, \quad l, l' \in L,$$

$$l \circledast r = [s(l), r]_M = \tilde{\varphi}_V(l)(r) .$$

Les conditions suivantes sont alors satisfaites

$$[l, l']_L \circledast r - l \circledast l' \circledast r + l' \circledast l \circledast r = [\theta(l, l'), r]_R , \quad (1)$$

$$r \in R , l, l' \in L$$

(c'est la définition de θ),

$$\sum_{s^+(r, r', r'')} \alpha([r, r'], r'') = 0 , r, r', r'' \in R$$

(c'est la condition de Jacobi dans P),

$$\sum_{s^+(l, l', l'')} (\theta([l, l'], l'') - l'' \circledast \theta(l, l')) = 0 , l, l', l'' \in L \quad (3)$$

(c'est la condition de Jacobi dans M),

$$\Psi(l, [rr']_R) = -l \cdot \alpha(r, r') + \alpha(l \circledast r, r') + \alpha(r, l \circledast r') , \quad (4)$$

$$r, r' \in R, l \in L$$

($\tilde{\varphi}(l)$ est une dérivation de P),

$$\Psi([l, l'], r) = \Psi(l, l' \circledast r) - \Psi(l', l \circledast r) + l \cdot \Psi(l', r) - \quad (5)$$

$$- l' \cdot \Psi(l, r) + \alpha(\theta(l, l'), r) , l, l' \in L , r \in R$$

(c'est la condition ii) de la définition 2). Il ne reste plus qu'à expliciter la différentielle $d\Phi$ de Φ pour terminer la démonstration.

On note $Obs(\Lambda)$ la classe de Φ dans $H^3(L, V)$ ce qui a un sens d'après la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *La classe $Obs(\Lambda)$ ne dépend que du lien Λ et non des relèvements choisis.*

En effet soient $\tilde{\varphi}'$ un autre relèvement de φ et $t : L \rightarrow M$ une section associée, $\theta' \in \text{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda} L, R)$ et $\Psi' \in \text{Hom}_k(L \circledast R, V)$ les fonctions correspondantes à t et σ (on prend le même σ). En utilisant la décomposition $M = R \oplus L$ associée à la section s on peut écrire :

$$t(l) = (u(l), l) , l \in L , u \in \text{Hom}_k(L, R) .$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \theta'(l, l') &= \theta(l, l') + [u(l), u(l')]_R + l \circledast u(l') - l' \circledast u(l) \\ &\quad - u([l, l']) , l, l' \in L , \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\Psi'(l, r) = \Psi(l, r) + \alpha(u(l), r), \quad r \in R, \quad l \in L.$$

Le calcul de Φ' , associé à θ' et Ψ' , donne alors

$$\Phi' = \Phi + d\Omega$$

où $\Omega \in \text{Hom}_k(\wedge^2 L, V)$ est donné par la formule

$$\Omega(l, l') = \Psi(l, u(l')) - \Psi(l', u(l)) - \alpha(u(l), u(l')), \quad l, l' \in L.$$

De manière analogue on démontre l'indépendance de $\text{Obs}(\Lambda)$ du choix de la section σ .

Remarque. — Si Λ_1 et Λ_2 sont deux liens de même module $V \in \text{Ob}(\mathfrak{V})$, on a :

$$\text{Obs}(\Lambda_1 * \Lambda_2) = \text{Obs}(\Lambda_1) + \text{Obs}(\Lambda_2).$$

De même si W est un autre objet de $\mathfrak{V}$, $f \in \mathfrak{V}(V, W)$ un morphisme et Λ un lien de module V on montre que

$$\text{Obs}(\Lambda_f) = H^3(L, f)(\text{Obs}(\Lambda)).$$

d) *Lien réalisable.*

DEFINITION 3. — Un lien $\Lambda = (V, P, \varphi, i, M)$ est dit réalisable s'il existe un diagramme commutatif d'algèbres de Lie du type suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & o & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & V & & & & \\
 & & \downarrow i & & & & \\
 o & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L \longrightarrow o \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow id \\
 o & \longrightarrow & P/i(V) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L \longrightarrow o \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & o & & & &
 \end{array}$$

où l'extension N induit le noyau (P, φ) .

PROPOSITION 4. — *Un lien Λ est réalisable si et seulement si son obstruction $Obs(\Lambda)$ est nulle.*

En effet, si $\Lambda = (V, P, \varphi, i, M)$ est réalisable il existe un diagramme commutatif d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & o & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & V & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 o & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \xrightarrow{s_1} & L \longrightarrow o \\
 & & \downarrow \sigma & & \downarrow & & \downarrow id \\
 o & \longrightarrow & P/i(V) & \longrightarrow & M & \xrightarrow{s} & L \longrightarrow o
 \end{array}$$

et, avec les notations utilisées dans la construction de l'obstruction, on peut écrire

$$P = V \oplus R, \quad M = R \oplus L, \quad N = V \oplus R \oplus L,$$

les flèches du diagramme se définissant de façon évidente. Le crochet dans N est de la forme

$$\begin{aligned}
 [(v, r, l), (v', r', l')]_N &= (l.v' - l'.v + \Psi(l, r') - \Psi(l', r) + \alpha(r, r') \\
 &\quad + \omega(l, l'), l \otimes r' - l' \otimes r + \theta(l, l') \\
 &\quad + [r, r']_R, [l, l']_L, v, v' \in V, r, r' \in R, \\
 &\quad l, l' \in L, \omega \in \text{Hom}_k(\wedge^2 L, V).
 \end{aligned}$$

La condition de Jacobi donne alors $d\omega = \Phi$. Réciproquement si $\Phi = d\omega$, la première partie de la démonstration montre que l'on a ce qu'il faut pour construire un diagramme commutatif associé au lien Λ .

e) *Définition du foncteur ξ .*

Soient Λ_1 et Λ_2 deux liens de même module $V \in \text{Ob}(\mathcal{V})$.

PROPOSITION 5. — *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

- i) *les liens Λ_1 et Λ_2 ont même obstruction,*
- ii) *il existe deux liens réalisables Λ'_1 et Λ'_2 de module V tels que :*

$$\Lambda_1 * \Lambda'_1 \simeq \Lambda_2 * \Lambda'_2.$$

Il suffit de montrer i) $\Rightarrow$ ii). Posons

$$\Lambda'_1 = \Lambda_2 * (-\Lambda_2) \quad \text{et} \quad \Lambda'_2 = \Lambda_1 * (-\Lambda_2) .$$

D'après la proposition 4 les liens Λ'_1 et Λ'_2 sont réalisables. Puisque la composition des liens est associative et commutative on a

$$\Lambda_1 * \Lambda'_1 \simeq \Lambda_2 * \Lambda'_2 .$$

Deux liens de même module $V \in \text{Ob}(\mathfrak{V})$ et qui vérifient l'une des conditions précédentes sont dits équivalents. On note $\mathfrak{h}(V)$ l'ensemble des classes d'équivalences des liens de module V . En résumé on a le

THEOREME 2. — *Les lois de composition sur les liens munissent $\mathfrak{h}(V)$ d'une structure de k -espace vectoriel et la correspondance qui à chaque lien associe son obstruction définit une application*

$$\mathfrak{h}(V) \rightarrow H^3(L, V)$$

linéaire, injective et fonctorielle en V .

