Annales de l'institut Fourier

Alain Goullet De Rugy

La théorie des cônes biréticulés

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 4 (1971), p. 1-64
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_4_1_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21, 4 (1971), 1-64.

LA THÉORIE DES CÔNES BIRÉTICULÉS

par Alain GOULLET DE RUGY

Introduction.

L'objet du présent travail est d'étudier de manière approfondie, dans la classe $\mathcal{S}$ des cônes convexes saillants faiblement complets, une sous-classe remarquable de cônes qui jouent un rôle tout à fait analogue aux cônes de Radon $\mathfrak{M}^+(T)$, avec T compact, dans la théorie des cônes localement compacts. Il apparaît, en effet, qu'une grande partie des propriétés connues pour les cônes de Radon restent vraies pour des cônes non localement compacts de . Plus précisément, considérons, pour un cône X de $\mathcal{S}$, ayant éventuellement une base B, les propriétés suivantes :

(*a*) L'espace $L_c(X)$ des formes linéaires continues sur X est réticulé ;

(*b*) X est réticulé et l'adhérence de toute face de X est encore une face ;

(*c*) X est réticulé et la réunion $\mathcal{E}_g(X)$ de ses génératrices extrémales est fermée dans X ;

(*d*) X est réticulé et l'application $x \longmapsto \mu_x$ qui à tout $x \in X$ associe l'unique mesure conique maximale de résultante x est continue ;

(*e*) Toute fonction homogène continue sur $\mathcal{E}_g(X)$ se prolonge en une forme linéaire continue sur X ;

(*f*) La topologie AA-faciale sur $\mathcal{E}(B)$, c'est-à-dire la topologie dont les fermés sont les traces sur $\mathcal{E}(B)$ des faces fermées complémentables de X, est séparée.

Il est bien connu que ces propriétés sont équivalentes pour un cône localement compact, et qu'elles caractérisent les cônes de Radon $\mathfrak{M}^+(T)$, avec T compact, ou en autres termes, les cônes ayant pour base un simplexe de Bauer; par exemple, dans ce cadre, l'équivalence de (*a*), (*c*), (*d*) et (*e*) est due à Bauer [3], celle de (*a*) et (*b*) est due à Stormer ([32], th. 4.3) et celle de (*a*) et (*f*) à Alfsen et Andersen ([1], th. 6.2). Par contre, lorsque X n'est plus localement compact mais possède seulement un chapeau universel, seules les équivalences de (*a*) et (*c*) et de (*a*) et (*f*) étaient, en partie, connues. Elles avaient été prouvées en liaison avec la théorie des M-espaces, la première par Rogalski (cf. [19], th. 3.1) et la seconde par Effros et Gleit ([20], corol. 2.6). En fait, nous montrons ici que ces propriétés sont équivalentes dans un cadre beaucoup plus général.

De manière précise, nous introduisons au chapitre 1 les cônes X de $\mathcal{S}$ vérifiant la propriété (*a*) sous le nom de cônes biréticulés. Après quelques rappels généraux sur les cônes de $\mathcal{S}$, dans les §§ 1 et 2, nous montrons par des exemples au § 3, qu'on rencontre fréquemment de tels cônes en Analyse, puis, aux §§ 4, 5 et 6 que les propriétés (*b*) ou (*d*) caractérisent les cônes biréticulés dans la classe $\mathcal{S}$. Comme il existe des cônes réticulés non biréticulés sans génératrice extrémale, les propriétés (*c*), (*e*) ou (*f*) peuvent être insuffisantes pour caractériser les cônes biréticulés. Par suite, la notion de bord introduite par Choquet dans [9] et que nous décrivons au § 4 prend toute sa valeur, et si on remplace la propriété (*c*) par :

(*c'*) : X est réticulé et le bord de X est formé d'ensembles fermés.

Alors, cette propriété (*c'*) caractérise les cônes biréticulés dans la classe $\mathcal{S}$ (th. 1.16).

Cependant, il n'est pas possible d'interpréter les conditions (*e*) et (*f*) en termes de bord. Par suite, tout le chapitre 2 est consacré à l'étude de classes particulières de cônes de $\mathcal{S}$, « ayant suffisamment » de génératrices extrémales. Ainsi, au § 1, nous montrons que les propriétés (*a*) et (*e*) sont équivalentes dans la classe des cônes profilés introduite dans [27]. Au § 2, nous montrons un théorème fort intéressant de caractérisation des chapeaux d'un cône réticulé de $\mathcal{S}$, avant d'introduire et d'étudier au § 3 une classe nouvelle de cônes « ayant suffisamment » de chapeaux, sous le nom de cônes presque bien coiffés. Par définition, un cône X de $\mathcal{S}$, est presque bien coiffé si tout $x \in X$ est la borne supérieure d'une famille filtrante croissante de points de conv (Y), où Y est la réunion des chapeaux de X. Bien sûr, tout cône bien coiffé est presque bien coiffé, mais l'inverse est inexact comme le montrent les exemples 2.23 et 2.24. Enfin, nous montrons aux §§ 5 et 6 que les propriétés (*a*) à (*f*) sont équivalentes dans cette classe de cônes. Même pour les cônes ayant un chapeau universel, la plupart de ces résultats sont nouveaux et nous verrons dans un travail ultérieur qu'ils permettent, par dualité, d'obtenir beaucoup d'informations nouvelles sur la structure idéale des M-espaces de Kakutani.

Au chapitre 3, nous abordons un problème très différent. L'exemple fameux de cône sans génératrice extrémale étudié par Choquet dans [10] et rappelé ici dans l'exemple 2.3, suggère qu'il pourrait être possible d'associer à tout cône X de $\mathcal{S}$, ayant une base, un couple (π, Z), appelé compactifié linéaire de X, où Z est un cône localement compact, et π un plongement injectif continu de X dans une partie partout dense de Z. Dans son esprit, ce problème de « compactification » est fort différent de celui décrit par Courrège dans [15] et repris par Choquet dans [13]. En particulier, ces auteurs ne se préoccupent pas de trouver un « compactifié » qui conserve la structure linéaire de l'objet étudié. Un exemple au § 2 montre qu'il y a des cônes métrisables de $\mathcal{S}$, ayant une base et pour lesquels une telle compactification linéaire n'existe pas. Par contre, et c'est l'objet du § 3, nous montrons que cela existe pour tous les cônes biréticulés ayant une base. Cependant, l'exemple 3.29 montre qu'un compactifié linéaire Z d'un cône X de $\mathcal{S}$, peut fort mal refléter la structure de X, ce qui en réduit beaucoup l'intérêt. Heureusement, on peut supprimer cette difficulté en se restreignant à une classe particulière de compactifications linéaires, dites épaisses (déf. 3.12) et on arrive alors au résultat très précis suivant :

« Pour tout cône biréticulé X ayant une base, il existe un cône de Radon $Z = \mathfrak{M}^+(T)$, avec T compact et une injection linéaire continue π de X sur une face partout dense de Z. De plus, $L_c(X)^+$ s'identifie naturellement à un cône convexe héréditaire C de fonctions continues sur T à valeurs dans $[0, +\infty]$ et $\pi(X)$ s'identifie naturellement au cône des mesures de Radon positives sur T qui rendent intégrable toute fonction de C. »

Au § 4, nous décrivons l'espace T au moyen d'ultrafiltres de faces fermées de X (description rendue possible par l'abondance de faces fermées dans un cône biréticulé) et nous en déduisons que, à un homéomorphisme près, cet espace est indépendant de la compactification linéaire épaisse considérée (th. 3.50). Enfin, nous montrons que, lorsque X est profilé, cet espace se laisse décrire directement au moyen des points extrémaux d'une base quelconque de X.

Qu'il nous soit permis pour terminer, de remercier M. Ajlani, à qui sont dus une partie des résultats du chapitre 1, M. Choquet qui nous a familiarisé avec le problème de la localisation des mesures coniques, de première importance dans la démonstration du théorème 2.19 et M. Perdrizet dont l'œil critique a relu et corrigé une partie du manuscrit.

Remarque. — Dans tout ce travail, nous appelons base d'un cône X dans un e.l.c. E la trace sur X d'un hyperplan *fermé* de E rencontrant chaque génératrice de X en un point distinct de son sommet. C'est donc ce que Bourbaki, dans [7], appelle une semelle de X.

CHAPITRE 1

LES CÔNES BIRÉTICULÉS

1. Les cônes faiblement complets.

Soient E un espace vectoriel réel, E^* son dual algébrique et F un sous-espace vectoriel de E^*. La dualité entre E et F définit sur E une topologie d'e.l.c. notée $\sigma(E, F)$ et appelée *topologie faible*. Cette topologie définit à son tour une structure uniforme sur E, notée $u\sigma(E, F)$ et appelée *structure uniforme faible* (cf. p. 6 de [7]). Si X est une partie de E, on note $\sigma(X, F)$ la topologie induite par $\sigma(E, F)$ et $u\sigma(X, F)$ la structure uniforme induite par $u\sigma(E, F)$.

On note $\mathcal{S}$ la classe des convexes saillants faiblement complets. Par définition, se donner $X \in \mathcal{S}$, c'est se donner un triplet (X, E, F) où : (*a*) E est un espace vectoriel réel; (*b*) F est un sous-espace vectoriel de E^* séparant les points de E; (*c*) X est un convexe saillant de E complet pour $u\sigma(X, F)$. Notons X' l'espace des formes linéaires sur E dont la restriction à X est continue et soit H un sous-espace vectoriel de E tel que $F \subset H \subset X'$. Il est clair que

$$\sigma(X, F) = \sigma(X, H).$$

De plus, les formes de H étant continues sur X. la structure uniforme $u\sigma(X, H)$ a un système fondamental d'entourages fermés dans $X \times X$ pour la topologie produit de $\sigma(X, F)$ par elle-même, de sorte que X est complet pour $u\sigma(X, H)$, (corol. prop. 7, p. 202 de [5]). Nous pouvons énoncer :

Proposition 1.1. — *La structure uniforme* $u\sigma(X, X')$ *est la structure uniforme faible la plus fine sur* X, *compatible avec la topologie initiale sur* X, *pour laquelle* X *est complet.*

Définition 1.2. — *Soient* (X, E, F) *un triplet définissant un cône de* $\mathcal{S}$ *et* H *un sous-espace vectoriel de* E. *On suppose de plus que* X *engendre* E. *On dira que le doublet* (E, H)

est un espace ambiant *de* X, *si* $\sigma(X, H)$ *coïncide avec* $\sigma(X, F)$ *et si* X *est complet pour* $u\sigma(X, H)$. *Si* $H = X'$, *l'espace ambiant correspondant sera dit* maximal.

Pour d'autres détails sur cette notion, on consultera les numéros 58 à 61 de [13].

2. Notations et rappels.

Soient X un cône de $\mathcal{G}$ et E un espace ambiant de X. On note :

$L_c(X)$ l'espace des formes linéaires et continues sur X. Avec les notations du § 1, cet espace n'est autre que l'espace des restrictions à X des fonctions de X'.

$L_s(X)$ l'espace des formes linéaires et s.c.s. sur X.

$S_c(X)$ (resp. $S_s(X)$) l'ensemble des fonctions sur X qui sont l'enveloppe supérieure d'un nombre fini de fonctions de $L_c(X)$ (resp. de $L_s(X)$).

On munit tous ces ensembles de l'ordre usuel pour un espace de fonctions sur X : $f \leqslant g$ si et seulement si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in X$. De plus, on utilisera la notation $f > 0$ lorsque $f(x) > 0$ pour tout $x \in X \setminus \{0\}$.

Si g est une fonction numérique sur X, majorée par une fonction de E', on pose :

$$(1.3) \qquad \hat{g} = \inf \{h \in E' | h \geqslant g \quad \text{sur} \quad X\}.$$

$\hat{g}$ est une fonction sur-linéaire et s.c.s. sur X. On pose, de même, $\check{g} = -\widehat{(-g)}$.

Si f et $g \in E^*$, on pose :

$$(1.4) \quad \sup_a (f, g)(x) = \sup_{(x_i) \in S_x} \left\{ \sum_i \sup (f, g)(x_i) \right\}, \ (\forall x \in X),$$

où S_x est l'ensemble des suites finies de points de X, de somme x. La fonction $\sup_a (f, g)$ est sur-linéaire, éventuellement infinie. On pose, de même, $\inf_a (f, g) = \sup_a (-f, -g)$.

Rappelons les résultats fondamentaux suivants (cf. §§ 3 et 4 de [24]) :

Théorème 1.5. — (*a*) *Pour* $f, g \in L_s(X)$, *on a* $\sup_a (f, g) = \sup (f, g)^\wedge$. (*b*) X *est réticulé si et seulement si*, $\sup_a (f, g)$ *est linéaire pour tout couple* f, g *de fonctions de* E'.

Du point (a) de ce théorème résulte immédiatement la formule suivante :

$$(1.6) \quad \sup (f, \ g)^{\wedge} = \inf \{h \in E^* | h \geqslant f, \ g \ \text{ sur } \ X\}, \quad (\forall f, \ g \in L_s(X)).$$

Autrement dit, la définition de la fonction $\hat{h}$, pour une $h \in S_s(X)$ *ne dépend pas* de l'espace ambiant choisi pour X.

3. Les cônes biréticulés.

Définition 1.7. — *On dit qu'un cône* X *de* $\mathcal{G}$ *est* biréticulé *si* $L_c(X)$ *est réticulé pour l'ordre usuel.*

Proposition 1.8. — *Pour un cône* X *de* $\mathcal{G}$, *il est équivalent de dire :*

(a) X *est biréticulé ;*

(b) $\sup (f, \ g)^{\wedge} \in L_c(X)$, *pour tous* $f, \ g \in L_c(X)$;

(c) $\sup_a (f, \ g) \in L_c(X)$, *pour tous* $f, \ g \in L_c(X)$;

(d) *Il existe un espace ambiant* E_1 de X *tel que* E_1' *soit réticulé pour l'ordre usuel* ;

(e) $L_s(X)$ *est réticulé pour l'ordre usuel.*

Démonstration. — $((a) \Longrightarrow (b))$. Notons $f \vee g$ la borne supérieure de deux fonctions $f, \ g$ de $L_c(X)$. La formule (1.3) montre que $f \vee g \leqslant \sup (f, \ g)^{\wedge}$ et la formule (1.6) montre l'inégalité inverse. On a donc,

$$\sup (f, \ g)^{\wedge} = f \vee g \in L_c(X).$$

$((b) \Longrightarrow (c))$. C'est une conséquence immédiate du théorème 1.5 (a).

$((c) \Longrightarrow (a))$. Soient f et g dans $L_c(X)$. Par construction (formule (1.4)), la fonction $\sup_a (f, \ g)$ est la plus petite forme linéaire sur X, continue ou non, majorant f et g. C'est donc la borne supérieure de f et g dans $L_c(X)$. Ainsi $L_c(X)$ est réticulé.

$((c) \Longrightarrow (d))$. Rappelons que $L_c(X)$ est l'espace des restrictions à X des fonctions de X'. Par suite, X' est réticulé pour l'ordre usuel; par suite, pour avoir (d), il suffit de prendre pour E_1 l'espace ambiant maximal de X.

$((d) \Longrightarrow (e))$. Considérons f et g dans E_1' et notons h la restriction à X de $\sup(f, g)$. Comme la définition de $\hat{h}$ ne dépend pas de l'espace ambiant, on a

$$\hat{h} = \inf \{l \in E_1' | l \geqslant h \quad \text{sur} \quad X\}.$$

Par suite, $\hat{h}$ est la restriction à X de la borne supérieure $f \vee g$ de f et g dans E_1'. Du (a) du théorème 1.5 que $(f \vee g)_{|X} = \sup_a(h)$ et du (b) que X est réticulé. Cela étant, posons, pout tout $u \in L_s(X)$,

$$H_u = \{v_{|X} | v \in E_1' \quad \text{et} \quad v \geqslant u \quad \text{sur} \quad X\}.$$

D'après la remarque 2, n° 54, § 5, chap. 2 de [7],

$$u = \inf \{v | v \in H_u\}.$$

D'après les théorèmes 9 et 13 de [23], on a : (1)

$$\sup_a(f, g) = \inf \{\sup_a(v, v') | v \in H_f, v' \in H_g\},$$
$$\inf_a(f, g) = \inf \{\inf_a(v, v') | v \in H_f, v' \in H_g\}.$$

Puisque chaque fonction des membres de droite de ces égalités est continue, $\sup_a(f, g)$ et $\inf_a(f, g)$ sont s.c.s. Mais, d'après le théorème 20 de [23], ces deux fonctions sont aussi linéaires. Elles sont donc dans $L_s(X)$. Enfin, la formule de définition (1.4) montre que ce sont nécessairement les bornes supérieure et inférieure de f et g dans $L_s(X)$.

$((e) \Longrightarrow (c))$. D'après le théorème 20 de [23], la borne supérieure de $f, g \in L_s(X)$ n'est autre que $\sup_a(f, g)$. Si on prend f et g dans $L_c(X)$, on voit, en écrivant

$$\sup_a(f, g) = -\inf_a(-f, -g),$$

que $\sup_a(f, g)$ est aussi s.c.i., donc qu'elle est en fait continue.

Corollaire 1.9. — *Tout cône biréticulé est réticulé.*

(1) Ces théorèmes, et plus généralement tous les résultats du § 2 de [23] avaient été énoncés avec une hypothèse restrictive de décomposabilité, qui équivalait, dans le cas qui nous intéresse, à supposer que X était réticulé. En fait un examen des démonstrations montre que cette condition était superflue.

Démonstration. — Cela résulte du (*c*) de la proposition précédente et du (*b*) du théorème 1.5.

Corollaire 1.10. — *Tout produit de cônes biréticulés est encore biréticulé.*

Démonstration. — Soit (X_i) une famille de cônes biréticulés. Pour chaque X_i, soit E_i un espace ambiant de X_i dont le dual E'_i est réticulé. Alors, le produit $\prod_i E_i$ muni de la topologie produit est un espace ambiant de $\prod_i X_i$, dont le dual $\bigoplus_i E'_i$ est réticulé.

Voici maintenant des exemples de type général.

Exemple 1.11. — Soient V un espace vectoriel réticulé et $X = V^{*+}$ le cône convexe saillant des formes linéaires positives sur X. Alors, si V^+ est fermé pour $\sigma(V, X - X)$, X, muni de $\sigma(X, V)$, est biréticulé. En effet, sans hypothèse de fermeture, X est réticulé et complet pour $u\sigma(X, V)$. L'hypothèse de fermeture permet de dire que l'ordre sur V coïncide avec l'ordre usuel pour un espace de fonctions sur X. D'après la proposition 1.8 (*d*), il en résulte que X est biréticulé [1].

Exemple 1.12. — Soit V un espace de Fréchet réticulé tel que V^+ soit fermé. On sait (cf. par exemple la prop. 36.1 de [14]) que toute forme linéaire positive sur V est continue. Il en résulte d'une part que la partie positive X du dual V' de V est un cône convexe complet pour $u\sigma(V', V)$ et d'autre part que V^+ est fermé pour $\sigma(V, X - X)$. Ainsi, d'après l'exemple précédent, X est biréticulé.

Comme application, prenons un espace mesuré $(T, \mathcal{C}, \mu)$, où T est un ensemble, $\mathcal{C}$ une tribu de parties de T et μ une mesure σ-additive et positive sur $\mathcal{C}$. D'après le théorème 1, p. 286 de [18], le dual de $L^p(T, \mathcal{C}, \mu)$ est $L^q(T, \mathcal{C}, \mu)$, où p et q sont liés par $p^{-1} + q^{-1} = 1$, pourvu que $1 < p < +\infty$. De ce qu'on vient de voir, il résulte que $L^p(T, \mathcal{C}, \mu)^+$ est un cône biréticulé lorsqu'on le met en dualité avec $L^q(T, \mathcal{C}, \mu)$, dès que $1 < p < +\infty$. De même, pour $p = 1$, $L^\infty(T, \mathcal{C}, \mu)$

[1] En fait, on peut montrer à partir du lemme 3.16, que cet exemple est l'exemple le plus général de cône biréticulé.

est le dual de $L^1(T, \mathcal{T}, \mu)$, pourvu que μ soit σ-finie (théorème 5 p. 289 de [18]), ou que T soit localement compact et μ une mesure de Radon. Sous ces hypothèses, $L^\infty(T, \mathcal{T}, \mu)^+$ mis en dualité avec $L^1(T, \mathcal{T}, \mu)$ est biréticulé.

