ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-LOÏC BATUDE

Singularité générique des applications différentiables de la 2-sphère dans une 3-variété différentiable

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 3 (1971), p. 155-172
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_3_155_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,3 (1971), 155-172

SINGULARITÉS GÉNÉRIQUES DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES DE LA 2-SPHÈRE DANS UNE 3-VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

APPLICATION A LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LA SPHÈRE

par Jean-Loïc BATUDE

Introduction.

Dans cet article nous nous intéressons au théorème suivant dit : "Théorème de la sphère" :

Soit M une 3 variété différentiable orientable telle que $\pi_2(M)$ soit différent de zéro. Alors il existe un plongement différentiable de la 2-sphère V dans M non homotope à une application constante.

Le théorème de la sphère a été énoncé et démontré pour la première fois par Papakyriakopoulos dans [6] avec cependant des hypothèses un peu plus fortes. Whitehead dans [8] a amélioré la fin de la démonstration de Papakyriakopoulos, ce qui lui a permi de réduire les hypothèses et de donner l'énoncé ci-dessus.

Ces démonstrations ont été faites dans un cadre simplicial et reposent sur des résultats concernant les singularités des applications de V dans M, certains de ces résultats provenant de travaux de très anciens géomètres.

Dans cet article nous reprenons l'étude complète des singularités des applications de V dans M en nous plaçant dans un cadre différentiable et en utilisant les méthodes de transversalité. Puis nous montrons comment ces résultats sont utilisés pour la démonstration du théorème proprement dite en transposant les arguments et construction de Papakyriakopoulos et Whitehead au cas différentiable.

Toutes ces variétés et toutes les applications que nous considèrerons seront supposées C^∞-différentiables. V désignera la 2-sphère et M une variété de dimension trois. Etant donnée une variété W son espace tangent en un point x sera noté W_x.

I. Singularité générique des applications différentiables de la 2-sphère dans une variété de dimension 3.

1. *Théorème de transversalité de Thom.*

Soit $J^r(V, M)$ l'ensemble des jets infinitésimaux d'Ehresmann d'ordre r de V dans M. $J^r(V, M)$ peut être muni d'une structure fibrée différentiable de base V.

Toute application f de V dans M définit une section f^r de ce fibré, celle qui à tout point x de V associe le jet d'ordre r de f en x.

Soit d une métrique sur $J^r(V, M)$. La famille des parties de $[\mathrm{Hom}(V, M)]^2$:

$$K_\varepsilon = \{(f, g) \in [\mathrm{Hom}(V, M)]^2 \;\; ; \;\; d[f^r(x), g^r(x)] < \varepsilon \,, \; \forall x \in V\}$$

où ε décrit R^+, constitue une base d'entourage pour une structure uniforme sur $\mathrm{Hom}(V, M)$; soit C^r la topologie qu'elle définit et $L(V, M, r)$ l'espace $\mathrm{Hom}(V, M)$ muni de cette topologie.

$L(V, M, r)$ est un espace de Baire.

1^{er} Théorème de transversalité.

Si N est une sous-variété fermée de $J^r(V, M)$, l'ensemble des applications f de V dans M telles que f^r soit transverse à N forment un ouvert dense de $L(V, M, s)$, si $s > r$.

$2^{ème}$ Théorème de transversalité.

Si N est une sous-variété fermée de $[J^r(V, M)]^p$, $\delta_p(V)$ le sous-ensemble de V^p formé des suites de p points de V non tous distincts, et C le complémentaire d'un voisinage ouvert de $\delta_p(\mathrm{V})$, l'ensemble des applications f de V dans M telles que $(f^r, \ldots, f^r)$ soit transverse à N sur C forment un ouvert dense de $\mathrm{L}(\mathrm{V}, \mathrm{M}, s)$, si $s > r$.

2. *Point fronce d'une application f de* V *dans* M.