Nous identifierons à partir de maintenant $\mathfrak{h}$ à un sous-foncteur de $H^3(L, \)$.

3. Effacement et liens.

a) THEOREME 3. — *Les foncteurs $\mathfrak{h}$ et H_e^3 coïncident.*

Démonstration. — Elle découle des deux lemmes suivants.

LEMME 1. — *Si L est semi-simple $\mathfrak{h}(V) = 0$, $V \in \text{Ob}(\mathfrak{V})$.*

Il suffit de démontrer le lemme quand V est un L -module trivial puisque le foncteur $H^3(L, \)$ prend les mêmes valeurs sur V que sur le sous-espace des invariants de V sous L . Soit alors $\Lambda = (V, P, \varphi, i, M)$ un lien où L opère trivialement sur V . Pour calculer un représentant $\Phi \in Z^3(L, V)$ de $\text{Obs}(\Lambda)$ on choisit un relèvement $\tilde{\varphi}$ de φ , une section s de la projection $M \rightarrow L$, une section σ de $P \rightarrow P/i(V)$ et on pose :

$$\theta(l, l') = [s(l), s(l')] - s([l, l']_L), \quad l, l' \in L ,$$

$$\tilde{\varphi}(l)(v, r) = (l \cdot v + \Psi(l, r), [s(l), r]_R), l \in L, v \in V, r \in R,$$

comme dans la proposition 2. Le trois-cycle Φ est donné par la formule

$$\Phi(l, l', l'') = \sum_{s^+(l, l', l'')} \Psi(l, \theta(l', l''))), l, l', l'' \in L.$$

Comme l'extension M est inessentielle, puisque L est semi-simple, on choisit une sous-algèbre supplémentaire de $R \subset M$ isomorphe à L et on écrit $M = R \oplus L$, le crochet dans M étant alors donné par la formule

$$[(r, l), (r', l')]_M = ([r, r']_R + l * r' - l' * r, [l, l']_L), r, r' \in R, \\ l, l' \in L.$$

Avec cette nouvelle décomposition de M on peut écrire

$$s(l) = (t(l), l), l \in L, t \in \text{Hom}_k(L, R).$$

Avec cette notation les conditions (4) et (5) de 2, deviennent

$$\Psi(l, [r, r']_R) = \alpha(t(l), [r, r']_R) + \alpha(l * r, r') + \alpha(r, l * r'), \quad (4')$$

$$l \in L, r, r' \in R,$$

$$\Psi(l, l' * r) - \Psi(l', l * r) - \Psi([l, l'], r) = \alpha(t(l), l' * r) - \alpha(t(l'), l * r) - \alpha(t([l, l']), r), \\ l, l' \in L, r \in R. \quad (5')$$

On en déduit

$$\Phi(l, l', l'') = \sum_{s^+(l, l', l'')} (\alpha(t(l), t([l', l'']))) - \Psi(l, t([l', l'']))) + \\ + \Psi([l, l'], t(l''))), l, l', l'' \in L.$$

On voit alors que si on pose

$$\Omega_1(l, l') = \alpha(t(l), t(l')), l, l' \in L,$$

$$\Omega_2(l, l') = \Psi(l, t(l')) - \Psi(l', t(l)), l, l' \in L,$$

on a

$$\Phi = d(\Omega_1 + \Omega_2).$$

LEMME 2. — Soit $0 \rightarrow V' \xrightarrow{i} V \rightarrow V'' \rightarrow 0$ une suite exacte dans $\mathfrak{V}$. La flèche $\delta : H^2(L, V'') \rightarrow H^3(L, V')$ se factorise à travers $\mathfrak{H}(V')$.

En effet, soit $o \rightarrow V'' \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow o$ une extension représentant une classe $q'' \in H^2(L, V'')$. On lui associe le lien

$$\Lambda' = (V', (V), i, M) .$$

Un représentant Φ' de $q' = \text{Obs}(\Lambda')$ est donné par la formule

$$\Phi'(l, l', l'') = \sum_{s^+(l, l', l'')} \Psi(l, \theta''(l', l'')) , \quad l, l', l'' \in L ,$$

où $\theta'' \in \text{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda} L, V'')$ est défini à partir d'une section s de $M \rightarrow L$ par

$$\theta''(l, l') = [s(l), s(l')]_M - s([l, l']) , \quad l, l' \in L ,$$

et où $\Psi \in \text{Hom}_k(V'' \otimes L, V')$ est défini à partir d'une section σ de $V \rightarrow V''$ par

$$l \cdot (v', v'') = (l \cdot v' + \Psi(l, v''), l \cdot v'') , \quad l \in L, v' \in V', v'' \in V'' .$$

Mais θ'' est un représentant de q'' et Φ' un représentant de $\delta(q'')$ ce qui achève la démonstration.

b) *Liens et noyaux.*

Un lien $\Lambda = (V, P, \varphi, i, M)$ est dit strict si $i : V \rightarrow \text{Cent } P$ est surjectif. Dans la remarque de 2, a, on a associé à un noyau (P_0, φ_0) un lien strict $\Lambda_0 = (\text{Cent } P_0, P_0, \varphi_0, id, M)$ où id est l'application identique de $\text{Cent } P_0$. On a le théorème suivant dû à Hochschild (Théorème 4 de [5]).

THEOREME 4. — *Tout lien est équivalent à un lien strict.*

4. Compléments : retour sur les liens réalisables.

Soit $\Lambda = (V, P, \varphi, i, M)$ un lien réalisable. On définit une catégorie $\mathfrak{S}_\Lambda$ attachée à Λ comme suit

i) les objets de $\mathfrak{S}_\Lambda$ sont les diagrammes commutatifs d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & o & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & V & & & & \\
 & & \downarrow i & & & & \\
 S = o & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L \longrightarrow o \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow id \\
 & & o & \longrightarrow & P/i(V) & \longrightarrow & M \longrightarrow L \longrightarrow o
 \end{array}$$

où l'extension N réalise le noyau (P, φ) ,

ii) si $S_i, i = 1, 2$ sont deux objets de $\mathfrak{S}_\Lambda$ où l'algèbre de Lie $N_i, i = 1, 2$, réalise le noyau (P, φ) alors l'ensemble $\mathfrak{S}_\Lambda(S_1, S_2)$ des flèches $S_1 \rightarrow S_2$ est le sous-ensemble des morphismes d'algèbres de Lie $N_1 \rightarrow N_2$ tels que les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccccc}
 o \longrightarrow & P & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & L \longrightarrow o \\
 & \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow id \\
 o \longrightarrow & P & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & L \longrightarrow o
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 N_1 & \longrightarrow & N_2 \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & M
 \end{array}$$

(on voit que $\mathfrak{S}_\Lambda(S_1, S_2)$ est ou bien vide, ou bien formé d'isomorphismes).

