ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RAGHAVAN NARASIMHAN

Un analogue holomorphe du théorème de Lindemann

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 3 (1971), p. 271-278

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_3_271_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,3 (1971), 271-278

UN ANALOGUE HOLOMORPHE DU THÉORÈME DE LINDEMANN

par Raghavan NARASIMHAN (¹)

Le théorème de Lindemann s'énonce de la manière suivante :

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des nombres algébriques distincts. Alors les exponentielles $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_p}$ sont linéairement indépendantes sur les rationnels.

Le but de cet article est de faire remarquer qu'il y a un résultat correspondant pour les fonctions entières sur $\mathbf{C}^n$.

THEOREME 1. – *Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$ et supposons que, pour $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant p$, $f_i - f_j$ soit non-constante. Alors les fonctions*

$$e^{f_1}, \ldots, e^{f_p}$$

sont linéairement indépendantes sur l'anneau $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$ des polynômes à n variables.

Ce résultat peut-être formulé comme suit :

Soient $g_1, \ldots, g_p$ des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$ partout non-nulles. Si $g_1, \ldots, g_p$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$, il existe deux d'entre-elles g_i, g_j, $i \neq j$, telles que g_i/g_j soit constante.

La démonstration qu'on va donner est basée sur deux des inégalités fondamentales de la théorie de Nevanlinna [1]. Il sera intéressant d'avoir une démonstration directe, plus élémentaire. Nous n'avons pas trouvé une telle démonstration.

Le théorème est faux pour les fonctions holomorphes dans un domaine borné (voir un exemple trivial à la fin de l'article).

(¹) Supported by NSF grant GP-19350.

1. Les inégalités de Nevanlinna.

Soit f une fonction méromorphe dans le plan complexe C. Posons, pour $0 \leqslant r < \infty$,

$n(r, f)$ = nombre de pôles de f dans le disque fermé $\{z \mid |z| \leqslant r\}$ (comptés avec multiplicités). Soient

$$\mathrm{N}(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t}\, dt + n(0, f) \log r .$$

et

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \ , \ \overset{+}{\log} \rho = \max(0, \log \rho) .$$

La fonction caractéristique $\mathrm{T}(r, f)$ est, par définition,

$$\mathrm{T}(r, f) = m(r, f) + \mathrm{N}(r, f) .$$

R. Nevanlinna [1] démontre les résultats suivants.

(1.1) $\varlimsup_{r \to \infty} \dfrac{\mathrm{T}(r, f)}{\log r} < \infty$ si et seulement si f est une fonction rationnelle.

(1.2) Si $a \in \mathrm{C}$, $f \not\equiv a$, alors

$$\mathrm{T}\left(r, \frac{1}{f - a}\right) = \mathrm{T}(r, f) + \mathrm{O}(1) \ , \ r \to \infty .$$

([1] Chap. VI, § 2 ; (1.2) est le “Erster Hauptsatz”).

(1.3) Il existe un ensemble $\mathrm{E} \subset \mathbf{R}$ de mesure (de Lebesgue) finie, tel que, si $r \to \infty$, $r \notin \mathrm{E}$, on ait

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \mathrm{O}(\log \mathrm{T}(r, f) + \log r) .$$

([1] Chap. IX, § 3 ; (1.3) est un des outils essentiels de la démonstration du “Zweiter Hauptsatz”).

2. Démonstration du théorème 1.

Nous commençons par remarquer qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas $n = 1$. En effet, supposons qu'on ait $f_1, \ldots, f_p$ holomorphes dans $\mathbf{C}^n$, $n > 1$, linéairement dépendantes sur $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$; soit

$$\sum_{i=1}^{p} P_i(z)\, e^{f_i(z)} \equiv 0 \ , \ P_i \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n] \ \text{ et } \ P_k \not\equiv 0 \ .$$

Soit $A \subset \mathbf{C}^n$ défini par

$$A = \{a \in \mathbf{C}^n \mid P_i(\lambda a) = 0 \ \text{ pour } \ \lambda \in \mathbf{C} \ , \ i = 1, \ldots, p\} \ ,$$

et posons $E_{ij} = \{a \in \mathbf{C}^n - A \mid f_i(\lambda a) - f_j(\lambda a)$ indépendant de $\lambda \in \mathbf{C}\}$. le théorème pour $n = 1$ implique que

$$\mathbf{C}^n - A = \bigcup_{j \neq i} E_{ij} \ ,$$

donc au moins un des ensembles $\{E_{ij}\}$ possède un intérieur non-vide, soit E_{kl}, $k \neq l$. Visiblement il s'ensuit que $f_k - f_l$ est constante sur un ouvert non-vide de $\mathbf{C}^n$, donc partout sur $\mathbf{C}^n$.