Definition. — *Soit x un point où le rang de f est égal à 1, soient (x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3) des systèmes de coordonnées locales au voisinage de x et de $y = f(x)$ tels que $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ engendre le noyau de df_x.*

Considérons la base $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial y_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_2}, \dfrac{\partial}{\partial y_3} \right\}$ *de* M_y *et soient :* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$; $i = 1, 2$ *les vecteurs de composantes* $\left\{ \dfrac{\partial\, y_1 o f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial\, y_2 o f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial\, y_3 o f}{\partial x_i} \right\}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}$; $i = 1, 2$ *les vecteurs de composantes*

$$\left\{ \frac{\partial^2 y_1 o f}{\partial x_1 \partial x_i}, \frac{\partial^2 y_2 o f}{\partial x_1 \partial x_i}, \frac{\partial^2 y_3 o f}{\partial x_1 \partial x_i} \right\}$$

On dit que x est un point fronce de f si $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ *forment une base de* M_y.

Theoreme. — *Au voisinage d'un point fronce x de f et de son image y on peut choisir les coordonnées locales (x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3) de manière que f s'exprime sous la forme : $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1 x_2$, au voisinage de x.*

Démonstration. — Cf. H. Whitney [10]

Conséquence. — Etant donné un point fronce x d'une application f de V dans M il existe un voisinage ouvert u_x de x tel que :

1) u_x ne contient aucun point singulier de f autre que x.

2) il n'existe pas $x' \neq x$ dans u_x tel que $f(x') = f(x)$.

3) si x', x'' sont deux points distincts de u_x tels que $f(x') = f(x'')$, on a

$$df_{x'}(\mathrm{V}_{x'}) + df_{x''}(\mathrm{V}_{x''}) = \mathrm{M}_y .$$

4) l'ensemble des points doubles de $f(u_x)$ constitue une sous-variété de dimension 1 de $f(u_x)$ de bord $f(x)$.

3. *Applications génériques.*

DEFINITION. — *On appelle application générique de* V *dans* M *toute application f appartenant à* Hom(V, M) *vérifiant les cinq propriétés suivantes :*

1) *les points singuliers sont tous des points fronces.*

2) *tout point double est valeur régulière.*

3) *en un point double $y = f(x') = f(x'')$, $x' \neq x''$, on a :*

$$df_{x'}(V_{x'}) + df_{x''}(V_{x''}) = M_y$$

4) *f n'a que des points triples isolés.*

5) *f n'a pas de points quadruples.*

PROPOSITION. — Les propriétés qui interviennent dans la définition d'une application générique peuvent être traduites par l'écriture de transversalité dans des espaces de jets de la manière suivante.

a) $f : V \to M$ vérifie 1 si et seulement si f^1 est transverse à la sous-variété N_1 de $J^1(V, M)$ formée des jets d'application en un point où leur rang n'est pas égal à 2.

b) Une application $f : V \to M$ vérifiant 1, vérifie 2, si et seulement si (f^1, f^1) est transverse à la sous-variété N_3 de $(J^1(V, M))^2$ formée des couples de jets d'ordre 1 ayant même but l'un d'eux étant singulier.

c) $f : V \to M$ vérifie 3 si et seulement si $\varphi = (f^0, f^0)/V^2 - \delta_2(V)$ est transverse à la sous-variété N_4 de $(J^0(V, M))^2$ image réciproque de la diagonale de M^2 par la projection naturelle de $(V \times M)^2$ sur M^2.

d) $f : V \to M$ vérifie 4 si et seulement si

$$\psi = (f^0, f^0, f^0)/V^3 - \delta_3(V)$$

est transverse à la sous-variété N_5 de $(J^0(V, M))^3$ image réciproque de la diagonale de M^3 par la projection naturelle de $(V \times M)^3$ sur M^3.

e) $f : V \to M$ vérifie 5 si et seulement si la restriction de (f^0, f^0, f^0, f^0) à $V^4 - \delta_4(V)$ est transverse à la sous-variété N_5 de

$(J^0(V, M))^4$ image réciproque de la diagonale de M^4 dans la projection naturelle de $(V \times M)^4$ sur M^4.

Démonstration. – Cf. [1]. Les démonstrations de *a, b, c, d, e* sont très analogues. Donnons quelques indications sur la démonstration de c) :

Soient (x'_1, x'_2), (x''_1, x''_2) des systèmes de coordonnées sur V au voisinage de x', x'' respectivement et (y_1, y_2, y_3) un système de coordonnées sur M au voisinage de $y = f(x') = f(x'')$.

On en déduit un système de coordonnées :

$$(x'_1, x'_2 \; ; y'_1, y'_2, y'_3 \; ; x''_1, x''_2 \; ; y''_1, y''_2, y''_3)$$

Sur $(V \times M)^2$, au voisinage de $(f^0, f^0)(x', x'')$.