On note $\text{Ext}(L, V)$ la catégorie des extensions de L à noyau commutatif V , telles que la structure induite par l'extension sur V soit la structure donnée.

THEOREME 5. — *Les catégories $\mathfrak{S}_\Lambda$ et $\text{Ext}(L, V)$ sont équivalentes.*

Démonstration. — Soit S_0 un objet de $\mathfrak{S}_\Lambda$ de diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & o & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & V & & & & \\
 & & \downarrow i & & & & \\
 o \longrightarrow & P & \longrightarrow & N_0 & \longrightarrow & L \longrightarrow o \\
 & \downarrow & & \downarrow \rho & & \downarrow id \\
 o \longrightarrow & P/i(V) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L \longrightarrow o .
 \end{array}$$

Pour tout objet $o \rightarrow V \rightarrow D \xrightarrow{\pi} L \rightarrow o$ de $\text{Ext}(L, V)$ on note $D.S_0$ l'objet de $\mathfrak{S}_\Lambda$ défini comme suit par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & o & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & V & & & & \\
 & & \downarrow i & & & & \\
 S_\iota = o & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N_\iota & \longrightarrow & L \longrightarrow o, \quad \iota = 1, 2, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow id \\
 o & \longrightarrow & P/i(V) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L \longrightarrow o
 \end{array}$$

où l'extension N est définie par un procédé standard. C'est l'image directe par le morphisme $P \times V \rightarrow (P \times V)/I$ (I désigne l'idéal de l'algèbre de Lie produit $P \times V$ formé des éléments de la forme $(i(v), -v)$, $v \in V$) de l'image réciproque de l'extension produit $N_0 \times D$ par le morphisme diagonal $L \rightarrow L \times L$, $l \rightarrow (l, l)$; il suffit de vérifier que I est aussi un idéal de la sous-algèbre $N \times D$ formé des éléments (n, d) vérifiant $\pi_0(n) = \pi(d)$, pour s'assurer de l'existence de l'image directe. Les flèches $P \rightarrow N$, $N \rightarrow L$ et $N \rightarrow M$ sont définies respectivement par $p \rightarrow (p, o)$, $(p, d) \rightarrow \pi(d)$ et $(p, d) \rightarrow \rho(p)$. Soit $\sigma_0 : L \rightarrow N_0$ une section de π_0 . On vérifie alors, à partir de la section $\sigma : L \rightarrow N$ ($l \rightarrow (\sigma_0(l), o)$), que φ est bien aussi induit par N . La construction précédente définit un foncteur de $\text{Ext}(L, V)$ dans $\mathfrak{S}_\Lambda$ et on achève la démonstration du théorème avec les deux lemmes suivants

LEMME 1. — Si S_1 et S_2 sont deux objets de $\mathfrak{S}_\Lambda$ alors

$$\mathfrak{S}_\Lambda(S_1, S_2) \simeq Z^1(L, V).$$

En effet supposons $\mathfrak{S}_\Lambda(S_1, S_2) \neq \emptyset$ et soient

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & o & & & & \\
 & & \downarrow i & & & & \\
 & & V & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 o & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L \longrightarrow o \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow id \\
 o & \longrightarrow & P/i(V) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L \longrightarrow o
 \end{array}$$

les diagrammes associés. Alors avec les notations de la proposition 4 le crochet dans $N_\iota = V \oplus R \oplus L$ est donné par la formule

$$[(v, r, l), (v', r', l')]_{N_\iota} = (l \cdot v' - l' \cdot v + \Psi(l, r') - \Psi(l', r) + \alpha(r, r') + \\ + \omega_\iota(l, l'), l \otimes r' - l' \otimes r + \theta(l, l') + [r, r']_R, [l, l']_L), \\ v, v' \in V, r, r' \in R, l, l' \in L, \iota = 1, 2.$$

L'isomorphisme $\lambda : N_1 \rightarrow N_2$ s'écrit

$$\lambda(v, r, l) = (v + u(l), r, l), u \in \text{Hom}_k(L, V).$$

On en déduit, puisque λ est compatible avec la loi d'algèbre de Lie, $\omega_1 - \omega_2 = du$.

LEMME 2. — *Pour tout objet S_1 de $\mathcal{S}_\Lambda$ il existe une extension D de $\text{Ext}(L, V)$ telle que $S_1 \simeq D \cdot S_0$.*

En effet avec les notations précédentes on a

$$\begin{array}{ccccccc} & & o & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & V & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ S_\iota = o & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N_\iota & \longrightarrow & L \longrightarrow o \quad \iota = 0, 1, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow id \\ & & P/i(V) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L \longrightarrow o \\ & & & & N_\iota = V \oplus R \oplus L, \quad \iota = 0, 1. \end{array}$$

La loi d'algèbre de Lie de N_ι est donnée par des formules analogues à celles du lemme 1. On déduit de la démonstration de la proposition 4 que $\omega_0 - \omega_1 \in Z^2(L, V)$. Or on sait construire une extension $o \rightarrow V \rightarrow D \rightarrow L \rightarrow o$ associée à ce deux-cocycle et ayant la propriété énoncée.

Deuxième partie.

Dans cette deuxième partie k désigne un corps algébriquement clos et de caractéristique zéro, $n \in \mathbb{N}$ un entier, V l'espace vectoriel k^n et e_i , $i = 1, 2, \dots, n$, la base canonique de V . Si L est une loi d'algèbre de Lie sur V , on note $H^m(L, L)$, $m = 0, 1, \dots$, les groupes de cohomologie de L à valeurs dans le module adjoint.

1. Définition du schéma des algèbres de Lie.

Si A est une k -algèbre commutative, on note $\mathcal{L}_n(A)$ l'ensemble des lois de A -algèbre de Lie sur $V \otimes_k A$. Une loi de A -algèbre de Lie $L_A \in \mathcal{L}_n(A)$ est définie par ses constantes de structure $\alpha_{ijl} \in A$, $i, j, l = 1, 2, \dots, n$, dans la base canonique. On a

$$[e_i, e_j]_{L_A} = \sum_{l=1}^n \alpha_{ijl} e_l, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

avec les conditions

$$\alpha_{ijl} + \alpha_{jil} = 0, \quad i, j, l = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

(c'est la propriété d'antisymétrie du crochet),

$$\sum_{\sigma \in S^+(i, j, l)} \sum_{m=1}^n \alpha_{\sigma j, \sigma l, m} \alpha_{\sigma i, m, p} = 0, \quad i, j, l, p = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

(c'est la condition de Jacobi).