Exemple 1.13. — Soient Ω un espace localement compact, C un cône convexe de fonctions continues sur Ω à valeurs dans $[0, +\infty]$, contenant $\mathcal{K}(\Omega)^+$ et anti-archimédien, c'est-à-dire vérifiant la condition suivante :
$\forall f \in C$, $\exists g \in C$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h \in \mathcal{K}(\Omega)^+ \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant f - h \leqslant \varepsilon g,$$

et soit X le cône des mesures de Radon positives sur Ω qui intègrent toute fonction de C. Dans [10], (cf. aussi le chapitre 8 de [14]) Choquet a montré que X est la partie positive du dual algébrique de l'espace vectoriel V engendré par C. En conséquence, X est complet pour la dualité avec V. Cela étant, soit C_1 le cône formé des enveloppes supérieures et inférieures ponctuelles de familles finies de fonctions de C. En utilisant que $C \supset \mathcal{K}(\Omega)^+$ et que C est anti-archimédien, on montre aisément que, pour toute $g \in C_1$, l'application

$$\mu \longmapsto \mu(g)$$

est continue sur X muni de $\sigma(X, V)$. Par suite, si on note F l'espace vectoriel engendré par C_1, l'espace vectoriel $E = X - X \subset \mathcal{M}(\Omega)$, mis en dualité avec F est un espace ambiant de X. Montrons que F est réticulé pour l'ordre dual de celui de X. Pour cela, considérons, l'ouvert O de Ω réunion des ouverts de Ω qu'aucune mesure de X ne charge, et posons $\Omega' = \Omega \setminus O$. Alors, il est facile de voir que, pour une $f \in F$, qui est donc finie et continue hors d'un fermé ν-négligeable, $(\forall \nu \in X)$, l'inégalité $\mu(f) \geqslant 0$, $(\forall \mu \in X)$ équivaut à $f \geqslant 0$ sur Ω'. Il en résulte immédiatement que F est réticulé.

4. Le bord d'un cône de $\mathcal{S}$.

Soit X un cône de $\mathcal{S}$. On sait, à la suite des recherches de Choquet, que la réunion $\mathcal{E}_g(X)$ des génératrices extrémales de X peut être réduite à 0 (cf. par exemple [10]). Par suite, il a été amené à introduire, en remplacement, la notion de bord

([9], définition 9), dont nous rappelons maintenant la définition et donnons quelques propriétés.

DÉFINITION 1.14. — *Pour toute* $g \in S_s(X)$, *on pose* $B_g = \{\hat{g} = g\}$. *On appelle bord de* X *l'ensemble des parties* B_g *de* X, *ou* g *parcourt* $S_c(X)$.

PROPOSITION 1.15. — *Soient* X *un cône de* $\mathcal{S}$,

$$f_1, \ldots, f_n \in L_s(X) \quad et \quad g = \sup(f_1, \ldots, f_n).$$

Alors,

(*a*) *Pour* $1 \leqslant i \leqslant n$, *l'ensemble* $F_i = \{\hat{g} = f_i\}$ *est le plus grand cône héréditaire sur lequel* $g = f_i$. *Si* X *est réticulé, chaque* F_i *est une face.*

(*b*) *Pour tout* $x \in X$, *il existe une suite* $x_1, \ldots, x_n$ *de points de* X, *de somme* x, *telle que,*

$$\sum_i f_i(x_i) = \hat{g}(x)$$

et que $f_i(x_i) = g(x_i) = \hat{g}(x_i)$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

En particulier, conv $(B_g) = X$.

Démonstration. — (*a*) F_i est l'ensemble des points de X où la fonction sur-linéaire positive $\hat{g} - f_i$ s'annule. C'est donc un cône héréditaire. Si X est réticulé, $\hat{g}$ est linéaire (théorème 1.5 (*b*)) et F_i est convexe. Cela étant, si $Y \subset X$ est un cône héréditaire sur lequel $g = f_i$, la formule (1.4) et le théorème 1.5 (*a*) montrent que $\hat{g} = g = f_i$ sur Y.

(*b*) L'existence d'une suite $x_1, \ldots, x_n$ de points de X, telle que : $\sum_i f_i(x_i) = \hat{g}(x)$ est connue (cf. rem. 4.12 de [24]). Cela étant, puisque $\hat{g}$ est sur-linéaire, on a : $\hat{g}(x) \geqslant \sum_i \hat{g}(x_i)$, d'où : $\sum_i \hat{g}(x_i) \leqslant \sum_i f_i(x_i)$. Comme $\hat{g} \geqslant g \geqslant f_i$, cela implique : $f_i(x_i) = g(x_i) = \hat{g}(x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

5. Utilisation des faces pour l'étude des biréticulés.

Nous allons voir dans ce paragraphe que les cônes biréticulés ont beaucoup de faces fermées. Nous exploiterons cette « abondance » dans les chapitres 2 et 3.

THÉORÈME 1.16. — *Pour un cône réticulé* X *de* $\mathcal{S}$, *il est équivalent de dire :*

(*a*) X *est biréticulé ;*

(*b*) *L'adhérence de toute face est une face ;*

(*c*) *Le bord de* X *est formé d'ensembles fermés.*

Démonstration. — $((a) \Longrightarrow (b))$. Montrons que, pour toute face F de X, supposé biréticulé, on a :

$$\overline{\mathrm{F}} = \bigcap_{g \in \mathrm{L}} g^{-1}(0), \tag{1.17}$$

où $\mathrm{L} = \{g \in \mathrm{L}_c(\mathrm{X})^+ | g = 0 \text{ sur } \mathrm{F}\}$. Soit $x \in \mathrm{F}$. D'après les théorèmes de séparation classiques, il existe $f \in \mathrm{L}_c(\mathrm{X})$ avec $f(x) > 0$ et $f \leqslant 0$ sur F. Considérons la fonction $g = \sup_a (f, 0)$. Comme X est biréticulé, on a $g \in \mathrm{L}_c(\mathrm{X})^+$. Ensuite, il est clair que $g(x) > 0$. Enfin, d'après la formule (1.4), on a $g = 0$ sur F, ce qui prouve (1.17). Cela étant, il en résulte immédiatement que $\overline{\mathrm{F}}$ est une face, comme intersection de faces.

$((b) \Longrightarrow (c))$. Vérifions que le bord de X est formé d'ensembles fermés. Soit $g = \sup (f_1, \ldots, f_n)$ avec

$$f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{L}_c(\mathrm{X}).$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, posons : $\mathrm{F}_i = \{x \in \mathrm{X} | f_i(x) = \hat{g}(x)\}$. Si $x \in \mathrm{F}_i$, on a $f_i(x) = g(x)$; en prolongeant par continuité, on a encore $f_i(x) = g(x)$ pour $x \in \overline{\mathrm{F}}_i$. Mais, $\overline{\mathrm{F}}_i$ est une face, de sorte que, d'après la proposition 1.15 (*a*), $\overline{\mathrm{F}}_i = \mathrm{F}_i$ et B_g, qui est la réunion des F_i, est fermée.

$((c) \Longrightarrow (a))$. Soient f_1 et $f_2 \in \mathrm{L}_c(\mathrm{X})$ et $g = \sup (f_1, f_2)$. Puisque X est réticulé, $\hat{g}$ est linéaire, de sorte que $\mathrm{F}_i = \{g = f_i\}$, $(i = 1,2)$, est une face de X. C'est même une face fermée. En effet, prenons $x \in \overline{\mathrm{F}}_1$. Sur F_1, on a $f_2 \leqslant f_1$, de sorte que $f_2(x) \leqslant f_1(x)$. D'autre part, B_g est fermé ; en particulier $\overline{\mathrm{F}}_1 \subset \mathrm{B}_g$, de sorte que, $\hat{g}(x) = g(x) = f_1(x)$ et ainsi, $x \in \mathrm{F}_1$. De même F_2 est fermée. Ainsi, $\hat{g}$ est le prolongement linéaire à $\mathrm{X} = \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 = \mathrm{conv}\,(\mathrm{B}_g)$ de la fonction $h = g_{|\mathrm{B}_g}$, linéaire et continue sur les faces F_1 et F_2. Du corollaire 4.7 de [24], résulte que $\hat{g} \in \mathrm{L}_c(\mathrm{X})$. Compte tenu de la proposition 1.8 (*b*), cela exprime que X est biréticulé.

COROLLAIRE 1.17. — *Toute face fermée d'un cône biréticulé est un cône biréticulé.*

Démonstration. — Soient X un cône biréticulé, F une face fermée de X et G une face de F. D'après la proposition 1.6 de [24], G est une face de X. D'après le (*b*) du théorème précédent, son adhérence $\overline{G}$ est une face fermée de X, de sorte que : $\overline{G} = \overline{G} \cap F$ est une face de F. Ainsi, l'adhérence de toute face de F est une face de F. Comme d'autre part, F est réticulé pour son ordre propre, puisque c'est une face d'un cône réticulé (corol. 1.9), il résulte du (*b*) du théorème précédent que F est un cône biréticulé.

LEMME 1.18. — *Pour un cône* X *de* $\mathcal{G}$, *on a l'égalité* :

$$\mathcal{E}_g(X) = \bigcap_{f \in S_c(X)} B_f. \tag{1.19}$$

Démonstration. — D'après la proposition 1.15 (*b*) tout ensemble du bord contient $\mathcal{E}_g(X)$. Inversement montrons que tout $x \notin \mathcal{E}_g(X)$ n'est pas contenu dans un ensemble du bord. Fixons $x \notin \mathcal{E}_g(X)$. Alors, il existe y et z non proportionnels dans X tels que $x = y + z$. Par suite, il existe $h \in L_c(X)$ avec $h(y) > 0$ et $h(z) < 0$. Posons alors $f = \sup(h, 0)$. Il est clair que $f(x) < h(y)$ et que $\hat{f}(x) \geqslant h(y)$, en sorte que $x \notin B_f$.

COROLLAIRE 1.20. — *La réunion des génératrices extrémales d'un cône biréticulé est un cône fermé.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de l'égalité (1.19) et du théorème 1.16 (*c*).

COROLLAIRE 1.21. — *Dans un cône biréticulé, tout ensemble du bord est la réunion d'une famille finie de faces fermées.*

Démonstration. — Cela a été prouvé au cours de la démonstration de $((b) \Longrightarrow (c))$ du théorème précédent.

COROLLAIRE 1.22. — *Soient* X *un cône biréticulé et* F *une face fermée de* X. *Alors, ou bien* F *se réduit à une génératrice extrémale de* X, *ou bien, il existe une face fermée* G *de* X, *non réduite à* 0, *contenue dans* F *et distincte de* F.

Démonstration. — D'après le corollaire 1.17, il nous suffit de montrer qu'un cône biréticulé X non réduit à une demi-droite contient une face fermée propre. Soit $x \in X \setminus \mathcal{E}_g(X)$. D'après l'égalité (1.19), il existe $f \in S_c(X)$ tel que $x \notin B_f$. D'après le corollaire 1.21, B_f est la réunion d'une famille finie de faces fermées. D'après la proposition 1.15, B_f ne se réduit pas à 0, de sorte que l'une des faces fermées contenues dans B_f est propre.

Remarque 1.23. — (*a*) On rencontre assez fréquemment en Analyse des cônes de $\mathcal{S}$ pour lesquels l'adhérence de toute face est une face; exemples : tout cône convexe fermé de dimension finie; la partie positive d'une algèbre de von Neumann munie de sa topologie ultrafaible. Pour de tels cônes, il est équivalent de dire qu'ils sont réticulés ou qu'ils sont biréticulés.

(*b*) L'équivalence de (*a*) et de (*b*) du théorème 1.16 était connue pour les cônes à base compacte. Dans ce cadre, elle était due à Størmer (th. 4.3 de [32]).

(*c*) Nous verrons plus loin, avec le théorème 2.37, une réciproque au corollaire 1.20, pourvu que le cône considéré ait suffisamment de génératrices extrémales.

6. Utilisation des mesures coniques pour l'étude des biréticulés.

Définitions et rappels 1.24. — Nous prendrons les notations et définitions de [4]. Soit E un espace faible. On note S(E) le cône des fonctions de la forme $f = \sup(l_1, \ldots, l_n)$ avec $l_1, \ldots, l_n \in E'$ et on pose $h(E) = S(E) - S(E)$. l'espace $h(E)$ muni de l'ordre usuel pour un espace de fonctions sur E est un espace vectoriel réticulé.

On appelle *mesure conique* sur E toute forme linéaire positive sur $h(E)$ et on note $\mathfrak{M}^+(E)$ l'ensemble des mesures coniques sur E. Lorsqu'on le met en dualité avec $h(E)$, $\mathfrak{M}^+(E)$ est un cône convexe faiblement complet biréticulé (cf. exemple 1.11).

Soit Y un cône fermé de E, non nécessairement convexe. On dit qu'une mesure conique μ est *portée par* Y, si la relation $f \in h(E)$, et $f \geqslant 0$ sur Y implique $\mu(f) \geqslant 0$.

En d'autres termes, si on note $h(\mathrm{X})$ l'espace des restrictions à X des fonctions de $h(\mathrm{E})$, μ est une forme linéaire positive sur $h(\mathrm{X})$, muni de l'ordre usuel pour un espace de fonctions sur X. Inversement, une forme linéaire positive sur $h(\mathrm{X})$ définit de manière naturelle une mesure conique sur E, portée par X. Par abus de langage, nous dirons qu'une mesure conique sur E, portée par X est une *mesure conique sur* X et nous noterons $\mathcal{M}^+(\mathrm{X})$ l'ensemble de ces mesures. Cet ensemble, mis en dualité avec $h(\mathrm{X})$ est un cône faiblement complet biréticulé.

Si, en particulier, X est un cône saillant faiblement complet, et si E est mis en dualité avec X', on voit, avec les notations du paragraphe 2, qu'une mesure conique sur X est une forme linéaire positive sur $\mathrm{S}_c(\mathrm{X}) - \mathrm{S}_c(\mathrm{X})$.

Sur $\mathcal{M}^+(\mathrm{E})$, on définit la relation binaire $\prec$ par

$$(\mu \prec \nu) \iff (\mu(f) \leqslant \nu(f), \qquad (\forall f \in \mathrm{S}(\mathrm{E})).$$

Cette relation binaire est un ordre; de plus, (cf. [9]), on a le résultat suivant.

THÉORÈME 1.25. — (*a*) *Si* X *est un cône saillant faiblement complet, l'ordre* $\prec$ *restreint à* $\mathcal{M}^+(\mathrm{X})$ *est inductif; en particulier, tout point* $x \in \mathrm{X}$ *est la résultante d'une mesure conique maximale* (*pour l'ordre restreint*) *portée par* X.

(*b*) X *est réticulé si et seulement si, tout* $x \in \mathrm{X}$ *est la résultante d'une unique mesure conique maximale.*

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposerons toujours que X est faiblement complet et que E est l'espace ambiant maximal de X. Le lemme suivant a été d'abord montré par I. Namioka et R. R. Phelps pour les cônes à base compacte (th. 1.4 de [34]) puis a été étendu aux cônes de $\mathcal{S}$ par H. Fakhoury et l'auteur. On trouvera une autre démonstration dans [21].

LEMME 1.26. — *Soit* X *un cône de* $\mathcal{S}$. *Pour que* X *soit réticulé, il faut et il suffit qu'il existe une application linéaire* Λ *de* X *dans* $\mathcal{M}^+(\mathrm{X})$ *telle que* $\Lambda(x) \succ \varepsilon_x$, *pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *ou* ε_x *est l'évaluation en* x.

Démonstration. — Compte tenu du théorème 1.25 (*b*), seule la suffisance est à montrer. Supposons donc qu'on ait une application Λ comme indiqué. Par linéarité, on a $\Lambda(x) \succ \mu$, pour toute mesure conique discrète μ de résultante x. Cela étant, soit μ une mesure conique quelconque de résultante x. On sait (cf. prop. 3 de [4]) que μ est limite faible de mesures discrètes de même résultante x, de sorte que, puisque le graphe de $\prec$ est fermé, on a encore $\Lambda(x) \succ \mu$. Ainsi, $\Lambda(x)$ est l'unique mesure maximale de résultante x, $(\forall x \in X)$ ce qui équivaut à dire que X est réticulé.

Proposition 1.27. — *Pour un cône* X *de* $\mathcal{S}$, *il est équivalent de dire :*

(*a*) X *est biréticulé ;*

(*b*) X *est réticulé et l'application* $x \longmapsto \mu_x$ *qui, à* $x \in X$ *associe l'unique mesure maximale de résultante* x, *est continue ;*

(*c*) *Il existe une application linéaire continue* Λ *de* X *dans* $\mathfrak{M}^+(X)$, *telle que* $\Lambda(x) \succ \varepsilon_x$ *pour tout* $x \in X$.

Démonstration. — D'après le lemme précédent, (*b*) et (*c*) sont équivalents. Montrons $((a) \Longrightarrow (b))$. D'abord, si X est biréticulé, il est réticulé, et cela a un sens de parler de μ_x ; de plus, $\mu_x(g) = \hat{g}(x)$ pour toute $g \in S_c(X)$ (th. 32 de [11]). Or, d'après la proposition 1.8 (*b*), g est continue, de sorte que l'application $x \longmapsto \mu_x(g)$ est continue, $(\forall g \in S_c(X))$. Par définition de la topologie sur $\mathfrak{M}^+(X)$, cela implique que l'application $x \longmapsto \mu_x$ est continue. Montrons que $((b) \Longrightarrow (a))$. Soient f et $g \in L_c(X)$ et $h = \sup(f, g)$. Par hypothèse, $x \longmapsto \mu_x(h)$ est continue. De plus, comme X est réticulé, on a $\hat{h}(x) = \mu_x(h)$, de sorte que $\hat{h}$ est continue. D'après la proposition 1.8 (*b*), cela prouve que X est biréticulé.

Remarque 1.28. — En utilisant les méthodes de Fakhoury, (cf. [21], p. 11 et 12), on peut déduire de ce théorème que certaines limites projectives de cônes biréticulés sont des cônes biréticulés.

Lemme 1.29. — *Soient* X *un cône convexe saillant dans un espace vectoriel réel et* Y *et* Z *deux sous-cônes de* X, *tels que* Y *soit héréditaire et que :* $X = \operatorname{conv}(Y) = \operatorname{conv}(Z)$. *Alors, on a encore* $X = \operatorname{conv}(Y \cap Z)$.

Démonstration. — Soit $x \in \mathrm{X}$. On peut écrire $x = \sum_1^n y_i$ avec $y_i \in \mathrm{Y}$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$. De même, chaque y_i peut s'écrire $y_i = \sum_1^{n_i} z_{ij}$ avec $z_{ij} \in \mathrm{Z}$, $(1 \leqslant j \leqslant n_i)$. Y étant héréditaire, chaque $z_{ij} \in \mathrm{Y}$, de sorte que x s'écrit comme somme d'éléments de $\mathrm{Y} \cap \mathrm{Z}$.

PROPOSITION 1.30. — *Soit* X *un cône biréticulé. Pour qu'une mesure conique sur* X *soit maximale, il faut et il suffit qu'elle soit portée par le bord de* X, (*c'est-à-dire portée par tout ensemble du bord*).

Démonstration. — Soient B_g un ensemble du bord et $h = h_1 - h_2 \geqslant 0$ sur B_g, avec h_1 et $h_2 \in \mathrm{S}_c(\mathrm{X})$. D'après la proposition 1.15 et le lemme précédent, on a $\mathrm{X} = \mathrm{conv}\,(\mathrm{C})$, où $\mathrm{C} = \mathrm{B}_g \cap \mathrm{B}_{h_1} \cap \mathrm{B}_{h_2}$. Cela étant, soit $f = \hat{h}_1 - \hat{h}_2$. Comme X est biréticulé, f est linéaire et continue. Or, $f = h \geqslant 0$ sur C, donc $f \geqslant 0$ sur X. Donc, si μ est maximale et de résultante x, on a $\mu(h) = f(x) \geqslant 0$, ce qui prouve que μ est portée par le bord de X.

Inversement, soit μ une mesure conique portée par le bord de X, et soit $g \in \mathrm{S}_c(\mathrm{X})$. Puisque X est biréticulé, $\hat{g} \in \mathrm{L}_c(\mathrm{X})$, de sorte que $h = g - \hat{g} \in \mathrm{S}_c(\mathrm{X})$. Comme $h = 0$ sur B_g, on a $\mu(h) = 0$, soit, $\mu(g) = \mu(\hat{g})$. D'après le théorème 2 de [9], cela implique que μ est maximale.