Soit E l'espace tangent à $(V \times M)^2$ en ce point. On peut montrer par le calcul que :

$$N_{4(f^0, f^0)(x', x'')} + d(f^0, f^0)(V_{x'} \oplus V_{x''}) = G \oplus H \oplus K$$

où :

– G est le sous-espace vectoriel de E engendré par $\left(\frac{\partial}{\partial x'_i}\right)_{i=1,2}$ et $\left(\frac{\partial}{\partial x''_i}\right)_{i=1,2}$

– H celui engendré par $\left(\frac{\partial}{\partial y'_j} + \frac{\partial}{\partial y''_j}\right)_{j=1,2,3}$.

– K celui engendré par les vecteurs (Y'_i) et (Y''_i).

Ceux-ci ayant pour composantes sur $\left(\frac{\partial}{\partial y'_j}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial y''_j}\right)$ les mêmes composantes que les vecteurs $df_{x'}\left(\frac{\partial}{\partial x'_i}\right)_{x'}$ et $df_{x''}\left(\frac{\partial}{\partial x''_i}\right)_{x''}$ sur $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$.

Pour que φ soit transverse à N_4 il faut et il suffit que le sous-espace vectoriel K soit de dimension 3 donc, d'après ce qui précède, que

$$df_{x'}(V_{x'}) + df_{x''}(V_{x''}) = M_y \, .$$

PROPOSITION. – *Les applications f de* V *dans* M *vérifiant respectivement* 1 *et* 3 ; 1, 2 *et* 4 ; 1, 2 *et* 5 *forment des ouverts denses* L_1 , L_2 , L_3 *de* $L(V, M, r)$ si $r \geqslant 2$.

Démonstration. – Cf. [1]. Les théorèmes de transversalité de Thom et l'étude locale d'une application au voisinage d'un point fronce permettent de démontrer cette proposition.

Théorème fondamental. – *Les applications génériques forment un ouvert dense de* $L(V, M, r)$ si $r \geqslant 2$.

Démonstration. – $L(V, M, r)$ étant un espace de Baire, l'ensemble des applications génériques c'est-à-dire $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ est un ouvert dense de $L(V, M, r)$.

DEFINITION. – *On appelle singularités génériques les singularités des applications génériques.*

4. *Courbes doubles.*

PROPOSITION. – *Si* (x', x'') *appartient à* $V^2 - \delta_2(V)$, $f(x') = f(x'')$ *équivaut à* : $\varphi(x', x'')$ *appartient à* N_4 .

Démonstration. – résulte immédiatement de la définition de N_4.

THEOREME. – *Les points doubles sont répartis suivant les courbes qui sont soient fermées, soient limitées par des images de points fronces.*

Démonstration. – Cf. [1]. f étant générique, φ est transverse à N_4 et par suite $\varphi^{-1}(N_4)$ est une sous-variété de dimension 1 de $V^2 - \delta_2(V)$. Les composantes connexes qui sont en nombre fini sont des courbes sans singularité dont les bords éventuels appartiennent à $\delta_2(V)$.

Si C' est une composante connexe de $\varphi^{-1}(N_4)$, sa symétrique par rapport à $\delta_2(V)$, C'' en est une autre. $\varphi^{-1}(N_4)$ s'écrit donc

$$\varphi^{-1}(N_4) = \bigcup_{k=1}^{n} (C'_k \cup C''_k) .$$

Si C'_k et C''_k sont limitées par deux points bords (x_1, x_1), (x_2, x_2), x_1 et x_2 sont des points fronces. Projetons C'_k, C''_k sur le premier facteur de V^2, on obtient deux courbes J'_k, J''_k de V ayant éventuellement des points doubles, que f recolle suivant une courbe double Γ_k qui est soit fermée, si C'_k et C''_k le sont, soit limitée par des images de points fronces si C'_k et C''_k ont des points bords.