Si A et B sont deux k -algèbres commutatives et $f: A \rightarrow B$ un morphisme, on note $\mathcal{L}_n(f): \mathcal{L}_n(A) \rightarrow \mathcal{L}_n(B)$ l'application qui à la loi $L_A \in \mathcal{L}_n(A)$, de constantes de structure $\alpha_{ijl} \in A$, $i, j, l = 1, 2, \dots, n$, associe la loi $L_B \in \mathcal{L}_n(B)$, de constantes de structure $\beta_{ijl} = f(\alpha_{ijl})$, $i, j, l = 1, 2, \dots, n$, dans la base canonique de $V \otimes_k B$.

On définit ainsi un foncteur (k -foncteur au sens de [2], I,1,6,1) de la catégorie des k -algèbres commutatives dans celle des ensembles. On note I_n l'idéal de l'anneau des polynômes $k[X_{ijl}]$,

$$i, j, l = 1, 2, \dots, n,$$

engendré par les relations (1) et (2) et J_n l'algèbre quotient $k[X_{ijl}]/I_n$. On voit que la donnée d'une loi de A-algèbre de Lie sur $V \otimes_k A$ équivaut à celle d'un morphisme $J_n \rightarrow A$. On en déduit que le foncteur $\mathcal{L}_n$ est représentable et que l'on a $\mathcal{L}_n \simeq \text{Spec } J_n$; d'où la

PROPOSITION 1. — *Le k -foncteur $\mathcal{L}_n$ est un k -schéma algébrique affine d'algèbre J_n .*

Le schéma $\mathcal{L}_n$ n'est pas irréductible pour $n \geq 3$ (voir appendice); il n'est pas non plus, en général, réduit (c'est-à-dire que l'idéal I_n n'est pas, en général, intersection d'idéaux premiers) et c'est ce que nous allons démontrer.

Dans toute la suite on ne fera pas de distinction, dans l'écriture, entre le foncteur $\mathcal{L}_n$ et l'espace géométrique associé et on appellera plus brièvement algèbre de Lie une k -algèbre de Lie. L'ensemble $\mathcal{L}_n(k)$ des points rationnels de $\mathcal{L}_n$ s'identifie à l'ensemble des lois d'algèbre de Lie sur V .

2. Espace tangent et cône des tangentes.

a) Rappels de géométrie algébrique.

Soient X un k -schéma algébrique, x un point rationnel de X , $\mathcal{O}_x$ l'anneau local associé, d'idéal maximal m_x . Par définition on appelle espace tangent de Zariski à X en x , le k -schéma affine

$$\text{Tg}(X)_x = \text{Spec } S(m_x/m_x^2)$$

associé à l'algèbre symétrique de m_x/m_x^2 . L'ensemble de ses points rationnels (qui est muni d'une structure d'espace vectoriel) donne lieu à plusieurs identifications résumées par la

PROPOSITION 2. — *Les espaces vectoriels suivants sont "naturellement" isomorphes.*

- i) l'espace $\text{Tg}(X)_x(k)$ des points rationnels de $\text{Tg}(X)_x$,
- ii) l'espace $(m_x/m_x^2)^* = \text{Hom}_k(m_x/m_x^2, k)$,
- iii) l'espace des k -dérivations de $\mathcal{O}_x$ à valeurs dans k , c'est-à-dire l'ensemble des applications k -linéaires $D : \mathcal{O}_x \rightarrow k$ telles que

$$D(f \cdot g) = f(x) D(g) + g(x) D(f), \quad f, g \in \mathcal{O}_x, \quad f(x), g(x)$$

classes de f et g dans $\mathcal{O}_x/m_x \simeq k$,

iv) l'espace des morphismes de k -schémas $\text{Spec } k[\varepsilon] \rightarrow X$ tels que l'unique idéal maximal (ε) , de l'algèbre $k[\varepsilon]$ des nombres duaux sur k , ait pour image le point x (ou, ce qui est équivalent, l'ensemble des morphismes de k -algèbres locales $\mathcal{O}_x \rightarrow k[\varepsilon]$),

v) l'espace $X(p)^{-1}(x) \subset X(k[\varepsilon])$ où $p : k[\varepsilon] \rightarrow k$ désigne la projection canonique $a + b\varepsilon \rightarrow a, a, b \in k$.

Retenons cette dernière identification qui nous sera utile. Le schéma tangent est caractérisé par l'espace vectoriel de ses points rationnels et c'est $(m_x/m_x^2)^*$ qui porte traditionnellement le nom d'espace tangent de Zariski.

Le cône des tangentes $\text{Ctg}(X)_x$ à X au point rationnel x est défini comme étant le k -schéma affine d'algèbre

$$\text{Gr } \mathcal{O}_x = k \oplus m_x/m_x^2 \oplus \dots \oplus m_x^p/m_x^{p+1} \oplus \dots$$

La surjection canonique $S(m_x/m_x^2) \rightarrow \text{Gr } \mathcal{O}_x \rightarrow o$ permet d'identifier le cône des tangentes en x à un sous-schéma fermé de l'espace tangent en x . L'ensemble des points rationnels $\text{Ctg}(X)_x(k)$ du cône des tangentes est un cône de sommet l'origine dans $\text{Tg}(X)_x(k)$. Donnons une identification commode de $\text{Ctg}(X)_x(k)$. On a la surjection

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_x)(k[[T]]) \xrightarrow{\lambda} \text{Spec } \text{Gr}(\mathcal{O}_x)(k) \rightarrow o$$

définie comme suit : soient $x_1, \dots, x_r$ un système de générateurs de l'idéal m_x , $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ leur classe dans m_x/m_x^2 et $f : \mathcal{O}_x \rightarrow k[[T]]$ un morphisme ; le morphisme $\lambda(f)$ est alors défini par $\lambda(f)(\bar{x}_i) = \overline{f(x_i)}$, $\overline{f(x_i)} \in T \cdot k[T]/(T^2) \simeq k$. Nous dirons que deux morphismes

$$f_1, f_2 \in \text{Spec}(\mathcal{O}_x)(k[[T]])$$

sont équivalents si $\lambda(f_1) = \lambda(f_2)$ (c'est-à-dire s'ils sont égaux au premier ordre ou encore s'ils ont même image dans $\text{Tg}(X)_x(k)$).

PROPOSITION 3. — L'ensemble des points rationnels $\text{Ctg}(X)_x(k)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes $\mathcal{O}_x \rightarrow k[[T]]$ pour la relation précédente.

Remarque. — On a l'inclusion $\text{Ctg}(X)_x(k) \subset \text{Tg}(X_{\text{red}})_x(k)$.