Soient donc $f_1, \ldots, f_p$ holomorphes sur $\mathbf{C}$, $f_i - f_j$ non-constante, et supposons qu'il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_p \in \mathbf{C}[z]$,

$$(P_1, \ldots, P_p) \neq (0, \ldots, 0)$$

avec

$$\sum_{i=1}^{p} P_i(z)\, e^{f_i(z)} \equiv 0 \ .$$

Evidemment $p > 2$. Supposons que $P_p \not\equiv 0$, et posons

$$g_i = \exp(f_i - f_p) \quad , \quad i < p \quad , \quad h_i = P_i g_i \ .$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{p-1} h_i = - P_p \in \mathbf{C}[z] \ .$$

On peut supposer que $h_i \neq 0$ pour $1 \leqslant i < p$. Il suffit, par récurrence sur p, de montrer que les fonctions $h_1, \ldots, h_{p-1}$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{C}$, ou, ce qui revient au même, que le déterminant

$$W = \text{dét}\begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_{p-1} \\ h'_1 & \dots & h'_{p-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^{(p-2)} & \dots & h_{p-1}^{(p-2)} \end{pmatrix}$$

est $\equiv 0$ [$h^{(k)}$ désigne la k^{me} dérivée de h].

On a

$$\sum_{i=1}^{p-1} h_i^{(k)} = -\,P_p^{(k)} \quad , \quad k = 0, \dots, p-2 \ ,$$

et $h_i^{(k)} = h_i \cdot \varphi_{ik}$; $\varphi_{ik} = h_i^{(k)}/h_i$, d'où

$$\sum_{i=1}^{p-1} h_i \varphi_{ik} = -\,P_p^{(k)} \quad , \quad k = 0, \dots, p-2 \ . \tag{1}$$

Soit

$$D = \text{dét}(\varphi_{ik}) \ . \tag{2}$$

Alors

$$D = W/h_1 \dots h_{p-1} \not\equiv 0 \tag{3}$$

et D est une fonction méromorphe. Mais W est holomorphe et $h_1 \dots h_{p-1} = P \cdot g$ où $P \in \mathbf{C}[z]$ et $g = g_1 \dots g_{p-1}$ est une fonction holomorphe sans zéros. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} m(r, D) &= m(r, W/g) + O(\log r) \\ &= T(r, W/g) + O(\log r) \quad [W/g \text{ étant holomorphe}] \\ &= T(r, D) + O(\log r) \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Du système d'équations (1), on déduit que

$$h_i = D_i/D \ , \tag{5}$$

où D_i est le déterminant de la matrice obtenue à partir de (φ_{ik}) en remplaçant la i-ème colonne par $-\begin{pmatrix} P_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_p^{(k-2)} \end{pmatrix}$.

Nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME. — *Il existe un ensemble* $S \subset \mathbf{R}$ *de mesure finie tel que*

$$m(r, \mathrm{D}) + m(r, \mathrm{D}_i) = \sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{O}(\log \mathrm{T}(r, h_j)) + \mathrm{O}(\log r)$$

quand $r \to \infty$, $r \notin \mathrm{S}$, $j \leqslant p-1$.

Démonstration. – On démontrera la majoration pour D ; celle pour D_i est tout à fait analogue.

Visiblement

$$\mathrm{D} = \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dfrac{h_1'}{h_1} & \dots & \dfrac{h_{p-1}'}{h_{p-1}} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ecrivant $\dfrac{h_j^{(k)}}{h_j} = \displaystyle\prod_{\nu=0}^{k-1} \dfrac{h_j^{(\nu+1)}}{h_j^{(\nu)}}$, et utilisant le fait que

$$m(r, \varphi\psi) \leqslant m(r, \varphi) + m(r, \psi),$$

on voit qu'il existe une constante C dépendant seulement de p, telle que

$$m(r, \mathrm{D}) \leqslant \mathrm{C} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-3} m\left(r, \frac{h_j^{(\nu+1)}}{h_j^{(\nu)}}\right) \tag{6}$$

D'après (1.3), il existe un ensemble $\mathrm{S} \subset \mathbf{R}$ de mesure finie avec

$$m(r, h_j^{(\nu+1)}/h_j^{(\nu)}) \leqslant \mathrm{O}(\log \mathrm{T}(r, h_j^{(\nu)}) + \log r), \quad r \notin \mathrm{S}. \tag{7}$$

De plus, $h_j^{(\nu)}$ étant holomorphe,

$$\mathrm{T}(r, h_j^{(\nu)}) = m(r, h_j^{(\nu)})$$

Or

$$h_j^{(\nu+1)} = \frac{h_j^{(\nu+1)}}{h_j^{(\nu)}}\, h_j^{(\nu)},$$

d'où, pour $r \in \mathrm{S}$, $m(r, h_j^{(\nu+1)}) \leqslant m(r, h_j^{(\nu)}) + m(r, h_j^{(\nu+1)}/h_j^{(\nu)})$

$$\leqslant m(r, h_j^{(\nu)}) + \mathrm{O}(\log m(r, h_j^{(\nu)}) + \log r).$$

Ceci nous donne

$$\mathrm{T}(r, h_j^{(\nu+1)}) = m(r, h_j^{(\nu+1)}) \leqslant \mathrm{O}(m(r, h_j^{(\nu)})) + \log r)$$

$$\leqslant \mathrm{O}(\mathrm{T}(r, h_j^{(\nu)})) + \mathrm{O}(\log r), \quad r \notin \mathrm{S}.$$