COROLLAIRE 1.31. — *Soit* X *un cône biréticulé tel que* $\mathrm{X} = \overline{\mathrm{conv}}\,(\mathcal{E}_g(\mathrm{X}))$. *Alors, pour qu'une mesure conique soit maximale, il faut et il suffit qu'elle soit portée par* $\mathcal{E}_g(\mathrm{X})$, (*qui est fermé d'après le corol.* 1.20).

Démonstration. — Si μ est portée par $\mathcal{E}_g(\mathrm{X})$, elle est portée par le bord de X (Lemme 1.18) et d'après la proposition précédente, elle est maximale. Réciproquement, soient μ maximale de résultante x et $h = h_1 - h_2$ avec h_1 et $h_2 \in \mathrm{S}_c(\mathrm{X})$ et $h \geqslant 0$ sur $\mathcal{E}_g(\mathrm{X})$. Comme X est biréticulé, $\hat{h}_1$ et $\hat{h}_2 \in \mathrm{L}_c(\mathrm{X})$, et l'inégalité $\hat{h}_1 - \hat{h}_2 \geqslant 0$ sur $\mathcal{E}_g(\mathrm{X})$ se prolonge à X tout entier. En particulier, $\mu(h) = \hat{h}_1(x) - \hat{h}_2(x) \geqslant 0$, ce qui prouve que μ est portée par $\mathcal{E}_g(\mathrm{X})$.

COROLLAIRE 1.32. — *L'ensemble* $M^+(X)$ *des mesures maximales sur un cône biréticulé* X *est fermé dans* $\mathfrak{M}^+(X)$, *donc complet.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, l'ensemble $M^+(X)$ est l'intersection des ensembles $\mathfrak{M}^+(B)$, où B parcourt le bord de X. D'où le résultat, puisque chaque ensemble de l'intersection est fermé dans $\mathfrak{M}^+(X)$.

CHAPITRE 2

LES CÔNES BIRÉTICULÉS AYANT « ASSEZ » DE GÉNÉRATRICES EXTRÉMALES

1. Les cônes profilés.

Définitions et rappels 2.1. — Soit X un cône de $\mathcal{S}$. On dit que X est *profilé* si, pour tout couple f, g de fonctions de $L_s(X)^+$, l'inégalité $f \leqslant g$ sur $\mathcal{E}_g(X)$ implique $f \leqslant g$ sur X.

On appelle *pseudo-base* de X, tout ensemble de la forme $B_l = \{l = 1\}$ où $l \in L_c(X)^+$, $l \neq 0$, et on note

$$E_l = \mathcal{E}(B_l) = \mathcal{E}_g(X) \cap B_l.$$

On dit qu'une face F de X est *complémentable* si : (a) la réunion F' des faces de X rencontrant F en 0 est une face; (b) tout $x \in X$ s'écrit de manière unique $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in F'$.

On trouvera dans [27] une étude systématique de ces notions. Retenons seulement que la famille des faces fermées et complémentables de X est stable par intersection quelconque et somme finie. Par suite, sur chaque ensemble $T \subset \mathcal{E}_g(X)$, la trace de cette famille définit l'ensemble des fermés d'une topologie sur T dite AA-*faciale*. L'introduction de cette notion se justifie essentiellement par le résultat suivant (th. 46 de [27]) :

THÉORÈME 2.2. — *Soient* X *un cône profilé de* $\mathcal{S}$ *et* B_l *une pseudo-base de* X. *Alors, toute fonction numérique* f *définie sur* E_l *et* AA-*facialement continue se prolonge en une forme linéaire continue* f *sur* X *tout entier. De plus, il existe un et un seul prolongement qui soit borné sur* B_l.

Considérons les propriétés suivantes :

(a) X est profilé;

(b) $F = \overline{\text{conv}}\,(\mathcal{E}_g(F))$, pour toute face fermée F de X;

(c) $X = \overline{\text{conv}}\,(\mathcal{E}_g(X))$.

Avec la proposition 36 et le corollaire 40 de [27], nous avons montré que (a) implique (c) et que (a) implique (b) si X est réticulé. Nous conjecturons que (b) implique (a), au moins pour les cônes biréticulés. Par contre, l'exemple qui suit montre que (c) n'implique pas (b), même pour les cônes biréticulés.

Exemple 2.3. — On reprend l'exemple classique de Choquet (cf. [10]). Pour $a \in [0,1]$, on considère le cône convexe Φ_a engendré par les fonctions continues positives sur $[0,1]$ et les fonctions $\varphi_{a,\alpha} = |t - a|^{-\alpha}$, $0 \leqslant \alpha < 1$. Ce cône de fonctions est anti-archimédien. Plus généralement, si A est une partie quelconque de $[0, 1]$, le cône convexe Φ_A engendré par la réunion des Φ_a, $(a \in A)$, est anti-archimédien, en sorte que, d'après l'exemple 1.13, le cône $\mathfrak{M}_A^+$ des mesures de Radon positives sur $[0, 1]$ qui rendent intégrable toute fonction de Φ_A est biréticulé lorsqu'on le met en dualité avec $\Phi_A - \Phi_A$. On notera que $\mathfrak{M}_A^+$ contient toujours la mesure de Lebesgue μ_L sur $[0,1]$.

Cela étant, prenons pour A une partie de $[0, 1]$ de mesure de Lebesgue nulle et de complémentaire B dense dans $[0, 1]$. Les mesures de Dirac δ_b, $(b \in B)$ engendrent $\mathcal{E}_g(\mathfrak{M}_A^+)$. Comme B est dense dans $[0, 1]$, toute fonction de Φ_A nulle sur $\mathcal{E}_g(\mathfrak{M}_A^+)$ est identiquement nulle; par suite, $\mathfrak{M}_A^+$ est l'enveloppe convexe fermée de ses génératrices extrémales. Montrons cependant que $\mathfrak{M}_A^+$ ne vérifie pas la condition (b) ci-dessus. Soit $K \subset B$, un compact tel que $\mu_L(K) > 0$. L'ensemble des mesures dans $\mathfrak{M}_A^+$ à support dans K est une face fermée de $\mathfrak{M}_A^+$, non réduite à 0 puisqu'elle contient la mesure de Lebesgue restreinte à K. Par contre, on a :

$$\mathcal{E}_g(F) = \mathcal{E}_g(\mathfrak{M}_A^+) \cap F = \{0\}.$$

Ainsi, $F \neq \overline{\text{conv}}\,(\mathcal{E}_g(F))$.

Dans l'énoncé suivant, $\mathcal{H}_g(X)$ désigne l'espace des fonctions homogènes et continues sur $\mathcal{E}_g(X)$.

THÉORÈME 2.4. — *Pour un cône profilé* X, *on a les équivalences suivantes :*

(a) X *est biréticulé;*

(b) *Les topologies faible et* AA-*faciale coïncident sur les ensembles* E_l, *ou* $l \in L_c(X)^+$, $l \neq 0$.

(*c*) *Toute fonction* $f \in \mathcal{H}_g(X)$ *se prolonge, de manière unique en une fonction* $\bar{f} \in L_c(X)$.

Démonstration. — ($(a) \Longrightarrow (b)$). Soient B_l une pseudo-base de X et $x \in E_l$. Comme $B_l \in \mathcal{G}$, x est extrémal fort dans B_l (corol. 20 de [11]). Par suite, il nous suffit de montrer que, pour une $f \in L_c(X)$ telle que $f(x) > 0$, il existe une face fermée F de X (qui est nécessairement complémentable car X est réticulé) telle que $x \in F' \cap E_l \subset \{f > 0\} \cap E_l$. Posons $g = \sup_a (f, 0)$. X étant biréticulé, $g \in L_c(X)^+$. Montrons que la face $F = g^{-1}(0)$ convient. D'abord, d'après la formule (1.4), $g(x) = f(x) > 0$ et, par suite, $x \in F'$. Ensuite, pour un $y \in E_l$, $f(y) \leqslant 0$ implique $g(y) = 0$. D'où :

$$(F' \setminus \{0\}) \subset \{g > 0\} \subset \{f > 0\}.$$

($(b) \Longrightarrow (c)$). Soit $f \in \mathcal{H}_g(X)$. Comme 0 est un point extrémal de X, 0 est un point extrémal fort de X. Par suite, il existe $l \in L_c(X)^+$ telle que $|f| \leqslant l$. Notons g la restriction de f à E_l. Cette fonction est AA-facialement continue et bornée. D'après le théorème 2.2 elle se prolonge en une $\bar{g} \in L_c(X)$ bornée sur B_l. Montrons que $\bar{g}$ coïncide avec g sur $\mathcal{E}_g(X)$. Soit D une génératrice extrémale de X. De deux choses l'une : ou bien $D \cap B_l \neq \emptyset$ et alors, $\bar{g} = f$ sur D; ou bien $D \subset l^{-1}(0)$; mais alors, l'inégalité $|f| \leqslant l$ implique $f = 0$ sur D et, de même, g bornée sur B_l implique $g = 0$ sur D. Enfin, si g' est un autre prolongement de g, g' et g sont bornées sur une pseudo-base $B_{l'}$, où $l' \in L_c(X)^+$ et $l' \geqslant g', |g|$. D'après le critère d'unicité du théorème 2.2, on a $g' = \bar{g}$.

($(c) \Longrightarrow (a)$). Si (*c*) est vrai, l'application $f \longmapsto \bar{f}$ est une bijection linéaire conservant l'ordre de $\mathcal{H}_g(X)$ sur $L_c(X)$. Comme $\mathcal{H}_g(X)$ est réticulé, $L_c(X)$ l'est aussi, et X est réticulé.

Remarque 2.5. — Si X a une base B, on peut remplacer la condition (*b*) par : (*b'*) Les topologies faible et AA-faciale coïncident sur $\mathcal{E}(B)$.

2. Le théorème de base pour l'étude des chapeaux d'un cône.

On reprend les notations du paragraphe 6 du chapitre 1. Dans toute la suite, E désignera un espace faible.

Définitions et notations 2.6. — Si K est un compact de E et θ une mesure de Radon positive sur K, on pose :

$$\tilde{\theta}(f) = \int_K f\,d\theta, \qquad (\forall f \in h(\mathrm{E})).$$

C'est une mesure conique sur E. Inversement, si, à une mesure conique μ, on peut associer un couple (K, θ) où K est un compact et θ une mesure de Radon positive sur K telle que $\mu = \tilde{\theta}$, on dit que μ est *localisable* sur K et que θ est une *localisation* de μ sur K. Si θ est portée par une partie θ-mesurable A de K, on dit que μ est localisable sur A et que θ est une localisation de μ sur A.

Notations 2.7. — Soit C un compact de E. On note C^e son enveloppe étoilée définie par : $C^e = \{\lambda x | 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ et $x \in C\}$. C^e est un compact de E. On note j_C sa jauge et $E(C)$ l'ensemble des $x \in C^e$ tels que $j_C(x) = 1$. Comme C est compact, $E(C) \subset C$. En outre, comme la restriction de j_C à C^e est s.c.i., $E(C)$ est un G_δ de C.

PROPOSITION 2.8. — *Toute mesure conique localisable sur un compact* C *de* E *est localisable sur* $E(C)$.

Démonstration. — Soit θ une localisation de la mesure conique μ sur C. On pose :

$$\theta_1(f) = \int_{C\setminus\{0\}} j_C(x) f\left(\frac{x}{j_C(x)}\right) d\theta(x), \qquad (\forall f \in \mathcal{C}(C)) \text{ (1)}.$$

θ_1 est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(C)$. C'est donc une mesure de Radon. Cela étant, la valeur de $\theta_1(f)$ ne dépend que des valeurs prises par f sur $E(C)$. Autrement dit, θ_1 est portée par $E(C)$. Enfin, si f est la restriction à C d'une fonction homogène continue sur E, on a $\theta_1(f) = \theta(f)$. Par suite, $\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta} = \mu$.

Notation 2.9. — Si A est une partie de E, $\tilde{A}$ désigne le cône pointé engendré par A.

(1) Cette expression a un sens par le lemme 10 de [35].

Lemme 2.10. — *Si* A *et* B *sont deux compacts de* E *ne rencontrant pas* 0 *tels que* $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{0\}$, *il existe* $h \in h(E)^+$ *avec* $h \geqslant 1$ *sur* A *et* $h = 0$ *sur* B.

Démonstration. — C'est immédiat, en utilisant la compacité de A et B, dès qu'on a remarqué que pour tout point $(x, y) \in A \times B$ il existe $h \in h(E)$ tel que $h(x) > 1$ et $h(y) < 0$.

Proposition 2.11. — *Soient* A *et* B *deux compacts de* E *ne rencontrant pas* 0 *et tels que* $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{0\}$. *Alors, deux mesures coniques* μ_1 *et* μ_2, *localisables sur* A *et* B *respectivement, sont étrangères.*

Démonstration. — Soit $f \in h(E)^+$. D'après le lemme précédent, il existe $h \in h(E)^+$ tel que $h \geqslant f$ sur A et $h = 0$ sur B. Posons $g = \inf(f, h)$. Il est clair que $g \in h(E)^+$. De plus on a $\mu_1(f - g) = 0$ puisque μ_1 est localisable sur A, et de même, on a $\mu_2(f) = 0$. D'après la proposition 4, § 2, Chap. 2 de [8], il en résulte que μ_1 et μ_2 sont étrangères.

Lemme 2.12. — *Soient* C *un compact de* E *et* θ *une mesure de Radon positive sur* C, *portée par* E(C). *Alors, si* $\tilde{\theta} = 0$, *on a* $\theta = 0$.

Démonstration. — Puisque θ est portée par E(C), il existe une suite (K_n) de compacts mutuellement disjoints de E(C) dont la réunion porte θ. Puisque $0 \notin K_n$, il existe $h_n \in h(E)^+$ tel que $h_n \geqslant 1$ sur K_n, $(\forall n \in \mathbf{N})$. On a

$$\theta \leqslant \theta_{|K_n}(1) \leqslant \theta(h_n) = \tilde{\theta}(h_n) = 0, \qquad (\forall n \in \mathbf{N}).$$

Ainsi, la masse de θ sur chaque K_n est nulle, par suite, $\theta = 0$.

Proposition 2.13 (Choquet). — *Toute mesure conique sur* E *localisable sur un compact* C *de* E *admet une et une seule localisation portée par* E(C).

Démonstration. — Compte tenu de la proposition 2.8 seule l'unicité de la localisation est à montrer. Soient donc μ une mesure conique et θ_1 et θ_2 deux localisations de μ sur E(C). Posons $\theta_3 = \inf(\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1' = \theta_1 - \theta_3$ $\theta_2' = \theta_2 - \theta_3$

et $\nu = \mu - \tilde{\theta}_3$. Les mesures de Radon θ'_1 et θ'_2 sont étrangères. Par suite, il existe une suite (A^i_n), $(n \in \mathbf{N})$, $(i = 1,2)$ de compacts de $E(C)$ mutuellement disjoints telle que θ'_i soit portée par la réunion $\bigcup\limits_n A^i_n$, $(i = 1,2)$. Posons

$$\theta^i_n = \theta^i{}_{|A^i_n}, \quad (n \in \mathbf{N}), \quad (i = 1,2).$$

D'après la proposition 2.11, les mesures coniques $\tilde{\theta}^i_n$ et $\tilde{\theta}^j_m$ sont étrangères dès que $i \neq j$ ou que $n \neq m$, $(n \in \underline{\mathbf{N}})$ $(i, j = 1,2)$. La suite $(\tilde{\theta}^i_p)$, $(n \in \mathbf{N})$, $(i = 1,2)$ est donc une suite de mesures coniques deux à deux étrangères plus petites que ν. On a donc :

$$\nu \geqslant \sum_n \tilde{\theta}^1_n + \sum_n \tilde{\theta}^2_n = \nu + \nu.$$

D'où $\nu = 0$. Du lemme précédent résulte $\theta'_1 = \theta'_2 = 0$, d'où $\theta_1 = \theta_2$.

Corollaire 2.14. — *Soit* C *un compact de* E. *Si* ν_1 *et* ν_2 *sont deux mesures coniques localisables sur* C *et si* θ_1 *et* θ_2 *désignent leurs localisations sur* $E(C)$, *l'inégalité* $\nu_1 \leqslant \nu_2$ *implique* $\theta_1 \leqslant \theta_2$.

Démonstration. — En effet, soit θ_3 la localisation sur $E(C)$ de $\nu_2 - \nu_1$. Les mesures θ_2 et $\theta_1 + \theta_3$ sont des localisations de ν_2 sur $E(C)$. D'après la proposition précédente, elles sont égales.

Lemme. 2.15. — *Soit* C *un compact de* E *tel que* $0 \notin C$. *Alors, toute mesure portée par* $\tilde{C}$ *est localisable sur* C.

Démonstration. — Notons d'abord que, puisque $0 \notin C$, $\tilde{C}$ est un cône localement compact et fermé dans E.

(a) Supposons qu'il existe $\underline{l \in E'}$ tel que $l \geqslant 1$ sur C. Alors, on a $l \geqslant 1$ sur $B = \overline{\text{conv}}\,(C)$. Par suite, $0 \notin B$ et $\tilde{B}$ est un cône convexe localement compact admettant l'ensemble $B' = \{l = 1\} \cap \tilde{B}$ comme base compacte. Cela étant, si μ est une mesure conique portée par $\tilde{C}$, elle est portée par $\tilde{B} \supset \tilde{C}$. Elle est donc localisable en une mesure de Radon positive θ portée par B'. Montrons que θ est en fait portée par $\tilde{C} \cap B'$. Dans le cas contraire, il existerait un compact K inclus dans B' tel que $K \cap \tilde{C} = \emptyset$ et que $\theta_{|K} \neq 0$. D'après le lemme 2.10, il existerait $h \in h(E)^+$ telle que $h \geqslant 1$ sur K et que $h = 0$ sur C. On aurait $\theta(h) = 0$ et $\theta(h) = \mu(h) = 0$, ce qui serait absurde. Cela étant, puisque $j_C \leqslant 1$ sur C, on a $\tilde{C} \cap B' \subset C^e$. D'après la proposition 2.8, $\mu = \tilde{\theta}$ est localisable sur $E(C^e) = E(C) \subset C$.

(b) Passons au cas général. Puisque E est un espace faible, il existe $l_1, \ldots, l_n \in E'$ tels que $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} (l_i) \geqslant 1$ sur C. Posons $C_i = \{l_i \geqslant 1\} \cap C$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On a $\tilde{C} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{C}_i$. D'après la proposition 30.8 (iv) de [14], et le lemme de décomposition de Riesz, on a $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, où chaque μ_i est portée par $\tilde{C}_i$. D'après le (a), chaque μ_i est localisable sur $C_i \subset C$; par suite, μ est localisable sur C.

Proposition 2.16. — *Soit* C *un compact de* E. *Alors, l'ensemble des mesures coniques sur* E *localisables sur* C *est une face de* $\mathfrak{M}^+(E)$.

Démonstration. — Cet ensemble étant convexe, il suffit de montrer qu'il est héréditaire. Soient donc μ et ν deux mesures coniques sur E telles que $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$ et telles que μ ait une localisation θ sur C. D'après la proposition 2.8 on peut supposer que θ est portée par le G_δ $E(C)$. Il existe donc une suite (K_n), $(n \in \mathbf{N})$, de compacts mutuellement disjoints de $E(C)$ telle que θ soit portée par la réunion des K_n. Posons $\theta_n = \theta_{|K_n}$, $\mu_n = \tilde{\theta}_n$, $(\forall n \in \mathbf{N})$. On a $\mu = \sum_n \mu_n$. En procédant par récurrence sur le lemme de décomposition de Riesz, on voit que $\nu = \sum_n \nu_n$, avec $\nu_n \leqslant \mu_n$, $(\forall n \in \mathbf{N})$. Comme μ_n est portée par $\tilde{K}_n$, ν_n est aussi portée par $\tilde{K}_n$, et, d'après le lemme précédent, ν_n est localisable sur C en une mesure θ'_n portée par K_n. D'après le corollaire 2.14, on a $\theta'_n \leqslant \theta_n$, de sorte que, comme $\sum_n \theta_n = \theta$ a un sens, $\theta' = \sum_n \theta'_n$ existe et est une mesure de Radon positive sur C qui est une localisation de ν.

LEMME 2.17. — *Soient* X *un cône saillant faiblement complet de* E, *réticulé pour son ordre propre et* C *un convexe compact contenu dans* X *et tel que:* $\mathcal{E}(C) \subset \mathcal{E}_g(X)$. *Alors, pour toute mesure de Radon* θ *maximale sur* C, $\tilde{\theta}$ *est une mesure conique maximale sur* X.