DEFINITION. — *On appelle courbe fronce une courbe double limitée par des images de points fronces.*

DEFINITION. — *Considérons* $\varphi^{-1}(N_4) = \bigcup_{k=1}^{n} (C'_k \cup C''_k)$ *et l'application symétrie* $s_k : C'_k \to C''_k$. *Par projection,* s_k *induit un homéomorphisme local non nécessairement univoque* $\Psi_k : J'_k \to J''_k$. *La famille des triplets* $\{J'_k, J''_k, \Psi_k\}$ *est appelée diagramme réalisé de* f. *C'est une représentation des singularités de* f *dans la source* V.

DEFINITION. — *Si* $\{J'_k, J''_k, \Psi_k\}$ *est le diagramme réalisé de* f : $V \to M$, *on appelle régions de ce diagramme, les fermetures des composantes connexes de* V *diminué des courbes du digramme.*

5. *Points triples.*

PROPOSITION. — *Par un point triple passent trois arcs de courbes doubles et ceux-ci se coupent transversalement.*

Démonstration. — Soient x_1, x_2, x_3 les antécédents d'un point triple y, les six points :

$$(x_1, x_2)(x_2, x_3)(x_3, x_1)(x_2, x_1)(x_3, x_2)(x_1, x_3)$$

appartiennent à $\varphi^{-1}(N_4)$.

Par suite, par chacun des trois premiers passe un arc de courbe C'_1, C'_2, C'_3 et par leurs symétriques passent les arcs de courbes symétriques C''_1, C''_2, C''_3. Soient J'_1, J'_2, J'_3, J''_1, J''_2, J''_3, leurs projections sur V. J'_1 coupe J''_3 en x_1, J'_2 coupe J''_1 en x_1, J'_3 coupe J''_2 en x_3. f recolle J'_1 avec J''_1, J'_2 avec J''_2, J'_3 avec J''_3 suivant trois arcs de courbes doubles Γ_1, Γ_2, Γ_3, passant par y.

PROPOSITION. — *Si x_1, x_2, x_3 sont les antécédents d'un point triple y, si (J'_1, J''_1, Ψ_1) (J'_2, J''_2, Ψ_2) (J'_3, J''_3, Ψ_3) sont les triplets correspondant aux courbes doubles passant par y, si x_1, x_2, x_3, appartiennent respectivement à $J'_1 \cap J''_3$, $J'_2 \cap J''_1$, $J'_3 \cap J''_2$, ils vérifient les relations*

$$x_1 = \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3(x_1) \quad x_2 = \Psi_1 \Psi_3 \Psi_2(x_2) \quad x_3 = \Psi_2 \Psi_1 \Psi_3(x_3)$$

Démonstration très simple.

Théorème de classification des points triples. — On distingue trois types de points triples :

1) Ceux obtenus comme intersection de trois courbes doubles distinctes se coupant transversalement.

2) Ceux obtenus comme singularité d'une courbe double $\Gamma = f(J') = f(J'')$ un des antécédents du point triple étant une singularité d'une des courbes J', J''.

3) Ceux obtenus comme singularité d'une courbe double $\Gamma = f(J') = f(J'')$, un des antécédents des points appartenant à $J' \cap J''$.

Démonstration simple.

DEFINITION. — *Etant donné un triplet (J'_1, J''_1, Ψ_1) du diagramme réalisé de f tel que J'_1 coupe J''_1 en un point α, $f(\alpha)$ est un point triple par lequel il ne passe au plus que deux courbes doubles*

$$\Gamma_1 = f(J'_1) = f(J''_1) \quad et \quad \Gamma_3 = f(J'_3) = f(J''_3) .$$

On dit dans ce cas que les triplets (J'_1, J''_1, Ψ_1) et *(J'_3, J''_3, Ψ_3) sont adjacents.*

6. *Conséquences de l'étude des singularités génériques.*

CONSEQUENCE 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe double $\Gamma = f(J') = f(J'')$ soit simple est que ses antécédents J', J'' soient simples et qu'en plus ils soient disjoints ou confondus. S'ils sont confondus $J' = J'' = J$ et $f/J : J \to \Gamma$ est un revêtement à deux feuillets.*

CONSEQUENCE 2. – *On peut caractériser la complexité d'une immersion générique par le couple* (t, d) *du nombre de ses points triples et de ses courbes doubles. On dira en effet que* $f_1 < f_2$ *si* $t_1 < t_2$ *ou si* $t_1 = t_2$ *et* $d_1 < d_2$.