Enfin rappelons que le schéma X est dit lisse au point rationnel x si le complété $\hat{\mathcal{O}}_x$ de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ pour la topologie m_x -adique est un anneau de séries formelles. Cela se traduit géométriquement par la coïncidence au point x de l'espace tangent de Zariski et du cône des tangentes. Pour que X soit lisse au point x il faut et il suffit, d'après la proposition 3, que pour tout vecteur tangent

$$f_1 : \mathcal{O}_x \rightarrow k[T]/(T^2)$$

il existe $f : \mathcal{O}_x \rightarrow k[[T]]$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_x & \xrightarrow{f} & k[[T]] \\ & \searrow f_1 & \downarrow \\ & & k[T]/(T^2) \end{array}$$

ou ce qui est équivalent, une suite $f_m : \mathcal{O}_x \rightarrow k[T]/(T^{m+1})$, $m = 2, 3, \dots$ telle que le diagramme suivant commute pour $m = 2, 3, \dots$

$$\begin{array}{ccc} & & k[T]/(T^{m+2}) \\ & \nearrow f_{m+1} & \downarrow \\ \mathcal{O}_x & \xrightarrow{f_m} & k[T]/(T^{m+1}) \\ & \searrow f_1 & \downarrow \\ & & k[T]/(T^2) \end{array}$$

d'où le critère de lissité.

PROPOSITION 4. — *Le k -schéma X est lisse au point rationnel x si l'application $X(k[T]/(T^{m+1})) \rightarrow X(k[T]/(T^m))$ est surjective au point $x \in X(k)$ pour $m = 1, 2, \dots$.*

b) *Application au schéma des algèbres de Lie.*

Soit L une loi d'algèbre de Lie sur V considérée comme un point rationnel de $\mathcal{L}_n$. L'espace tangent $\text{Tg}(\mathcal{L}_n)_L(k)$ s'identifie au sous-ensemble de $\mathcal{L}_n(k[\varepsilon])$ formé des lois de $k[\varepsilon]$ -algèbres de Lie sur $V \otimes k[\varepsilon]$ qui induisent la loi L sur V . Soit $L_1 \in \text{Tg}(\mathcal{L}_n)_L(k)$ un élément de l'espace tangent ; on note $L_{1,[k]}$ la loi d'algèbre de Lie déduite de L_1 par restriction de l'anneau des scalaires au corps k et $\varepsilon V = \{\varepsilon v, v \in L_{1,[k]}\}$ (c'est un idéal abélien de dimension n de $L_{1,[k]}$). On a la suite exacte d'algèbres de Lie

$$o \rightarrow \varepsilon V \rightarrow L_{1,[k]} \xrightarrow{p} L \rightarrow o \quad (1)$$

et une section privilégiée σ , ($l \rightarrow l \otimes 1$) de p . On voit que la suite (1) induit sur εV la structure de L -module adjointe. Réciproquement la donnée d'une loi d'algèbre de Lie M , extension à noyau abélien V de L , induisant sur V la structure adjointe et d'une section k -linéaire de $M \rightarrow L$ permet de définir un élément de $\text{Tg}(\mathcal{L}_n)_L(k)$. En résumé on a la

PROPOSITION 5. — *Les espaces vectoriels suivants sont "naturellement" isomorphes*

- i) l'espace tangent $\text{Tg}(\mathcal{L}_n)_L(k)$,
- ii) l'espace $\text{Ext}(L, L)$ des lois d'algèbres de Lie sur $V \times L$ qui sont extensions à noyau abélien $V \times \{0\}$ de L et qui induisent sur le noyau la structure adjointe,
- iii) l'espace $Z^2(L, L)$ des deux-cocycles de L à valeurs dans le module adjoint.

Quant à l'ensemble des points rationnels du cône des tangentes $\text{Ctg}(\mathcal{L}_n)_x$ il s'identifie, d'après la proposition 3, à l'ensemble des classes d'équivalence de lois de $k[[T]]$ -algèbres de Lie sur $V \otimes_k k[[T]]$ qui induisent la loi L sur V (deux lois de $k[[T]]$ -algèbre de Lie sont équivalentes si elles induisent la même loi sur $V \otimes_k k[[T]]/(T^2)$).

La proposition 4 va nous donner un critère de lissité au point $L \in \mathcal{L}_n(k)$, lié à la cohomologie de l'algèbre de Lie L . Soit

$$L_{m-1} \in \mathcal{L}_n(k[T]/(T^m))$$

une loi de $k[T]/(T^m)$ -algèbre de Lie induisant L sur V . On lui associe un lien $\Lambda(L_{m-1})$ de L -module le module adjoint et dont les autres composantes P , φ , i et M sont définies comme suit

i) pour P on prend la loi d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel $T \cdot V \otimes_k k[T]/(T^{m+1})$ obtenue par restriction des scalaires au corps k de la loi de $k[T]/(T^{m+1})$ -algèbre de Lie U , de crochet

$$[Te_i, Te_j]_U = T^2 \cdot \widetilde{[e_i, e_j]}_{L_{m-1}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

(on relève dans l'anneau $k[T]/(T^{m+1})$ les constantes de structure de L_{m-1}),

ii) φ est donné à partir du relèvement $\tilde{\varphi} : L \rightarrow \text{Der } P$ défini par la formule

$$\tilde{\varphi}(l)(T \cdot v) = T \cdot [\widetilde{l}, v]_{L_{m-1}}, \quad l \in L, \quad v \in V \otimes k[T]/(T^m)$$

(on procède comme dans i),

iii) l'injection $i : V \rightarrow \text{Cent } P$ est donnée par $i(v) = T^m v$, $v \in V$,

iv) l'extension M est la loi d'algèbre de Lie $L_{m-1, [k]}$.

Il est maintenant clair que pour qu'existe une loi $L_m \in \mathcal{L}_n(k[T]/(T^{m+1}))$ induisant L_{m-1} il faut et il suffit qu'il existe un diagramme commutatif d'algèbres de Lie du type suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & o & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & V & & & & \\ & & \downarrow i & & & & \\ o & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L \longrightarrow o \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ o & \longrightarrow & P/i(V) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L \longrightarrow o \end{array}$$

où N est une loi d'algèbre de Lie sur $V \otimes_k k[T]/(T^{m+1})$ et $P \rightarrow N$ l'injection canonique ; d'où la

PROPOSITION 6. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une loi de $k[T]/(T^{m+1})$ -algèbre de Lie sur $V \otimes k[T]/(T^{m+1})$ qui induise la loi L_{m-1} est que $\text{Obs}(\Lambda(L_{m-1})) = 0$,*

et le critère de lissité.