Démonstration. — Considérons $f = \sup(f_1, \ldots, f_n)$, avec $f_1, \ldots, f_n \in L_c(X)$ et posons $\hat{f}^X = \inf\{l \in E' | l \geqslant f \text{ sur } X\}$ et $\hat{f}^C = \inf\{l \in E' | l \geqslant f \text{ sur } C\}$. Montrons que $\hat{f}^X = \hat{f}^C$ sur C. D'abord, il est clair que $\hat{f}^X \geqslant \hat{f}^C$ sur C. Inversement, soit $l \in E'$ tel que $l \geqslant f$ sur C. Puisque X est réticulé, la fonction $\hat{f}^X$ est linéaire sur X. De plus, elle coïncide avec f sur $\mathcal{E}_g(X)$. La restriction de $\hat{f}^X$ à C est affine s.c.s. et coïncide avec f sur $\mathcal{E}(C)$. D'après le principe du maximum de Bauer, $\hat{f}^X \leqslant l$ sur C. D'où: $\hat{f}^X \leqslant \hat{f}^C$. Cela étant, soit θ une mesure de Radon sur C maximale, de résultante $x \in C$. Puisque θ est maximale, on a:

$$\tilde{\theta}(f) = \theta(f) = \theta(\hat{f}^C) = \hat{f}^C(x) = \hat{f}^X(x).$$

D'après les théorèmes 27 et 32 de [11], $\tilde{\theta}$ est maximale.

LEMME 2.18. — *Soit* C *un convexe compact de* E, *contenant* 0 *et dont* 0 *soit point extrémal. Alors, toute mesure de Radon maximale sur* C *est portée par* $\{0\} \cup E(C)$.

Démonstration. — Puisque 0 est extrémal dans C, la fonction caractéristique φ de l'ensemble $\{0\}$ est convexe et s.c.s. Cela étant, il est facile de vérifier que $\hat{\varphi} = 1 - j_C$, d'où résulte que $\{0\} \cup E(C) = \{\varphi = \hat{\varphi}\}$. D'où le résultat puisque toute mesure maximale sur C est portée par $\{\varphi = \hat{\varphi}\}$, (corol. 5.10 de [24]).

THÉORÈME 2.19. — *Soient* X *un cône convexe saillant et complet dans* E, *qui soit réticulé pour son ordre propre et* C *un convexe compact dans* X, *contenant* 0. *Alors, pour que* C *soit un chapeau de* X, *il faut et il suffit que* $\mathcal{E}(C) \subset \mathcal{E}_g(X)$.

Démonstration. — La nécessité de cette condition est bien connue. Montrons sa suffisance.

(*a*) Montrons que C est un simplexe. Soient $x \in C$ et θ_1 et θ_2 deux mesures de Radon maximales sur C de résultante

x. D'après le lemme 2.18 on peut écrire $\theta_i = a_i\delta_0 + \theta'_i$ où θ_i est portée par $E(C)$, $(i = 1, 2)$. D'après le lemme 2.17, les mesures coniques $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_2$ sont maximales et de résultante x. Comme X est réticulé, $\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2$, d'où $\tilde{\theta}'_1 = \tilde{\theta}'_2$. De la proposition 2.13 résulte que $\theta'_1 = \theta'_2$; puisque θ_1 et θ_2 ont la même masse 1, il en résulte que $a_1 = a_2$, d'où $\theta_1 = \theta_2$. Ainsi, tout $x \in C$ est résultante d'une seule mesure de Radon maximale. Cela équivaut à dire que C est un simplexe.

(b) Montrons que C est héréditaire. Notons d'abord qu'au cours du (a) nous avons montré que toute mesure conique maximale de résultante dans $\tilde{C}$ est localisable sur C. Cela étant, soient $x \in X$ et $y \in \tilde{C}$ tels que $0 \leqslant x \leqslant y$, et μ et ν les mesures coniques maximales de résultantes respectives x et y. On a que $\mu \leqslant \nu$ et que ν est localisable sur C. D'après la proposition 2.16, μ est localisable sur C. Par suite, sa résultante x est dans $\tilde{C}$.

(c) Montrons enfin que C est un chapeau. Pour cela, il suffit (cf. prop. 4, § 7, chap. 2 de [7]) de vérifier que j_C est linéaire sur X. Puisque $\tilde{C}$ est héréditaire, il suffit de le vérifier sur $\tilde{C}$, ou, ce qui revient au même de vérifier que $E(C)$ est convexe. Et ce dernier point résulte immédiatement de ce que C est un simplexe.

Remarque 2.20. — Si, dans l'énoncé du théorème précédent, on ne suppose pas que X est réticulé, C n'est plus, en général, un chapeau, même si $\tilde{C}$ est héréditaire.

Le résultat suivant est dû à G. Mokobodzski. On en trouvera une autre démonstration dans [31], lemme 28.

Corollaire 2.21. — *Soient* S *un simplexe compact et* F *un sous-convexe compact de* S. *Alors, pour que* F *soit une face de* S, *il faut et il suffit que* $\mathcal{E}(F) \subset \mathcal{E}(S)$.

Démonstration. — Identifions S au convexe $S \times \{1\}$ de $E \times \mathbf{R}$. Le cône pointé $\tilde{S}$ engendré par S dans $E \times \mathbf{R}$ est un cône localement compact et réticulé. Posons $C = F^e$. C est un convexe étoilé dans $\tilde{S}$ et la condition $\mathcal{E}(F) \subset \mathcal{E}(S)$ équivaut à $\mathcal{E}(C) \subset \mathcal{E}_g(\tilde{S})$. Le théorème précédent permet de conclure.

3. Les cônes presque bien coiffés.

DÉFINITIONS 2.22. — *Soit* X *un cône de* $\mathcal{S}$. *On appelle* sous-chevelure *de* X *tout sous-cône héréditaire de* X *qui est réunion de chapeaux de* X, *et on appelle* chevelure de X, *la réunion de tous les chapeaux de* X.

On dit que X *est* presque bien coiffé *si tout* $x \in X$ *est la borne supérieure d'une famille filtrante croissante d'éléments dont chacun est une somme finie d'éléments de la chevelure.*

Pour simplifier, introduisons la notation suivante : *Soit* A *une partie de* X *on note* ffc(A) *l'ensemble des bornes supérieures de familles filtrantes croissantes de points de* A.

Exemple 2.23. — Reprenons l'exemple 1.13 et supposons que toute fonction de C est à valeurs finies. Alors, le cône X, mis en dualité avec C — C est biréticulé et contient le cône $\mathcal{M}_k(\Omega)^+$ des mesures de Radon positives sur Ω à support compact. Il est clair que ce cône est une sous-chevelure de X. De plus, on sait que toute mesure de Radon positive est la borne supérieure des mesures de Radon à support compact qu'elle majore, et ces mesures forment évidemment un ensemble filtrant croissant. Par suite, X est presque bien coiffé.

En particulier, lorsque $C = \mathcal{K}(\Omega)^+$, le cône X n'est autre que $\mathcal{M}(\Omega)^+$ qui est donc presque bien coiffé. On notera que, lorsque Ω n'est pas dénombrable à l'infini, $\mathcal{M}(\Omega)^+$ n'est pas, en général, bien coiffé.

Exemple 2.24. — Soit T un ensemble. On considère le cône $l^\infty(T)^+$ des suites bornées de réels positifs indexées par T. Si on le met en dualité avec l'espace $l^1(T)$ des suites réelles sommables indexées par T, $l^\infty(T)^+$ est un cône biréticulé. Notons Y l'enveloppe convexe des génératrices extrémales de $l^\infty(T)^+$; Y est l'ensemble des suites (x_t) telles que $x_t = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Y est une sous-chevelure de $l^\infty(T)^+$ et, toute suite bornée est la borne supérieure de la famille filtrante croissante des suites dans Y qu'elle majore. Ainsi, $l^\infty(T)^+$ est presque bien coiffé. On notera que, dès que T est infini, $l^\infty(T)^+$ n'est pas bien coiffé. En effet, Asimow a montré dans le théorème 4.2 de [2], que la chevelure de $l^\infty(T)^+$ est $l^1(T)^+$.

Nous allons donner maintenant quelques propriétés de stabilité des cônes presque bien coiffés. Auparavant, rappelons que si X et Y sont deux cônes de $\mathcal{G}$, une application linéaire φ de X dans Y est dite *directe* si elle est continue et si $\varphi(\mathcal{E}_g(X)) \subset \mathcal{E}_g(Y)$:

LEMME 2.25. — *Soient* X *et* Y *deux cônes de* $\mathcal{G}$ *et* φ *une application linéaire directe de* X *dans* Y. *Alors, si* Y *est réticulé, l'image de tout chapeau* C *de* X *est un chapeau de* Y.

Démonstration. — D'après le théorème 2.19, il nous suffit de montrer que $\mathcal{E}(\varphi(C)) \subset \mathcal{E}_g(Y)$. Soit donc $x \in \mathcal{E}(\varphi(C))$. Posons $F = \varphi^{-1}(x) \cap C$. Alors, F est une face fermée non vide de C. Donc, F a au moins un point extrémal y. Comme C est un chapeau, $y \in \mathcal{E}_g(X)$, et comme φ est directe, on a $x = \varphi(y) \in \mathcal{E}_g(Y)$.

PROPOSITION 2.26. — (*a*) *Tout cône presque bien coiffé est profilé.*

(*b*) *Soient* X *et* Y *deux cônes de* $\mathcal{G}$, *le second étant réticulé, et* φ *une application linéaire directe de* X *sur* Y. *Alors, si* X *est presque bien coiffé,* Y *est presque bien coiffé.*

(*c*) *Toute face fermée d'un cône presque bien coiffé est un cône presque bien coiffé.*

(*d*) *Tout produit de cônes presque bien coiffés est un cône presque bien coiffé.*

Démonstration. — (*a*) Cela a été montré dans [27], exemple 43.

(*b*) C'est une conséquence directe du lemme précédent et du fait que φ est surjective.

(*c*) C'est immédiat.

(*d*) Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ un produit de cônes presque bien coiffés. Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble des parties finies de I, et pour chaque $J \in \mathcal{J}$, notons : $X_J = \{(x_i) \in X | x_i = 0 \text{ si } i \notin J\}$, p_J la projection de X sur X_J et q_J l'injection de $\prod_{j \in J} X_j$ sur X_J. Notons aussi Y la chevelure de X et $Z = \text{ffc}(\text{conv}(Y))$. L'ensemble Z est un cône convexe tel que $\text{ffc}(Z) = Z$. Cela étant, comme $q_{\{i\}}$ est bicontinue, $X_{\{i\}} = q_{\{i\}}(X_i)$ est presque bien coiffé. Comme $X_{\{i\}}$ est une face de X, on a $X_{\{i\}} \subset Z$. Comme Z est convexe, cela implique $X_J \subset Z$, pour tout $J \in \mathfrak{J}$. Prenons maintenant x quelconque dans X. x est la borne supérieure de la famille filtrante croissante $(p_J(x))$, $(J \in \mathfrak{J})$. Comme chaque $p_J(x) \in Z$, on a $x \in \mathrm{ffc}(Z) = Z$.

Corollaire 2.27. — *Si* X *est un cône presque bien coiffé, on a:* $F = \overline{\mathrm{conv}}\,(\mathcal{E}_g(F))$ *pour toute face fermée* F *de* X.

Démonstration. — Si F est une face fermée de X, F est un cône presque bien coiffé d'après le (c) de la proposition précédente. D'après le (a), F est un cône profilé et d'après la proposition 36 de [27], il en résulte que $F = \overline{\mathrm{conv}}\,(\mathcal{E}_g(F))$.

Corollaire 2.28. — *Un sous-cône convexe fermé d'un cône presque bien coiffé n'est pas, en général, un cône presque bien coiffé.*

Démonstration. — Soit X un cône de $\mathcal{S}$. On sait (cf. par exemple la prop. 30.10 de [14] que X s'identifie à un sous-cône fermé d'un $\mathbf{R}_+^I$ qui, d'après le (d) de la proposition précédente est presque bien coiffé. Or, X pouvant ne pas être égal à l'enveloppe convexe fermée de ses génératrices extrémales (cf. [10]) n'est pas, en général, presque bien coiffé.

Remarque 2.29. — Nous n'avons pas trouvé d'exemple de cône profilé non presque bien coiffé.

4. Les cônes presque bien coiffés réticulés.

Lemme 2.30. — *Si* X *est un cône réticulé de* $\mathcal{S}$, *l'enveloppe convexe de deux chapeaux de* X *est encore un chapeau de* X.

Démonstration. — Soient A et B deux chapeaux de X et $C = \mathrm{conv}\,(A \cup B)$. Si $x \in \mathcal{E}(C)$, $x \in A \cup B$ d'après Krein-Milman, et par suite x est extrémal dans A ou B. Cela implique $x \in \mathcal{E}_g(X)$. D'après le théorème 2.19, il en résulte que C est un chapeau de X.

Notations 2.31. — *Soit* Y *un cône convexe saillant pointé. Si* x *et* $y \in Y$, *on note* $\sup_Y(x, y)$ *la borne supérieure, si* *elle existe, de* x *et* y *dans* Y. *Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on omettra l'indice* Y.

PROPOSITION 2.32. — *Pour un cône presque bien coiffé* X, *il est équivalent de dire :*

(*a*) X *est réticulé ;*

(*b*) *La chevelure* Y *de* X *est un cône convexe réticulé vérifiant la propriété suivante :*
(S) *Si* x *et* $y \in \mathrm{Y}$, $\sup_{\mathrm{X}}(x, y)$ *existe et est égal à* $\sup_{\mathrm{Y}}(x, y)$.

(*c*) *Il existe une sous-chevelure* Y *de* X *qui soit un cône convexe réticulé, qui vérifie la propriété* (S) *et qui est telle que* $\mathrm{ffc}(\mathrm{Y}) = \mathrm{X}$.

Démonstration. — ((*a*) $\Longrightarrow$ (*b*)). D'après le lemme précédent, la chevelure Y de X est un cône convexe, donc une face. Prenons x et $y \in \mathrm{Y}$ et montrons que $\sup_{\mathrm{Y}}(x, y) = \sup_{\mathrm{X}}(x, y)$. D'abord, on a : $\sup_{\mathrm{X}}(x, y) \leqslant \sup_{\mathrm{Y}}(x, y)$. Mais, comme Y est une face, $\sup_{\mathrm{X}}(x, y) \in \mathrm{Y}$, d'où l'égalité

$$\sup_{\mathrm{Y}}(x, y) = \sup_{\mathrm{X}}(x, y).$$

((*b*) $\Longrightarrow$ (*c*)). C'est évident.

((*c*) $\Longrightarrow$ (*a*)). Soient Y une sous-chevelure de X vérifiant les conditions de (*c*) et $x, y \in \mathrm{X}$. On a, par définition $x = \sup_i (x_i)$ (resp. $y = \sup_j (y_j)$), où (x_i) (resp. (y_j)) est une famille filtrante croissante de points de Y. Considérons $z = \sup_{i,j}(\sup_{\mathrm{Y}}(x_i, y_j))$. Il est clair que z est un majorant de x et y dans X. Inversement, soit z' un majorant de x et y dans X. On a, à fortiori, $z' \geqslant x_i, y_j$, donc, compte tenu de la propriété (S), $z' \geqslant \sup_{\mathrm{X}}(x_i, y_j) = \sup_{\mathrm{Y}}(x_i, y_j)$. D'où $z' \geqslant z$.

Pour déterminer si une sous-chevelure qui est un cône convexe réticulé vérifie la condition (S), nous utiliserons le résultat suivant :

PROPOSITION 2.33. — *Soit* Y *une sous-chevelure d'un cône* X *de* $\mathscr{S}$, *qui est un cône convexe réticulé. Alors, si* Y *est la somme d'une famille* (F_i) *de faces complémentables de* X, Y *vérifie* (S).

Démonstration. — L'ensemble des faces complémentables de X étant stable par somme finie, on peut supposer que la famille (F_i) est filtrante croissante. De plus, à chaque face F_i, on peut associer une projection linéaire p_i de X sur F_i, définie explicitement par $p_i(z) = \sup\ (F_i \cap (z - X))$, $(\forall z \in X)$, (cf. § 4 de [27]). Cela étant, prenons x et $y \in Y$ et $z \in X$ tel que $z \geqslant \sup_Y (x, y)$. Comme la famille (F_i) est filtrante croissante, il existe un indice j tel que x et $y \in F_j$. Par suite, on a

$$z \geqslant p_j(z) \geqslant p_j(x),\quad p_j(y).$$

Comme p_j se réduit à l'identité sur F_j, $p_j(z)$ est un majorant de x et y dans F_j. On a donc $p_j(z) \geqslant \sup_Y (x, y)$, et, à fortiori, $z \geqslant \sup_Y (x, y)$. Ainsi, $\sup_X (x, y)$ existe et est égal à $\sup_Y (x, y)$.

Remarque 2.34. — Dans l'énoncé (*c*) de la proposition 2.32, la propriété (S) est essentielle. En effet, prenons pour X un cône ayant pour base B un convexe compact métrisable ou plus généralement standard (cf. [31]). Considérons l'ensemble $\mathcal{F}_k$ des faces fermées F de X telles que $F \cap \mathcal{E}(B)$ soit compact et notons Y la réunion de ces faces. Il est facile de voir que Y est une sous-chevelure de X telle que $\mathrm{ffc}\,(Y) = X$. Supposons de plus, que chaque face de $\mathcal{F}_k$ soit complémentaire. Alors, il en résulte facilement que chaque face de $\mathcal{F}_k$ est un cône réticulé, et que la famille $\mathcal{F}_k$ est stable par somme finie. Ainsi, la sous-chevelure Y est un cône convexe réticulé qui, d'après la proposition 2.33 vérifie (S). Par suite, X est un cône réticulé et B est un simplexe. Ceci n'est autre que le théorème 37 de [31]. Supposons maintenant que B est le convexe compact X_2 défini dans le théorème 32 de [31]. Alors, la famille $\mathcal{F}_k$ est encore stable par somme finie et chaque face de $\mathcal{F}_k$ est un cône réticulé, sans être nécessairement une face complémentaire. Par suite, la sous-chevelure Y est un cône réticulé tel que $\mathrm{ffc}(Y) = X$. Cependant, X n'est pas réticulé car X_2 n'est pas un simplexe.

LEMME 2.35. — *Soient* X *un cône réticulé de* $\mathcal{S}$, x *et* y *deux points de* X *tels que* $0 \leqslant x \leqslant y$ *et* (y_i) *une famille filtrante croissante de points de* X, *de borne supérieure* y. *Pour* *tout* i, *posons* $x_i = \inf(y_i, x)$. *Alors, la famille* (x_i) *est filtrante croissante de borne supérieure* x.

Démonstration. — Posons $z_i = y - y_i$. On a $x \leqslant y_i + z_i$. Puisque X est réticulé, le lemme de décomposition de Riesz permet d'écrire :

$$x = x_i^1 + x_i^2 \qquad \text{avec} \qquad x_i^1 \leqslant y_i \qquad \text{et} \qquad x_i^2 \leqslant z_i.$$

D'après le lemme 11 de [27], $z_i \longmapsto 0$. Par suite $x_i^2 \longmapsto 0$, donc $x_i^1 \longmapsto x$. L'inégalité $x_i^1 \leqslant x_i$, implique, à fortiori, $x_i \longmapsto x$. Le même lemme dit alors que x est la borne supérieure des x_i.

LEMME 2.36. — *Soient* X *un cône réticulé presque bien coiffé et* F *un sous-cône convexe fermé de* X. *Alors, pour que* F *soit une face de* X, *il faut et il suffit que* $\mathcal{E}_g(\mathrm{F}) \subset \mathcal{E}_g(\mathrm{X})$.

