ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAKHLOUF DERRIDJ

Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs du second ordre hypoelliptiques

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 4 (1971), p. 99-148

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_4_99_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21, 4 (1971), 99-148.

UN PROBLÈME AUX LIMITES POUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS DU SECOND ORDRE HYPOELLIPTIQUES

par Makhlouf DERRIDJ

Introduction.

Nous considérons un opérateur différentiel du second ordre, donné par :

$$\text{(1)} \qquad P = \sum_{1}^{r} X_j^2 + X_0 + c$$

où $X_0, \ldots, X_r$, sont des champs de vecteurs à coefficients réels de classe C^∞ dans un ouvert O de R^n et c est une fonction à valeurs complexes de classe C^∞ dans l'ouvert O. Les opérateurs de la forme (1) ont été étudiés par Hörmander [7] qui a donné une condition suffisante et presque nécessaire pour que ces opérateurs soient hypoelliptiques dans O. Soit Ω un ouvert borné à frontière régulière tel que $\overline{\Omega} \subset O$. Nous nous posons les problèmes suivants :

a) Existence de problèmes aux limites bien posées pour P.

b) Régularité au bord $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω des solutions dans le cas où le point *a*) est résolu.

La condition d'hypoellipticité des opérateurs qui s'écrivent sous la forme (1) donnée par Hörmander est la suivante : (H.O) : L'algèbre de Lie $L(X_0, \ldots, X_r)$, engendrée par les champs de vecteurs $X_0, \ldots, X_r$ est de rang constant égal à n dans l'ouvert O.

Remarquons que M^me^ O. A. Oleïniket E. V. Radkévitch [17] ont généralisé le théorème d'hypoellipticité d'Hörmander au cas où l'hypothèse (H.O) n'est pas vérifiée sur un sous-ensemble d'une variété de dimension $(n - 1)$ contenue dans O. Nous verrons que cette généralisation est intéressante dans le cas où les champs de vecteurs $X_0, \ldots, X_r$ ne sont pas analytiques. Nous montrons dans le chapitre 1 que la condition d'Hörmander est nécessaire et suffisante pour que les opérateurs à coefficients analytiques de la forme (1) et tels que les champs $X_0, \ldots, X_r$ ne s'annulent simultanément en aucun point de O, soient hypoelliptiques dans O. Nous donnons aussi dans ce chapitre, mais brièvement, quelques résultats sur les champs de vecteurs vérifiant l'hypothèse (H.O). Dans le chapitre 2 nous démontrons une estimation à la frontière qui nous permettra de démontrer au chapitre 3 la régularité des solutions.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à M. Jacques-Louis Lions pour ses continuels encouragements et ses nombreuses suggestions.

Je remercie M. Mohammed-Salah Baouendi qui a guidé mes premiers pas dans la recherche mathématique et M. Claude Bardos dont l'aide m'a été précieuse.

CHAPITRE 1

1. Quelques conséquences de l'hypothèse d'Hörmander.

Dans ce chapitre, nous montrons que l'espace des distributions u appartenant à $L^2(\Omega)$ telles que $X_j u$ est dans $L^2(\Omega)$ $j = 0, \ldots, r$ admet des traces sur $\Gamma = \partial\Omega$. Dans une deuxième partie, nous démontrons que l'hypothèse d'Hörmander est nécessaire et suffisante pour que les opérateurs P qui s'écrivent sous la forme :

$$P = \sum_1^r X_j^2 + X_0 + c = P_1 + c; \qquad P_1(x, D) \neq 0 \quad \forall x \in O$$

à coefficients analytiques, soient hypoelliptiques dans O.

1.1. *Notations.* — A un champ de vecteurs X donné par ses coordonnées $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$, défini dans un ouvert de R^n, nous pouvons associer de manière biunivoque un opérateur différentiel homogène du premier ordre dans cet ouvert :

$$X(x) = \{\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)\} \to Xu(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

Si deux champs de vecteurs X et Y sont de classe C^1, nous définissons leur crochet par :

$$[X, Y]u = (XY - YX)u; \quad u \in C^\infty$$

Remarquons que $[X, Y]$ est un champ de vecteurs et que si les coordonnées de X et Y sont respectivement $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ et $\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x)$ alors celles de $[X, Y]$ sont égales à :

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial \beta_1}{\partial x_i} - \beta_i \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i}\right), \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial \beta_n}{\partial x_i} - \beta_i \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_i}\right)\right).$$

Considérons maintenant un système $\{X_0, X_1, \ldots, X_r\}$ de champs de vecteurs qui soient de classe C^∞ dans un ouvert O de R^n; nous pouvons alors définir les crochets de tous ordres à partir des champs de vecteurs $X_0, \ldots, X_r$.

Soit $I = (i_1, \ldots, i_k)$ un multi-indice, avec $i_j \in \{0, 1, ..., r\}$ pour $j = 1, \ldots, k$; alors le champ X_I sera défini par

$$X_I = [X_{i_1}, [X_{i_2}, \ldots, [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \ldots]$$

On désigne par $\mathcal{J}$ l'ensemble des multi-indices $I = (i_1, \ldots, i_p)$. Nous appelons algèbre de Lie $L(X_0, \ldots, X_r)$ engendrée par $X_0, \ldots, X_r$ l'ensemble des champs de vecteurs, définis dans l'ouvert O, qui s'écrivent sous la forme

$$Z = \sum_I \lambda_I X_I, \qquad \lambda_I \in C^\infty(O; R), \text{ somme finie.}$$

1.2. *L'hypothèse* (H.O.). — Le rang de $L(X_0, \ldots, X_r)$ en un point de O, est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les champs Z en ce point. Alors l'hypothèse (H.O) est la suivante :

(H.O) : Le rang de $L(X_0, \ldots, X_r)$ est égal à n en tout point de O.

1.3. *Exemples :*

a) Soient $O = R^2$; $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ $X^2 = x\frac{\partial}{\partial y}\cdot$ Alors

$$[X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial y}\cdot$$

Ainsi l'hypothèse (H.O) est vérifiée.

b) Plus généralement, nous pouvons prendre dans R^2 : $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$; $X_2 = \prod_{j=1}^{k} (x - x_j)^{n_j}\frac{\partial}{\partial y}\cdot$ Il suffit de considérer le crochet $[X_1, [X_1 \ldots [X_1, X_2]\ldots]$ où X_1 figure

$$(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) \text{ fois.}$$

c) Soit $O = R^3$; $X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial y}$; $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$; alors on a $[X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial y}\cdot$ Donc $L(X_1, X_2)$ engendre R^3 en tout point. Cet exemple montre que le nombre de champs de vecteurs vérifiant l'hypothèse (H.O) peut être inférieur à la dimension de l'espace.

1.4. *Existence de traces* [1]. — Soit Ω un ouvert borné tel que $\overline{\Omega} \subset \mathrm{O}$, et à frontière régulière, c'est-à-dire qui soit une variété de dimension $(n - 1)$ et de classe C^∞. Nous supposons de plus que Ω est localement situé du même côté de Γ.

Soit $\mathrm{M}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ telles que $\mathrm{X}_0 u \in \mathrm{L}^2(\Omega), \ldots, \mathrm{X}_r u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Nous nous demandons si l'espace $\mathrm{M}(\Omega)$ admet des traces sur Γ. Ce problème a été suggéré par l'inégalité d'Hörmander qui, toutefois, si elle n'est vraie que dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ n'indique pas s'il y a des traces sur Γ. C'est pourquoi nous avons été amenés à voir si l'inégalité d'Hörmander est vraie dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

Théorème 1.1. — *Soit p tel que $2 \leqslant p \leqslant +\infty$. Supposons que le système $\{\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_r\}$ vérifie l'hypothèse* (H.O). *Alors pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{O}$ il existe un nombre positif s, indépendant de p, et une constante positive $\mathrm{C} = \mathrm{C}\,(p, \mathrm{K})$ tels que* :

$$(1.1) \qquad \| \cup \|_{s,p} \leqslant \mathrm{C}\left(\|u\|_{\mathrm{L}^p} + \sum_{j=0}^{r} \|\mathrm{X}_j u\|_{\mathrm{L}^p} \right); \quad u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{K})$$

où $\|u\|_{s,p}$ désigne la norme de u dans l'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{s,p}$.

Ce théorème se démontre avec les techniques utilisées par Hörmander dans [7].

Soit maintenant Ω tel qu'il a été défini ci-dessus. Alors $\overline{\Omega}$ est un compact. Par suite il existe un nombre positif s, indépendant de p et une constante C tels que :

$$(1.2) \qquad \|u\|_{s,p} \leqslant \left((\|u\|_{\mathrm{L}^p} + \sum_{j=0}^{r} \|\mathrm{X}_j u\|_{\mathrm{L}^p} \right); \quad u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{K})$$

Corollaire 1.1. — *Soit s le nombre positif donné par* (1.2). *Choisissons p tel que $p > \dfrac{1}{s}$ (puisque s est indépendant de p). Alors nous avons l'inclusion algébrique et topologique :*

$$(1.3) \qquad \mathcal{M}_p(\Omega) \subset \mathrm{W}_0^{s,p}(\Omega)$$

Dans (1.3) $\mathcal{M}_p(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathrm{M}_p(\Omega)$, qui est l'espace des fonctions $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ telles que $\mathrm{X}_0 u \in \mathrm{L}^p(\Omega), \ldots, \mathrm{X}_r u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ muni du produit scalaire évi-

[1] Les démonstrations de ce paragraphe seront données dans un prochain article.

dent, et $W_0^{s,p}(\Omega)$ le sous-espace des fonctions de $W^{s,p}(\Omega)$ nulles sur Γ.

L'inclusion (1.3) découle de (1.2) par densité.

Corollaire 1.2. — *Les fonctions de* $\mathfrak{M}_p(\Omega)$ *admettent des traces nulles sur* $\Gamma = \partial\Omega$ *pour* $p > \frac{1}{s}$.

Remarque. — Le nombre s qui apparaît dans (1.2) est, sauf dans le cas où l'opérateur P est elliptique, inférieur ou égal à 1/2. Si $p = 2$, H^s n'admet pas de traces, d'où l'intérêt d'avoir l'inégalité (1.2).

Théorème 1.2. — *Soit* $\{X_0, \ldots, X_r\}$ *un système de champs de vecteurs vérifiant l'hypothèse* (H.O). *Soit* Ω *un ouvert borné de frontière* Γ *régulière tel que* $\overline{\Omega} \subset O$. *Désignons par* E *l'ensemble des points* $x \in \Gamma$ *tels que tous les vecteurs* $X_0(x), \ldots, X_r(x)$ *soient tangents à* Γ. *Alors* E *est un ensemble de mesure nulle dans* Γ.

Le théorème découle du lemme suivant :

Lemme 1.1. — *Soient* X *et* Y *deux champs de vecteurs réels de classe* C^1 *dans* R^n. *Soit* F *l'ensemble des points* $x \in \Gamma$ *tels que :*

a) les vecteurs $X(x)$ *et* $Y(x)$ *sont tangents à* Γ.

b) le vecteur $[X, Y](x)$ *est transversal à* Γ. *Alors* F *est de mesure nulle sur* Γ.

Pour démontrer le théorème (1.2) à partir du lemme (1.1), nous faisons une récurrence sur la longueur des crochets X_I. La longueur de ces crochets est nécessairement finie puisque $\overline{\Omega}$ est compact.

Corollaire 1.3. — *Supposons les hypothèses du théorème* (1.2) *vérifiées. Alors les fonctions de* $M_2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\,; X_j u \in L^2(\Omega)\,; j\ 0, \ldots, r\}$ *admettent des traces qui sont des fonctions mesurables sur* Γ.

Le corollaire (1.3) se démontre par utilisation de cartes locales qui nous permettent de nous ramener au demi-espace R^n_+ et à $\Gamma = R^{n-1}$. Comme E est de mesure nulle, pour tout ε, on peut trouver un compact Γ_ε de Γ tel que la mesure de

Lebesgue de $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ soit inférieure à ε et tel que le système $\{X_0, \ldots, X_r\}$ soit transversal en tout point à Γ_ε. D'après un résultat classique, les fonctions de $M_2(\Omega)$ admettent des traces sur Γ_2 qui sont dans $L^2(\Gamma_\varepsilon)$. Le corollaire (1.3) en découle.

Le cas particulier de la dimension 2 :

Dans le cas où $n = 2$, on arrive à préciser la nature des traces dans Γ. Tout point de R^2 sera noté (x, y), et :

$$X_j = a_j \frac{\partial}{\partial y} + b_j \frac{\partial}{\partial x}.$$

Si I est un multi-indice, on pose $|I| =$ longueur du crochet X_I, alors on a le :

LEMME 1.2. — *Le coefficient de* $\dfrac{\partial}{\partial y}$ *dans l'expression de tout crochet* X_I *avec* $|I| = p$, *est de la forme :*

$$A_I = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{p} \alpha_{i,j}(x, y) \frac{\partial^i a_j}{\partial x_i}(x, y) \tag{1.4}$$

Le lemme (1.2) se démontre par simple récurrence sur p.

COROLLAIRE 1.4. — *Il existe un entier* m *tel que*

$$x^m u(x, 0) \in L^2(\Gamma),$$

au voisinage de $x = 0$, *et pour* $u \in M_2(\Omega)$.

Remarque. — Un cas particulier est celui de l'espace suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^2(\mathbf{R}^2_+) \\ x^m \dfrac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\mathbf{R}^2_+) \end{array}\right. \tag{1.6}$$

Baouendi et Grisvard [00] ont montré que l'on a dans ce cas :

$$|x|^{\frac{m}{2}} u(x, 0) \in L^2(\mathbf{R})$$

2. Un cas de nécessité de l'hypothèse d'Hörmander.

Nous donnons d'abord un théorème sur les champs de vecteurs analytiques. Ce théorème est un cas particulier d'un théorème de T. Nagano sur les variétés analytiques. Ce théorème a été aussi démontré, dans un récent papier, par Zachmanoglou [20]; nous en donnerons une démonstration simple. Pour cela donnons d'abord une définition :

DÉFINITION. — *On dit que le système* $(X_0, \ldots, X_r)$ *est de rang* k *au point* x_0 *de l'ouvert* O, *si l'algèbre de Lie* $L(X_0, \ldots, X_r)$ *est de rang* k *en ce point.*

THÉORÈME 2.1. — *Supposons que le système* $(X_0, \ldots, X_r)$ *de champs de vecteurs analytiques soit de rang* k *au point* x_0. *Il existe, au voisinage de* x_0, *une variété analytique de dimension* k *telle que, pour tout point* x *de cette variété, tous les vecteurs* $X_I(x)$, I *multi-indice quelconque, sont tangents à cette variété.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que ce théorème est trivial si $k = 0$ ou $k = n$. Il s'ensuit que si la dimension de l'espace est égale à 1, il n'y a rien à démontrer.