THEOREME 1. — *Si $H_e^3(L, L) = 0$, alors $\mathcal{L}_n$ est lisse au point rationnel d'algèbre de Lie L .*

Soient $L_1 \in \text{Tg}(\mathcal{L}_n)_L(k)$ un vecteur tangent et $\Lambda(L_1)$ le lien associé par la construction précédente. L'obstruction $\text{Obs}(\Lambda(L_1))$ ne dépend que de la classe d'isomorphie de l'extension $L_{1, [k]}$. On définit donc ainsi une application

$$\Theta : H^2(L, L) \rightarrow H_e^3(L, L),$$

qui coïncide avec l'application Sq de [10].

THEOREME 2. — *On a la factorisation :*

$$\begin{array}{ccc} H^2(L, L) & \xrightarrow{Sq} & H^3(L, L) \\ \Theta \searrow & & \nearrow \\ & H_e^3(L, L) & \end{array}$$

3. Orbite d'une algèbre de Lie sous l'action du groupe linéaire.

On fait opérer le groupe linéaire GL_n sur le schéma $\mathcal{L}_n$ de la façon suivante : soient A une k -algèbre commutative, $L_A \in \mathcal{L}_n(A)$ une loi de A -algèbre de Lie sur $V \otimes_k A$ de crochet φ_A et $g_A \in GL_n(A)$ un automorphisme de $V \otimes_k A$; on note $g_A * L_A$ la loi d'algèbre de Lie sur $V \otimes_k A$ dont le crochet Ψ_A est donné par la formule

$$\Psi_A(v, w) = g_A(\varphi_A(g_A^{-1}(v), g_A^{-1}(w))) , \quad v, w \in V \otimes_k A .$$

On note Ω_L l'orbite de l'algèbre de Lie L sous l'action de GL_n et on la munit de sa structure de schéma réduit induit (cf. [2], III,5,3). L'ensemble $\Omega_L(k)$ de ses points rationnels est le sous-ensemble de $\mathcal{L}_n(k)$ formé des algèbres de Lie isomorphes à L . Comme quotient de GL_n (par le sous-groupe $\text{Stab}(L)$), Ω_L est un sous-schéma lisse de $\mathcal{L}_n$ mais comme de plus $\text{Stab}(L)$ est un sous-groupe lisse (théorème de Cartier cf. [2], II,6,1) le morphisme $GL_n \rightarrow \Omega_L, g \mapsto g * L$, est lisse. L'application tangente est donc surjective si bien que $\text{Tg}(\Omega_L)_L(k)$ est l'image de l'algèbre de Lie de GL_n dans $\text{Tg}(\mathcal{L}_n)_L(k)$. Déterminons cette image. Soient φ le crochet de L et $\text{Id} + \varepsilon h, \varepsilon^2 = 0, h \in M_n(k)$, un élément de Lie ($GL_n(k)$) ; on a

$$\begin{aligned} (\text{Id} + \varepsilon h)(\varphi((\text{Id} + \varepsilon h)^{-1}(v), (\text{Id} + \varepsilon h)^{-1}(w))) &= \varphi(v, w) + \varepsilon dh(v, w) , \\ dh(v, w) &= \varphi(v, h(w)) - \varphi(w, h(v)) - h(\varphi(v, w)) , \quad v, w \in V , \end{aligned}$$

d'où la

PROPOSITION 7. — *L'espace tangent de Zariski $\text{Tg}(\Omega_L)_L(k)$ s'identifie à l'espace $B^2(L, L)$ des deux-cobords de L à valeurs dans le module adjoint.*

Observons maintenant que si $\Theta : H^2(L, L) \rightarrow H_e^3(L, L)$ est injectif alors d'après la proposition 6, $\text{Ctg}(\mathcal{L}_n)_L(k) = \text{Tg}(\Omega_L)_L(k)$ et comme on a l'inclusion $\text{Ctg}(\mathcal{L}_n)_L(k) \subset \text{Tg}(\mathcal{L}_{n, \text{red}})_L(k)$ on en déduit $\text{Tg}(\mathcal{L}_{n, \text{red}})_L(k) = \text{Tg}(\Omega_L)_L(k)$, d'où le

THEOREME 3. — Si $\Theta : H^2(L, L) \rightarrow H_e^3(L, L)$ est injective, l'orbite de l'algèbre L est ouverte, de plus si

- i) $H^2(L, L) = 0$, alors $\mathcal{L}_n$ est lisse au point L ,
- ii) $H^2(L, L) \neq 0$, alors $\mathcal{L}_n$ n'est pas réduit au point L .

En effet la condition $H^2(L, L) = 0$ implique $\text{Tg}(\mathcal{L}_n)_L = \text{Tg}(\Omega_L)_L$ et la condition $H^2(L, L) \neq 0$ implique $\text{Tg}(\mathcal{L}_n)_L \neq \text{Tg}(\Omega_L)_L$.

4. Application.

THEOREME 4. — L'idéal des relations de Jacobi n'est, en général, pas réduit.

La démonstration découle du théorème 3 appliqué à l'algèbre de Lie L extension à radical commutatif M de $sl(2)$, l'extension induisant sur M une structure de $sl(2)$ -module irréductible.

Rappelons d'abord un résultat technique. Soit N une algèbre de Lie à radical commutatif R et soit $S \simeq N/R$ une sous-algèbre semi-simple supplémentaire. On a la suite exacte de N -modules

$$0 \rightarrow R \rightarrow N \rightarrow S \rightarrow 0,$$

d'où la suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{q-1}(N, S) \rightarrow H^q(N, R) \rightarrow H^q(N, N) \rightarrow H^q(N, S) \rightarrow \\ \rightarrow H^{q+1}(N, R) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

LEMME 1. — On a les isomorphismes

$$H^q(N, R) \simeq \bigoplus_{i=0}^q H^i(S, \text{Hom}_k(\wedge^{q-i} R, R)), \quad q = 1, 2, \dots,$$

$$H^q(N, S) \simeq \bigoplus_{i=0}^q H^i(S, \text{Hom}_k(\wedge^{q-i} R, S)), \quad q = 1, 2, \dots.$$

En effet on a

$$\Lambda^q N = \Lambda^q R \oplus \Lambda^{q-1} R \otimes_k S \oplus \cdots \oplus R \otimes_k \Lambda^{q-1} S \oplus \Lambda^q S,$$

ainsi que

$$\text{Hom}_k(\Lambda^i S \otimes_k \Lambda^{q-i} R, R) \simeq \text{Hom}_k(\Lambda^i S, \text{Hom}_k(\Lambda^{q-i} R, R)),$$

$$i = 0, 1, \dots, q.$$

$$\text{Hom}_k(\Lambda^i S \otimes_k \Lambda^{q-i} R, S) \simeq \text{Hom}_k(\Lambda^i S, \text{Hom}_k(\Lambda^{q-i} R, S)),$$

$$i = 0, 1, \dots, q.$$

Si on note f_i la restriction de $f \in \text{Hom}_k(\Lambda^q N, R)$ (resp. $\text{Hom}_k(\Lambda^q N, S)$) on vérifie que la condition $f \in Z^q(N, R)$ (resp. $Z^q(N, S)$) équivaut à $f_i \in Z^i(S, \text{Hom}_k(\Lambda^i N, N))$ (resp. $Z^i_q(S, \text{Hom}_k(\Lambda^i R, S))$), $i = 0, 1, \dots, q$; d'où le résultat énoncé.