Démonstration. — Dans un sens, c'est évident, car si F est une face de X, on a toujours $\mathcal{E}_g(\mathrm{F}) \subset \mathcal{E}_g(\mathrm{X})$, (prop. 1.6 de [24]). Inversement, partons d'un cône convexe fermé F de X tel que $\mathcal{E}_g(\mathrm{F}) \subset \mathcal{E}_g(\mathrm{X})$. Montrons d'abord que, pour tout chapeau C de X, $\mathrm{F} \cap \mathrm{C}$ est une face de C. Comme X est réticulé, C est un simplexe et il nous suffit de vérifier que $\mathcal{E}(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) \subset \mathcal{E}(\mathrm{C})$, (corol. 2.21). Posons $\mathrm{C}' = \mathrm{C} \cap \mathrm{F}$. L'ensemble C′ est un chapeau de F. On a donc :

$$\mathcal{E}(\mathrm{C}') \diagdown \{0\} = \mathrm{E}(\mathrm{C}') \cap \mathcal{E}_g(\mathrm{F}) \subset \mathrm{E}(\mathrm{C}) \cap \mathrm{F} \cap \mathcal{E}_g(\mathrm{X}) \subset \mathcal{E}(\mathrm{C}) \diagdown \{0\},$$

d'où : $\mathcal{E}(\mathrm{C}') \subset \mathcal{E}(\mathrm{C})$. Montrons maintenant que la trace de F sur la chevelure Y de X est une face de X. L'ensemble Y étant convexe (prop. 2.32), $\mathrm{F} \cap \mathrm{Y}$ est convexe, et nous avons seulement à vérifier que $\mathrm{F} \cap \mathrm{Y}$ est héréditaire. Prenons donc $0 \leqslant x \leqslant y$ avec $y \in \mathrm{Y} \cap \mathrm{F}$ et $x \in \mathrm{X}$. Par définition, il existe un chapeau C de X contenant y. Or, un chapeau est un ensemble héréditaire de X, de sorte que $x \in \mathrm{C}$. De plus, $\mathrm{C} \cap \mathrm{F}$ est une face de C contenant l'origine, de sorte que $x \in \mathrm{C} \cap \mathrm{F} \subset \mathrm{Y} \cap \mathrm{F}$. Montrons enfin que F est une face de X. Prenons donc $0 \leqslant x \leqslant y$, avec $y \in \mathrm{F}$ et $x \in \mathrm{X}$. Par définition, il existe une famille filtrante croissante (y_i) de points de Y de borne supérieure y. D'après le lemme 2.35, la famille $(\inf(y_i, x))$ est filtrante croissante de borne supérieure x. Or, on vient de voir que $F \cap Y$ est une face de X. Par suite, $\inf(y_i, x) \in F$ pour tout i, d'où résulte, comme F est fermé, que $x \in F$.

THÉORÈME 2.37. — *Pour un cône réticulé presque bien coiffé* X, *il est équivalent de dire :*

(a) X *est biréticulé ;*

(b) $\mathcal{E}_g(X)$ *est fermé dans* X.

Démonstration. — L'implication $((a) \Longrightarrow (b))$ a déjà été montrée (corol. 1.20). Montrons que : $((b) \Longrightarrow (a))$. Pour cela montrons que le (b) implique le (b) du théorème 2.4. Prenons $l \in L_c(X)^+$, $l \neq 0$ et $x \in E_l = \mathcal{E}(B_l)$. Puisque x est extrémal dans B_l, x est extrémal fort ; par suite, un voisinage ouvert de x dans E_l contient un ouvert de la forme $\{f > 0\} \cap E_l$, où $f \in L_c(X)$. Considérons l'ensemble $Y = \{f \leqslant 0\} \cap \mathcal{E}_g(X)$. Par hypothèse c'est un ensemble fermé dans X. Son enveloppe convexe fermée Z est donc telle que $\mathcal{E}_g(Z) \subset Y$. En fait, on a $\mathcal{E}_g(Z) = Y$, car toute génératrice dans Y est extrémale dans X, donc, à fortiori, extrémale dans Z. Par suite, le lemme 2.36 implique que Z est une face fermée de X, de sorte que, l'ensemble $\{f > 0\} \cap E_l = F' \cap E_l$ est un ouvert AA-facial de E_l. Ainsi, les topologies faible et AA-faciale coïncident sur E_l, ce qui prouve le (b) du théorème 2.4.

5. Retour sur la topologie AA-faciale.

Soit X un cône de $\mathcal{S}$. Pour simplifier, on pose $Y = \mathcal{E}_g(X)$ et $Y_* = Y \setminus \{0\}$.

DÉFINITION 2.38. — *On appelle* espace structurel *de* X, *et on note* $\mathrm{St}(X)$, *le quotient de* Y_* *muni de la topologie* AA-*faciale par la relation d'équivalence :* $(x \rho y) \Longleftrightarrow$ (x *et* y *sont sur une même génératrice*).

Pour se représenter concrètement $\mathrm{St}(X)$, il est avantageux de procéder comme suit : Appelons *sous-section* (resp. *section*) de Y, tout ensemble $T \subset Y_*$ qui rencontre chaque génératrice extrémale en un point au plus (resp. en un et un seul point). Se donner une section T, c'est se donner une application homogène s_T sur Y, strictement positive sur Y_*, telle que : $\{s_T = 1\} = T$. Si on munit une section T de la topologie AA-faciale, il est clair que l'application : $x \longmapsto \dfrac{x}{s_T(x)}$, définit, par passage au quotient modulo ρ un homéomorphisme de St(X) sur T.

Lemme 2.39. — *Pour un cône* X *de* $\mathcal{G}$, *considérons les propriétés suivantes :*

(*a*) St(X) *est séparé ;*

(*b*) E_l *est* AA-*facialement séparé pour tout* $l \in L_c(X)^+$, $l \neq 0$. *Alors, on a* $((a) \Longrightarrow (b))$ *et, si* X *est réticulé,* $((b) \Longrightarrow (a))$.

Démonstration. — Fixons $l \in L_c(X)^+$, $l \neq 0$. Notons F_l la face fermée $l^{-1}(0)$. En utilisant Zorn, on voit que E_l est contenu dans une section T de Y. Cette section T munie de la topologie AA-faciale est homéomorphe à St(X). Si St(X) est séparé, E_l l'est donc aussi. Inversement, si X est réticulé, F_l est une face fermée complémentable et $E_l = T \cap (F_l)'$ est un ouvert AA-facial de T. Par suite, si (*b*) est vrai, St(X) est séparé car, si D et D′ sont deux génératrices extrémales distinctes, il existe $l \in L_c(X)^+$ avec $l > 0$ sur D et D′.

Lemme 2.40. — *Soit* D *une génératrice extrémale de* X. *Alors, tout* $x \in X$ *s'écrit de manière unique :* $x = d + t$, *avec* $d \in D$ *et* $t \in D'$, *où* D′ *est la réunion des faces de* X *rencontrant* D *en* $\{0\}$.

Démonstration. — Considérons l'ensemble $D_x = D \cap (x - X)$. C'est un segment de droite. Il a donc un et un seul élément maximal d. Du lemme 4 de [27], résulte qu'il y a une seule écriture de x suivant D et D′.

Proposition 2.41. — *Soit* X *un cône profilé de* $\mathcal{G}$ *tel que* St(X) *soit séparé. Alors* E_l *est fermé pour tout* $l \in L_c(X)^+$, $l \neq 0$.

Démonstration. — Fixons l. Soient $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur E_l, convergeant vers $x \in B_l$, F_x la plus petite face fermée complémentable contenant x, et $z \in E_l \cap F_x$. Montrons que z est AA-facialement adhérent à $\mathcal{U}$. Dans le cas contraire, il existerait une face fermée complémentable F telle que $F \cap E_l \in \mathcal{U}$

et que $z \notin F$. Puisque F est fermé, on aurait $x \in F$, donc $F_x \subset F$, ce qui serait absurde car $z \in F_x$. Ainsi, tout point de $E_l \cap F_x$ est AA-facialement adhérent à $\mathfrak{U}$. Comme $\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre, $\mathfrak{U}$ converge AA-facialement vers tous les points de $E_l \cap F_x$. Mais, par hypothèse $\mathrm{St}(X)$ est séparé. D'après le lemme 2.39, E_l est aussi séparé pour la topologie AA-faciale, de sorte que $\mathfrak{U}$ a un seul point limite z_l, qui est donc le seul point de $E_l \cap F_x$. Montrons maintenant que F_x se réduit à une demi-droite. Notons d'abord que, puisque X est profilé, on a : $F_x = \overline{\mathrm{conv}}\,(\mathcal{E}_g(F_x))$. Par suite, si F_x ne se réduisait pas à une demi-droite, F_x aurait au moins deux génératrices extrémales distinctes D_1 et D_2. Prenant alors, $l' \in L_c(X)^+$ tel que $l' > 0$ sur D_1 et D_2, on aurait que $F_x \cap E_l'$ a au moins deux points distincts, ce qui serait absurde puisque $F_x \cap E_{l'} = z_{l'}$. Ainsi, F_x se réduit à une demi-droite. Par suite, $x = z_l \in E_l$, et E_l est fermé dans X.

COROLLAIRE 2.42. — *Si* X *est un cône profilé de* $\mathcal{S}$ *tel que* $\mathrm{St}(X)$ *soit séparé, alors,* $\mathcal{E}_g(X)$ *est fermé dans* X.

Démonstration. — Prenons un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur $\mathcal{E}_g(X)$ qui converge faiblement vers $x \in X$. Si $x = 0$, c'est terminé. Supposons donc que $x \neq 0$. Alors, il existe $l \in L_c(X)^+$ tel que $l(x) > 0$. Notons p_l l'application $x \longmapsto (x/l(x))$ définie sur $\{l > 0\}$ à valeurs dans B_l. Elle est continue, par suite $p_l(\mathfrak{U})$ converge vers $p_l(x)$. Comme la base de filtre $p_l(\mathfrak{U})$ est dans E_l qui est fermé d'après la proposition précédente, on a $p_l(x) \in E_l$, donc $x \in \mathcal{E}_g(X)$.

Notations 2.43. — Soit X un cône de $\mathcal{S}$. On note $C_k(X)$, la sous-chevelure de X formée de la réunion des chapeaux C de X tels que $E(C)$ soit compact (cf. notations 2.7). Si C est un tel chapeau, $\tilde{C}$ est une face de X qui est un cône localement compact. Inversement, si Y est une face de X qui est un cône localement compact, Y a une base compacte B (prop. 6, § 7, chap. 2 de [7]). Par suite, l'enveloppe étoilée B^e de B est un chapeau de X tel que $E(B^e) = B$. Ainsi, si on note $\mathcal{F}_{lc}(X)$ la famille des faces de X qui sont des cônes localement compacts, $C_k(X)$ est la réunion des ensembles de $\mathcal{F}_{lc}(X)$.

LEMME 2.44. — *Soit* X *un cône profilé de* $\mathcal{G}$ *tel que* St(X) *soit séparé. Alors,*

(*a*) *Si* F *est un sous-cône convexe localement compact de* X *tel que* $\mathcal{E}_g(F) \subset \mathcal{E}_g(X)$, $F \in \mathcal{F}_{lc}(X)$.

(*b*) *Tout* $F \in \mathcal{F}_{lc}(X)$ *est une face complémentable de* X *et un cône réticulé.*

(*c*) $\mathcal{F}_{lc}(X)$ *est stable par somme finie.*

Démonstration. — (*a*) Soient F comme indiqué et $l \in L_c(X)^+$ tel que $l > 0$ sur F. Comme F est localement compact, sa base $B = F \cap B_l$ est compacte. Par suite, l'ensemble $T = F \cap E_l = \mathcal{E}(B) = B \cap \mathcal{E}_g(X)$ est compact dans E_l d'après le corollaire 2.42. Or, d'après le lemme 2.39, la topologie AA-faciale est séparée sur E_l. Par suite, sa trace sur T coïncide avec la topologie faible et T est AA-facialement compact. C'est donc un fermé AA-facial de E_l. Par définition de la topologie AA-faciale, il existe une face fermée complémentable G_l telle que $G_l \cap E_l = T$. Notons G l'intersection de ces faces G_l, lorsque l parcourt $L_c(X)^+$, avec $l > 0$ sur F. Comme G est une intersection de faces fermées complémentables, c'est une face fermée complémentable (prop. 28 de [27]). Si on avait $G \neq F$, il existerait $d \in \mathcal{E}_g(G) \setminus \mathcal{E}_g(F)$ (prop. 36 et 39 (*b*) de [27]). Prenant $l' \in L_c(X)^+$ telle que $l' > 0$ sur F et que $l'(d) > 0$, on aurait que $d \notin G_{l'}$, ce qui serait absurde. Ainsi $F = G$ et F est une face fermée complémentable.

(*b*) Prenons $F \in \mathcal{F}_{lc}(X)$. Puisque F est une face, on a $\mathcal{E}_g(F) \subset \mathcal{E}_g(X)$. Par suite, il résulte de la démonstration du (*a*) que F est une face fermée complémentable de X. Ceci implique que toute face fermée complémentable de F est une face fermée complémentable de X. De sorte, que si B est une base de F, la topologie AA-faciale sur $T = \mathcal{E}(B)$ relativement à F coïncide avec la topologie AA-faciale relativement à X. Par suite, comme on l'a remarqué dans la démonstration du (*a*), la topologie AA-faciale relativement à F et la topologie faible coïncident sur T. D'après le théorème 2.4 et la remarque 2.5, F est donc un cône biréticulé, donc un cône réticulé.

(*c*) Prenons F et $G \in \mathcal{F}_{lc}(X)$. Le cône $F + G$ est d'une part localement compact et d'autre part une face complémentable comme somme de deux telles faces. On a donc bien $F + G \in \mathcal{F}_{lc}(X)$.

THÉORÈME 2.45. — *Pour un cône presque bien coiffé* X *de* $\mathcal{S}$, *il est équivalent de dire :*

(*a*) X *est biréticulé*;

(*b*) St(X) *est séparé.*

Démonstration. — $((a) \Longrightarrow (b))$. Cela résulte du lemme 39 et du théorème 2.4 (*b*).

$((b) \Longrightarrow (a))$. Compte tenu du théorème 2.37 et du corollaire 2.42, il nous suffit de montrer que X est réticulé. Pour cela, nous allons vérifier que la sous-chevelure $C_k(X)$ vérifie les conditions de la proposition 2.32 (*c*).

(α) $C_k(X)$ *est un cône convexe réticulé.* En effet, d'après le lemme 2.44 (*c*), $C_k(X)$ est la réunion d'une famille filtrante croissante de faces qui sont des cônes réticulés. Par suite, $C_k(X)$ est une face qui est un cône réticulé.

(β) $C_k(X)$ *vérifie la propriété* (S). Cela résulte du lemme 2.44 (*b*), du (α) et de la proposition 2.33.

(γ) $\mathrm{ffc}(C_k(X)) = X$. Comme X est presque bien coiffé, il suffit de montrer que $\mathrm{ffc}(C_k(X))$ contient la chevelure Y de X. Soit donc $y \in Y$. Par définition, il existe un chapeau C de X contenant y. Soit maintenant μ une mesure conique maximale de résultante y. D'après la proposition 30.20 de [14], il existe une localisation θ de μ sur C, qui est maximale sur C. D'après le lemme 2.18, θ est portée par E(C), et d'après le corollaire 2.42, elle est portée par $C \cap \mathcal{E}_g(X)$ qui est un fermé contenant $\mathcal{E}(C)$. Elle est donc portée par

$$E(C) \cap \mathcal{E}_g(X).$$

Par suite, il existe une suite croissante (K_n) de compacts de $E(C) \cap \mathcal{E}_g(X)$, dont la réunion porte θ. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, considérons $C_n = \overline{\mathrm{conv}}\,(K_n)$. C'est un convexe compact ne rencontrant pas l'origine. Par suite, $\tilde{C}_n$ est un cône convexe localement compact. De plus, on a : $\mathcal{E}_g(\tilde{C}_n) = \tilde{K}_n \subset \mathcal{E}_g(X)$. Par suite, d'après le lemme 2.44 (*a*), $\tilde{C}_n \in \mathcal{F}_{lc}(X)$. Cela étant, considérons $\theta_n = \theta_{|K_n}$ et notons x_n la résultante de θ_n. Il est clair que $x_n \in \tilde{C}_n$. D'autre part, $\tilde{\theta}_n$ est une suite croissante de mesures coniques convergeant vers μ, par suite, (x_n) est une suite croissante de points de $C_k(X)$ qui convergent vers x. D'après le lemme 11 de [27], cela équivaut à dire que x est la borne supérieure des x_n, d'où le résultat.

C.Q.F.D.

Corollaire 2.46. — *Pour qu'un cône réticulé presque bien coiffé* X *de soit biréticulé, il faut et il suffit qu'il vérifie la propriété suivante dite « Axiome de Størmer »:*

(AS) *Pour toute famille* (F_i) *de faces fermées de* X, $\overline{\text{conv}}\,(\cup F_i)$ *est une face fermée de* X.

Démonstration. — La nécessité résulte du théorème 1.16 (*b*). Inversement, supposons que X vérifie l'axiome de Størmer et montrons que St(X) est séparé. Représentons St(X) par une section T de $\mathcal{E}_g(X)$ munie de la topologie AA-faciale et prenons x et y distincts dans T. Il existe un $f \in L_c(X)$ tel que $f(x) < 0 < f(y)$. Posons $A = \{f \leqslant 0\} \cap \mathcal{E}_g(X)$ et $B = \{f \geqslant 0\} \cap \mathcal{E}_g(X)$. Chaque génératrice extrémale étant une face fermée de X, il résulte de l'axiome de Størmer que les ensembles $A_1 = \overline{\text{conv}}\,(A)$ et $B_1 = \overline{\text{conv}}\,(B)$ sont des faces fermées de X. Il est clair que $x \in A_1$ et que $y \notin A_1$ puisque $A_1 \subset \{f \leqslant 0\}$; De la même façon, on a $y \in B_1$ et $x \notin B_1$. De plus, la réunion de A_1 et B_1 recouvre T de sorte que, les ouverts faciaux $(T \setminus B_1)$ et $(T \setminus A_1)$ sont disjoints et contiennent x et y respectivement.

Remarque 2.47. — (*a*) Le théorème 2.45 était connu pour les cônes localement compacts (th. 6.2 de [1]). Par contre, pour les cônes ayant un chapeau universel, il n'était connu qu'en partie. De manière précise, l'implication ((*b*) $\Longrightarrow$ (*a*)) avait été prouvée par Effros (th. 3.8 de [19]) et ((*a*) $\Longrightarrow$ (*b*)) l'avait été par Effros et Gleit (corol. 2.6 de [20]), mais toutes deux avec l'hypothèse supplémentaire que le cône X était réticulé.

(*b*) De même, le corollaire 2.46 étant connu pour les cônes localement compacts (cf. th. 6.3 de [1] et th. 4.3 de [32]). Il n'est pas exclu que ce corollaire soit vrai sans l'hypothèse que X est presque bien coiffé.

CHAPITRE 3

LA COMPACTIFICATION LINÉAIRE

1. Homomorphismes de cônes de $\mathcal{S}$.

Soient X et Y des cônes de $\mathcal{S}$ et E et F leurs espaces ambiants maximaux respectifs. Une application linéaire continue π de X dans Y se prolonge de manière unique en une application linéaire $\bar{\pi}$ de E dans F. Comme $\bar{\pi} \circ f \in X'$ dès que $f \in Y'$, $\bar{\pi}$ est continue et les résultats classiques sur la dualité montrent qu'il existe une application linéaire positive de Y' dans X' ou, ce qui revient au même, de $L_c(Y)$ dans $L_c(X)$, à savoir la transposée de $\bar{\pi}$, que nous notons ${}^t\pi$, vérifiant :

$$(3.1) \qquad {}^t\pi(l)(x) = l(\pi(x)), \qquad (\forall x \in X), \ (\forall l \in L_c(Y)).$$

Et réciproquement, si φ est une application linéaire positive de $L_c(Y)$ dans $L_c(X)$, sa transposée ${}^t\varphi$ est une application linéaire continue de E dans F vérifiant :

$$(3.2) \quad \varphi(l)(x) = l({}^t\varphi(x)), \qquad (\forall x \in X), \qquad (\forall l \in L_c(Y)).$$

Des arguments standard dans la théorie de la dualité permettent de montrer les résultats suivants, que nous admettrons :

Proposition 3.3. — *Soient* X *et* Y *deux cônes de* $\mathcal{S}$, π *une application linéaire continue de* X *dans* Y *et* φ *sa transposée. Alors :*

(*a*) *Pour que* π *soit injective, il faut et il suffit que* $\varphi(L_c(Y))$ *sépare les points de* X.

(*b*) *Pour que* $\pi(X)$ *soit dense dans* Y, *il faut et il suffit que* φ *soit injective et vérifie l'égalité suivante :*

$$(3.4) \qquad \varphi(L_c(Y)^+) = \varphi(L_c(Y)) \cap L_c(X)^+.$$

Remarque 3.5. — Dans $\mathbf{R}^2$, prenons $Y = \{(x, y) | x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0\}$, $X = \{(x, y) | y \geqslant x \geqslant 0\}$ et pour π l'injection naturelle. L'application φ est évidemment bijective, mais ne vérifie pas (3.4).