Nous allons faire une récurrence sur la dimension de l'espace. Supposons que le théorème est vrai si la dimension est inférieure ou égale à $n - 1$. Démontrons-le dans R^n. Nous pouvons supposer que x_0 est l'origine. Si le système $(X_0, \ldots, X_r)$ est de rang k tel que $0 < k < n$, nous pouvons supposer, en faisant un changement de coordonnées analytique, que, par exemple, $X_0 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$; comme les champs de vecteurs X_j, $j = 1, \ldots, r$, sont analytiques, nous pouvons écrire :

$$X_j = \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{k \geqslant 0} x_1^k . X_{j,k} ; \; - x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0$$

où les champs de vecteurs $X_{j,k}$ sont des champs de vecteurs dans R^{n-1} à coefficients ne dépendant que des variables $(x_2, \ldots, x_n)$.

Il est facile de voir que l'algèbre de Lie $L(X_{j,k})$ engendrée par les champs de vecteurs $X_{j,k}$ est de rang $k - 1$ à l'origine. D'après la récurrence il existe une variété analytique V_1 de dimension $k - 1$ dans l'espace $(x_2, \ldots, x_n)$ telle que tous les champs $X_{j,k}$ soient tangents à V_1. Si nous prenons

$$V = V_1 x] - x_1^0, \; x_1^0 [,$$

nous voyons que tous les champs de vecteurs X_I sont tangents à la variété analytique V qui est bien de dimension k. Le théorème est ainsi démontré.

Le théorème précédent va nous permettre de démontrer la nécessité de la condition d'Hörmander pour les opérateurs $P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 + c$ tels que les champs $X_0, X_1, \ldots, X_r$ ne s'annullent simultanément en aucun point de l'ouvert considéré et soient à coefficients analytiques.

THÉORÈME 2.2. — *Soit* $P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 + c$ *un opérateur différentiel du second ordre à coefficients analytiques, les champs* X_i *étant à coefficients réels. Supposons qu'en tout point de* Ω *les champs* X_0, X_j *ne s'annulent pas simultanément. Une condition nécessaire et suffisante pour que* P *soit hypoelliptique dans* Ω *est que le système* $(X_0, \ldots, X_r)$ *soit de rang* n *en tout point de* Ω.

Démonstration. — Le théorème d'Hörmander dit que la condition est suffisante. Soit x_0 un point de Ω tel que le rang du système $(X_0, \ldots, X_r)$ soit égal à $1 \leqslant k < n$ au point x_0. Nous pouvons supposer $x_0 = 0$. Nous savons qu'il existe, au voisinage de 0, une variété analytique V de dimension k telle que tous les champs X_I soient tangents à V; par un changement de coordonnées analytiques, nous pouvons supposer que V est un plan. Dorénavant nous décomposons tout champ X_j en :

$$(2.4) \qquad X_j = Y_j + Z_j, \quad Y_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Z_j = \sum_{i=k+1}^{n} a_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Tout point de R^n sera noté (x, y) avec $x = (x_1, \ldots, x_k)$; $y = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Remarquons alors que les coefficients de Z_i sont nuls sur V.

Nous cherchons une fonction analytique $u(x)$ telle que si $\delta(y)$ désigne la masse unité sur V, on ait :

$$(2.5) \qquad P\nu = P(u.\delta) = 0$$

tenant compte de la nullité des champs Z_i sur V, on a :

$$(2.6) \qquad \begin{cases} X_j(u.\delta) = (Y_j u).\delta + u.(Z_j.\delta) \\ \qquad = \delta.\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ji}(x, 0)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \delta.\left(-\sum_{i=k+1}^{n} \dfrac{\partial a_{ji}}{\partial x_i}(x, 0)\right). \end{cases}$$

De même, on a :

$$(2.7)\quad \left\{\begin{aligned} X_j^2 u = \delta\Bigg[\sum_{p=1}^{k} a_{jp}(x,\,0)\frac{\partial}{\partial x_p}\Bigg(\sum_{i=1}^{k} a_{ji}(x,\,0)\frac{\partial u}{\partial x_i} \\ - \sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial a_{ji}}{\partial x_i}(x,\,0)\Bigg)\Bigg] \\ + \delta\Bigg(-\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\partial a_{jp}}{\partial x_p}(x,\,0)\Bigg)\Bigg[\sum_{i=1}^{k} a_{ji}(x,\,0)\frac{\partial u}{\partial x_i} \\ - \sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial a_{ji}}{\partial x_i}(x,\,0)\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Finalement nous pouvons écrire :

$$(2.8)\quad P(u.\delta) = \delta.\Bigg[\sum_{i,\,p=1}^{k}\theta_{i,\,p}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_p} + \sum_{i=1}^{k}\theta_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \theta_0(x)u\Bigg]$$

$$(2.9)\quad \left\{\begin{aligned} \theta_{ip}(x) &= \sum_{j=1}^{r} a_{ji}(x,\,0)a_{jp}(x,\,0) \\ \theta_i(x) &= \sum_{j=1}^{r}\Bigg(-\,a_{ji}(x,\,0)\sum_{p=k+1}^{n}\cdot\frac{\partial a_{jp}}{\partial x_p}(x,\,0) \\ &\qquad + \sum_{p=1}^{k} a_{jp}(x,\,0)\frac{\partial a_{ji}}{\partial x_p}(x,\,0)\Bigg) \\ &\quad + a_{0,i}(x,\,0) \\ \theta_0(x) &= \sum_{j=1}^{r}\Bigg[\sum_{p=1}^{k}\sum_{i=k+1}^{n} a_{jp}(x,\,0)\frac{\partial^2 a_{ji}}{\partial x_i\,\partial x_p}(x,\,0) \\ &\quad + \Bigg(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial a_{ji}}{\partial x_i}(x,\,0)\Bigg)^2 - \sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial a_{0i}}{\partial x_i}(x,\,0) + c(x,\,0)\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Nous voyons d'après (2.8), que nous sommes ramenés à une équation en la variable x, à coefficients analytiques.

Soit ω un petit voisinage de 0 dans V. S'il existe dans ω un point y_0 tel que les champs X_j, pour $j = 1, \dots, r$, ne sont pas tous nuls en y_0, alors il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que la fonction $\theta_{ii}(x)$ soit positive au voisinage de y_0 dans V. Alors, d'après le théorème de Cauchy-Kovalevska il existe dans un voisinage de y_0 dans V, une fonction analytique $u(x)$ non nulle telle que :

$$P(u.\delta) = 0$$

Comme le support de la distribution $u.\delta$ est contenu dans V, cela entraîne que P n'est pas hypoelliptique.

Supposons maintenant qu'il existe un voisinage de 0 dans V, tel que tous les champs X_j pour $j \in \{1, \ldots, r\}$ soient nuls dans ce voisinage. D'après l'hypothèse faite dans l'énoncé du théorème, le champ X_0 n'est pas nul dans ce voisinage Nous voyons, compte tenu de (11.9), que toutes les fonctions $\theta_{ip}(x)$ sont nulles dans ce voisinage. L'équation (11.8) s'écrit dans ce voisinage :

$$P(u.\delta) = \delta.\left[\sum_{i=1}^{k} \theta_i(x)\frac{\partial u}{\delta x_i} + \theta_0(x).u\right] \tag{2.10}$$

$$\left\{\begin{aligned} \theta_i(x) &= a_{0i}(x, 0)\\ \theta_0(x) &= \sum_{j=1}^{r}\left[\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial a_{ji}}{\partial x_i}(x, 0)\right]^2\\ &\qquad - \sum_{i=k+1}^{n}\frac{\partial a_{0i}}{\partial x_i}(x, 0) + c(x, 0). \end{aligned}\right. \tag{2.11}$$

Comme X_0 est non nul, il existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $\theta_i(x)$ ne soit pas nulle. En appliquant le théorème de Cauchy-Kovalevska, il existe une fonction analytique $u(x)$ non nulle telle que

$$P(u.\delta) = 0$$

ce qui entraîne que P n'est pas hypoelliptique.

Remarque 2.1. — Nous savons, d'après un résultat d'Oleinik et Radkévitch que l'hypothèse d'Hörmander n'est pas nécessaire dans le cas où les coefficients des champs de vecteurs $X_0, \ldots, X_r$ ne sont pas tous analytiques.

CHAPITRE 2

UNE INÉGALITÉ FONDAMENTALE

1. Un lemme préliminaire.

1.1. *Définitions et notations.* — Dans ce chapitre nous considérons un ouvert qui soit un cylindre $\Omega = \omega \times I$ de R^n, où ω est un ouvert borné de R^{n-1} et I un intervalle de R, par exemple $]0, 1[$. Tout point de R^n sera noté (x, y); D'autre part nous considérons un système de champs de vecteurs où figure l'opérateur de dérivation normale $\frac{\partial}{\partial y}$: $\left\{\frac{\partial}{\partial y}, X_0, X_1, \ldots, X_r\right\}$. Nous supposerons toujours qu'il existe un ouvert O contenant Ω tel que le système

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y}, X_0, \ldots, X_r\right\}$$

vérifie l'hypothèse (H.O).

Soit $M(\Omega)$ l'espace des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que

$$u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega), \quad X_j u \in L^2(\Omega), \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, r.$$

Muni du produit scalaire naturel $M(\Omega)$ est un espace de Hilbert, nous désignerons par $\mathcal{M}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $M(\Omega)$ et $\mathcal{M}'(\Omega)$ le dual topologique de $\mathcal{M}(\Omega)$.

Rappelons les notations suivantes :

Soit X un champ de vecteurs à coefficients réels et de classe C^∞ dans un ouvert O, soit K un compact contenu dans O.

Nous savons qu'il existe un voisinage V de K dans O, un nombre $t_0 > 0$ et une application de classe C^∞

$$f(x,t) : \ V^X]-t_0, t_0[\to 0$$

Telle que :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \dfrac{df(x,t)}{dt} = X(f(x,t)); & (x,t) \in V^X]-t_0, t_0[\\ f(x,0) = x \end{cases}$$

L'application e^{tX} est alors définie par

$$e^{tX}u(x) = u(f(x,t)); \quad u \in C^\infty$$

pour t assez petit e^{tX} applique $C_0^\infty(K)$ dans $C_0^\infty(0)$.

Il est utile de remarquer que e^{tX} représente une petite translation le long des lignes intégrales du champ X.

A chaque couple (s, ε) avec $0 < s < 1$, $0 < \varepsilon < t_0$, on associe la semi-norme $|u|_{X,s,\varepsilon}$ définie par

$$(1.2) \quad |u|_{X,s,\varepsilon} = \sup_{0<|t|<\varepsilon} |t|^{-s} \|e^{tx}u - u\|; \quad u \in C_0^\infty(K),$$

$\| \ \|$ désignant la norme dans l'espace L^2. Alors la quantité

$$(1.3) \qquad \|u\|_{X,s,\varepsilon} = (\|u\|^2 + |u|^2_{X,s,\varepsilon})^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $C_0^\infty(K)$.

D'autre part si ε_1 et ε_2 sont deux nombres tels que

$$0 < \varepsilon_1 < t_0, \qquad 0 < \varepsilon_2 < t_0, \qquad |u|_{X,s,\varepsilon_1} \quad \text{et} \quad |u|_{X,s,\varepsilon_2}$$

ne diffèrent que par une quantité majorée par $\|u\|$.

Comme par la suite ce sont les normes $\|u\|_{X,s,\varepsilon}$ qui nous intéresseront, nous voyons que nous pouvons omettre ε dans la notation et considérer $|u|_{X,s}$ au lieu de $|u|_{X,s,\varepsilon}$; de la même manière nous noterons

$$(1.4) \qquad |u|_s = \sup_{0<|h|<\varepsilon} |h|^{-s} \|\tau_h u - u\|$$

comme $\overline{\Omega}$ est un compact de l'ouvert O, alors nous avons l'inégalité suivante due à Hörmander [7] :

$s_0, s_y, s_1, \ldots, s_r$ étant des nombres positifs et inférieurs ou égaux à 1, il existe un nombre $s > 0$ et une constante C

tels que :

$$(1.5)\quad |u|_s \leqslant C\left(\sum_0^r |u|_{X_j, s_j} + |u|_{\frac{\partial}{\partial y}, s_y} + \|u\|\right) \quad u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.2. *Un lemme préliminaire.* — L'inégalité (1.5) ne nous permettra pas de montrer la régularité des solutions pour un problème aux limites. Cependant nous pourrons la modifier et obtenir une inégalité qui sera une estimation à la frontière. Pour cela introduisons les composantes tangentielles Y_0, $Y_1, \ldots, Y_r$ de champs de vecteurs $X_0, X_1, \ldots, X_r$. Nous allons, pour montrer que (1.5) est valable en remplaçant les champs $X_0, X_1, \ldots, X_r$ par leurs composantes tangentielles, démontrer que le système $\left\{Y_0, \frac{\partial}{\partial y}, Y_1, \ldots, Y_r\right\}$ vérifie (H.O). Tout champ X de vecteurs, s'écrivant $X_j = \alpha_j \frac{\partial}{\partial y} + Y_j$, on appellera Y_j la composante tangentielle du champ X_j.