Du lemme 1 on déduit la suite exacte.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S(R, S) &\rightarrow \text{Hom}_S(\Lambda^2 R, R) \rightarrow H^2(N, N) \rightarrow \text{Hom}_S(\Lambda^2 R, S) \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Hom}_S(\Lambda^3 R, R) \oplus H^3(S, R) \rightarrow H^3(N, N) \rightarrow \text{Hom}_S(\Lambda^3 R, R) \oplus \\ &\rightarrow \text{Hom}_S(\Lambda^4 R, R) \oplus H^4(S, R) \oplus H^3(S, \text{Hom}_k(R, R)). \quad (2) \end{aligned}$$

Rappelons aussi que l'on peut choisir une base $u_0, u_1, \dots, u_{n-4}$, du radical M de L , associé à la base standard X, Y, H de l'algèbre de Lie supplémentaire $sl(2)$ telle que les formules suivantes soient valables.

$$\begin{aligned} [H, X] &= 2X, \quad [H, u_i] = (n - 4 - 2i) u_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 4, \\ [H, Y] &= -2Y, \quad [X, u_i] = (n - 3 - i) u_{i-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 4, \\ [X, Y] &= 2H, \quad [Y, u_i] = (i + 1) u_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 4, \end{aligned}$$

Enfin puisque M est un $sl(2)$ -module irréductible on a

$$H^q(sl(2), M) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, .$$

PROPOSITION 8. — On a, suivant les valeurs de $n = \dim L$, les résultats suivants :

α) si $n = 2q + 1$, $q = 2, 3, \dots$ ou $n = 4q$, $q = 3, 4, \dots$ alors $H^2(L, L) = 0$,

β) si $n = 4q + 2$, $q = 4, 5, \dots$ alors $\dim H^2(L, L) = 1$ et l'application $\Theta : H^2(L, L) \rightarrow H_e^3(L, L)$ est injective.

γ) si $n = 6, 8, 10, 14$ alors $\dim H^2(L, L) = 1$ et $H^3(L, L) = 0$.

Démonstration. — On montre facilement le résultat suivant

LEMME 2. — Soit R un $sl(2)$ -module irréductible de poids dominant m , alors le $sl(2)$ -module $R \wedge R$ est somme directe de $sl(2)$ -modules irréductibles R_i de poids dominant $P_i = 2(m - 1) - 4i, i = 0, 1, \dots$

On en déduit

$$i) \dim \operatorname{Hom}_{sl(2)}(M, sl(2)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim M \neq 3, \\ 1 & \text{si } \dim M = 3, \end{cases}$$

de plus si $\dim M = 3$, une base de $\operatorname{Hom}_S(M, S)$ est donnée par l'application définie par : $u_0 \rightarrow -X$, $u_1 \rightarrow H$, $u_2 \rightarrow Y$,

$$ii) \dim \operatorname{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda} M, sl(2)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim M = 2p, \\ & p = 1, 2, \dots, \\ 1 & \text{si } \dim M = 2p + 1, \\ & p = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

de plus si $\dim M = 2p + 1, p = 1, 2, \dots$, une base de $\operatorname{Hom}_S(\overset{2}{\Lambda} M, S)$ est donnée par l'application f définie par les formules suivantes

$$f(u_i, u_j) = 0, \quad i + j > 2p + 1, \quad i + j < 2p - 1,$$

$$f(u_0, u_{2p-1}) = X,$$

$$f(u_i, u_{2p-1-i}) = (-1)^i \frac{(2p-1)!}{i! (2p-1-i)!} X,$$

$$f(u_0, u_{2p}) = -\frac{1}{2} H,$$

$$f(u_i, u_{2p-i}) = (-1)^{i+1} \frac{(2p-1)!}{i! (2p-i)!} (p-i) H,$$

$$f(u_0, u_{2p+1}) = 0,$$

$$f(u_i, u_{2p+1-i}) = (-1)^i \frac{(2p-1)!}{(i-1)! (2p-i)!} Y,$$

$$\text{iii) } \dim \text{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda} M, M) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim M \equiv 0, 1, 2 \pmod{4}, \\ 1 & \text{si } \dim M \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

de plus si $\dim M = 4p + 3$, $p = 0, 1, \dots$, une base de $\text{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda} M, M)$ est donnée par l'application h définie par les formules

$$h(u_i, u_j) = a_{i,j} u_{i+j-p},$$

$$a_{i,j} = 0, \quad i + j > 3p, \quad i + j < p,$$

$$a_{i,p-i} = (-1)^i \binom{p}{i},$$

$$(3p + 1 - i - j) a_{ij} = (2p + 1 - i) a_{i-1,j} + (2p + 1 - j) a_{i,j-1}.$$

On utilise maintenant la suite exacte (2). On voit que si

$$\dim M = 2p, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

alors $H^2(L, L) = 0$, et si

$$\dim M = 2p + 1, \quad p \geq 3, \quad (4)$$

alors la flèche $\text{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda} M, sl(2)) \rightarrow \text{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} M, M)$ est injective ; en effet l'image g de f est donnée par la formule

$$g(x, y, z) = \sum_{s^+(x,y,z)} x \cdot f(y, z), \quad x, y, z \in M,$$

et on a $g(u_0, u_1, u_{2p}) = (2 - p) u_1$.

Le cas où la dimension de M est paire, est réglé ; examinons plus attentivement l'hypothèse (4). De l'injectivité précédente on déduit si

$$\dim M = 4p' + 1, \quad p' = 2, 3, \dots, \quad (4')$$

que $H^2(L, L) = 0$, et si

$$\dim M = 4p' + 3, \quad p' = 1, 2, \dots, \quad (4'')$$

que $H^2(L, L) \simeq \text{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda} M, M)$. De plus dans ce dernier cas l'application $\Theta : H^2(L, L) \rightarrow H_e^3(L, L)$ est injective ; en effet il suffit de remarquer d'une part que $f_1 \in \text{Hom}_k(\overset{2}{\Lambda} L, L)$ défini par

$$f_1 | \overset{2}{\Lambda} M = f, \quad f_1 | M \otimes_k sl(2) = 0, \quad f_1 | \overset{2}{\Lambda} sl(2) = 0,$$

est un deux-cocycle dont la classe dans $H^2(L, L)$ n'est pas nulle et dont l'image par Θ a pour représentant g_1 défini par

$$g_1(x, y, z) = \sum_{s^+(x, y, z)} f_1(x, f_1(y, z)) , \quad x, y, z \in M ,$$

d'autre part que les éléments g ($g = g_1 | \overset{3}{\Lambda} M$) et h sont linéairement indépendants comme on le voit sur les transformés des éléments (u_0, u_1, u_{2p}) et (u_0, u_3, u_{2p}) .