CONSEQUENCE 3. – *De l'existence d'une application générique* f *de* V *dans* M *non homotope à zéro, se déduit celle d'une immersion générique non homotope à zéro, par suppression des courbes fronces.*

Démonstration. – Etant donné une courbe fronce

$$\Gamma = f(\mathrm{J}') = f(\mathrm{J}'')$$

de f, considérons une des extrémités de Γ, soit y. Soit z le premier point triple rencontré sur Γ en partant de y, x un antécédent de z et u un voisinage de x dans V, tels que $f(u) = v$ soit transversal à Γ et que $f/u : u \to v$ soit un difféomorphisme.

Il existe un voisinage tubulaire de Γ qui rencontre v suivant un disque fermé D contenant z. On peut par une isotopie à l'intérieur du voisinage tubulaire transformer D en un disque qui ne rencontre pas Γ. La sphère ainsi obtenue est encore non homotope à zéro et a un point triple de moins sur sa courbe fronce Γ. Par itération on peut éliminer successivement tous les points triples des courbes fronces.

Il est alors facile d'éliminer les courbes fronces de la manière suivante : considérons une courbe fronce $\Gamma = f(\mathrm{J}') = f(\mathrm{J}'')$; $\mathrm{J}' \cup \mathrm{J}''$ est une courbe simple fermée. Soient E' et E'' les deux disques limités par cette courbe. Il existe des applications $g' : \mathrm{V} \to \mathrm{M}$, $g'' : \mathrm{V} \to \mathrm{M}$ telles que $g'(\mathrm{V}) = f(\mathrm{E}')$, $g''(\mathrm{V}) = f(\mathrm{E}'')$, l'une au moins étant non homotope à zéro.

Elle peut être approchée par une application générique $g : \mathrm{V} \to \mathrm{M}$ qui lui est homotope et qui a une courbe fronce de moins que f. En itérant, on élimine toutes les courbes fronces et on obtient ainsi une immersion générique de V dans M non homotope à zéro.

CONSEQUENCE 4. – *Si une immersion générique* $f : \mathrm{V} \to \mathrm{M}$ *non homotope à zéro, a une courbe double simple* $\Gamma = f(\mathrm{J}') = f(\mathrm{J}'')$ *dont les antécédents* J' *et* J'' *sont disjoints, on peut construire une immersion générique non homotope à zéro de complexité moindre.*

Démonstration. — Γ étant une courbe double simple, $J'J''$ sont des courbes simples fermées disjointes de V. On considère les 2-disques de V, E' E'' bordés par J', J'' tels que E' ne contienne pas J'' et E'' ne contienne pas J'. A partir des restrictions de f à E' et à E'' on peut construire une immersion générique $f' : V \to M$ telle que :

1) si f' est non homotope à zéro, elle répond à la question.

2) si f' est homotope à zéro, alors on peut construire une homotopie régulière.

$$H : f(V) \times I \to M$$

telle que

$$H_1[f(E')] = f(E'') \ ; \ H_1[f(E'')] = f(E')$$

$$H(x, t) = x \ , \ \forall t \ , \ \forall x \in f(V) - [f(E') \cup f(E'')]$$

$$H_0(x) = x \ , \ \forall x \in f(V)$$

$H_1 \circ f$ peut alors être approché par une immersion générique homotope à f et qui a moins de courbes doubles que f.

CONSEQUENCE 5. — *L'image* W *d'une immersion générique de la* 2-*sphère dans une* 3-*variété admet un voisinage régulier* C^∞, *soit* N.

Démonstration. — Cf. [1]. Le théorème sur l'extension des triangulations C^∞ du bord d'une variété à cette variété, le théorème de recollement de triangulations C^∞ de R. Munkres [5] et la nature des singularités d'une immersion générique permettent de démontrer qu'étant donnée une immersion générique $f : V \to M$ il existe une triangulation C^∞ de M qui induit une triangulation C^∞ de W. D'après Whitehead [8] et Hirsh [4] l'image W d'une immersion générique de la 2-sphère admet alors un voisinage régulier C^∞ N, qui est une sous-variété à bord de dimension 3 de M.

7. *Propriété de* N *voisinage régulier* C^∞ *de l'image* W *d'une immersion générique* $f : V \to M$

PROPRIETE 1. — W *est un rétracté par déformation forte de* N.

Démonstration. — N étant un voisinage régulier de W, s'effondre sur W.