Lemme 1.1. — *Soient* $Y_0, Y_1, \ldots, Y_r$, *les composantes tangentielles des champs de vecteurs* $X_0, X_1, \ldots, X_r$. *Alors nous avons l'équivalence*

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y}, X_0, X_1, \ldots, X_r\right\} \in (\mathrm{H.O}) \Longleftrightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial y}, Y_0, \ldots, Y_r\right\} \in (\mathrm{H.O}).$$

Démonstration. — Pour cela il nous suffit de montrer que tout crochet d'ordre p formé avec les champs du système $\left\{\frac{\partial}{\partial y}, X_0, \ldots, X_r\right\}$ s'exprime comme somme finie, à coefficients de classe C^∞ dans O, de crochets d'ordre inférieur ou égal à p formés avec les champs $\left\{\frac{\partial}{\partial y}, Y_0, \ldots, Y_r\right\}$. Cette propriété est vraie pour les crochets d'ordre zéro car

$$X_j = \alpha_j \frac{\partial}{\partial y} + Y_j.$$

Supposons qu'elle est vraie pour $p - 1$, montrons qu'elle est vraie pour p. Soit donc un crochet $X_I = [X_J, X_j]$ avec $|I| = p, |J| = p - 1$, et $X_J = \Sigma\, \alpha_J^k X_K$ où X_K est un crochet formé avec les champs $\left\{\frac{\partial}{\partial y}, Y_0, \ldots, Y_r\right\}$. Alors il nous suffit de montrer que $[K_K, X_j]$ est un crochet d'ordre $\leqslant p$ formé avec les mêmes champs. Comme $X_j = \alpha_j \frac{\partial}{\partial y} + Y_j$ nous avons

$$[X_K, X_j] = \left[X_K, \alpha_j \frac{\partial}{\partial y}\right] + [X_K, Y_j].$$

Nous voyons alors que le lemme est immédiat.

1.3. *Quelques opérateurs régularisants.* — L'inégalité (1.5) est valable en remplaçant les opérateurs X_j par les opérateurs $Y_j \; j = 0, 1, \ldots, r$ d'après le lemme 1.1. Nous obtenons ainsi :

$$(1.6) \quad |u|_s \leqslant C\left(\sum_0^r |u|_{Y_j, s_j} + |u|_{\frac{\partial}{\partial y}, s_y} + \|u\|\right) \; u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Prenant $s_y = s_1 = s_r = 1$ et $s_0 = \frac{1}{2}$, et remarquant que nous avons les majorations

$$|u|_{\frac{\partial}{\partial y}, 1} \leqslant C\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2} \qquad \text{et} \qquad |u|_{Y_j, 1} \leqslant C\|Y_j u\|_{L^2} \quad j = 1, \ldots, r$$

(1.6) devient

$$(1.7) \quad |u|_s \leqslant C\left(\|u\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\| + \sum_1^r \|Y_j u\| + |u|_{Y_0, \frac{1}{2}}\right) \; u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite il nous reste à estimer $|u|_{Y_0, \frac{1}{2}}$. Nous allons montrer que, étant donné un compact K contenu dans ω, alors nous avons la majoration

$$(1.8) \quad |u|_{Y_0, \frac{1}{2}} \leqslant C\|u\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|Y_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}; \quad u \in C_0^\infty(K \times I)$$

si $I = (i_1, \ldots, i_k)$ est un multi-indice, rappelons la notation :

$$X_I = ad\, X_{i_1}, \; \ldots, \; ad\, X_{i_{k-1}} X_{i_k}; \frac{1}{s(I)} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{s_{i_j}}.$$

Dans notre cas $s_{ij} = 1$ si $i_j \neq 0$ $s_{i_j} = \frac{1}{2}$ si $s_{i_j} = 0$. Pour tout champ de vecteurs X de classe C^∞ et tangentiel, définissons :

$$\varphi_X u = \int e^{rX} u \varphi(r)\, dr \qquad \text{avec} \qquad \varphi \in C_0^\infty(-k, k)$$

k petit nous avons les estimations suivantes :

$$X\varphi_X u = \int (u - e^{rX}u)\varphi'(r)\, dr$$

$$\|X\varphi_X u\| \leqslant \int |d\varphi| \sup_{|\tau|<k} \|e^{rX}u - u\|$$

$$\|\varphi_X u - u\| \leqslant \sup_{|r|<k} \|e^{rX}u - u\| \quad \text{si} \quad \varphi \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int \varphi\, dx = 1.$$

Il convient de remarquer que φ_X est un opérateur régularisant suivant les caractéristiques du champ X.

Maintenant $\Phi(h)$ étant une fonction dans $C_0^\infty(B)$ où B est la boule unité de $\mathbf{R}^{n-1}$, posons

$$\Phi_\varepsilon u = \int u(x - \varepsilon h, y)\Phi(h)\, dh = \Phi_\varepsilon u(x, y).$$

Alors pour $j = 1, \ldots, n-1$, nous avons les majorations

$$\varepsilon\|D_j\Phi_\varepsilon u\| \leqslant \int |D_j\Phi| \sup_{|h|<k} \|u(x - \varepsilon h, y) - u(x, y)\|$$

$$\|\Phi_\varepsilon u - u\| \leqslant \sup_{|h|<k} \|u(x - \varepsilon h, y) - u(x, y)\| \qquad \text{si} \qquad \Phi \geqslant 0$$

et

$$\int \Phi\, dx = 1.$$

De plus remarquons que $\dfrac{\partial}{\partial y}$ et Φ_ε commutent. D'autre part, d'après le lemme de Friedrichs [8]

$$\|(X\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon X)u\| \leqslant C\|u\|, \qquad u \in C_0^\infty(K \times I)$$

X tangentiel. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des multi-indices tels que :

$$|I| < m(I) = \frac{1}{s(I)} < 2|I|.$$

Cette dernière condition exprime le fait que le crochet X_I contient aussi bien Y_0 qu'un des champs $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $Y_1, \ldots, Y_r$. Ordonnons l'ensemble $\mathcal{J}$ de sorte que $m(I) = \dfrac{1}{s(I)}$ soit une fonction croissante de $I \in \mathcal{J}$. Posons :

$$S_t u = \prod_{i\in\mathcal{J}} \varphi_t m(I)_{Y_I}\Phi_{t\frac{1}{\sigma}} u \qquad \sigma > 0$$

$$S_t^J u = \prod_{I\geqslant J} \varphi_t^{m(I)} Y_I \Phi_{\frac{1}{t^\sigma}} \qquad J \in \mathcal{J}$$

Ces notations étant données, il nous paraît inutile de réécrire tous les lemmes qui se trouvent dans [7]. Mais nous allons mettre en évidence la différence essentielle qui existe avec la démonstration de [7].

2. L'inégalité fondamentale.

THÉORÈME 2.1. — *Soit* K *un compact de* $\mathbf{R}^{n-1}$ *avec* $K \subset \omega$. *Si le système* $\left\{X_0, \frac{\partial}{\partial y}, X_1, \ldots, X_r\right\}$ *vérifie l'hypothèse* (H.O) *avec* $O \supset \overline{\Omega}$; $\Omega = \omega \times I$, *il existe un nombre positif* t *et une constante* C *tels que* :

$$(2.1) \quad \|u\|_t \leqslant C\left(\|u\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\| + \sum_1^r \|X_j u\| + \|X_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}\right) \quad u \in C_0^\infty(K \times I)$$

Remarque 2.1. — Il convient de noter la différence avec l'inégalité donnée dans [7]. Dans cette dernière, Hörmander considérait la norme $\|X_0 u\|_{\mathcal{M}'(0)}$ avec $u \in C_0^\infty(K)$ K compact de O. (2.1) est une estimation à la frontière dans ce cas particulier d'un cylindre $\Omega = \omega \times I$ et d'un système de champs de vecteurs où figure l'opérateur $\frac{\partial}{\partial y}$.

Le théorème (2.1) découlera des lemmes et proposition suivants :

LEMME 2.1. — *Soit* $u \in C_0^\infty(K \times I))$. *Alors pour* t *assez petit* ($|t| < t_0$) *les fonctions* $S_t u$ *et* $S_t^J u$ *sont dans* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Démonstration. — Le lemme 2.1 sera établi si nous montrons que, pour $I \in \mathcal{J}$, tout champ de vecteurs Y_I est tangentiel : en effet $e^{\tau Y_I}$ étant une petite translation tangentielle, si Y_I est tangentiel, le lemme en découlera.

Mais pour $I \in \mathcal{J}$, Y_I contient au moins une fois le champ Y_0, c'est-à-dire un champ tangentiel. Comme le crochet de deux champs de vecteurs tangentiels est tangentiel et que le crochet d'un champ tangentiel et du champ $\frac{\partial}{\partial y}$ est tangentiel, le lemme 2.1 est établi.

LEMME 2.2. — *L'inégalité suivante:*

$$(2.2)\quad \|u\|_t \leqslant C\left(\|u\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\| + \sum_1^r \|Y_j u\| + \|Y_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}\right) \quad u \in C_0^\infty(K \times I)$$

entraîne l'inégalité (2.1) :

Démonstration. — Le lemme (2.2) découle des inégalités suivantes qui sont évidentes

$$(\mathrm{i})\qquad \|Y_j u\| \leqslant C\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\| + \|X_j u\|\right) \quad u \in C_0^\infty(K \times I)$$

$$(\mathrm{ii})\qquad \|Y_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \leqslant C\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\| + \|X_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}\right)$$

L'inégalité (2.2) montre que l'inégalité (2.1) est vraie si on montre la :

PROPOSITION 2.1. — *Supposons les hypothèses du théorème 2.1 vérifiées. Pour tout compact* K *contenu dans* ω, *il existe un nombre positif* t *et une constante* C *tels que :*

$$(2.3)\quad \|u\|_t \leqslant C\left(\|u\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\| + \sum_1^r \|Y_j u\| + \|Y_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}\right) u \in C_0^\infty(K \times I).$$

Démonstration. — Si nous regardons la démonstration de [7], la seule difficulté est l'estimation de l'expression

$$(Y_0 u,\ (e^{r\mathrm{X}_0} S_t)^*(e^{r\mathrm{X}_0} S_t u - S_t u))\quad r \leqslant t^2 \qquad t \qquad \text{petit.}$$

D'après le lemme 2.1, $e^{r\mathrm{X}_0} S_t u - S_t u$ est dans $\mathcal{D}(\Omega)$, si u est dans $C_0^\infty(K \times I)$.

Comme $(e^{r\mathrm{X}_0})^* = - A_0 e^{-r\mathrm{X}_0}$ où A_0 est le Jacobien de la translation $e^{r\mathrm{X}_0}$, comme $(e^{r\mathrm{X}_1})^* = - A_1 e^{-r\mathrm{X}_1}$ et comme $e^{-r\mathrm{X}_1}$ est une translation tangentielle nous avons aussi :

$$(2.4)\quad (e^{r\mathrm{X}_0} S_t)^*(e^{r\mathrm{X}_0} S_t u - S_t u) \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \text{si} \qquad u \in C_0^\infty(K \times I)$$

Grâce à (2.4) nous avons l'inégalité

$$(2.5)\quad |(Y_0 u,\ (e^{r\mathrm{X}_0} S_t)^*(e^{r\mathrm{X}_0} S_t u - S_t u)| \leqslant C \|Y_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \|(e^{r\mathrm{X}_0} S_t)^*(e^{\mathrm{X}r_0} S_t u - S_t u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$$

la majoration de $\|(e^{r\chi_0}S_i)^*(e^{r\chi_0}S_t u - S_t u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ est faite comme dans [7].

Remarque 2.2. — Nous voyons que le plus important est l'appartenance de $(e^{r\chi_0}S_t)^*(e^{r\chi_0}S_t u - S_t u)$ à $\mathcal{D}(\Omega)$, sinon dans le second membre de (2.5) apparaîtrait $\|Y_0 u\|_{\mathcal{M}'(0)}$ où 0 est un ouvert contenant $\overline{\Omega}$, ce qui ne donnerait pas l'estimation désirée.

CHAPITRE 3

EXISTENCE - UNICITÉ RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS

1. Existence et Unicité des Solutions.

1.1. *Notations-Espaces fonctionnels-Hypothèses :*

$\{X_0, X_1, \ldots, X_r\}$ étant un système de champs de vecteurs à coefficients réels et de classe C^∞ dans un ouvert O, notre problème est de montrer l'existence, l'unicité et la régularité des solutions de l'équation :

$$(1.1)\quad \begin{cases} Pu = \sum_1^r X_j^2 u + X_0 u + Cu = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Ω étant un ouvert régulier tel que $\overline{\Omega} \subset O$, moyennant certaines hypothèses. Nous supposons que :

a) Ω est un ouvert borné tel que $\overline{\Omega} \subset 0$, et $\Gamma = \partial\Omega$ est une variété de classe C^∞ et de dimension $(n - 1)$. De plus Ω est localement situé d'un même côté de Γ.

b) le système $\{X_0, X_1, X_r\}$ vérifie l'hypothèse (H.O).

c) Hypothèse (H.Γ) : pour tout point $x \in \Gamma$, il existe un indice j_x, $j_x \in \{1, \ldots, r\}$, tel que le vecteur $X_{j_x}(x)$ soit transversal à Γ.

Remarquons alors que, puisque les champs X_j sont de classe C^∞ dans 0, il existe un voisinage ω_x de x, dans $\mathbf{R}^n$, tel que pour tout $y \in \omega_x \cap \Gamma$ le vecteur $X_{j_x}(y)$ soit transversal à Γ.

d) *Hypothèse* (H.C) : si $a_j - X_j$ désigne l'opérateur adjoint de X_j nous supposons :

$$-\operatorname{Re} C > -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^r (X_j a_j - a_j^2) + \frac{a_0}{2} \quad \text{sur} \quad \overline{\Omega}$$

Maintenant nous allons introduire certains espaces: Nous désignons par $M(\Omega)$ l'espace des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, telles que $u \in L^2(\Omega)$, $X_j u \in L^2(\Omega)$ $j = 1, \ldots, r$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{M(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{r} (X_j u, X_j v)_{L^2(\Omega)}$$

Si $\mathcal{M}(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $M(\Omega)$, $\mathcal{M}'(\Omega)$ sera son dual topologique. Tous ces espaces sont des espaces de Hilbert.