Il reste, pour terminer à examiner les cas particuliers.

Premier cas : $\dim M = 3$; alors

$$\text{Hom}_{sl(2)}(M, sl(2)) \cong \text{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda} M, M) ,$$

$$\text{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} M, M) = 0 \text{ et } \text{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} M, sl(2)) = 0 ,$$

d'où on déduit

$$H^2(L, L) \simeq \text{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda} M, sl(2)) \text{ et } H^3(L, L) = 0 .$$

Deuxième cas : $\dim M = 5$; alors

$$\text{Hom}_{sl(2)}(M, sl(M, sl(2))) = 0 , \quad \text{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} M, M) = 0$$

et on a la suite exacte $0 \rightarrow \text{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} M, sl(2)) \rightarrow \text{Hom}_{sl(2)}(\overset{4}{\Lambda} M, M)$;
on en déduit $H^2(L, L) \simeq \text{Hom}_{sl(2)}(\overset{2}{\Lambda} M, M)$ et $H^3(L, L) = 0$.

Troisième cas : $\dim M = 7, 11$; alors $\text{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} M, sl(2)) = 0$
et $\dim \text{Hom}_{sl(2)}(\overset{3}{\Lambda} M, M) = 1$, d'où on déduit $H^3(L, L) = 0$.

On a les corollaires suivants de la proposition 8

COROLLAIRE 1. — *L'orbite de L est ouverte pour tout entier n différent de 6, 8, 10 et 14.*

COROLLAIRE 2. — *Pour $n = 6, 8, 10$ et 14 , L est adhérent à l'orbite des algèbres de Lie semi-simple de type $A_1 \oplus A_1, A_2, B_2$ et G_2 respectivement.*

COROLLAIRE 3. — *Le schéma $\mathcal{L}_n$ n'est pas réduit en L lorsque $n = 18 + 4q, q = 0, 1, \dots$.*

Remarque. — Signalons, pour les amateurs d'algèbres de Lie rigides (algèbre de Lie pour lesquelles l'orbite est ouverte), que la méthode de calcul que nous venons de développer permet de montrer que si L est extension de $sl(2)$ à radical commutatif M et si l'extension induit sur M une structure de $sl(2)$ -module où les composantes irréductibles sont de dimension paire alors $H^2(L, L) = 0$.

5. Appendice.

Nous allons donner une composante irréductible du schéma $\mathcal{L}_n$. Soit $F \subset \mathcal{L}_n(k)$ l'ensemble des lois d'algèbres de Lie dont le centre est de dimension au moins égale à $n - 2$. Il satisfait aux propriétés suivantes

i) *il est fermé dans $\mathcal{L}_n(k)$* ; c'est une conséquence de la semi-continuité de la fonction $L \rightarrow \dim \text{Cent}(L)$, définie sur $\mathcal{L}_n(k)$,

ii) *il est irréductible* ; en effet on démontre facilement que pour toute algèbre de Lie L les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1) L contient une sous-algèbre abélienne de dimension $n - 1$,
- 2) L contient un idéal abélien de dimension $n - 1$,
- 3) $\dim \text{Cent}(L) \geq n - 2$;

soit alors $F_0 \subset F$ le sous-ensemble des algèbres de Lie dont la table de multiplication, dans la base canonique est de la forme

$$[e_i, e_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n - 1,$$

$$[e_i, e_n] = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} e_j, \quad a_{ij} \in k, \quad i, j = 1, 2, \dots, n - 1,$$

on voit que F_0 est irréductible et que F est l'orbite de F_0 sous l'action de $Gl_n(k)$,

iii) *sa dimension est $n^2 - n$* ; on calcule la dimension avec la formule

$$\dim F = \dim F_0 + \dim Gl_n(k) - \inf_{L \in F_0} \dim \text{Stab}(L, F_0),$$

$$\text{Stab}(L, F_0) = \{h \in Gl_n(k), h * L \in F_0\};$$

or, si $H \subset GL_n(k)$ est le sous-groupe qui laisse invariant le sous-espace engendré par les vecteurs e_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, on a évidemment $H \subset \text{Stab}(L, F_0)$, $L \in F_0$, d'autre part si $L_0 \in F_0$ est l'algèbre de Lie définie par $a_{ij} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n-1$, on a $H = \text{Stab}(L_0, F_0)$ et donc

$$\inf_{L \in F_0} \dim(L, F_0) = \dim H = (n-1)^2 + n ;$$

on termine le calcul en sachant que

$$\dim F_0 = (n-1)^2, \quad \dim GL_n(k) = n^2,$$

iv) la dimension de l'espace tangent de Zariski au point L_0 défini dans iii) est $n^2 - n$.

De ces quatre propriétés on déduit que F est une composante irréductible de $\mathcal{L}_n(k)$, que $\mathcal{L}_n$ est lisse au point L_0 et que $\mathcal{L}_n$, $n \geq 3$ est réductible (car les algèbres de Lie de F sont toutes résolubles).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. CARTIER, Effacement dans la cohomologie des algèbres de Lie, Séminaire Bourbaki, Mai 1955.
- [2] M. DEMAZURE et P. GABRIEL, Groupes algébriques, Tome 1. (Masson 1969).
- [3] G. HOCHSCHILD, Cohomology of restricted Lie algebras, *Ann. Journ. of Math.*, t. 76, (1954).
- [4] G. HOCHSCHILD, Lie algebras Kernels and cohomologie, *Ann. Journ. of Math.*, t. 76, (1954).
- [5] G. HOCHSCHILD, Cohomology classes of finite type and finite dimensionnal kernels for Lie algebras. *Ann. Journ. of Math.*, t. 76, (1954).
- [6] J.L. KOSZUL, Sur les modules de représentation des algèbres de Lie résolubles. (*Ann. Journ. of Math.*, t. 76, 1954).
- [7] M. MORI, On the three dimensionnal cohomology group of Lie algebras, *Journ. of the Math. Soc. of Japan*, Vol. 5, July 1953.

- [8] D. MUMFORD, Introduction to algebraic geometry.
- [9] G. RAUCH, Remarque sur les constantes de structure des C-algèbres de Lie de dimension finie, *C.R.A.S.*, t. 266, février 1968.
- [10] D.S. RIM, Deformation of transitive Lie algebras, *Ann. of Math.*, (1966).
- [11] O. YONEDA, On the homology theory of modules, *Journ. Fac. Sci., Tokyo, Sec. I*, (1954).
- [12] Séminaire Sophus Lie (1954-1955).

Manuscrit reçu le 29 mars 1971

accepté par J.L. Koszul

Gérard RAUCH

Département de Mathématiques

Université Paris-Sud

Centre d'Orsay

91 — Orsay