PROPRIETE 2. — *Si* M *est orientable,* si $H_1(N)$ *est fini le bord de* N *est formé de* 2 *sphères.*

Démonstration. — Cf. Seifert et Threlfall [7].

PROPRIETE 3. — *Si le bord de* N *est formé de* 2 *sphères,* $\pi_1(N)$ *s'injecte dans* $\pi_1(M)$.

PROPRIETE 4. — *Si* M *est orientable, si* $\pi_1(N)$ *est fini on peut plonger* N *dans une 3-variété* P *telle que* $\pi_2(P) = 0$.

Démonstration. — On construit P en attachant des 3 cellules à N suivant les 2-sphères qui constituent son bord. $\pi_1(P) = \pi_1(N)$ et par suite le revêtement universel $\widetilde{P}$ de P est compact. Il suffit de montrer que $\pi_2(\widetilde{P}) = 0$ ce qui résulte de la compacité de $\widetilde{P}$, de l'isomorphisme d'Hurewicz et de la dualité de Poincaré.

II. Application à la démonstration du théorème de la sphère.

1. *Construction de la tour élémentaire de Papakyriakopoulos.*

Considérons une immersion générique $f : V \to M$, N un voisinage régulier C^∞ de $W = f(V)$ non simplement connexe, (M_*, P_*) le revêtement universel de N et f_* un relèvement de f suivant p_*.

f_* est une immersion générique de V dans M_*. Soit W_* son image, N_* un voisinage régulier C^∞ de W_* dans M_*.

Le diagramme suivant porte le nom de tour élémentaire de Papakyriakopoulos.

$$\begin{tikzcd}
& W_* \arrow[r] & N_* \arrow[r] & M_* \arrow[dl, "P_*"'] & \\
V \arrow[ur, "f_*"] \arrow[r] & W \arrow[r] & N \arrow[r] & M &
\end{tikzcd}$$

On dit que cette tour élémentaire a été construite sur $f : V \to M$ et que cette construction transforme f en f_*.

2. *Propriétés de la tour élémentaire de Papakyriakopoulos.*

PROPOSITION. – *Le diagramme réalisé de f_* est contenu dans celui de f.*

DEFINITION. – *Si (J', J'', Ψ) appartient au diagramme réalisé de f, mais pas à celui de f_* on dit que la courbe double $\Gamma = f(J') = f(J'')$ est dédoublée dans la construction.*

PROPOSITION. – *Si la courbe double de f, $\Gamma = f(J') = f(J'')$ est dédoublée dans la construction, il existe une transformation de revêtement τ de p_* telle que $f_*(J'') = \tau \circ f_*(J')$. Par suite la recherche des courbes doubles de f qui se dédoublent se ramène à celle des transformations de revêtement différentes de l'identité telle que $W_* \cap \tau^{-1}(W_*) \neq \emptyset$.*

Démonstration. – Cf. [1]. Elle repose sur le fait que Ψ est un difféomorphisme local et sur la propriété des transformations de revêtement de ne laisser aucun point invariant.

PROPOSITION. – *Le revêtement induit par p_* sur* W, $(\hat{M}, \hat{P})$ *est un revêtement universel et $\hat{M} = W_* \cup [\bigcup_{\tau} \tau(W_*)]$ où τ décrit l'ensemble des transformations de revêtement de p_* différentes de l'identité.*

PROPOSITION. – *Il existe une transformation de revêtement τ telle que $W_* \cap \tau^{-1}(W_*) \neq \emptyset$ et, si $H_1(N)$ est infini on peut choisir τ d'ordre infini.*

Démonstration. – Cf. [1]. Etant donné un point y de W_* il existe un voisinage ouvert de y dans $\hat{M}$ contenu dans la réunion des $\tau(W_*)$ qui contiennent y. On démontre alors que si la proposition était fausse $\hat{M}$ ne serait pas connexe.

PROPOSITION. – *Si τ est une transformation de revêtement de p_* différente de l'identité telle que $W_* \cap \tau^{-1}(W_*) \neq \emptyset$, cette intersection est constituée de courbes simples fermées disjointes* T'.

Si l'on pose $T'' = \tau(T')$, T'' *et* T' *sont distinctes et*

$$\Gamma = p_*(T') = p_*(T'')$$

est une courbe double de f.