La norme dans $\mathcal{M}'(\Omega)$ est donnée par

$$\|f\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} = \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} \frac{|(f, \varphi)|}{\|\varphi\|_{\mathcal{M}(\Omega)}} \tag{1.2}$$

Le produit scalaire dans $\mathcal{M}'(\Omega)$ peut être défini ainsi: soit J l'isomorphisme canonique de $\mathcal{M}(\Omega)$ sur $\mathcal{M}'(\Omega)$; soient u, $v \in \mathcal{M}'(\Omega)$ et u_0, $v_0 \in \mathcal{M}(\Omega)$ tels que $u = Ju_0$, $v = Jv_0$ alors

$$\begin{cases} (u, v)_{\mathcal{M}'(\Omega)} = (u_0, v_0)_{\mathcal{M}(\Omega)} \\ \|u\|^2_{\mathcal{M}'(\Omega)} = \|u_0\|^2_{\mathcal{M}(\Omega)} \end{cases} \tag{1.3}$$

Il convient de noter que les normes (1.2) et (1.3) sont les mêmes. Introduisons les espaces suivants qui nous seront utiles :

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{u \in \mathcal{M}(\Omega) | X_0 u \in \mathcal{M}'(\Omega)\};$$

$\mathcal{L}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

$$N(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ X_j u \in L^2(\Omega),\ j = 1, \ldots, r;\ X_0 u \in \mathcal{M}'(\Omega)\}$$

$\mathcal{N}(\Omega)$ sera la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $N(\Omega)$, celui-ci étant muni de la norme naturelle :

$$\|u\|^2_{N(\Omega)} = \|u\|^2_{M(\Omega)} + \|X_0 u\|^2_{\mathcal{M}'(\Omega)}$$

1.2. *Le problème :*

Nous cherchons des solutions du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Pu = f & f \in \mathcal{M}'(\Omega) \\ u|_\Gamma = g & g \text{ donnée sur } \Gamma \end{cases} \tag{1.4}$$

Pour cela, comme dans le cas elliptique traité par la méthode variationnelle nous commencerons par résoudre le cas du problème de Dirichlet homogène :

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \mathrm{Pu} = f & f \in \mathcal{M}'(\Omega) \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

Dans ce but, nous essayons de résoudre le problème :

$$(1.6) \qquad \begin{cases} \mathrm{Pu} = f & f \in \mathcal{M}'(\Omega) \\ u \in \mathcal{N}(\Omega). \end{cases}$$

Lemme 1.1. — *Les solutions du problème* (1.6) *sont solutions du problème* (1.5).

Démonstration. — Nous montrerons que les fonctions de $\mathrm{M}(\Omega)$ admettent des traces sur Γ et que ces traces sont nulles pour les fonctions de $\mathcal{M}(\Omega)$. D'après l'hypothèse $(\mathrm{H}.\Gamma)$, chaque point $x \in \Gamma$ admet un voisinage ω_x et un champ de vecteurs X_{j_x}, $j_x \in \{1, \ldots, r\}$, tel que pour tout point $y \in \omega_x \cap \Gamma$ le vecteur $\mathrm{X}_j(y)$ est transversal à Γ. Comme Γ est un ensemble compact, il existe un nombre fini de ces voisinages, que nous noterons maintenant $\omega_{x_1}, \ldots, \omega_{x_p}$, tels que pour $i = 1, \ldots, p$ il existe un indice j_i, avec $j_i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que le vecteur $\mathrm{X}_{j_i}(x)$ soit transversal à Γ pour tout point $x \in \omega_i \cap \Gamma$. Maintenant considérons un de ces ouverts ω_{i_0} fixé : appelons-le dorénavant ω et appelons également X le champ de vecteur qui est transversal à Γ sur $\omega \cap \Gamma$. Si l'expression de X est :

$$(1.7) \qquad \mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

soient $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, $(n-1)$ solutions linéairement indépendantes de l'équation aux dérivées partielles

$$(1.8) \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0.$$

D'autre part, soit φ une fonction telle que

$$(1.9) \qquad \begin{cases} \varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \varphi(x) > 0 \iff x \in \Omega \\ \varphi(x) = 0 \iff x \in \Gamma \end{cases}$$

Alors, on vérifie que $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi)$ est un difféomorphisme de classe C^∞ qui envoie ω sur un ouvert ω' qui transforme $\omega \cap \Gamma$ en un segment de $\mathbf{R}^{n-1}$, d'autre part X est transformé en l'opérateur $a \dfrac{\partial}{\partial y}$ $a \neq 0$ sur ω'.

Ainsi, en utilisant une partition de l'unité, nous nous ramenons à l'espace des fonctions suivantes :

$$\text{(1.10)} \qquad \begin{cases} u \in L^2(\mathbf{R}^n_+) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\mathbf{R}^n_+) \end{cases}$$

Or nous savons [13] que ces fonctions admettent des traces sur $\mathbf{R}^{n-1}$, qui sont dans $L^2(\mathbf{R}^{n-1})$. De plus les fonctions appartenant à la fermeture de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n_+)$ pour la norme

$$\left(\| u \|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_+)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ont des traces nulles. Le lemme est ainsi entièrement démontré.

1.3. *Un théorème d'Isomorphisme.* — Dans cette partie, nous utilisons essentiellement les hypothèses (H.Γ) et (H.C). Nous allons montrer le :

Théorème 1.1. — *Si les hypothèses* (H.Γ) *et* (H.C) *sont vérifiées, l'opérateur* $P = \sum_1^r X_j^2 + X_0 + C$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{N}(\Omega)$ *sur* $\mathcal{M}'(\Omega)$.

Nous montrerons le théorème 1.1 en deux étapes. Dans une première étape nous montrons que, étant donnée une distribution f dans $\mathcal{M}'(\Omega)$, il existe une fonction u dans $\mathcal{L}(\Omega)$ telle que $Pu = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dans cette même étape nous montrons que si u est dans $\mathcal{N}(\Omega)$ et vérifie $Pu = f$, alors u est unique. Dans une deuxième étape nous montrons que $\mathcal{L}(\Omega)$ et $\mathcal{N}(\Omega)$ coïncident. Dans cette dernière étape l'hypothèse (H.Γ) est essentielle.

Proposition 1.1. — *Supposons que* P *vérifie l'hypothèse* (H.C). *Soit* $f \in \mathcal{M}'(\Omega)$; *il existe une fonction* $u \in \mathcal{L}(\Omega)$ *telle que* $Pu = f$ *au sens de* $\mathcal{D}'(\Omega)$; *de plus si* $u \in \mathcal{N}(\Omega)$, *alors* u *est unique.*

Démonstration. — Nous utilisons le théorème des projections de J. L. Lions [14].

Définissons sur $\mathcal{M}(\Omega) \times \mathcal{N}(\Omega)$ la forme sesquilinéaire suivante :

$$(1.11)\quad a(u, v) = -\sum_1^r (X_j u, X_j v) + \sum_1^r (X_j u, a_j v) - \langle u, X_0 v\rangle_{\mathcal{M}, \mathcal{M}'} + (u, a_0 v) + (Cu, v)$$

(,) désigne ici le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Alors nous avons les deux propriétés suivantes :

a) pour v fixé dans $\mathcal{N}(\Omega)$, $a(u, v)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{M}(\Omega)$, ce qui est facile à montrer.

b) Nous avons l'inégalité (coercivité).

$$(1.12)\qquad -\operatorname{Re} a(u, u) \geqslant \alpha \|u\|^2_{\mathcal{M}(\Omega)}; \quad u \in \mathcal{N}(\Omega)$$

et

$$\alpha = \operatorname*{Min}_{x\in\overline{\Omega}} \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^r (X_j a_j - a_j^2) - \frac{a_0}{2} - \operatorname{Re} C\right)(x)$$

Nous avons $\alpha > 0$ d'après l'hypothèse (H.C). L'inégalité (1.12) s'obtient d'abord pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, par simple intégration par parties. Ensuite, elle s'étend par densité à $\mathcal{N}(\Omega)$.

Les propriétés *a*) et *b*) étant vérifiées, le théorème de J. L. Lions assure que, étant donnée une forme linéaire L, continue sur $\mathcal{N}(\Omega)$, muni de la topologie de $\mathcal{M}(\Omega)$, il existe une fonction $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que

$$(1.13)\qquad a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{N}(\Omega)$$

Soit $f \in \mathcal{M}'(\Omega)$. Prenons :

$$L(v) = \int f v \, dx$$

L est définie, continue sur $\mathcal{N}(\Omega)$, muni de la topologie de $\mathcal{M}(\Omega)$. Il s'ensuit qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que :

$$(1.13\ bis)\quad a(u, v) = \langle f, v\rangle_{\mathcal{M}'(\Omega)\times\mathcal{M}(\Omega)} \quad v \in \mathcal{N}(\Omega)$$

En particulier si nous prenons $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous obtenons :

$$a(u, v) = f(v)_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}$$

mais si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$a(u, v) = (\mathrm{P}u, v)_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)};$$

(1.13 *bis*) donne alors :

$$\mathrm{P}u = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \tag{1.14}$$

Il nous reste à montrer que u est dans $\mathcal{L}(\Omega)$. En effet il suffit de remarquer que si u est dans $\mathcal{M}(\Omega)$ alors $\sum_1^r \mathrm{X}_j^2 u$ est dans $\mathcal{M}'(\Omega)$. Alors

$$\mathrm{X}_0 u = f - \sum_1^r \mathrm{X}_j^2 u - \mathrm{C}u \in \mathcal{M}'(\Omega).$$

Donc $u \in \mathcal{L}(\Omega)$.

Pour achever la démonstration de la proposition 1.1, il nous reste à montrer l'unicité de u dans $\mathcal{N}(\Omega)$. Supposons

$$\begin{cases} \mathrm{P}u = 0 \\ u \in \mathcal{N}(\Omega) \end{cases}$$

alors $\mathrm{Re}\,a(u, u) = 0$, mais $\mathrm{Re}\,a(u, u) \geqslant \|u\|^2$. D'où $u = 0$.

PROPOSITION. 1.2. — *Sous l'hypothèse* (H.Γ) *les espaces* $\mathcal{L}(\Omega)$ *et* $\mathcal{N}(\Omega)$ *coïncident.*

Démonstration. — Il est immédiat que nous avons l'inclusion : $\mathcal{N}(\Omega) \subset \mathcal{L}(\Omega)$. Nous allons donc montrer que toute fonction $\mathcal{L}(\Omega)$ peut être approchée par des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $\mathcal{N}(\Omega)$. En utilisant les cartes locales introduites dans le lemme (1.1) et en écrivant $u = u_0 + \sum_1^p u_i$ avec $u_i = \xi_i u$ et $(\xi_0, \ldots, \xi_p)$ étant une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\omega_0, \ldots, \omega_p)$, en utilisant d'autre part les difféomorphismes du lemme (1.1), il nous suffit de considérer le cas d'un cylindre $\omega \times \mathrm{I}$, ω étant un ouvert de $\mathbf{R}^{n-1}$ et I un intervalle de $\mathbf{R}$, et un système de champs de vecteurs où figure $\frac{\partial}{\partial y}$.

D'autre part remarquons, puisque les fonctions $\xi_i u$ sont à support compact dans ω_i, qu'il nous suffit de considérer une fonction de $\mathcal{L}(\Omega)$, $\Omega = \omega \times \mathrm{I}$, telle que son support soit contenu dans un ensemble de la forme $\mathrm{K} \times \mathrm{I}$, où K est compact dans l'ouvert ω. De plus, il nous suffit d'approcher u, qui a son support dans $K \times I$, par des fonctions de $H_0^1(\Omega)$. ($H_0^1(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$).

La méthode que nous emploierons semblera longue, mais nous obtiendrons en cours de démonstration des lemmes que nous utiliserons par la suite. C'est une méthode dérivée de la méthode de Hörmander [7], adaptée au cas tangentiel.

Comme u a son support dans $K \times I$, nous pouvons considérer sa transformée de Fourier en x soit :

$$\hat{u}(\xi, y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi} u(x, y)\, dx$$

soit φ une fonction de la seule variable x, avec

$$\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$$

et φ valant 1 sur K. Nous définissons les fonctions $u_\delta(x, y)$ par :

$$\begin{cases} \hat{u}_\delta(\xi, y) = \dfrac{1}{1 + \delta^2|\xi|^2}\, \hat{u}(\xi, y) \\ u_\delta(x, y) = \varphi(x)\overline{\mathcal{F}}\hat{u}_\delta(\xi, y), \end{cases}$$

$\overline{\mathcal{F}}$ est la transformée de Fourier inverse en x.

Lemme 1.2. — *u_δ converge vers u dans* $L^2(\Omega) = L^2(\omega \times I)$, *pour* $\delta \to 0$.

Démonstration. — Utilisant le théorème de Plancherel, nous avons :

$$\begin{aligned} \iint |u_\delta(x, y) - u(x, y)|^2\, dx\, dy &= \iint |\hat{u}_\delta(\xi, y) - \hat{u}(\xi, y)|^2\, d\xi\, dy \\ &= \iint \left|\hat{\varphi}(\xi) * \left(\frac{1}{1+\delta^2|\xi|^2} - 1\right)\hat{u}(\xi, y)\right|^2 d\xi\, dy \quad \text{puisque} \quad \varphi u = u \\ &\leqslant \|\hat{\varphi}(\xi)\|_{L^1(\xi)} \iint |\hat{u}(\xi, y)|^2 \left|\frac{1}{1 + \delta^2|\xi|^2} - 1\right| d\xi\, dy \end{aligned}$$

Le théorème de Lebesgue achève la démonstration du lemme.