2. La compactification linéaire : Position du problème.

DÉFINITION 3.6. — *Soit* X *un cône de* $\mathcal{S}$. *On dit qu'un couple* (π, Z) *est une* compactification linénaire *de* X, *si* Z *est un cône localement compact de* $\mathcal{S}$ *et* π *une application linéaire continue de* X *dans* Z *telle que* $\pi(X)$ *soit dense dans* Z. *On dit alors que* Z *est un* compactifié linéaire *de* X. *Si un tel couple existe, on dit que* X *est* linéairement compactifiable.

Rappelons en passant, qu'un cône X de $\mathcal{S}$ est localement compact si, et seulement si, il a une base compacte B; et dans ce cas, toute autre base de X est compacte (cf. § 7, chap. 2 de [7]).

Nous allons donner un critère simple pour qu'un cône X de $\mathcal{S}$ soit linéairement compactifiable. Voici d'abord deux notations :

Notations 3.7. — Si $l \in L_c(X)^+$, on note $\mathcal{B}_l(X)$ le sous-espace de $L_c(X)$ formé des f telles que : $|f| \leqslant al$, pour un $a \geqslant 0$. On munit $\mathcal{B}_l(X)$ de la norme $||\cdot||_l$ associée à l'unité d'ordre l, définie par :

$$||f||_l = \inf \{a | \; |f| \leqslant al\}.$$

PROPOSITION 3.8. — *Pour qu'un cône* X *de* $\mathcal{S}$ *soit linéairement compactifiable, il faut et il suffit qu'il existe un* $l \in L_c(X)^+$ *tel que* $\mathcal{B}_l(X)$ *sépare les points de* X. *Si cette condition est réalisée, on a* $l > 0$ *sur* X.

Démonstration. — Soit (π, Z) une compactification linéaire de X. Prenons $f \in L_c(Z)$ tel que $f > 0$ sur Z. Puisque Z est localement compact, la base $\{f = 1\}$ est compacte et, par suite, $\mathcal{B}_f(Z) = L_c(Z)$. Il en résulte que si on note $l = {}^t\pi(f)$, on a ${}^t\pi(L_c(Z)) \subset \mathcal{B}_l(X)$. D'où on déduit, compte tenu de la proposition 3.3 (a), que $\mathcal{B}_l(X)$ sépare les points de (X).

Inversement, prenons $l \in L_c(X)^+$ tel que $\mathcal{B}_l(X)$ sépare les points de X. Muni de la norme $||\cdot||_l$, $\mathcal{B}_l(X)$est un Banach ordonné à unité. Par suite, la partie positive Z_l de son dual est un cône faiblement complet à base compacte, autrement dit un cône localement compact de $\mathcal{S}$. L'injection linéaire canonique φ_l de $L_c(Z_l) = \mathcal{B}_l(X)$ dans $L_c(X)$ est telle que $\varphi_l(L_c(Z_l))$ sépare les points de X. De plus, φ_l vérifie évidemment la relation (3.4), de sorte que, d'après la proposition 3.3, la transposée ${}^t\varphi_l$ de φ_l est une application linéaire injective continue de X dans Z_l, à image dense. Ceci exprime que $({}^t\varphi_l, Z_l)$ est une compactification linéaire de X. Enfin, puisque $\mathcal{B}_l(X)$ sépare les points de X, il existe, pour tout $x \in X$, $x \neq 0$, un $f \in \mathcal{B}_l(X)$ tel que $f(x) \neq 0$. Cela implique $l > 0$ sur X.

Notations 3.9. — Soient X un cône de $\mathcal{S}$ et $l \in L_c(X)^+$, $l > 0$ sur X et tel que $\mathcal{B}_l(X)$ sépare les points de X. On note une fois pour toutes (π_l, Z_l) la compactification linéaire construite à partir de l dans la démonstration de la proposition 3.8., en posant $\pi_l = {}^t\varphi_l$. On note B_l la base $\{l = 1\}$ de X et E_l l'ensemble $\mathcal{E}(B_l)$ (éventuellement vide). On note $\overline{B}_l$ la base $\{l = 1\}$ de Z_l et $T_l = \mathcal{E}(\overline{B}_l)$, (la notation, $\overline{B}_l$ ne peut prêter à confusion car $\overline{B}_l$ est, de manière naturelle l'adhérence de $\pi_l(B_l)$ dans Z_l).

Exemple 3.10. — On reprend l'exemple construit par Choquet dans l'exercice 18 du § 6, chap. 2 de [7]. Il s'agit d'un convexe linéairement compact métrisable et faiblement complet A de dimension infinie contenu dans **RN** et obtenu comme limite projective d'un système projectif (A_n, p_{nm}) où $A_n \subset \mathbf{R}^n$ et où p_{nm} est la projection canonique de $\mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^n$ (R^m étant identifié à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n}$). Pour tout n, le cône asymptote de A_{n+1} est $\{0\} \times \mathbf{R}^+$. On en déduit facilement que, si g est une forme affine continue $\geqslant 0$ sur A, l'espace vectoriel des formes affines continues f sur A telles que : $\exists a \geqslant 0$ tel que $|f| \leqslant ag$, est de dimension finie. Il ne peut donc séparer les points de A. Si on identifie A au convexe $A \times \{1\}$ de $\mathbf{RN} \times \mathbf{R}$, il résulte de ce qui vient d'être dit, que le cône pointé Y engendré par A est un cône convexe saillant métrisable faiblement complet ayant une base et qui n'est pas linéairement compactifiable.

Exemple 3.11. — On utilise la terminologie et les notations du chapitre 1 de [17]. Soient H un espace hilbertien ayant une base dénombrable B et $\mathcal{A}$ l'algèbre des opérateurs bornés sur H. Pour $x \in H$, on note w_x l'application

$$A \longmapsto (A(x)|x), \qquad (\forall A \in \mathcal{A}).$$

On sait que le cône $\mathcal{A}^+ = \{A \in \mathcal{A} | w_x(A) \geqslant 0, (\forall x \in H)\}$ est un cône convexe saillant complet pour la topologie de la convergence ultrafaible. Cela étant, considérons l'ensemble dénombrable C réunion de B, $(B + B)$, $(B - B)$, $(B + iB)$, $(B - iB)$, ordonné en une suite (c_n) et choisissons une suite (a_n) de réels strictement positifs telle que $\sum_n a_n \|c_n\|^2 < +\infty$. Alors, on peut montrer que la forme $l = \sum_n a_n w_{c_n}$ est ultrafaiblement continue positive et que $\mathcal{B}_l(\mathcal{A}^+)$ sépare les points de $\mathcal{A}^+$.

Ces exemples suggèrent que l'existence d'une compactification linéaire ne résulte pas de théorèmes généraux, mais semble plutôt dépendre de la situation concrète où l'on se trouve. Nous verrons cependant au numéro suivant que la compactification linéaire existe toujours pour de larges classes de cônes réticulés. Notons dès maintenant que la recherche d'une compactification linéaire (π, Z) d'un cône X de $\mathcal{S}$ n'est intéressante que si Z reflète assez bien la structure de X. Ainsi, si X est réticulé ou bien biréticulé, on veut qu'il en soit de même de Z; on veut aussi que π conserve leur caractère aux génératrices extrémales de X.

Or, l'exemple 3.29 nous montrera un cône biréticulé ayant une compactification linéaire ne vérifiant aucune des propriétés voulues. Aussi, devons-nous nous restreindre à une classe particulière de compactifications. Auparavant, rappelons qu'un sous-espace vectoriel E d'un espace vectoriel ordonné F est *épais* si $E = E^+ - E^+$ et E^+ est héréditaire dans F^+.

DÉFINITION 3.12. — *Soient* X *et* Z *deux cônes de* $\mathcal{S}$ *et* π *une application linéaire continue de* X *dans* Z. *On dit que* π *est* épaisse *si* ${}^t\pi(L_c(Z))$ *est un sous-espace épais de* $L_c(X)$. *On dit qu'une compactification linéaire* (π, Z) *de* X *est* épaisse *si* π *est épaisse, et on dit alors que* Z *est un* compactifié épais *de* X.

Il est clair que toute compactification de la forme (π_l, Z_l) est épaisse. Réciproquement, soit (π, Z) une compactification épaisse de X. Prenons $f \in L_c(Z)$ tel que $f > 0$ sur Z. Comme Z est localement compact, $L_c(Z) = \mathcal{B}_f(Z)$, en sorte que, si on pose $l = {}^t\pi(f)$, on a ${}^t\pi(L_c(Z)) = \mathcal{B}_l(X)$. En conséquence à un homéomorphisme linéaire près, (π, Z) est identique à (π_l, Z_l). En résumé :

Proposition 3.13. — *Soit* X *un cône de* $\mathcal{S}$ *ayant une compactification épaisse* (π, Z). *Alors, il existe un* $l \in L_c(X)^+$ *tel que* $\mathcal{B}_l(X)$ *sépare les points de* X *et un homéomorphisme linéaire* π' *de* Z *sur* Z_l *tel que* $\pi' \circ \pi = \pi_l$.

3. La compactification linéaire : existence pour les cônes biréticulés.

Lemme 3.14. — *Soit* X *un cône réticulé de* $\mathcal{S}$. *On suppose qu'il existe une forme linéaire* l s.c.i. *et* > 0 *sur* X. *Alors, pour toute* $f \in L_c(X)^+$, *on a :*

$$f = \sup_n (\inf_a (f, nl)). \tag{3.15}$$

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $g_n = \inf(f, nl)$. D'après le théorème 1.5, $\check{g}_n$ est linéaire et $\check{g}_n = \inf_a(f, nl)$, de sorte que, d'après la proposition 1.15, les ensembles :

$$F_n = \{\check{g}_n = f\} \qquad \text{et} \qquad \{G_n = \check{g}_n = nl\}$$

sont des faces de X sur lesquelles $\check{g}_n = g_n$ et telles que :

$$X = F_n + G_n.$$

Fixons $x \in X$. On peut écrire $x = x_n + y_n$, avec $x_n \in F_n$ et $y_n \in G_n$, $(\forall n \in \mathbf{N})$. Comme la suite (F_n) est une suite croissante de faces dans X qui est réticulé, on peut supposer que la suite (x_n) est croissante et par suite, que la suite (y_n) est décroissante. On a :

$$f(x) = f(x_n) + f(y_n) \geqslant nl(y_n),$$

d'où : $l(y_n) \leqslant (1/n)f(x)$. Par suite, si y est la borne inférieure des y_n, on a $l(y) = 0$ soit $y = 0$ puisque $l > 0$ sur X.

Il en résulte que x est la borne supérieure de la suite (x_n), donc (lemme 11 de [27]) la limite de la suite (x_n), ce qui permet d'écrire :

$$f(x) = \sup_n f(x_n) = \sup_n \check{g}_n(x_n) \leqslant \sup_n \check{g}_n(x),$$

d'où (3.15).

LEMME 3.16. — *Soit* X *un cône de* $\mathcal{G}$. *Pour toute forme linéaire positive* L *sur* $L_c(X)$, *il existe un* $x \in X$ *tel que :* $L(l) = l(x)$, $(\forall l \in L_c(X))$.

Démonstration. — Soit E l'espace ambiant maximal de X. Par définition, son dual topologique E' est l'espace des formes linéaires sur E dont la restriction à X est continue. Considérons le complété faible $\overline{E}$ de E. Son dual topologique est encore E'. Par suite, si à tout $x \in E$ on associe son évaluation $\delta(x)$ sur E', il résulte du corollaire 22.17 de [14] que δ est un homéomorphisme linéaire de E sur $(E')^*$. En particulier, $\delta(X)$ est fermé. Par suite, $\delta(X)$ est égal à son bipolaire, donc au polaire de X^o. D'où le résultat : En effet, soit L une forme linéaire positive sur $L_c(X)$. L'application linéaire L' : $f \longmapsto L(f_{|X})$ est un élément du polaire de X^o, donc un élément de $\delta(X)$.

PROPOSITION 3.17. — *Pour qu'un cône biréticulé* X *de* $\mathcal{G}$ *soit linéairement compactifiable, il faut et il suffit qu'il ait une base. De plus, si c'est le cas, on a, pour tout* $l \in L_c(X)^+$, *tel que* $l > 0$ *sur* X :

(*a*) $\mathcal{B}_l(X)$ *sépare les points de* X;

(*b*) Z_l *est un cône biréticulé et* $\pi_l(X)$ *est héréditaire dans* Z_l.

Démonstration. — Si X est linéairement compactifiable, X a une base d'après la proposition 3.8. La réciproque résultera du (*a*) que nous allons montrer.

(*a*) Soient x et y distincts dans X et $f \in L_c(X)^+$ tel que $f(x) \neq f(y)$. D'après le lemme 3.14, il existe n assez grand pour que $\inf_a(f, nl)(x) \neq \inf_a(f, nl)(y)$. Or, comme X est biréticulé la fonction $g = \inf_a(f, nl)(\in L_c(X)^+$, (prop. 1.8), ce qui prouve le (*a*), compte tenu de l'inégalité $g \leqslant nl$.

(*b*) $\mathcal{B}_l(X)$ étant épais, c'est un espace réticulé pour l'ordre usuel. Comme $\mathcal{B}_l(X) = \pi_l(L_c(Z_l))$, $L_c(Z_l)$ est aussi réticulé, ce qui par définition exprime que Z_l est biréticulé. Montrons enfin que $\pi_l(X)$ est héréditaire. Soit $0 \leqslant x \leqslant \pi_l(y)$, avec $x \in Z_l$ et $y \in X$. Comme $\mathcal{B}_l(X)$ est épais et réticulé, il est facile de voir que x se prolonge en une forme linéaire positive sur $L_c(X)$, c'est-à-dire, d'après le lemme précédent, en un élément $x' \in X$, qui, par construction est tel que $\pi_l(x') = x$.

Corollaire 3.18. — *On conserve les notations de* 3.9 *et de* 3.17. *Alors,*

(*a*) *L'application* $f \longmapsto f_{|T_l}$ *est une bijection linéaire de* $L_c(Z_l)$ *sur* $\mathcal{C}(T_l)$.

(*b*) Z_l *est linéairement homéomorphe au cône* $\mathfrak{M}^+(T_l)$ *des mesures de Radon positives sur le compact* T_l.

Cette bijection linéaire positive induit par transposition un homéomorphisme linéaire r *du cône* $\mathfrak{M}^+(T_l)$ *des mesures de Radon positives sur* T_l, *sur* Z_l *qui n'est autre que l'application:* $\mu \longmapsto$ (*résultante de* $\tilde{\mu}$). *On notera* Λ_l *l'application réciproque.*

Démonstration. — Puisque Z_l est biréticulé, il résulte des corollaires 1.9 et 1.20 que Z_l est réticulé et que T_l est fermé. Par suite, la base $\overline{B}_l$ de Z_l est un simplexe de Bauer. Des résultats sur ces simplexes (cf. par exemple le § 6 de [24]), on déduit le (*a*) et le (*b*).

Corollaire 3.19. — *Avec les notations de* 3.17, *l'image par* π_l *de toute génératrice extrémale de* X *est une génératrice extrémale de* Z_l.

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de ce que $\pi_l(X)$ est une face de Z_l.

Remarque 3.20. — On peut montrer que la proposition 3.17 reste vraie si on remplace la propriété : « Le cône Y est biréticulé » par : « Le cône Y vérifie la propriété de Riesz :

(R) $\forall u, v, u', v' \in L_c(Y)$ tels que $u, v \leqslant u', v'$, $\exists w \in L_c(Y)$ tel que :

$$u,\ v \leqslant w \leqslant u',\ v'.$$

Un cône Y de $\mathcal{G}$ qui vérifie (R) est réticulé. Par contre, la réciproque est un problème ouvert.

Notations 3.21. — Conservons les hypothèses de la proposition 3.17. Soit $f \in L_c(X)^+$. Pour tout entier n, posons

$$f_n = \inf_a (f, nl).$$

Puisque X est biréticulé, $f_n \in L_c(X)^+$. Par suite, $f_n \in \mathcal{B}_l(X)^+$ et, par construction de Z_l, il existe $g_n \in L_c(Z_l)^+$ tel que ${}^t\pi_l(g_n) = f_n$. Posons $h_n = g_{n|T_l}$ et $f_l = \sup\limits_n h_n$.

LEMME 3.22. — *Soient* T *un espace topologique compact et* Y *une partie de* $\mathfrak{M}^+(T)$ *dense dans* $\mathfrak{M}^+(T)$. *Alors, pour tout ouvert* U *de* T, *il existe une mesure* μ *dans* Y *telle que* $\mu(U) \neq 0$.

Démonstration. — En effet, il existe $f \in \mathcal{C}(T)^+$ telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f = 0$ hors de U et $f(y) = 1$ pour un $y \in U$. Comme la mesure de Dirac δ_y est adhérente à Y, il existe $\mu \in Y$ telle que $|f(y) - \mu(f)| < 1/2$, d'où $\mu(f) > 0$ et, à fortiori, $\mu(U) > 0$.

LEMME 3.23. — *On conserve les notations de* 3.21. *Alors, pour tout* $f \in L_c(X)^+$, f_l *est continue sur* T_l *à valeurs dans* $[0, +\infty]$ *et est finie sur un ouvert dense de* T_l.

Démonstration. — Par construction, f_l est s.c.i. Pour montrer que f_l est continue, il nous reste à le vérifier en tout point où elle est finie. Pour cela, il suffit de vérifier que, avec les notations de 3.21, on a : $\inf(f_l, n) = h_n$, $(\forall n \in \mathbf{N})$. Fixons n. Il est clair que $\inf(f_l, n) \geqslant h_n$. Vérifions l'inégalité inverse. Pour tout m, on a $f_m \leqslant f$, d'où $\inf_a(f_m, nl) \leqslant f_n$ et, par suite, $\inf(h_m, n) \leqslant h_n$. En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient, $\inf(f_l, n) \leqslant h_n$. Enfin, la propriété de densité résulte immédiatement du lemme précédent.

LEMME 3.24. — *On conserve les notations de* 3.18 *et* 3.21. *Alors, on a :*

(3.25) $\quad \Lambda_l(\pi_l(x))(f_l) = f(x), \qquad (\forall x \in X), (\forall f \in L_c(X)^+).$

Démonstration. — Soit $f \in L_c(X)^+$. Si $f \in \mathcal{B}_l(X)$, il existe $g \in L_c(Z_l)$ tel que $g^{|T}{}_l = f_l$. D'où :

$$\Lambda_l(\pi_l(x))(f_l) = g(\pi_l(x)) = f(x). \tag{3.26}$$

Si f est quelconque, on peut écrire, avec les notations de 3.21 et compte tenu de (3.26) :

$$\Lambda_l(\pi_l(x))(f_l) = \lim_n \Lambda_l(\pi_l(x))(h_n) = \lim_n g_n(\pi_l(x)) = \lim_n f_n(x) = f(x).$$

THÉORÈME 3.27. — *On conserve les notations de* 3.21. *Alors, l'application* $f \longmapsto f_l$ *est une bijection linéaire de* $L_c(X)^+$ *sur un cône convexe héréditaire de fonctions continues sur* T_l *à valeurs dans* $[0, +\infty]$, *finies sur un ouvert partout dense, contenant* $\mathcal{C}(T_l)^+$, *que nous notons* $C_l(X)$. *De plus* $\Lambda_l(\pi_l(X))$ *est l'ensemble des mesures de Radon positives* μ *sur* T_l, *pour lesquelles toute fonction de* $C_l(X)$ *soit* μ*-intégrable.*

Démonstration. — Notons d'abord qu'avec le lemme 3.23, nous connaissons la nature des fonctions f_l. Il nous reste à montrer la linéarité de l'application, l'hérédité de $C_l(X)$ et à caractériser $\Lambda_l(\pi_l(X))$.