La famille des courbes doubles de f ainsi obtenue est la famille des courbes doubles de f qui se trouvent dédoublées dans la construction de la tour élémentaire de PAPAKYRIAKOPOULOS.

Démonstration. – Cf. [1]. La forme de $W_* \cap \tau^{-1}(W_*)$ résulte de la transversalité de f_* par rapport à $\tau^{-1} \circ f_*$.

THEOREME. – $d(f_*) < d(f)$.

Démonstration. – Cela résulte d'une manière évidente des deux dernières propositions.

Remarque. – Ce théorème souligne l'intérêt de la tour élémentaire de Papakyriakopoulos.

PROPOSITION. – *Si* $d(f_*) = 0$, W_* *est une sphère et* P_*/W_* *est une immersion générique de celle-ci dans* N, *dont le diagramme réalisé est constitué des triplets* (T', T'', τ) *où* τ *est une transformation de revêtement de* p_* *différente de l'identité telle que sur* $W_* \cap \tau^1(W_*) \neq \emptyset$ *vide, où* T' *décrit l'ensemble de courbes fermées constituant cette intersection, et où* $T'' = \tau(T')$.

THEOREME. – *Si* $d(f_*) = 0$ *et si* $H_1(N)$ *est infini, f a une courbe double simple à antécédents disjoints.*

Démonstration. – Cf. [1]. On considère la transformation de revêtement d'ordre infini telle que $W_* \cap \tau^{-1}(W_*) \neq \emptyset$ et une courbe simple fermée T' de cette intersection.

Si $T' \cap T''$ est vide, $\Gamma = p(T') = p(T'')$ est une courbe double simple de f à antécédents disjoints, d'après la $1^{\text{ère}}$ conséquence de l'étude des singularités génériques. Sinon, d'après l'étude des points triples, il existe un triplet adjacent (T'_1, T''_1, τ_1) à (T', T'', τ). La relation vérifiée par chacun des antécédents d'un point triple implique que $\tau_1 = \tau^{-2}$.

Si $T'_1 \cap T''_1$ est vide, $\Gamma_1 = p_*(T'_1) = p_*(T''_1)$ est une courbe double simple de f à antécédents disjoints. Sinon on itère la construction précédente. On démontre qu'au bout d'un nombre fini d'opérations on arrive à un triplet (T'_r, T''_r, τ_r) tel que $T'_r \cap T''_r = \emptyset$, en vérifiant à l'aide de l'expression de τ_r en fonction de τ que, s'il n'en était pas ainsi, τ serait d'ordre fini.

Par suite $\Gamma_r = p_*(T'_r) = p_*(T''_r)$ est une courbe double simple de f à antécédents disjoints.

3. *Construction de la tour élémentaire de Whitehead.*

Considérons la tour élémentaire de Papakyriakopoulos construite sur une immersion générique $f : V \to M$. Soit τ une transformation de revêtement telle que $W_* \cap \tau^{-1}(W_*) \neq \emptyset$ et soit (M_1, p_1) le revêtement de N associé au sous-groupe de $\pi_1(N)$ engendré par τ. Soit $(\widetilde{M}, p_1/\widetilde{M})$ le revêtement induit par p_1 sur W ;

Il existe une application de revêtement $\widetilde{p} : \hat{M} \to \widetilde{M}$ telle que $\hat{p} = p_{1/\widetilde{M}} \circ \widetilde{p}$.

La tour élémentaire de Whitehead est le diagramme

$$\begin{tikzcd}
W_1 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & M_1 \arrow[d, "p_1"] & \\
V \arrow[u, "f_1"] \arrow[r] & W \arrow[r] & N \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

où $f_1 = \widetilde{p} \circ f_*$, $W_1 = f_1(V)$ et N_1 est un voisinage régulier de W_1 dans M_1.

THEOREME. — *f_1 est singulière.*

Démonstration. — Soit T' une courbe simple fermée de $W_* \cap \tau^{-1}(W_*)$, T'' son image par τ, $\Gamma = \widetilde{p}(T') = \widetilde{p}(T'')$ est une courbe double de f_1.