Lemme 1.3. — *Les fonctions $u_\delta(x, y)$ sont dans*

$$H_0^1(\Omega) = H_0^1(\omega \times I).$$

Démonstration. — Nous montrons le lemme en deux étapes :

a) $u_\delta(x, y) \in H^1(\Omega)$: en effet, nous avons :

$$\frac{\partial u\delta}{\partial y} = \varphi(x)\,\overline{\mathcal{F}}\,\frac{1}{1+\delta^2|\xi|^2}\,\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(\xi, y) \Longrightarrow \frac{\partial u_\delta}{\partial y} \in L^2$$

D'autre part l'opérateur $\overline{\mathcal{F}}\,\dfrac{1}{1+\delta^2|\xi|^2}\,\hat{u}(\xi, y) = \mathcal{L}(u)$, est un opérateur linéaire continu de $L^2(I, H^s(\omega))$ dans $L^2(I, H^{s+2}(\omega))$; il s'ensuit que nous avons :

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x_i} \in L^2(I;\, H^1(\omega)) \subset L^2(\Omega) \quad i = 1, \ldots, n-1$$

b) $u_\delta(x, y) \in H_0^1(\Omega)$: si nous prenons $I = (0, 1)$, comme u est dans $\mathcal{M}(\Omega)$, u est nulle sur $\omega \times \{0\}$ et sur $\omega \times \{1\}$. D'autre part u est nulle au voisinage des arêtes du cylindre Ω. Il s'ensuit que u_δ, qui a une trace sur $\omega \times \{0\}$ et sur $\omega \times \{1\}$, a une trace nulle sur $\omega \times \{0\}$ et sur $\omega \times \{1\}$, ainsi qu'au voisinage des coins du cylindre grâce à la présence de la fonction $\varphi(x)$. D'après un théorème de traces, u_δ appartient à $H_0^1(\Omega)$. En particulier $u_\delta \in \mathcal{N}(\Omega)$ car manifestement $H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{N}(\Omega)$.

LEMME 1.4. — *Les fonctions* u_δ *appartiennent à un ensemble borné dans* $\mathcal{N}(\Omega)$.

Démonstration. — Nous allons montrer que $\|u_\delta\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ et $\|X_0 u_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}$ sont bornés par une constante C, indépendante de δ.

Si nous introduisons la notation suivante :

$$u_\delta = \varphi(x)(1 - \delta^2\Delta)^{-1}u,$$

Δ étant le Laplacien dans $\mathbf{R}^{n-1}$, nous allons montrer les deux inégalités suivantes :

$$\|\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}u\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \tag{1.15}$$

$$\|X_0\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \leqslant C(\|X_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}) \tag{1.16}$$

Pour montrer (1.15) et (1.16) nous utiliserons les points suivants :

a) soit R un opérateur différentiel tangentiel d'ordre

$j \leqslant 2$ à coefficients dans $C_0^\infty(\overline{\Omega})$, alors nous avons

$$(1.17) \qquad \|(1-\delta^2\Delta)^{-1}\delta^j R v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|v\|_{L^2(\Omega)} \quad v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En effet $\|(1-\delta^2\Delta)^{-1}\delta^j\, R v\|_{L^2(\Omega)} = \|P^*\delta^j(1-\delta^2\Delta)^{-1}\mathcal{V}\|_{L^2}$

Comme $\dfrac{|\xi|^j\delta^j}{1+\delta^2|\xi|^2} \leqslant 1$ pour $j \leqslant 2$ l'inégalité (1.17) est immédiate.

b) Soit S un opérateur différentiel tangentiel d'ordre inférieur ou égal à 1 à coefficients dans $C_0^\infty(\overline{\Omega})$, alors nous avons l'inégalité :

$$(1.18) \qquad \|[S, (1-\delta\Delta)^{-1}]\mathcal{V}\|_{L^2} \leqslant C\|\mathcal{V}\|_{L^2} \quad \mathcal{V} \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En effet si $\mathcal{V} \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors

$$(1-\delta^2\Delta)_{\mathcal{V}}^{-1} = \psi \Longleftrightarrow \mathcal{V} = (1-\delta^2\Delta)\psi :$$

$$[S, \ (1-\delta^2\Delta)^{-1}v] = (1, \ \delta^2\Delta)^{-1}[S, \ \delta^2\Delta]\psi = (1-\delta^2\Delta)^{-1}\delta^2 R\psi$$

en posant $R = [S, \Delta]$. Comme R est un opérateur différentiel tangentiel d'ordre $\leqslant 2$, à coefficients dans $C_0^\infty(\overline{\Omega})$, nous pouvons appliquer l'inégalité (1.17). Ainsi (1.18) en découle.

Revenons maintenant à la démonstration des inégalités (1.15) et (1.16). Montrons (1.15). Pour cela il suffit d'avoir les deux inégalités

$$(1.15)' \qquad \left\|\frac{\partial}{\partial y}\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}u\right\|_{L^2} \leqslant C\|u\|_{\mathcal{M}}$$

$$(1.15)'' \qquad \|Y_j\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}u\|_{L^2} \leqslant C\|u\|_{\mathcal{M}}$$

Y_j désignant la composante tangentielle du champ X_j (1.15)' est immédiate car :

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}u\|_{L^2} = \right\|\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg\|_{L^2} \leqslant C\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$$

D'autre part :

$$\|Y_j\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}u\|_{L^2} \leqslant \|[Y_j, \ \varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}]u\|_{L^2} + \|\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}Y_j u\|_{L^2}$$

L'application des inégalités (1.17) et (1.18) donne le résultat pour (1.15)''. Il nous reste à montrer l'inégalité (1.16). Or nous avons

$$Y_0\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}u = [Y_0, \varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}]u + \varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}Y_0 u$$

$$\|Y_0\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \leqslant \|[Y_0, \ \varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}]u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \\ + \|\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}Y_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}$$

Mais d'après l'inégalité (1.18) nous avons

$$\|[Y_0, \varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}]u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \leqslant C\|[Y_0, \varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}]u\|_{L^2} \leqslant C\|u\|_{L^2}$$

d'autre part l'inégalité

$$\|\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}Y_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \leqslant C\|Y_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}$$

s'obtient en passant au dual, par considération de l'inégalité

$$(1.15) \qquad \|\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}u\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$$

Ainsi nous obtenons bien

$$\|X_0\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \leqslant C(\|X_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{M}(\Omega)})$$

Le lemme 1.4 est ainsi entièrement démontré.

Démonstration de la proposition 1.2 — Soit

$$u \in \mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\omega \times I)$$

telle que son support soit contenu dans $K \times I$, où K est un compact de ω. D'après le lemme (1.3) les fonctions u_δ sont dans $H_0^1(\Omega)$, donc peuvent être approchées par des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$. Mais d'après le lemme (1.4) les fonctions u_δ sont dans un ensemble borné de $\mathcal{M}(\Omega)$; par suite, pour $\delta \to 0$, il existe une sous-suite, que nous noterons encore u_δ qui converge faiblement dans $\mathcal{M}(\Omega)$; mais comme, d'après le lemme (1.2), u_δ converge vers u dans $L^2(\Omega)$, pour $\delta \to 0$, la limite faible, dans $\mathcal{M}(\Omega)$, de la sous-suite u_δ n'est autre que u. Donc u appartient à $\mathcal{M}(\Omega)$. La proposition 1.2 est ainsi démontrée.

Ainsi le théorème 3.1 est établi. Ce théorème résout le problème (2.3), donc le problème de Dirichlet homogène. Dans le cas non homogène on a le :

THÉORÈME 1.2. — *Supposons les hypothèses* (H.Γ) *et* (H.C) *satisfaites. Soient* $f \in \mathcal{M}'(\Omega)$ *et* $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. *Il existe une* *fonction* u, *unique dans* $\mathcal{N}(\Omega) + H^1(\Omega)$ *telle que*

$$\begin{cases} Pu = f & \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = g & \text{sur} \quad \Gamma \end{cases}$$

Démonstration. — Soit $\tilde{g}$ un relèvement de g dans $H^1(\Omega)$ [13]. Considérons alors le problème

$$\begin{cases} Pu = f - P\tilde{g} & f \in \mathcal{M}'(\Omega) \\ u \in \mathcal{N}(\Omega) \end{cases} \tag{1.19}$$

Comme $P\tilde{g}$ est dans $\mathcal{M}'(\Omega)$, le problème (1.19) admet une solution u, unique d'après le théorème 1.1.

Prenant $v = u + \tilde{g}$, nous avons bien

$$Pv = Pu + P\tilde{g} = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$
$$v = g \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{car} \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

D'autre part si $v_1 = u_1 + \tilde{g}_1$ et $v_2 = u_2 + \tilde{g}_2$ sont deux solutions dans $\mathcal{N}(\Omega) + H^1(\Omega)$, nous avons $P(v_1 - v_2) = 0$ et $v_1 - v_2 \in \mathcal{N}(\Omega)$. Cela entraîne $v_1 = v_2$ d'après le théorème (1.1).

2. Régularité des Solutions.

C'est dans cette partie que l'hypothèse (H.O) sera essentielle, combinée avec l'hypothèse (H.Γ). Nous nous attachons à démontrer la régularité à la frontière des solutions.

2.1. *Régularité tangentielle :*

Nous commencerons par énoncer le :

Lemme 2.1. — *Supposons les hypothèses* (H.O) *et* (H.Γ) *vérifiées. Il existe un nombre* $\varepsilon > 0$, *tel que nous ayons l'inclusion algébrique et topologique*

$$\mathcal{N}(\Omega) \subset H^{\varepsilon}(\Omega) \tag{2.1}$$

Démonstration. — Nous nous ramenons comme dans la proposition (3.2) au cas d'un ouvert $\Omega = \omega \times I$ et d'une fonction de $\mathcal{N}(\Omega)$ telle que son support soit contenu dans un ensemble de la forme $K \times I$, où K est un compact de l'ouvert ω. Nous avons vu qu'une telle fonction peut être approchée par des fonctions de $C_0^\infty(K_1 \times I)$, où K_1 est un autre compact de ω.

Il suffit alors d'appliquer le théorème (2.1) du chapitre 2.

Dorénavant, nous nous plaçons, grâce à nos hypothèses, dans le cas d'un cylindre $\Omega = \omega \times I$, $I = (0, 1)$, avec un opérateur P de la forme

$$P = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_1^r X_j^2 + X_0 + C.$$

De plus nous considérons des fonctions ayant leur support dans un ensemble de la forme $K \times I$. D'autre part ces fonctions ont des traces nulles sur $\omega \times \{0\}$ et $\omega \times \{1\}$. Dans la suite nous utiliserons le :

LEMME 2.2. — *Il existe une constante* C *telle que :*

(2.2) $\|u\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|X_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \leqslant C(\|Pu\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) u \in \mathcal{N}(\Omega)$

Démonstration. — Nous savons déjà que :

$$\sum_1^r \|X_j u\|_{L^2}^2 + \alpha \|u\|_{L^2}^2 \leqslant -\operatorname{Re}(Pu,\ u)\, u\, \mathcal{D} \in (\Omega)$$

Mais :

$$-\operatorname{Re}(Pu,\ u) \leqslant \frac{1}{2}(\|Pu\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}^2 + \|u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}^2).$$

D'où

$$\|X_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}^2 \leqslant C(\|Pu\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2}^2) u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

D'autre part :

$$\|X_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}^2 \leqslant \|Pu\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}^2 + \|Qu\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}^2; \qquad Q = P - X_0$$

Mais :

$$\|Qu\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}^2 \leqslant C\|u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}^2,$$

ce qui se vérifie aisément; ce qui donne facilement

$$\|u\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|X_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \leqslant C(\|Pu\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} + \|u\|_{L^2}) \quad u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Comme $\mathcal{N}(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $(\|u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}^2 + \|X_0 u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}^2)$ l'inégalité (2.2) en découle.

Pour établir la régularité tangentielle, nous allons montrer que si $f \in H^\varepsilon(\Omega)$ alors $u \in L^2(I, H^{2\varepsilon}(\omega))$ et ainsi de suite, nous gagnons ε en régularité tangentielle à chaque opération.

Définissons comme suit, les fonctions v_δ :

Comme le support de u est dans $I \times K$, nous pouvons considérer sa transformée de Fourier; appelons :

$$T_\varepsilon u(x, y) = \overline{\mathcal{F}}_x . (1 + |\xi|^2)^{\varepsilon/2} \hat{u}(\xi, y)$$

$\overline{\mathcal{F}}_x$ désignant la transformée de Fourier inverse en x. Soit :

$$\left\{\begin{array}{l} v(x, y) = \varphi(x)\ T_\varepsilon u(x, y), \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}(\omega) \quad \varphi = 1 \quad \text{sur} \quad K \\ v_\delta(x, y) = \psi(x)\ (1 + \delta^2|\xi|^2)^{-1} v(\xi, y) \\ \text{ou} \\ v_\delta(x, y) = \psi(x)\ (1 - \delta^2\Delta)^{-1}\varphi T_\varepsilon u(x, y) \quad \psi \in \mathcal{D}(\omega) \quad \text{et} \quad \psi\varphi = \varphi \end{array}\right.$$

Nous avons alors les lemmes suivants :

LEMME 2.3. — *v_δ converge vers v dans $L^2(\Omega) = L^2(\omega \times I)$ pour $\delta \to 0$.*

Démonstration. — Même démonstration que dans le lemme (1.2).

LEMME 2.4. — *Les fonctions v_δ sont dans $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. — Voir le lemme (1.3).