(*a*) *Linéarité de* $f \longmapsto f_l$. Soient f et $g \in L_c(X)^+$ et $h = f + g$. L'ensemble A des points de T_l où l'une des fonctions f_l, g_l, h_l, est infinie est, d'après le lemme 3.23, un fermé de complémentaire B dense dans T_l. Pour vérifier l'égalité $h_l = f_l + g_l$, il nous suffit, d'après ce même lemme, de la vérifier sur B. Prenons donc $b \in B$ tel que, par exemple $h_l(b) < f_l(b) + g_l(b)$. On a encore $h_l < f_l + g_l$ sur un voisinage ouvert U de b dans B. D'après le lemme 3.22, il existe $\mu \in \Lambda_l(\pi_l(X))$ telle que $\mu(U) \neq 0$. Par suite, comme $\Lambda_l(\pi_l(X))$ est héréditaire d'après la proposition 3.17 (*b*) la mesure $\mu' = \mu_{|U}$ est dans $\Lambda_l(\pi_l(X))$. Elle est aussi non nulle et par suite, on a :

$$\mu'(h_l) < \mu'(f_l + g_l),$$

ce qui est absurde, car, si x est le point de X tel que

$$\mu' = \Lambda_l(\pi_l(x)),$$

on a, d'après la formule (3.25) :

$$\mu'(h_l) = h(x) = f(x) + g(x) = \mu'(f_l) + \mu'(g_l) = \mu'(f_l + g_l).$$

(*b*) *Hérédité de* $C_l(X)$. Prenons $0 \leqslant f \leqslant g$ avec $g \in C_l(X)$ et f continue sur T_l à valeurs dans $[0, +\infty]$, et considérons l'application $\bar{f}$ définie sur X par $\bar{f}(x) = \Lambda_l(\pi_l(x))(f)$. Si nous montrons que $\bar{f} \in L_c(X)^+$, il résultera de la formule (3.25) que f est dans $C_l(X)$. Montrons donc que cela est vrai. D'abord, comme f est s.c.i. et comme Λ_l et π_l sont continues, il est clair que $\bar{f}$ est s.c.i. Montrons maintenant que $\bar{f}$ est s.c.s.,. Soient $A = g^{-1}(+\infty)$ et $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts K contenus dans $(T_l \setminus A)$. A chaque $K \in \mathcal{K}$, associons une fonction $f_K \in \mathcal{C}(T_l)$ telle que : $0 \leqslant f_K \leqslant 1$, $f_K = 1$ sur K et $f = 0$ hors d'un compact K′ de $\mathcal{K}$, et posons

$$g_K = g + (f - g) f_K,$$

(la fonction $(f - g)f_K$ étant prolongée par continuité à T_l tout entier en posant $(f - g)f_K(x) = 0$ pour $x \in A$). Par construction, la fonction $(f - g)f_K$ est continue sur T_l; c'est donc un élément de $C_l(X)$. Par suite, $g_K \in C_l(X)$ et la fonction $\bar{g}_K$ définie sur X par : $\bar{g}_K(x) = \Lambda_l(\pi_l(x))(g_K)$ est une forme linéaire continue sur X. Montrons que la borne inférieure des $\bar{g}_K$ est $\bar{f}$, ce qui prouvera la s.c.s. Prenons $x \in X$. Comme $\Lambda_l(\pi_l(x))(g) < +\infty$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un compact $K \in \mathcal{K}$, tel que $\Lambda_l(\pi_l(x))_{\complement K}(g) < \varepsilon$. Comme $g_K = f$ sur K, et comme $g_K \leqslant g$, on a, à fortiori :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \Lambda_l(\pi_l(x))(g_K - f) &\leqslant \Lambda_l(\pi_l(x))_{\complement K}(g_K - f) \\ &\leqslant \Lambda_l(\pi_l(x))_{\complement K}(g) \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

(*c*) *Description de* $\Lambda_l(\pi_l(X))$. Prenons une mesure de Radon μ pour laquelle $\mu(f_l) < +\infty$, $(\forall f \in L_c(X)^+)$. Par linéarité, l'application : $f \longmapsto \mu(f_l)$ se prolonge en une forme linéaire positive sur $L_c(X)$. D'après le lemme 3.16, il existe un $x \in X$ tel que : $f(x) = \mu(f_l)$, $(\forall f \in L_c(X)^+)$. Alors, il résulte de la formule (3.25) qu'on a : $\mu = \Lambda_l(\pi_l(x))$.

Remarque 3.28. — *Ce théorème a été montré d'abord par* E. B. Davies (th. 10 de [16]) *pour la classe des cônes biréticulés* X *ayant une base et un chapeau universel* C *tels que* $L_c(X)$ *soit complet pour la norme de la convergence uniforme sur* C.

Exemple 3.29. — On reprend les notations de l'exemple 2.3. Soient a, b, c, d, e des réels tels que :

$$0 \leqslant a < b < c < d < e \leqslant 1, \quad A = \{a, b, d, e\},$$

et D le sous-espace de $\mathcal{C}[0, 1]$ formé des fonctions f vérifiant :

$$f(c) = (1/2)(f(a) + f(b)) = (1/2)(f(d) + f(e)).$$

D est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}[0, 1]$, contenant les constantes et séparant les mesures de $\mathcal{M}_A^+$. De plus, D ne vérifie pas le lemme de décomposition de Riesz, de sorte que la partie positive Z de son dual est un cône convexe à base compacte qui n'est pas réticulé. L'injection linéaire φ de D dans $\Phi_A - \Phi_A$ induit par transposition une injection linéaire continue π de $\mathcal{M}_A^+$ dans Z telle que (π, Z) soit une compactification linéaire de $\mathcal{M}_A^+$. De plus, l'image par π de la mesure de Dirac δ_c est égale à $(1/2)(\delta_a + \delta_b)$. Ce n'est donc pas un point de $\mathcal{E}_g(Z)$. Cet exemple montre qu'une compactification linéaire arbitraire d'un cône biréticulé X, même bien coiffé comme l'est $\mathcal{M}_A^+$, peut fort mal refléter la structure de X. Ceci justifie la restriction aux compactifications épaisses. Ainsi, on peut montrer que tous les compactifiés épais du cône $\mathcal{M}_A^+$ considéré ici sont linéairement homéomorphes au cône des mesures de Radon positives sur le compactifié de Stone-Čech de $([0,1]\setminus A)$.

Problème 3.30. — La proposition 3.17 et le théorème 3.27 conduisent naturellement à poser le problème suivant : Étant donnée une face F d'un cône $\mathcal{M}^+(T)$ avec T compact, existe-t-il une structure uniforme sur F plus fine que celle de $\mathcal{M}^+(T)$ pour laquelle F soit biréticulé et complet? Une première méthode, partant des travaux de Fakhoury (cf. [22]) permet de répondre par l'affirmative lorsque F est la réunion d'une suite dénombrable de chapeaux. Une autre méthode, partant de la théorie des cônes anti-archimédiens de Choquet (cf. l'exemple 1.13) permet de répondre par l'affirmative lorsque F peut s'identifier à l'ensemble des formes linéaires positives sur un cône anti-archimédien de fonctions continues sur T à valeurs dans $[0, +\infty]$. On peut ainsi montrer que, si A est un K_σ de T, ou bien si T est métrisable et A universellement mesurable, la face $\mathcal{M}_k(A)^+$ des mesures de Radon positives sur T dont le support est dans A est un cône biréticulé pour la dualité avec $\mathcal{C}(A)$.

4. L'homéomorphie des compactifiés.

Pour parachever l'étude des compactifiés d'un cône biréticulé X ayant une base, il nous reste à vérifier que ceux-ci sont tous homéomorphes. Lorsque X sera profilé, nous le vérifierons directement en montrant (rem. 3.55) que, quels que soient l et $l' \in L_c(X)^+$, $l, l' > 0$ sur X, les espaces $\mathcal{B}_l(X)$ et $\mathcal{B}_{l'}(X)$ sont linéairement isomorphes. Lorsque X ne sera plus profilé, une telle procédure semble inapplicable et il nous faudra construire explicitement les espaces T_l avant d'en déduire qu'ils sont homéomorphes entre eux et, par voie de conséquence, que les espaces Z_l le sont aussi.

LEMME 3.31. — *Soit* X *un cône biréticulé ayant une base* $B_l = \{l = 1\}$, *avec* $l \in L_c(X)^+$. *Alors, pour toute face fermée* F *de* X, F *est fermée pour la topologie* $\sigma(X, \mathcal{B}_l(X))$.

Démonstration. — D'après le théorème 4.20 de [24] il existe une forme linéaire s.c.s. g sur X telle que $0 \leqslant g \leqslant l$ et que $F = (l - g)^{-1}(0)$. Comme on a, d'après la remarque 2 du n° 4, § 5, chap. 2 de [7],

$$g = \inf \{h \in L_c(X)^+, h \geqslant g\},$$

on a aussi,

$$g = \inf \{\inf_a (h, l), h \in L_c(X)^+ \quad \text{et} \quad h \geqslant g\}.$$

Mais, comme X est biréticulé, on a $\inf_a (h, l) \in \mathcal{B}_l(X)$ dès que $h \in L_c(X)$, (prop. 1.8). Ainsi, g est s.c.s. pour la topologie $\sigma(X, \mathcal{B}_l(X))$ et, par suite, $F = (l - g)^{-1}(0)$ est fermé pour cette topologie.

PROPOSITION 3.32. — *Soient* X *un cône biréticulé ayant une base* $B_l = \{l = 1\}$ *avec* $l \in L_c(X)^+$, *et* (π_l, Z_l) *la compactification linéaire associée. Alors, pour toute face fermée* F *de* X, *l'ensemble* $\overline{\pi_l(F)}$ *est une face de* Z_l *et, de plus :*

$$\overline{\pi_l(F)} \cap \pi_l(X) = \pi_l(F). \tag{3.33}$$

Démonstration. — D'après la proposition 3.17 (*b*), $\pi_l(X)$ est une face de Z_l. Par suite, d'après le théorème 1.16 (*b*), $\overline{\pi_l(F)}$ est une face fermée de Z_l. Cela étant, d'après le lemme précédent, $\pi_l(F)$ est fermé dans $\pi_l(X)$, de sorte que l'égalité (3.33) est vraie.

En langage imagé, cela exprime que les affaiblissements de topologies correspondant aux plongements π_l « conservent » les faces fermées. Nous allons exploiter cette propriété.

DÉFINITION 3.34. — *Soient* X *un ensemble et* $\mathfrak{L}$ *une famille de parties non vides de* E. *On dit qu'un filtre sur* X *est un* $\mathfrak{L}$-filtre *s'il a une base formée d'ensembles de* $\mathfrak{L}$. *Pour l'ordre naturel sur les filtres sur* X, *l'ensemble des* $\mathfrak{L}$*-filtres est inductif et on appelle* $\mathfrak{L}$-ultrafiltre *tout* $\mathfrak{L}$*-filtre maximal pour cet ordre. On note* $\mathfrak{W}(X, \mathfrak{L})$ *ou plus simplement* $\mathfrak{W}(X)$ *l'ensemble de ces* $\mathfrak{L}$*-ultrafiltres.*

Lorsque X *est un cône de* $\mathcal{S}$, *nous prendrons pour* $\mathfrak{L}$ *la famille des faces fermées complémentables de* X, non réduites à $\{0\}$, *et nous dirons qu'un* $\mathfrak{L}$*-filtre est un* filtre facial.

On notera que si $\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre facial sur X biréticulé, il résulte du corollaire 1.22 que l'intersection des ensembles de $\mathfrak{U}$ est ou bien $\{0\}$, ou bien une génératrice extrémale de X.

Rappelons (cf. [27]) que la famille des faces fermées complémentables de X est stable par intersection quelconque et somme finie. Il est alors tout à fait facile de montrer le lemme suivant, dont la démonstration est laissée en exercice :

LEMME 3.35. — *Soit* X *un cône de* $\mathcal{S}$. *On munit l'ensemble* $\mathfrak{W}(X)$ *des ultrafiltres faciaux de* X *de la topologie dont les fermés sont les ensembles* $W(F) = \{\mathfrak{U} | F \in \mathfrak{U}\}$, *où* F *parcourt l'ensemble des faces fermées de* X. *Alors, on a les relations :*

(*a*) $W(\{0\}) = \varnothing$;

(*b*) $W(F) \cap W(G) = W(F \cap G)$;

(*c*) $W(F) \cup W(G) = W(F + G)$

DÉFINITION 3.36. — *Soit* X *un cône de* $\mathcal{S}$. *On appelle* tranche conique ouverte, *toute partie de* X *de la forme* $\{f > 0\}$ *où* f *parcourt* $L_c(X)$. *Si* D *est une génératrice extrémale de* X, *on dira qu'un ultrafiltre facial* $\mathfrak{U}$ converge vers D, *si toute tranche conique ouverte contenant* D *contient un ensemble de* $\mathfrak{U}$ *à l'origine près.*

Lorsque X a une base B, cela équivaut à dire que le filtre $\mathfrak{U} \cap B$ converge vers le point $D \cap B$, car $D \cap B$ est extrémal fort dans B.

Notations 3.37. — Dans toute la suite de ce paragraphe, X désignera un cône biréticulé, ayant une base $B_l = \{l = 1\}$, avec $l \in L_c(X)^+$ et (π_l, Z_l) la compactification linéaire épaisse associée. Si $\mathfrak{U}$ est un filtre facial sur X, la famille $\overline{\pi_l(U)}$, $(U \in \mathfrak{U})$ est une base de filtre facial d'après la proposition 3.32. Le filtre facial sur Z_l ayant cette base sera dit *l' image de* $\mathfrak{U}$ *par* π_l et sera noté $\pi_l(\mathfrak{U})$.

PROPOSITION 3.38. — *Soit* T *une tranche conique ouverte de* Z_l *non réduite à* $\{0\}$. *Alors,*

(*a*) *Il existe une plus grande face fermée* F_T *contenue dans* $\overline{T}$.

(*b*) *On a* $F_T \cap \pi_l(X) \neq \{0\}$. *Par suite, l'ensemble*

$$G_T = (\pi_l)^{-1}(F_T)$$

est une face fermée de X, *non réduite à* $\{0\}$.

Démonstration. — (*a*) Ecrivons que $T = \{f < 0\}$, pour un $f \in L_c(Z_l)$, et considérons $f' = \sup_a (f, 0)$ et $F_T = f'^{-1}(0)$. Comme Z_l est biréticulé, f' est continue et F_T est une face fermée. De plus, d'après la proposition 1.15 (*a*), F_T est la plus grande face (fermée ou non) sur laquelle $f \leqslant 0$, c'est-à-dire la plus grande face contenue dans $\overline{T}$.

(*b*) Supposons que $F_T \cap \pi_l(X) = \{0\}$. Alors, on a

$$\pi_l(X) \subset (F_T)'.$$

Or, sur $(F_T)'$, on a $f' \geqslant 0$, donc $f \geqslant 0$ et en particulier, $f \geqslant 0$ sur $\pi_l(X)$. Comme $\pi_l(X)$ est dense, on a $f \geqslant 0$ sur Z_l, ce qui est absurde puisque T n'est pas réduite à $\{0\}$.

COROLLAIRE 3.39. — *Si* T *est une tranche* conique ouverte *contenant une face fermée* F *de* Z_l, *on a :* $F \subset F_T \cap \pi_l(X)$.

Démonstration. — Dans le cas contraire, il existerait une génératrice extrémale D de F, donc de Z_l, telle que

$D \cap \overline{(F_T \cap \pi_l(X))} = \{0\}$, et par suite, il existerait une tranche conique ouverte T' de Z_l telle que $D/\{0\} \subset T' \subset \overline{T}' \subset T \cup \{0\}$, (cf. prop. 3.11 de [24]), et que :

$$\overline{T}' \cap \overline{(F_T \cap \pi_l(X))} = \{0\}. \tag{3.40}$$

Considérons la face $F_{T'}$. On aurait $F_{T'} \subset \overline{T}' \subset T \cup \{0\}$ et $F_{T'} \subset F_T$, de sorte que, d'après (3.40) on aurait $F_{T'} \cap \pi_l(X) = 0$, ce qui, d'après le lemme 3.38 (*b*), serait absurde.

Corollaire 3.41. — *Soient* F *une face fermée de* Z_l *et* $\mathfrak{T}$ *la famille des tranches coniques ouvertes de* Z_l *contenant* $F\setminus\{0\}$. *Alors, la famille* (G_T), $(T \in \mathfrak{T})$ *est la base d'un filtre facial et, de plus :*

$$\bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \overline{\pi_l(G_T)} = F. \tag{3.42}$$

Démonstration. — Le cône Z_l étant à base compacte, la famille $\mathfrak{T}$ est un système fondamental de voisinages coniques de F (cf. prop. 3.11 de [24]). En particulier $\mathfrak{T}$ est une base de filtre et :

$$\bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \overline{T} = F. \tag{3.43}$$

Par suite, la famille (G_T), $(T \in \mathfrak{T})$ est une base de filtre facial qui, d'après la propriété (3.43) vérifie :

$$\bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \overline{\pi_l(G_T)} \subset \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \overline{T} = F,$$

et qui, d'après le corollaire (3.39) vérifie l'inégalité inverse.

Proposition 3.44. — *Soient* (F_i), $(i \in I)$ *une base de filtre facial* $\mathcal{F}$ *sur* X *et* D *une génératrice extrémale de la face* $\bigcap_i \overline{\pi_l(F_i)}$. *Alors, il existe un ultrafiltre facial* $\mathfrak{U}$ *plus fin que* $\mathcal{F}$ *tel que* $\pi_l(\mathfrak{U}) \longmapsto D$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{T}$ la famille des tranches coniques ouvertes contenant D. D'après le corollaire précédent, la famille (G_T), $(T \in \mathfrak{T})$ est une base de filtre facial $\mathcal{G}$ dont l'image converge vers D. Montrons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est une base de filtre facial. Soient $T \in \mathcal{T}$ et $i \in I$. On a $T = \{f > 0\}$ pour un $f \in L_c(X)$. Si on avait $G_T \cap F_i = \{0\}$, c'est-à-dire si on avait $F_T \cap \pi_l(F_i) = \{0\}$, on aurait $\overline{\pi_l(F_i)} \subset (F_T)'$, donc $f \leqslant 0$ sur $\pi_l(F_i)$, donc $f \leqslant 0$ sur $D \in \overline{\pi_l(F_i)}$, ce qui serait absurde. Cela étant, pour conclure, il suffit de prendre pour $\mathcal{U}$ un ultrafiltre facial plus fin que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

Corollaire 3.45. — (*a*) *Pour tout ultrafiltre facial* $\mathcal{V}$ *sur* X, *le filtre facial* $\pi_l(\mathcal{V})$ *converge vers une génératrice extrémale de* Z_l.

(*b*) *Réciproquement, si* D *est une génératrice extrémale de* Z_l, *il existe un ultrafiltre facial* $\mathcal{U}$ *de* X *dont l'image par* π_l *converge vers* D.

Démonstration. — (*a*) Cela résulte immédiatement de la proposition 3.44 appliquée à $\mathcal{V} = \mathcal{F}$.

(*b*) Cela résulte du corollaire 3.41 appliqué à la face $F = D$.

Proposition 3.46. — *Considérons l'application* δ_l *de* $\mathcal{W}(X)$ *dans* T_l, *qui, à chaque ultrafiltre facial* $\mathcal{U}$, *associe* $D \cap T_l$, *où* D *est la limite de* $\pi_l(\mathcal{U})$ *mise en évidence dans le corollaire précédent. Alors,* δ_l *est continue et fermée.*

Démonstration. — Soit G un fermé de T_l. Puisque Z_l est biréticulé, il résulte du théorème 2.4 (*b*) que G est la trace d'une face fermée F de Z_l. Considérons la famille $\mathcal{T}$ des tranches coniques ouvertes contenant $F\setminus\{0\}$. On a d'après le corollaire 3.41 que :

$$\bigcap_{T \in \mathcal{T}} \overline{\pi_l(G_T)} = F.$$

Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre plus fin que la base de filtre facial (G_T), $(T \in \mathcal{T})$, il est clair que $\delta_l(\mathcal{U}) \in F$. Inversement, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre facial tel que $\delta_l(\mathcal{U}) = D \subset F$, il résulte de la proposition 3.38 (*a*) que $\pi_l(\mathcal{U})$ est plus fin que la base de filtre (F_T), $(T \in \mathcal{T})$, donc que $\mathcal{U}$ est plus fin que la base de filtre (G_T), $(T \in \mathcal{T})$. De tout cela, il résulte que :

$$\bigcap_{T \in \mathcal{T}} W(G_T) = (\delta_l)^{-1}(G).$$

En d'autres termes l'image réciproque par δ_l d'un fermé quelconque de T_l est un fermé de $\mathcal{W}(X)$. Ainsi, δ_l est continue. Montrons qu'elle est fermée. Pour cela, il nous suffit de montrer que si F est une face fermée de X, on a :

$$\delta_l(W(F)) = \overline{\pi_l(F)} \cap T_l. \tag{3.47}$$

Or, l'inclusion $\overline{\pi_l(F)} \supset \delta_l(W(F))$ est évidente. Inversement, prenons une génératrice extrémale D de $\overline{\pi_l(F)}$. La proposition 3.44 dit qu'il existe un ultrafiltre facial $\mathcal{U} \in W(F)$ tel que $\pi_l(\mathcal{U}) \longmapsto D$. D'où l'inclusion inverse.