On obtient donc, par récurrence sur ν :

Si $r \to \infty$, $r \notin S$, on a

$$T(r, h_j^{(\nu)}) \leqslant O(T(r, h_j)) + O(\log r) \ , \ \nu = 0, \ldots, p-2 \ .$$

En combinant cette inégalité avec (6) et (7), on obtient

$$m(r, D) \leqslant \sum_{j=1}^{p-1} O(\log T(r, h_j)) + O(\log r) \ .$$

Le même raisonnement s'applique à D_i [on a évidemment

$$m(r, D_i) \leqslant C \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p-3} m\left(r, \frac{h_j^{(\nu+1)}}{h_j^{(\nu)}}\right) + C' \sum_{k=0}^{p-2} m(r, P_p^{(k)})$$

et le dernier membre est $O(\log r)$ les $P_p^{(k)}$ étant des polynomes], ce qui démontre le lemme.

Le théorème est maintenant facile à démontrer. De (5) on déduit que

$$\begin{aligned} T(r, h_i) = m(r, h_i) &\leqslant m(r, D_i) + m\left(r, \frac{1}{D}\right) \\ &\leqslant m(r, D_i) + T\left(r, \frac{1}{D}\right) \\ &\leqslant m(r, D_i) + T(r, D) + O(1) \quad \text{(d'après (1.2))} \\ &\leqslant m(r, D_i) + m(r, D) + O(\log r) \ \text{(d'après (4))} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{p-1} O(\log T(r, h_j)) + O(\log r) \ , \ r \notin S \ , \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{p-1} T(r, h_i) \leqslant \sum_{j=1}^{p-1} O(\log T(r, h_j)) + O(\log r) \ , \ r \notin S \ ,$$

ce qui implique

$$\sum_{i=1}^{p-1} T(r, h_i) = O(\log r) \ , \ r \notin S \ .$$

En particulier, $\underline{\lim} \dfrac{T(r, h_i)}{\log r} < \infty$, donc, d'après (1.1), h_i est un polynôme. Mais $h_i = P_i \exp(f_i - f_p)$. On en déduit que $\exp(f_i - f_p)$ est une fonction rationnelle, donc $f_i - f_p$ est constante. Cette contradiction démontre que $W \equiv 0$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Un corollaire immédiat du Théorème 1 est le théorème suivant.

THEOREME 2. – *Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $e^{f_1}, \ldots, e^{f_p}$ soient algébriquement indépendantes sur $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$ est que $1, f_1, \ldots, f_p$ soient linéairement indépendantes sur l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers.*

Nous terminons par un exemple qui montre que, si Ω est un domaine borné dans $\mathbf{C}^n$, le Théorème 1 est faux pour les fonctions holomorphes sur Ω.

Soit $\Omega \subset \{z \mid z = (z_1, \ldots, z_n),\ |z_1| < R\}$, et soit $0 < \varepsilon < e^{-R}$. Alors, la fonction $1 + \varepsilon e^{z_1}$ est sans zéro sur le domaine simplement connexe $\{z \mid |z_1| < R\}$, donc est de la forme

$$e^0 + \varepsilon e^{z_1} = e^f \ , \ f \text{ holomorphe sur } \Omega .$$

Visiblement, f est non-constante sur Ω (sinon e^{z_1} serait constante) et l'équation

$$e^{-z_1} + \varepsilon = e^{f - z_1}$$

montre que $f - z_1$ est aussi non-constante.

Il semble très probable que si $f_1, \ldots, f_p$ sont holomorphes sur un domaine borné Ω de $\mathbf{C}^n$ et si

$$M_{ij}(\rho) = \sup_{d(z, \partial\Omega) = \rho} |f_i(z) - f_j(z)| \ , \ i \neq j$$

tend assez vite vers ∞ quand $\rho \to 0$, alors le théorème correspondant sur l'indépendance des e^{f_i} reste vrai. Je ne sais démontrer ce genre de résultat que dans le cas des boules et des polydisques ; de toute façon, ce qu'on obtient sont des conditions nécessaires. J'ignore s'il existe des conditions nécessaires et suffisantes de ce type.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Functionen*, Springer Verlag, Berlin, (1936).

Manuscrit reçu le 3 mai 1971

Raghavan Narasimhan
The University of Chicago
Department of Mathematics
5734 University Avenue
Chicago, Ill. 60637 (USA)