LEMME 2.5. — *Si f est dans $H^\varepsilon(\Omega)$ avec $Pu = f$ et $u \in \mathcal{N}(\Omega)$, alors Pv est dans $\mathcal{M}'(\Omega)$.*

Démonstration. — Nous pouvons écrire Pv sous la forme

$$Pv = P\varphi T_\varepsilon u = [P, \varphi T_\varepsilon]u + \varphi T_\varepsilon Pu = [P, \varphi T_\varepsilon]u + \varphi T_\varepsilon f$$

Comme $f \in H^\varepsilon(\Omega)$, $\varphi T_\varepsilon f \in L^2(\Omega)$ donc $\varphi T_\varepsilon f \in \mathcal{M}'(\Omega)$. Il nous reste donc à montrer que :

$$[P, \varphi T_\varepsilon]u \in \mathcal{M}'(\Omega).$$

Utilisons l'expression de P; alors nous avons

$$(2.3) \quad \left\{\begin{aligned} [P, \varphi T_\varepsilon]u &= 2\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}, \varphi T_\varepsilon\right]u \\ &+ 2\sum_{j=1}^{r} X_j[X_j, \varphi T_\varepsilon]u + \left[\left[\frac{\partial}{\partial y}, \varphi T_\varepsilon\right]\frac{\partial}{\partial y}\right] \\ &+ \sum_1^r [[X_j, \varphi T_\varepsilon], X_j]u + [X_0, \varphi T_\varepsilon]u + [C, \varphi T_\varepsilon]u \end{aligned}\right.$$

(2.3) s'obtient en remarquant l'égalité suivante :

$$[X_j^2, \varphi T_\varepsilon] = 2X_j[X_j, \varphi T_\varepsilon] + [[X_j, \varphi T_\varepsilon], X_j]$$

D'après l'égalité (2.3), nous voyons qu'il nous suffit de montrer :

$$(2,4)\qquad \begin{cases} [X_j, \varphi T_\varepsilon]u \in L^2(\Omega) \\ ([X_j, \varphi T_\varepsilon], X_j]u \in \mathcal{M}'(\Omega) \\ [X_0, \varphi T_\varepsilon]u \in \mathcal{M}'(\Omega) \end{cases}$$

a) $[X_j, \varphi T_\varepsilon]u = \left[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \varphi T_\varepsilon\right]u + [Y_j, \varphi T_\varepsilon]u;\ X_j = \beta_j \frac{\partial}{\partial y} + Y_j$

Comme $\frac{\partial}{\partial y}$ et φT_ε commutent et que $\frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)$, il en découle que

$$\left[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \varphi T_\varepsilon\right]u \in L^2(\Omega).$$

D'autre part $[Y_j, \varphi T_\varepsilon]$ est un opérateur pseudo-différentiel tangentiel d'ordre ε. Comme $u \in \mathcal{N}(\Omega) \subset H^\varepsilon(\Omega)$, on a bien $[Y_j, \varphi T_\varepsilon]u \in L^2(\Omega)$ [11]

b) $[[X_j, \varphi T_\varepsilon], X_j] \in L^2(\Omega)$. Cela se fait comme dans *a*).

c) $[X_0, \varphi T_\varepsilon]u \in \mathcal{M}'(\Omega)$:

$$X_0 = \beta_0 \frac{\partial}{\partial y} + Y_0 \Longrightarrow [X_0, \varphi T_\varepsilon]u = \left[\beta_0 \frac{\partial}{\partial y}, \varphi T_\varepsilon\right]u + [Y_0, \varphi T_\varepsilon]u.$$

Comme dans *a*) :

$$\left[\beta_0 \frac{\partial}{\partial y}, \varphi T_\varepsilon\right]u \in L^2(\Omega) \subset \mathcal{M}'(\Omega),$$
$$[Y_0, \varphi T_\varepsilon]u \in L^2(\Omega)$$

Le lemme 2.5 est ainsi entièrement démontré.

En utilisant l'inégalité (2.2), nous allons montrer que les fonctions v_δ appartiennent à un ensemble borné de $\mathcal{N}(\Omega)$. En effet d'après cette inégalité (2.2) il suffit de montrer que les distributions $P\mathcal{V}_\delta$ appartiennent à un ensemble borné de $\mathcal{M}'(\Omega)$. Soit :

PROPOSITION 2.1. — *Les distributions* Pv_δ *appartiennent à un ensemble borné de* $\mathcal{M}'(\Omega)$.

Nous démontrerons cette proposition après avoir établi un certain nombre de lemmes. Nous allous d'abord donner une nouvelle expression de $P v_\delta$.

a) Nouvelle expression de $P v_\delta$:

Rappelons l'expression de v_δ

$$v_\delta(x, y) = \psi(x)(1 - \delta^2\Delta)^{-1}\varphi(x)T_\varepsilon u(x, y)$$

$\psi(x)$ vaut 1 sur un voisinage ω_1 du support de $\varphi(x)$, dans ω. Notons Ω_1 l'ouvert $\omega_1 \times I$: $\Omega_1 = \omega_1 \times I$.

Avec ces notations nous avons :

$$v = (1 - \delta^2\Delta)v_\delta \qquad \textit{dans} \qquad \Omega_1 \tag{2.5}$$

(2.6) $P v = P(1 - \delta^2\Delta)v_\delta = [P, 1 - \delta^2\Delta]v_\delta + (1 - \delta^2\Delta) P v_\delta$ *dans* Ω_1.

En utilisant de nouveau la décomposition :

$$[X_j^2, \Delta] = 2X_j[X_j, \Delta] + [[X_j, \Delta], X_j]$$

et en posant :

$$A_j = [X_j, \Delta]; \; A_0 = \sum_1^r [[X_j, \Delta], X_j] + [X_0 + C, \Delta]$$

nous avons :

$$\left\{\begin{aligned} P v &= (1 - \delta^2\Delta)P v_\delta - \sum_1^r \delta^2 X_j A_j v_\delta - \delta^2 A_0 v_\delta \text{ dans } \Omega_1 \\ (1 - \delta^2\Delta)P v_\delta &= P v + \sum_1^r \delta^2 X_j A_j v_\delta + \delta^2 A_0 v_\delta \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

Définissons maintenant les distributions h_δ par :

$$h_\delta = \begin{cases} 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_1 \\ (1 - \delta^2\Delta)P v_\delta \quad \text{sur} \quad \Omega - \Omega_1 \end{cases} \tag{2.8}$$

En combinant (2.7) et (2.8) nous obtenons :

$$(1 - \delta^2\Delta)P v_\delta = P v + \sum_1^r \delta^2 X_j A_j v_\delta + \delta^2 A_0 v_\delta + h_\delta \tag{2.9}$$

Appliquant l'opérateur $(1 - \delta^2\Delta)^{-1}$ aux deux membres de

(2.9) nous avons :

$$(2.10)\quad P v_\delta = \psi_1(x)\Big\{(1-\delta^2\Delta)^{-1}\Big[Pv + \sum_1^r \delta^2 X_j A_j v_\delta + \delta^2 A_0 v_\delta + h_\delta\Big]\Big\}$$

où $\psi_1(x)$ est une fonction de $\mathcal{D}(\omega)$ telle que $\psi_1\psi = \psi$.

b) Étude de Pv_δ :

Nous utiliserons l'expression (2.10) pour montrer que la quantité $\|Pv_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}$ reste bornée lorsque δ tend vers zéro.

Remarquons de suite que nous pouvons nous débarrasser de l'opérateur $\psi_1(x)(1-\delta^2\Delta)^{-1}$ qui apparaît dans le second membre de (2.10). En effet nous avons montré dans le lemme (1.4) l'inégalité :

$$\|\psi_1(1-\delta^2\Delta)^{-1}v\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leqslant C\|v\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \quad v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En passant au dual, nous avons l'inégalité :

$$(2.11)\quad \|\psi_1(1-\delta^2\Delta)^{-1}f\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \quad f \in \mathcal{M}'(\Omega)$$

En regardant les inégalités (2.10) et (2.11), pour montrer que $\|Pv_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}$ reste borné, il suffit de montrer que les quantités :

$$\|\delta^2 X_j A_j v_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)},\quad \|\delta^2 A_0 v_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|h_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}$$

restent bornées lorsque δ tend vers zéro.

LEMME 2.6. — *Les quantités* $\|\delta^2 X_j A_j v_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}$ *et* $\|\delta^2 A_0 v_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}$ *restent bornées lorsque* δ *tend vers zéro.*

Démonstration.

a) $\|\delta^2 X_j A_j v_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}$ *est borné :*

Si nous remarquons que $\|X_j f\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}$, il suffit de montrer que $\|\delta^2 A_j v_\delta\|_{L^2}$ reste borné.

$$A_j = 2[Y_j, \Delta] + 2\Big[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta\Big] X_j = Y_j + \beta_j \frac{\partial}{\partial y}$$

$[Y_j, \Delta]$ est un opérateur différentiel tangentiel d'ordre 2. Donc :

$$|[\delta^2[Y_j, \Delta]v_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|v\|_{L^2}$$

D'autre part remarquons que nous avons :

$$(2.12)\quad \Big[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta\Big] = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \quad \mu_i,\ \mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

D'où en utilisant (2.12) et la définition de φ_δ :

$$(2.13) \qquad \left\|\delta^2\mu \frac{\partial}{\partial y} \varphi_\delta\right\|_{L^2} \leqslant C \left\|\delta^2 \frac{\partial\varphi\delta}{\partial y}\right\|_{L^2} \leqslant C \left\|\delta^2\psi(x)(1-\delta^2\Delta)^{-1}\varphi T_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2} \leqslant C \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|$$

$$\left\|\delta^2\mu_i \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial y} \varphi_\delta\right\|_{L^2} \leqslant C \left\|\delta^2 \frac{\partial^2\varphi_\delta}{\partial x_i\, \partial y}\right\|_{L^2} \leqslant C \left\|\delta^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x)(1-\delta^2\Delta)^{-1}\varphi T_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2}$$

Comme $\left(\varepsilon < \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\partial}{\partial x_i}\psi(1-\delta^2\Delta)^{-1}\varphi T_\varepsilon$ est un opérateur continu de L^2 dans L^2 nous obtenons :

$$(2.14) \qquad \left\|\delta^2\mu_i \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial y} \varphi_\delta\right\|_{L^2} \leqslant C \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2}$$

(2.12), (2.13) et (2.14) donnent :

$$\left\|\delta^2\left[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta\right]\varphi_\delta\right\|_{L^2} \leqslant C \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2} \leqslant C'$$

b) $\|\delta^2 A_0\varphi_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}$ *reste borné :*

$$A_0 = \sum_1^r [[X_j, \Delta], X_j] + [X_0 + C, \Delta]$$

Il est immédiat d'après *a*) que nous avons :

$$\|\delta^2[X_0 + C, \Delta]\varphi_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \leqslant C\|\varphi\|_{\mathcal{H}(\Omega)}$$

Reste à montrer que $\|\delta^2[[X_j, \Delta], X_j]\varphi_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}$ reste borné.

Réécrivant : $X_j = \beta_j \dfrac{\partial}{\partial y} + Y_j$. Alors :

$$(2.15) \qquad \left\{\begin{aligned} [[X_j, \Delta], X_j] = {} & \left[\left[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta\right], \beta_j \frac{\partial}{\partial y}\right] + [[Y_j, \Delta], Y_j] \\ & + \left[\left[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta\right], Y_j\right] + \left[[Y_j, \Delta], \beta_j \frac{\partial}{\partial y}\right] \end{aligned}\right.$$

Les opérateurs Y_j étant tangentiels et utilisant *a*), nous voyons qu'il nous suffit de considérer le premier terme du second membre.

Ici nous avons :

$$(2.16)\quad \left[\left[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta\right], \beta_j \frac{\partial}{\partial y}\right] = \alpha \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial y}; \qquad \alpha, \gamma, \gamma_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

D'autre part nous avons les inégalités suivantes faciles à montrer

$$(2.17)\quad \begin{cases} \left\|\alpha\delta^2 \dfrac{\partial v\delta}{\partial y}\right\|_{\mathcal{M}'} \leqslant C \left\|\dfrac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} \\ \left\|\gamma\delta^2 \dfrac{\partial^2 v\delta}{\partial y^2}\right\|_{\mathcal{M}'} \leqslant C \left\|\delta^2 \dfrac{\partial v\delta}{\partial y}\right\|_{L^2} \leqslant C \left\|\dfrac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2} \\ \left\|\gamma_i\delta^2 \dfrac{\partial^2 v\delta}{\partial x_i \, \partial y}\right\| \leqslant C \left\|\delta^2 \dfrac{\partial v\delta}{\partial x_i}\right\|_{L^2} \leqslant C \|u\|_{L^2} \end{cases}$$

Les égalités (2.15) (2.16) et les inégalités (2.17) donnent le lemme.

LEMME 2.7. — $\|h_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}$ *tend vers zéro lorsque* δ *tend vers zéro.*

Démonstration. — Rappelons la définition de h_δ

$$(2.8\ bis)\quad h_\delta = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad \sigma_1 = \omega_1 \times I \\ (1 - \delta^2\Delta)Pv_\delta & \text{sur} \quad \Omega - \Omega_1 \end{cases}$$

si nous appelons G la distribution transformée inverse de Fourier de la fonction $\dfrac{1}{1 + |\xi|^2}$, nous avons l'égalité

$$(2.18)\quad v_\delta(x, y) = \psi(x)(1 - \delta^2\Delta)^{-1}v(x, y) = \psi(x)\delta^{-(n-1)} \int G\left(\frac{z}{\delta}\right) v(x - z, y)\, dz$$

soit η la distance de $C\omega_1$ au support de φ dans ω ; ω_1 étant un voisinage du support de φ, η est un nombre strictement positif. Par suite nous obtenons :

$$(2.19)\quad x \in \omega - \omega_1 \quad |z| < \eta \Longrightarrow v(x - z, y) = 0$$

$$(2.20)\quad v_\delta(x, y) = \psi(x)\delta^{-(n-1)} \int_{|z| \geqslant \eta} G\left(\frac{z}{\delta}\right) v(x - z, y)\, dz, \qquad x \in \omega - \omega_1$$

G et ses dérivées décroissent exponentiellement vers zéro, lorsque la variable tend vers l'infini [18].

Ainsi, quel que soit l'opérateur différentiel tangentiel Q, nous avons :

$$(2.21) \qquad \|Q\varphi_\delta\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)} \to 0, \quad \delta \to 0$$

Pour montrer (2.21), il suffit de prendre $Q = \dfrac{\partial^p}{\partial x_i{}^p}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $p \in N$

$$(2.22) \qquad \frac{\partial^p}{\partial x_i{}^p}(1-\delta^2\Delta)^{-1}\varphi(x, y) = \delta^{-(n-1)-p}\int_{|z|\geqslant\eta}\frac{\partial^p G}{\partial x_i{}^p}\left(\frac{z}{\delta}\right)\varphi(x-z, y)\,dz, \quad x \notin \omega$$

Comme $\dfrac{\partial^p G}{\partial x_i{}^p}\left(\dfrac{z}{\delta}\right)$ décroît exponentiellement vers zéro, à l'infini, et comme $\varphi \in L^2(\Omega)$, (2.21) découle de (2.22).