Définition 3.48. — *Soient* F *et* G *deux faces fermées de* X. *On dit qu'elles sont* l-séparables *s'il existe un* $f \in L_c(X)$ *tel que* $0 \leqslant f \leqslant l$, *égal à* 0 *sur* F *et à* l *sur* G. *Plus généralement, deux filtres faciaux* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *sont* l-séparables *s'il existe deux faces fermées* F *et* G *de* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *respectivement qui soient* l*-séparables, et on dit qu'ils sont* l-inséparables *dans le cas contraire.*

Proposition 3.49. — *L'espace compact* T_l *est homéomorphe à l'espace quotient de* $\mathcal{W}(X)$ *par la relation d'équivalence :*

$$(\mathcal{U} R_l \mathcal{V}) \Longleftrightarrow (\mathcal{U} \text{ et } \mathcal{V} \text{ sont } l\text{-inséparables}).$$

De plus, la relation R_l *est identique à la relation définie sur* $\mathcal{W}(X)$ par : $(\mathcal{U}\mathcal{R}\mathcal{V}) \Longleftrightarrow (\mathcal{S}_l(\mathcal{U}) = \mathcal{S}_l(\mathcal{V}))$.

Démonstration. — D'après le corollaire 3.45 et la proposition 3.46, δ_l est une application surjective continue et fermée de $\mathcal{W}(X)$ sur T_l. D'après la proposition 3 du § 5, chap. 1 de [5], δ_l induit par passage au quotient un homéomorphisme de $\mathcal{W}(X)/R$ sur T_l. La démonstration sera achevée par celle de $R = R_l$. Or, dire que $\delta_l(\mathcal{U}) \neq \delta_l(\mathcal{V})$ équivaut à dire que les filtres $\pi_l(\mathcal{U})$ et $\pi_l(\mathcal{V})$ ont des traces sur $\overline{B}_l$ qui ne convergent pas vers la même limite. Ces filtres images étant faciaux, cela équivaut à dire qu'il existe des faces fermées F et G de $\pi_l(\mathcal{U})$ et $\pi_l(\mathcal{V})$ respectivement telles que $F \cap G \cap \overline{B}_l = \varnothing$. D'après le corollaire 7.10 de [24], cela équivaut à dire que F et G sont 1-séparables, où 1 est la fonction de $L_c(Z_l)$ égale à 1 sur B_l. Cela équivaut à dire que les faces $F_l = (\pi_l)^{-1}(F)$

et $G_l = (\pi_l)^{-1}(G)$ sont l-séparables, car $l = \varphi_l(1)$, où φ_l est la transposée de π_l. Par définition, cela équivaut à dire que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont l-séparables.

THÉORÈME 3.50. — *Soit* X *un cône biréticulé ayant une base. Alors,*

(*a*) *On a* $R_l = R_{l'}$, *quels que soient* l *et* $l' \in L_c(X)^+$ *avec* l *et* $l' > 0$ *sur* X.

(*b*) *Tous les compactifiés linéaires épais de* X *sont linéairement homéomorphes.*

Démonstration. — Compte tenu du corollaire 3.18 (*b*) et de la proposition précédente, il est clair que (*a*) implique (*b*). Montrons donc (*a*). Fixons l et $l' \in L_c(X)$ avec l et $l' > 0$ sur X, et considérons la représentation fournie par le théorème 3.27. La fonction l s'identifie à la fonction constante égale à 1 sur T_l et l' à une fonction $f = l'_l$ continue sur T_l à valeurs dans $[0, +\infty]$, nulle sur un ensemble de μ-mesure nulle pour toute $\mu \in \Lambda_l(\pi_l(X))$. Considérons deux ultrafiltres $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ l-séparables. Par définition, il existe deux faces fermées F et G dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ respectivement qui soient l-séparables et notons $A = T_l \cap \overline{\pi_l(F)}$ et $B = T_l \cap \overline{\pi_l(G)}$. Il existe g continue sur T_l, à valeurs dans $[0, 1]$ égale à 0 sur A et à 1 sur B. Considérons $g' = (1 - g)/g$; la fonction g' est continue sur T_l à valeurs dans $[0, +\infty]$, égale à $+\infty$ sur A et à 0 sur B. Considérons maintenant $h_l = \inf(g', f)$. Puisque $C_l(X)$ est héréditaire, $h_l \in C_l(X)$, de sorte que l'application h qui à $x \in X$ associe $\Lambda_l(\pi_l(x))(h_l)$ est linéaire et continue sur X. De plus, il est clair que, par construction, on a : $h = l'$ sur F, $h = 0$ sur G et $0 \leqslant h \leqslant l'$. Ainsi, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont l'-séparables. En d'autres termes, la relation d'équivalence R_l est plus fine que $R_{l'}$. Si on échange l et l' dans cette démonstration on voit que l'inverse est vrai, de sorte qu'on a : $R_l = R_{l'}$.

C.Q.F.D.

DÉFINITION 3.51. — *Soit* X *un cône biréticulé ayant une base* $B = \{l = 1\}$ *avec* $l > 0$ *sur* X. *On appelle* faciès *de* X *et on note* Fa(X) *l'espace quotient de* $\mathcal{W}(X)$ *par la relation d'équivalence* R_l.

Remarques 3.52. — (*a*) Soient Z_l et $Z_{l'}$ deux compactifiés linéaires épais d'un même cône biréticulé X. D'après le théorème précédent, il existe un homéomorphisme linéaire π de Z_l sur $Z_{l'}$. Il serait fort intéressant de savoir si on peut choisir π en sorte que $\pi_{l'} \circ \pi = \pi_l$, ou au moins que

$$\pi(\pi_l(X)) = \pi_{l'}(X).$$

(*b*) On verra au paragraphe suivant que la relation R_l n'est pas en général l'identité.

(*c*) La description de T_l au moyen d'ultrafiltres faciaux ne peut se généraliser aux cônes linéairement compactifiables non biréticulés. En effet, tout repose sur la proposition 3.38 (*a*) qui est caractéristique des cônes biréticulés. Il faudrait probablement considérer des $\mathfrak{T}$-ultrafiltres où $\mathfrak{T}$ est l'ensemble des tranches coniques ouvertes de X (cf. définition 3.34).

5. Le cas particulier des cônes profilés.

Lemme 3.53. — *Soient* X *un cône profilé biréticulé ayant une base et* $l \in L_c(X)$ *tel que* $l > 0$ *sur* X. *Alors, l'application* π_l *est un homéomorphisme de* E_l *sur* $\pi_l(E_l) \subset T_l$.

Démonstration. — D'abord, puisque π_l est continue et injective, il nous suffit de montrer que sa restriction à E_l est fermée. Soit donc A un fermé de E_l. D'après le théorème 2.4 (*b*), il existe une face fermée F de X telle que $A = F \cap E_l$, et il résulte de l'égalité (3.33) que $\pi_l(A) = \overline{\pi_l(F)} \cap \pi_l(E_l)$, d'où le résultat, compte tenu du corollaire 3.19.

Proposition 3.54. — *Soient* X *un cône profilé biréticulé ayant une base et* $l \in L_c(X)$ *tel que* $l > 0$ *sur* X. *Alors, l'espace* T_l *est homéomorphe au compactifié de Stone-Čech de* E_l.

Démonstration. — Puisque X est profilé, on a

$$X = \overline{\text{conv}}\,(\mathcal{E}_g(X)).$$

En particulier, on a $B_l = \overline{\text{conv}}\,(E_l)$, et par suite, on a $T_l = \overline{\pi_l(E_l)}$. Pour montrer que T_l est homéomorphe au compactifié de Stone-Čech de $\pi_l(E_l)$, donc de E_l d'après le lemme précédent, il nous reste à voir que toute fonction continue bornée f sur $\pi_l(E_l)$ se prolonge en une fonction continue sur T_l. Fixons f comme indiqué. La fonction $f \circ \pi_l$ est continue et bornée sur E_l; par suite elle se prolonge par homogénéité en une fonction homogène continue g sur $\mathcal{E}_g(X)$ qui se prolonge elle-même en une fonction $h \in \mathcal{B}_l(X)$ d'après le théorème 2.4 (c). Par définition du compactifié linéaire Z_l, il existe une fonction $h' \in L_c(Z_l)$ telle que $h' \circ \pi_l = h$. Il en résulte que h' coïncide avec f sur $\pi_l(E_l)$, d'où le résultat.

Remarque 3.55. — Il résulte de cette proposition qu'on peut montrer, pour les cônes profilés biréticulés, que les compactifiés linéaires épais sont homéomorphes sans passer par la théorie des ultrafiltres faciaux. Pour un tel cône, l et $l' \in L_c(X)$ tels que $l, l' > 0$ étant donnés, il suffit de montrer que E_l et $E_{l'}$ sont homéomorphes, ce qui est évident, si on considère l'application $x \longmapsto (x/l(x))$ de $E_{l'}$ sur E_l.

PROPOSITION 3.56. — *Soient* X *un cône profilé biréticulé ayant une base et* $l \in L_c(X)$ *tel que* $l > 0$ *sur* X. *Alors, pour que la relation d'équivalence* R_l (prop. 3.49) *soit l'identité, il faut et il suffit que* E_l *soit normal.*

Démonstration. — Soient $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ deux ultrafiltres faciaux distincts. Il existe deux faces fermées F et G dans $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ respectivement telles que $F \cap G = \{0\}$. Les traces de F et G sur E_l définissent deux fermés A et B non vides dont l'intersection est vide. Par suite, si E_l est normal, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(E_l)$ avec $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f = 0$ sur A et $f = 1$ sur B. D'après le théorème 2.4, f se prolonge en une fonction $\bar{f} \in L_c(X)$ avec $0 \leqslant \bar{f} \leqslant 1$. Mais, comme X est profilé, on a : $F = \overline{\text{conv}}\,(\tilde{A})$ et $G = \overline{\text{conv}}\,(\tilde{B})$ d'où il résulte, par continuité que $f = 0$ que F et $f = l$ sur G. Ainsi, $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont l-séparables. D'où le résultat. Inversement, supposons E_l non normal. D'après le lemme 3.53 et la proposition 3.54, il existe deux fermés A et B de E_l, non vides et tels que $\overline{\pi_l(A)} \cap \overline{\pi_l(B)}$ contienne au moins un point $d \in T_l$. Considérons les cônes $F = \overline{\text{conv}}\,(\tilde{A})$ et $G = \overline{\text{conv}}\,(\tilde{B})$. Compte tenu du théorème 1.16 (b), ce sont deux faces fermées de X

telles que $F \cap G = \{0\}$ et que $\overline{\pi_l(F)} \cap \overline{\pi_l(G)}$ contienne une génératrice extrémale D. Par suite, d'après la proposition 3.44, il existe deux ultrafiltres faciaux $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ contenant F et G respectivement et dont les images par π_l convergent vers D. Puisque $F \cap G = \{0\}$, ces ultrafiltres sont distincts et, d'après la proposition 3.49 ils sont l-inséparables, ce qui prouve la réciproque.

La proposition qu'on va montrer maintenant est bien utile pour la construction d'exemples. Pour les espaces replets qu'on va définir, on renvoie à l'exposé de Varadarajan ([33]).

Définition 3.57. — *Un espace complètement régulier est dit* replet (*ou realcompact ou* Q-*space en anglais*) *s'il est complet pour la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues toutes les fonctions numériques continues sur* T *bornées ou non.*

Proposition 3.58. — (*a*) *Soit* X *un cône biréticulé ayant une base* B. *Alors,* $\mathcal{E}(B)$ *est replet.*

(*b*) *Inversement, tout espace replet* T *est homéomorphe à l'ensemble des points extrémaux d'une base d'un cône bien coiffé biréticulé.*

Démonstration. — (*a*) D'après le corollaire 1.20,

$$\mathcal{E}(B) = \mathcal{E}_g(X) \cap B$$

est fermé. Il est donc complet pour la trace d'une structure uniforme faible sur X, c'est-à-dire pour une structure uniforme initiale associée à une famille de fonctions numériques continues. D'après la proposition 7, § 3, chap. 2 de [5], $\mathcal{E}(B)$ est replet.

(*b*) Considérons le cône M des formes linéaires positives sur $\mathcal{C}(T)$. D'après l'exemple 1.11, le cône M est biréticulé pour $\sigma(M, \mathcal{C}(E))$. D'après le théorème 15 de [12], M est bien coiffé et, si 1 est la fonction constante égale à 1 sur T, l'ensemble E_1 est $\{\delta_x,\ x \in T\}$. On peut alors conclure en remarquant que, puisque T est complètement régulier, l'application $x \longmapsto \delta_x$ est un homéomorphisme de T sur E_1.

Exemple 3.59. — Il est maintenant facile de donner un exemple de cône biréticulé bien coiffé ayant une base $B_l = \{l = 1\}$ avec $l \in L_c(X)$ et $l > 0$ sur X tel que la relation R_l ne soit pas l'identité. En effet, compte tenu des propositions 3.56 et 3.58, il suffit de trouver un espace replet qui ne soit pas normal. Considérons donc l'espace produit $\mathbf{R}^I$. C'est un produit d'espaces replets, il est donc replet. Mais l'exercice 11 (*b*) du § 9 du chapitre 9 de Topologie générale de Bourbaki, montre que ce produit n'est pas normal dès que I est un ensemble non dénombrable.

Remarques finales.

Remarque 3.60. — Dans [0], problème 13, il était suggéré que l'analogue des cônes biréticulés à base compacte dans la proposition 3.17 pourrait être, pour les cônes biréticulés sans base, les cônes $\mathfrak{M}(T)^+$ des mesures de Radon sur un localement compact T. Cette analogie semble bien artificielle. En effet, considérons le cône $\mathfrak{M}_b(T)^+$ des mesures de Radon positives bornées sur un espace localement compact T non dénombrable à l'infini, mis en dualité avec $\mathcal{C}_0(T)$. C'est un cône biréticulé ayant un chapeau universel, et on voit mal quel avantage on pourrait tirer à savoir qu'il est plongeable dans le cône $\mathfrak{M}^+(T)$. En fait, il semble qu'il faille voir le problème de la compactification linéaire comme un cas particulier du problème suivant : Étant donné un cône biréticulé X, peut-on plonger X en une face partout dense d'un cône biréticulé Z vérifiant une propriété (P)? La propriété (P) dépendant de la situation où on se trouve, et qui pourrait être : Z est à base compacte, Z est métrisable, ou presque bien coiffé.

Remarque 3.61. — Voici les corrections à apporter à [0], en fonction des résultats de ce dernier travail :

— Les énoncés (*b*) et (*c*) du théorème 10 sont inexacts et doivent être omis.

— Dans l'énoncé (*b*) du théorème 12, il faut supposer que la compactification linéaire (π, Z) est épaisse.

— La définition 14 doit être remplacée par la suivante : On dit que deux faces fermées F et G de X sont inséparables s'il existe f et $l \in L_c(X)$ avec $0 \leqslant f \leqslant l$ et $l > 0$ sur X tels que $f = l$ sur F et $f = 0$ sur G.

INDEX DES NOTATIONS

INDEX DES DÉFINITIONS

BIBLIOGRAPHIE

[0] M. AJLANI et A. GOULLET de RUGY, Les cônes biréticulés, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, série A (1970), 242-245.

[1] E. M. ALFSEN et T. B. ANDERSEN, Split faces of compact convex sets, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 21 (1970), p. 415-442.

[2] L. ASIMOW, Extremal structure of well-capped cones, *Proc. Am. Math. Soc.* 138 (1969), 363-375.

[3] H. BAUER, Kennzeichnung compacter, Simplexe mit abgeschlossener extremal Punktmenge, *Archiv der Math.* 14 (1963), 415-421.

[4] M. BONY, Représentation intégrale sur les cônes convexes faiblement complets, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 3e année (1963-64), no 5, 7 p.

[5] N. BOURBAKI, Topologie Générale; Chap. 1 et 2, Paris, Hermann (1966), 4e ed. (A.S.I. 1142).

[6] N. BOURBAKI, Topologie Générale; Chap. 10, Paris, Hermann (1961), 2e ed. (A.S.I. 1084).

[7] N. BOURBAKI, Espaces Vectoriels Topologiques; Chap. 1 et 2, Paris, Hermann 1966, 2e ed. (A.S.I. 1189).

[8] N. BOURBAKI, Intégration; Chap. 1 à 4; Paris, Hermann (1965), 2e ed. (A.S.I. 1175).

[9] G. CHOQUET, Mesures coniques maximales sur les cônes convexes faiblement complets, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 6e année (1961-62), no 12, 15 p.

[10] G. CHOQUET, Études des mesures coniques. Cônes convexes saillants faiblement complets sans génératrices extrémales, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 225 (1962), p. 445-447.

[11] G. CHOQUET, Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (14, 1962, Stockholm), p. 317-330. — Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.

[12] G. CHOQUET, Cardinaux 2-mesurables et cônes faiblement complets, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), 17 (1967), 383-389.

[13] G. CHOQUET, Mesures coniques, affines, cylindriques, Instituto di Alta Matematica, Symposia Mathematica, vol. II (1968), 145-182.

[14] G. CHOQUET, Lectures on Analysis, volume II; New York, Amsterdam, W. A. Benjamin (1969).

[15] P. COURRÈGE, Mesures sur les espaces vectoriels faibles, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 2e année (1962-63), no 5.

[16] E. B. DAVIES, The Choquet theory and representation of ordered Banach spaces, *Illinois J. Math.*, 13 (1969), 176-187.

[17] J. DIXMIER, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien; Paris, Gauthier-Villars (1957).

[18] N. DUNFORD et J. SCHWARTZ, Linear operators, Part I; New York, Interscience Publishers (1958).

[19] E. G. EFFROS, Structure in simplexes II, *J. Func. Analysis*, vol. I, (1967), 379-391.

[20] E. G. Effros et A. Gleit, Structure in simplexes III, *Trans. A. M.S.*, 142 (1969), 355-379.

[21] H. Fakhoury, Une caractérisation des simplexes compacts et des cônes réticulés. Applications, Séminaire Choquet: Initiation à l'Analyse, 9e année (1969-70), no 2, 12 p.

[22] H. Fakhoury, Structure uniforme sur les cônes bien coiffés, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 270 (1970), série A, 1365-1369.

[23] A. Goullet de Rugy, Caractère réticulé de certains cônes de fonctions linéaires sur un cône convexe décomposable, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 12e année (1967-68), no 5, 24 p.

[24] A. Goullet de Rugy, Géométrie des simplexes; Paris, C.D.U. et S.E.D.E.S. réunis, (1968).

[25] A. Goullet de Rugy, Précisions sur la représentation des cônes biréticulés comme cônes de mesures, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 271 (1970), série A, 353-356.

[26] A. Goullet de Rugy, La topologie AA-faciale et son utilisation dans la théorie des cônes biréticulés, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 271 (1970), série A, 319-323.

[27] A. Goullet de Rugy, Faces complémentables dans les cônes, Séminaire Choquet: Initiation à l'Analyse, 10e année (1970-71), no 2, 17 p.

[28] G. Mokobodzki et D. Sibony, Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du Potentiel, Séminaire Choquet: Initiation à l'Analyse, 6e année (1966-67), no 5, 35 p.

[29] R. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem; New York, Van Nostrand (1966).

[30] M. Rogalski, Étude du quotient d'un simplexe par une face fermée et application à un théorème d'Alfsen, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 12e année (1967-68), no 2, 25 p.

[31] M. Rogalski, Caractérisation des simplexes par des propriétés portant sur les faces fermées et sur les ensembles compacts de points extrémaux, *Math. Scand.* (à paraître).

[32] E. Størmer, On partially ordered vector spaces and their duals, with applications to simplexes and C*-algebras, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 18 (1968), 245-265.

[33] V. S. Varadarajan, Measures on topological spaces, *Am. Math. Soc. Tranl.*, 48 (1965), 161-220.

[34] I. Namioka et R. R. Phelps, Tensor products of compact convex sets, *Pac. J. Math.*, 31 (2) (1969), 469-480.

[35] M. Rogalski, Espaces de Banach réticulés et problème de Dirichlet; *Publications Math. fasc. Sc. Orsay* (1968-69).

Manuscrit reçu le 1er février 1971.

Alain Goullet de Rugy
Université de Paris VI
Mathématiques (Tour 46)
11, quai Saint-Bernard,
Paris, 5e.