Écrivons P sous la forme :

$$P = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_1^r Y_j^2 + \sum_1^r Y_j\beta_j\frac{\partial}{\partial y} + \sum_1^r \beta_j\frac{\partial}{\partial y}y_j + X_0 + C$$

Remarquons que nous avons :

$$\|h_\delta\|_{L^2(\Omega)} = \|h_\delta\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)}$$

Ceci nous permettra d'utiliser (2.21).

Pour montrer que $\|h_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} = \|h_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega-\Omega_1)}$ tend vers zéro il nous suffit de montrer, d'après l'expression de P que :

$$\left\|(1-\delta^2\Delta)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi_\delta\right\|_{\mathcal{M}'(\Omega-\Omega_1)} \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Les autres termes étant bien plus simples à traiter. Comme

$$\left\|(1-\delta^2\Delta)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi_\delta\right\|_{\mathcal{M}'(\Omega-\Omega_1)} \leqslant C\left\|(1-\delta^2\Delta)\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)}$$

il nous suffit de montrer que :

$$(2.23) \qquad \left\|(1-\delta^2\Delta)\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)} \to 0, \quad \delta \to 0$$

(2.23) découle aisément de :

$$(2.24)\quad \left\| Q(1-\delta^2\Delta)^{-1}\varphi T_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)} \to 0,\ \delta \to 0,\ Q \text{ tangentiel.}$$

Montrons (2.24) :

$$(2.25)\quad \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega) \Longrightarrow \varphi T_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(I,\ H^{-\varepsilon}(\mathbf{R}^{n-1})) \subset L^2(I,\ H^{-1}(\mathbf{R}^{n-1}))$$

(2.25) nous permet d'écrire :

$$(2.26)\quad T_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} = u + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i \qquad u,\ u_i \in L^2(\Omega)$$

(2.26) nous permet de nous ramener à étudier les deux limites :

$$\lim_{\delta\to 0} \|\varphi(1-\delta^2\Delta)^{-1}\varphi u\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)},$$
$$\lim_{\delta\to 0} \left\| Q(1-\delta^2\Delta)^{-1}\varphi \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)}$$

Comme le support de φ est contenu strictement dans l'ouvert ω_1. (2.22) est applicable et ainsi :

$$(2.27)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\delta\to 0} \|Q(1-\delta^2\Delta)^{-1}\ \varphi u\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)} = 0 \quad Q \quad \text{tangentiel} \\ \lim\limits_{\delta\to 0} \|Q(1-\delta^2\Delta)^{-1}\ \varphi u\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)} = 0 \quad Q \quad \text{tangentiel} \end{cases}$$

(2.24) découle alors de (2.27). Ainsi (2.23) est montré.

Le lemme (2.7) est établi, et par suite il en est de même de la proposition 2.1.

Maintenant nous sommes en mesure de montrer la :

Proposition 2.2. — *Soit* u *la solution dans* $\mathcal{N}(\Omega)$ *de l'équation* $\mathrm{P}u = f$, *avec* $f \in \mathcal{M}'(\Omega)$. *Si* $f \in H^\varepsilon(\Omega)$, u *est dans* $L^2(I,\ H^{2\varepsilon}(u))$.

Démonstration. — D'après la proposition (2.1), $\|P v_\delta\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}$ reste borné pour $\delta \to 0$. L'inégalité (2.2) entraîne que $\|v_\delta\|_{\mathcal{N}(\Omega)}$ reste borné. Donc il existe une sous-suite, que nous noterons encore v_δ, qui a une limite faible dans $\mathcal{N}(\Omega)$. Comme v_δ converge dans $L^2(\Omega)$ vers v (lemme 2.3), on déduit que cette limite faible est égale à v.

Ainsi $v \in \mathcal{N}(\Omega) \subset H^{\varepsilon}(\Omega)$. Mais $v = \varphi T_{\varepsilon} u$; nous avons alors

$$v = \varphi T_{\varepsilon} u = [\varphi, T_{\varepsilon}]u + T_{\varepsilon} u \qquad \text{puisque} \qquad \varphi u = u$$

Comme $[\varphi, T_{\varepsilon}]u \in H^{\varepsilon}$ et que $v \in H^{\varepsilon}$, on en déduit $T_{\varepsilon} u \in H^{\varepsilon}$. D'où $u \in L^2(I, H^{2\varepsilon}(\omega))$.

Si nous continuons ainsi par récurrence, nous gagnons à chaque étape, H^{ε} en régularité tangentielle. Nous pouvons énoncer le :

Théorème 2.1. — *Soit u la solution de* $Pu = f$, $f \in \mathcal{M}'(\Omega)$. *Supposons que* $f \in L^2(I, H^{k\varepsilon}(\omega))$, *où k est un entier positif. Soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\omega)$ telle que $\varphi u = u$. Alors*

$$\varphi T_{k\varepsilon} u \in \mathcal{N}(\Omega).$$

En particulier $u \in L^2(I, H^{(k+1)\varepsilon}(\omega))$.

2.2. *Régularité normale :*

Pour cela, revenons à notre équation

$$Pu = \left(1 + \sum_1^r \beta_j^2\right) \frac{\partial u}{\partial y^2} + \sum_1^r Y_j^2 u + \sum_1^r \beta_j \frac{\partial}{\partial y} Y_j u + \sum_1^r Y_j \beta_j \frac{\partial}{\partial y} u + X_0 + Cu.$$

Nous procéderons aussi par étapes :

Soit $f \in H^{2-\varepsilon}(\Omega)$; donc $f \in L^2(I, H^{2-\varepsilon}(\Omega))$. Appliquons alors le théorème (2.1), $\varphi T_2 u \in \mathcal{N}(\Omega)$. Soit, en particulier :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_j \varphi T_2 u \in L^2 \\ \varphi T_1 \dfrac{\partial u}{\partial y} \in L^2 \end{array} \right. \tag{2.28}$$

De (2.28) nous tirons encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_j^2 u \in L^2(\Omega) \\ \beta_j \dfrac{\partial}{\partial y} Y_j u \in L^2(\Omega) \\ Y_j \beta_j \dfrac{\partial}{\partial y} u \in L^2(\Omega) \\ (X_0 + C)u \in L^2(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.29}$$

(2.29) et l'équation donnent alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in L^2(\Omega) \tag{2.30}$$

Comme pour la régularité tangentielle nous voyons bien comment s'effectue la récurrence, ceci comme dans le cas elliptique.

En revenant à notre ouvert de départ nous avons le :

THÉORÈME. 2.2. — *Soit* Ω *un ouvert borné, de frontière* Γ, Γ *étant une variété de dimention* $(n-1)$, *de classe* C^∞, *et* Ω *étant localement d'un même côté de* Γ. *Soit* P *un opérateur différentiel du second ordre de la forme* $P = \sum_1^r X_j^2 + X_0 + C$, *satisfaisant les hypothèses* (H.O), (H.Γ) *et* (H.C). *Nous savons que* P *est un isomorphisme de* $\mathcal{N}(\Omega)$ *sur* $\mathcal{M}'(\Omega)$. *Soit* u *la solution dans* $\mathcal{N}(\Omega)$ *de* $Pu = f$, *avec* $f \in \mathcal{M}'(\Omega)$. *Si* f *est dans* $H^k(\Omega)$, *alors* u *est dans* $H^{(k+\varepsilon)}(\Omega)$. *En particulier si* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *alors* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

COROLLAIRE. 2.1. — *Soit* u *la solution dans* $\mathcal{N}(\Omega) + H^1(\Omega)$ *du problème* (1.4). *Si* $f \in H^k(\Omega)$ *et* $g \in H^{k+\frac{3}{2}}(\Gamma)$, *alors* $u \in H^{(k+\varepsilon)}(\Omega)$. *En particulier si* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g \in C^\infty(\Gamma)$, *alors* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Remarque générale. — Il est intéressant de noter la similitude de cette méthode avec celle de Niremberg pour le cas elliptique. Niremberg montre que les quotients différentiels $\frac{\mathcal{T}h_i u - u}{h_i}$ restent bornés dans H_0^1 lorsque $h_i \to 0$ $i = 1, \ldots, n-1$, et il en déduit que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1$. Ensuite il revient à l'équation $Au = f$, pour montrer que $\frac{\partial u}{\partial y} \in H^1$. Ici les fonctions v_δ jouent le rôle des quotients différentiels [16].

3. Quelques exemples.

3.1. *Un exemple simple :*

Prenons comme ouvert Ω la boule unité ouverte de $\mathbf{R}^3$. Γ est alors la sphère unité. Tout point sera désigné par (x, y, z).

Considérons les champs de vecteurs suivants :

$$\begin{cases} X_0 = \dfrac{\partial}{\partial y} \\ X_1 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} \\ X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Nous avons $[X_1, X_2] = -\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot$ Donc en tout point de $\mathbf{R}^3$, l'espace vectoriel formé par les combinaisons linéaires des trois vecteurs X_0, X_2, $[X_1, X_2]$, est de dimension trois. Donc $(\mathrm{H}.\mathbf{R}^3)$ est vérifiée. Montrons qu'en tout point de Γ, l'un au moins des deux vecteurs X_1, X_2 est transversal à Γ.

Si en un point $(x, y, z) \in \Gamma$ les deux vecteurs $X_1(x, y, z)$ et $X_2(x, y, z)$ sont tangents à Γ, on devrait avoir

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Manifestement (3.1) ne peut avoir lieu. Par suite l'hypothèse $(\mathrm{H}.\Gamma)$ est vérifiée. D'autre part, les opérateurs X_0 et X_2 ont pour adjoints $-X_0$ et $-X_2$, et X_1 a pour adjoint $-2 - X_1$.

Considérons alors l'opérateur :

$$P = X_1^2 + X_2^2 + X_0 + C$$

Écrivons alors la condition (H.C) qui donne ici

$$-\operatorname{Re} C > -1 \Longrightarrow \operatorname{Re} C < 1$$

Remarque 3.1. — Cherchons les points où P est elliptique. Le polynôme caractéristique est égal à :

$$(x\xi_1 + y\xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2.$$

Il s'annule en un point si :

$$\begin{cases} x\xi_1 + y\xi_2 = 0 \\ \xi_1 + \xi_3 = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Quel que soit le point (x, y, z), (3.2) peut avoir lieu, pour un triplet $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq 0$.

En effet il suffit de prendre :

$$\xi_1 = -\xi_3$$

et

a) si $y = 0$ ξ_2 peut être choisi arbitrairement $\xi_1 = -\xi_3 = 0$

b) si $x = 0$ ξ_1 peut être pris arbitrairement

c) $x \neq 0$, $y \neq 0$ ξ_1, ξ_2, ξ_3 peuvent être non nuls.

Donc P n'est elliptique nulle part.

3.2. *Deuxième exemple — L'équation de Kolmogorov :*

L'équation de Kolmogorov est l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \tag{3.3}$$

Tout point de $\mathbf{R}^3$ sera noté (x, y, t). Considérons la bande

$$\mathrm{B} =]0, 1[\times \mathbf{R}^2, \qquad x \in]0, 1[\ (t, y) \in \mathbf{R}^2.$$

L'équation (3.3) s'écrit encore :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{X}_0 u + \mathrm{X}_1^2 u = f \\ \mathrm{X}_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, \ \mathrm{X}_0 = -\dfrac{\partial}{\partial t} - x\dfrac{\partial}{\partial y} \end{array}\right. \tag{3.3$'$}$$

Comme dans la section 2, nous considérons les espaces M(B) $\mathcal{M}$(B), P(B), $\mathcal{M}'$(B) que nous rappelons dans notre cas.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M(B)} &= \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\mathrm{B}), \ \frac{\partial u}{\partial x} \in \mathrm{L}^2(\mathrm{B}) \right\} \\
\mathcal{M}(\mathrm{B}) &= \{\text{fermeture de } \mathcal{D}(\mathrm{B}) \text{ dans } \mathrm{M(B)}\}; \\
\mathcal{L}(\mathrm{B}) &= \left\{ u \in \mathcal{M}(\mathrm{B}), \ \frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial y} \in \mathcal{M}'(\mathrm{B}) \right\} \\
\mathcal{M}'(\mathrm{B}) &= \{\text{dual topologique de } \mathcal{M}(\mathrm{B})\}
\end{aligned}$$

Nous avons alors le

THÉORÈME 3.1. — *Soit* $f \in \mathcal{M}'(\mathrm{B})$. *Il existe* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{B})$, *unique telle que :* $\mathrm{P}u = f$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathrm{B})$.

De plus, si $f \in \mathrm{H}^{k-\varepsilon}(\mathrm{B})$, *alors pour toute fonction* $\varphi(y, t) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ $\varphi u \in \mathrm{H}^k(\mathrm{B})$. *En particulier si* $f \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\mathrm{B}})$, $u \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\mathrm{B}})$.

Démonstration. — Le système $\{X_0, X_1\}$, où X_0 et X_1 sont donnés dans (3.3)′, vérifie l'hypothèse $(H.\mathbf{R}^2)$. En effet il suffit de remarquer que $[X_0, X_1] = \frac{\partial}{\partial y}$.

L'hypothèse $(H.\Gamma)$ est aussi vérifiée car le champ $\frac{\partial}{\partial x}$ est transversal aux hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$.

Quant à l'hypothèse (H.C), elle est immédiate car

$$\|\varphi\|_{L^2(B)} \leqslant \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\|_{L^2(B)} \qquad \varphi \in \mathcal{D}(B)$$

d'après l'inégalité de Poincaré. Donc :

$$\|\varphi\|_{L^2(B)} \leqslant \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\|_{L^2(B)} \qquad \varphi \in \mathcal{M}(B)$$

Démonstration de l'unicité. — Il convient de remarquer que B n'est pas un ouvert borné; l'application de la section 2 donne dans ce cas seulement l'existence. Mais ici, l'unicité est facile à établir. Soit

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u \in \mathcal{L}(B) \end{cases}$$

D'après le résultat de régularité $u \in C^\infty(\overline{B})$. De plus u est nulle sur les hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$. Nous avons alors :

$$(3.5) \qquad \begin{cases} \operatorname{Re}\displaystyle\int_B \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\bar{u}\, dx\, dy\, dt = 0 \\ \text{ou} \\ \left\|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2(B)} = \operatorname{Re}\displaystyle\int_B \left(x\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\bar{u}\, dx\, dy\, dt. \end{cases}$$

Utilisant le fait que u est de classe C^∞ dans $\overline{B}$ et qu'elle est nulle sur les hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$ on obtient

$$(3.6) \qquad \operatorname{Re}\int_B \left(x\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\bar{u}\, dx\, dy\, dt = 0$$

De (3.5) et (3.6) on déduit

$$(3.7) \qquad \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(B)} = 0 \Longrightarrow \|u\|_{L^2(B)} = 0 \Longrightarrow u = 0$$

Maintenant nous allons écrire l'équation de Kolmogorov, comme équation parabolique, en faisant jouer un rôle privilégié à la variable t.

L'équation (3.3) sera donc notée :

$$(3.8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Lambda u = f \\ \Lambda = x \dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{cases}$$

L'équation :

$$(3.9) \qquad \Lambda u = g$$

a été étudiée par Baouendi-Grisvard. Considérons l'ouvert :

$$\Omega =]0, \mathrm{Y}([\mathrm{X}]0, 1[; \quad y \in]0, \mathrm{Y}[, \quad x \in]0, 1[.$$

Lemme 3.1. — *L'opérateur* $-\Lambda$ *défini par*

$$\mathrm{D}(-\Lambda) = \begin{cases} u(x, y) \in \mathrm{L}^2(]0, \mathrm{Y}[; \mathrm{H}_0^1(]0, 1[) \\ x \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in \mathrm{L}^2(]0, \mathrm{Y}[\times]0, 1[) = \mathrm{L}^2(\Omega) \\ u(0, x) = 0 \\ -\Lambda u = -x \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{cases}$$

est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions.

Démonstration. — D'après le travail de Baouendi-Grisvard, nous avons la formule de Green [2] :

$$(3.10) \quad \left\langle x \frac{\partial u}{\partial y}, \bar{\varphi} \right\rangle + \left\langle u, x \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right\rangle = \int_0^1 x u(x, \mathrm{Y}) \bar{\varphi}(x, \mathrm{Y})\, dx - \int_0^1 x u(x, 0) \bar{\varphi}(x, 0)\, dx$$

pour $u, \varphi \in \mathcal{B}$ où B est l'espace suivant :

$$\varphi \in \mathcal{B} \Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi \in \mathrm{L}^2(]0, \mathrm{Y}[, \mathrm{H}_0^1(]0, 1[)) \\ x \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \in \mathrm{L}^2(]0, \mathrm{Y}[, \mathrm{H}^{-1}(]0, 1[)) \end{cases}$$

De (3.10) nous tirons alors :

$$(3.11) \qquad \mathrm{Re} \langle \Lambda u, u \rangle \geqslant \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{\mathrm{L}^2} \quad u \in \mathrm{D}(-\Lambda)$$

Considérons maintenant un complexe λ tel que $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$.
Alors l'équation :

$$(3.12) \qquad \begin{cases} (\Lambda + \lambda)u = g, & g \in L^2(\Omega) \\ u(0, x) = 0 \end{cases}$$

a une solution unique dans $L^2(]0, Y[, H_0^1(0, 1))$.
De plus en utilisant toujours (3.10) nous avons :

$$(3.13) \qquad \mathrm{Re}\,\langle(\Lambda + \lambda)u,\ u\rangle \geqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2} + \mathrm{Re}\,\lambda \|u\|_{L^2}$$

ce qui nous donne

$$(3.14) \qquad \begin{cases} \|(\Lambda + \lambda)^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda + 1} \\ \|(\Lambda + \lambda)^{-n}\| \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{Re}\,\lambda + 1)^n} \end{cases}$$

Comme $D(-\Lambda)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et que $-\Lambda$ est un opérateur fermé le théorème de Hille-Yoshida, [6], donne le résultat [19].

Théorème 3.2. — *Soient* $f(t, x, y) \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$, $u_0(y, x) \in D(-\Lambda)$. *Il existe une fonction* u, *unique, telle que*

$$(3.15) \qquad \begin{cases} u \in C^0([0, T], D(-\Lambda)) \\ u \in C^1(]0, T[, L^2(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Lambda u = f \\ u(0, y, x) = u_0(y, x) \end{cases}$$

Démonstration. — Le théorème 3.2 découle du lemme (3.1) et de la résolution classique du problème de Cauchy.

Corollaire 3.1. — *Soient* $f(t, y, x)$ *et* $u_0(y, x)$ *deux fonctions telles que*

$$\begin{cases} f(t, y, x) \in C^0([0, T], L^2(\Omega)) \\ u_0(y, x) \in L^2(]0, Y[, H_0^1(]0, 1[))\,; \quad x\dfrac{\partial u_0}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \in L^2(\Omega) \\ u_0(0, x) = 0 \end{cases}$$

Il existe une fonction unique telle que :

$$\begin{cases} u(t, y, x) \in C^0([0, T], D(-\Lambda)); \quad u(t, y, x) \in C^1(]0, T[, L^2(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(]0, T[\times \Omega) = \mathcal{D}'(Q) \\ u(o, y, x) = u_0(y, x) \\ u(t, 0, x) = 0 \\ u(t, y, 0) = 0 \\ u(t, y, 1) = 0 \end{cases}$$

Nous allons passer à l'étude de la régularité des solutions. Nous montrerons le :

THÉORÈME 3.3. — *Soient* $f \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$, $u_0 \in D(-\Lambda)$, *et* u *la solution du théorème* 3.2. *Supposons que* f *est dans* $H^k(Q)$. *Pour tout intervalle fermé* $[a, b] \subset]0, T[$ *et tout intervalle fermé* $[c, d] \subset]0, Y[$, $u \in H^{t+\varepsilon}([a, b] \times ([c, d] \times]0, 1[)$.

Démonstration. — Soit $\varphi(t, y) \in \mathcal{D}(]0, T[\times]0, Y[)$.
Posons $v(t, y, x) = \varphi(t, y)u(t, y, x)$, $\varphi(t, y) = 1$ sur

$$[a, b] \times [c, d].$$

Alors, la fonction v vérifie l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + x\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \varphi f + u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + x\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = g \tag{3.16}$$

dans $\mathcal{D}'(B)$; $B = \mathbf{R}^2 \times]0, 1[$, $x \in]0, 1[$, $(t, y) \in \mathbf{R}^2$.

Si nous montrons que $g \in \mathcal{M}'(B)$ et $v \in \mathcal{M}(B)$, il en résultera que v n'est autre que la solution, unique, du problème du théorème (3.1). Ainsi il suffit d'appliquer le théorème (2.1), si g est assez régulière dès que f l'est. Montrons d'abord les deux lemmes :

LEMME 3.2. — $g = \varphi f + u\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + x\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$ *est dans* $L^2(B)$, *donc dans* $\mathcal{M}'(B)$.

Démonstration. — Si u est dans $L^2(]0, T[\times \Omega) = L^2(Q)$ alors $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + x\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)u$ est dans $L^2(B)$. D'autre part si f est dans $L^2(Q)$, alors φf est dans $L^2(B)$.

LEMME 3.3. — $v = \varphi u$ *est dans l'espace* $\mathcal{M}(\mathrm{B})$.

Démonstration. — Rappelons que

$$u \in \mathrm{C}^0([0,\ \mathrm{T}],\ \mathrm{L}^2(]0,\ \mathrm{Y}[,\ \mathrm{H}_0^1(0,\ 1))).$$

Donc $u \in \mathrm{L}^2(\mathrm{Q})$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in \mathrm{L}^2(\mathrm{Q})$. Par suite $v \in \mathrm{L}^2(\mathrm{B})$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} \in \mathrm{L}^2(\mathrm{B})$, mais v a des traces nulles sur les hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$. Il en résulte que nous pouvons approcher v par des fonctions $\mathcal{D}(\mathrm{B})$ dans l'espace $\mathrm{M}(\mathrm{B})$ [13]. On commence par approcher v par des fonctions de $\mathrm{M}(\mathrm{B})$ nulles au voisinage des hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$. Ensuite, par troncature, on approche v par des fonctions nulles au voisinage des hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$ et à support compact dans B. Puis alors, en régularisant par convolution, on approche v par des fonctions de $\mathcal{D}(\mathrm{B})$. Le lemme est ainsi établi.

Revenons à la démonstration du théorème 3.3.

a) $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{Q}) \Longrightarrow g \in \mathrm{L}^2(\mathrm{B})$, car $g = \varphi f + u\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + x\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$ d'après le théorème (2.2) $v \in \mathrm{H}^\varepsilon([a,\ b] \times [c,\ d] \times]0,\ 1[)$ comme $\varphi = 1$ sur $[a,\ b] \times [c,\ d]$, nous avons bien

$$u \in \mathrm{H}^\varepsilon([a,\ b] \times [c,\ d] \times [0,\ 1])$$

b) Supposons qu'on ait montré (raisonnement par récurrence) que si

$$f \in \mathrm{H}^{(k-1)\varepsilon}(\mathrm{Q}), \qquad \text{alors} \qquad u \in \mathrm{H}^{k\varepsilon}([a,\ b] \times [c,\ d] \times]0,\ 1[).$$

alors $g = \varphi f + u\left(\dfrac{\partial \varphi}{dt} + x\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \in \mathrm{H}^{k\varepsilon}(\mathrm{B})$, si $f \in \mathrm{H}^{k\varepsilon}(\mathrm{Q})$. Utilisant de nouveau le théorème (2.2) nous obtenons

$$v = \varphi u \in \mathrm{H}^{(1+k)\varepsilon}([a,\ b] \times [c,\ d] \times]0,\ 1[)$$

soit

$$u \in \mathrm{H}^{(k+1)\varepsilon}([a,\ b] \times [c,\ d] \times]0,1\ [).$$

Le théorème (3.3) est ainsi démontré.

4. Quelques remarques.

Remarque 1. — Si $X_0 = 0$, le lemme de Lax-Milgram montre, sous la seule hypothèse (H.C), que P est un isomorphisme de $\mathcal{M}(\Omega)$ sur $\mathcal{M}'(\Omega)$. Il convient aussi de remarquer que dans ce cas, on gagne 2ε à chaque étape dans la régularité tangentielle.

Remarque 2. — Toujours dans le cas $X_0 = 0$ nous pouvons supprimer l'hypothèse (H.Γ). Soit Γ_0 le sous-ensemble de Γ tel que le système $X_1, \ldots, X_r$ soit transversal à Γ_0. Nous savons d'après le chapitre 1, que le complémentaire de Γ_0 dans Γ est de mesure nulle. L'étude du chapitre 3 montre que la solution u de $Pu = f$ avec f régulière sur $\overline{\Omega}$, est régulière sur $\Omega \cup \Gamma_0$.

Remarque 3. — Nous avons vu que, sous les hypothèses (H; Γ) et (H.C), l'opérateur $P = X_j^2 + X_0 + C$ est un isomorphisme de $\mathcal{N}(\Omega)$ sur $\mathcal{M}'(\Omega)$. Nous pouvons alors lui associer l'opérateur de Green G. Si l'hypothèse (H.O) est vérifiée, alors G est un opérateur compact, puisque l'on a $\mathcal{N}(\Omega) \subset H^{\varepsilon}(\Omega)$, ce qui entraîne que les valeurs propres de P constituent une suite tendant vers l'infini. On peut démontrer que l'hypothèse (H.O) est presque nécessaire pour que P, soit compact. En effet, si on suppose qu'il existe un sous-ouvert ω de Ω tel que $L(X_0, \ldots, X_r)$ soit de rang $p < n$ dans ω, on peut montrer en utilisant le théorème de Frobenius que l'opérateur P n'est pas compact. Remarquons aussi que dans les travaux de J. M. Bony [3] la condition (H.O) est suffisante et presque nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi, Thèse, Paris, 1967, *Bull. Soc. Math. de France*, 95 (1967), 45-87.

[2] M. S. Baouendi et P. Grisvard, Sur une équation d'évolution changeant de type : *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 265 A (1967), *Journal of Functional Analysis*, 1968.

[3] J.-M. Bony, Le principe du maximum et l'inégalité de Harnack pour des opérateurs elliptiques dégénérés, *Ann. Inst. Fourier*, 1969.

[4] H. Brezis, Équations et Inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier*, 1968.

[5] G. Geymonat, et P. Grisvard, Problèmes aux limites elliptiques dans Lù, Orsay, Janvier-Mars, 1964.

[6] E. Hille et R.-S. Phillips, Functional Analysis and semi-groups, *A.M.S. Coll. Pub.* XXXI, 1957.

[7] L. Hormander, Hypoelliptic, Second Order differential Equations, *Acta-Math.*, 1967, 119, 147-171.

[8] L. Hormander, Linear partial differential Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[9] L. Hormander, Pseudo-differential, Operators, *C.P.A.M.*, 1965, 18, 501-517.

[10] T. Kato, Perturbation Theory for linear Operators, Springer Berlin, 1966.

[11] J. J. Kohn et L. Niremberg, An algebra of Pseudo-differential Operators, *C.P.A.M.*, 18 (1965), 269-305.

[12] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution de problèmes non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[13] J. L. Lions, Séminaire de Mathématiques supérieures, Montréal, 1966.

[14] J. L. Lions, Équations différentielles opérationnelles, Springer, Berlin, 1961.

[15] J. L. Lions et E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968.

[16] L. Nirenberg, Remarks on strongly elliptic partial differential Equations. *C.P.A.M.*, 8 (1955).

[17] O. A. Oleinik et E. V. Radkevitch, Équations du second ordre à forme caractéristique non négative : *Itogi Nauki Viniti an SSSR*, Moscou, 1971.

[18] L. Schwartz, Théorie des distributions I et II, Hermann, Paris, 1950-1951 (2e édition, 1957).

[19] K. Yoshida, Functional Analysis, Springer, Berlin, 1965.

[20] E. C. Zachmanoglou, Propagation of zeros and uniqueness in Cauchy Problem, *Arch. for Rat. Math. and Analysis*, 1970, vol. 38.

(Thèse, Fac. Sciences, Orsay, Juin 1970)

Maklouf Derridj
Département de Mathématiques
Université de Paris 11
91-Orsay (France).