4. *Enoncé du théorème de la sphère.*

THEOREME DE LA SPHERE. — *Etant donné une 3-variété orientable* M_0 *tel que* $\pi_2(M_0) \neq 0$, *il existe un plongement de la 2-sphère dans* M_0 *non homotope à zéro.*

Principe de la démonstration. — Puisque $\pi_2(M_0) \neq 0$, le théorème de densité des applications génériques permet de prouver l'existence d'une application générique de V dans M_0 non homotope à zéro. On en déduit une immersion générique non homotope à zéro de la 2-sphère dans M_0 d'après la 3$^{\text{ème}}$ conséquence de l'étude des singularités génériques.

Considérons un élément de complexité minimale de la famille de ces immersions, soit f_0. D'après la 4$^{\text{ème}}$ conséquence de l'étude des singularités génériques, f_0 étant de complexité minimale, ne peut avoir de courbes doubles simples à antécédents disjoints. Démontrons qu'en fait f_0 est le plongement cherché. Pour cela on construit sur f_0 une tour faite d'un empilement de tours élémentaires, on démontre que l'immersion générique f_h du dernier étage de la tour est un plongement, puis, que la hauteur de la tour est nulle.

5. *Construction de la tour de Whitehead sur* $f_0 : V \to M_0$.

Soit N_0 un voisinage régulier C de $W_0 = f_0(V)$. Si $\pi_1(N_0)$ est fini la tour se réduit à :

$$V \xrightarrow{f_0} W \longrightarrow N_0 \longrightarrow M_0$$

et la hauteur de la tour est dite nulle.

Si $\pi_1(N_0)$ est infini on construit sur f_0 la tour élémentaire de Whitehead.

Si $\pi_1(N_1)$ est fini la construction s'arrête là et la hauteur de la tour est dite égale à 1.

Si $\pi_1(N_1)$ est infini, on construit sur $f_1 : V \to M_1$ la tour élémentaire de Papakyriakopoulos et on répète l'opération tant que le groupe fondamental du voisinage régulier de l'image du relèvement de l'immersion générique sur laquelle on vient de construire la dernière tour élémentaire est infini.

$d(f_1)$ étant fini, le nombre de courbes doubles diminuant strictement à chaque opération on arrive nécessairement à un rang h où le groupe fondamental du voisinage régulier est fini. Ce rang h est appelé la hauteur de la tour

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f_h"] & W_h \arrow[r] & N_h \arrow[r] & M_h \arrow[dl, "p_h"'] \\
V \arrow[r, "f_{h-1}"] & W_{h-1} \arrow[r] & N_{h-1} \arrow[r] & M_{h-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
V \arrow[r, "f_2"] & W_2 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & M_2 \arrow[dl, "p_2"'] \\
V \arrow[r, "f_1"] & W_1 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & M_1 \arrow[dl, "p_1"'] \\
V \arrow[r, "f_0"] & W_0 \arrow[r] & N_0 \arrow[r] & M_0
\end{tikzcd}
$$

Posons $q = p_1 \circ \ldots \circ p_h$ si $h \geqslant 1$ et $q = \mathrm{id}\ N_0$, si $h = 0$.

6. *f_h est un plongement.*

Montrons que si f_h était singulière f_0 serait homotope à zéro.

Soit C la fermeture d'une composante connexe de $N_h - W_h$. C est une variété de dimension 3 simplement connexe à bords anguleux dont les arêtes peuvent être des courbes doubles. Le bord de C a deux composantes connexes S et S_*, S étant une sphère appartenant au bord de N_h qui est composé uniquement de sphères puisque $\pi_1(N_h)$ est fini et S_* étant égal à $\bigcup_{j=1}^{m} f_h(V_j)$ où V_j sont des régions du diagramme de f_h.

On peut par des isotopies locales déformer S_* à l'intérieur de C transformant S_* en une sphère $\widetilde{S}$ et C en une variété à bord $\widetilde{C}$.

Chaque arête de S_* porte un point triple de f_h ou est une courbe double simple à antécédents confondus de f_h. Cela résulte de ce que le diagramme réalisé de f_h est contenu dans celui de f_0 et de ce que f_0 n'a pas de courbes doubles simples à antécédents disjoints.

Par suite $q/\widetilde{S}$ est une immersion générique de la 2-sphère dans M_0 de complexité moindre que f_0, elle est donc homotope à zéro.

W étant un rétracté par déformation forte de N, cela implique que q/S est homotope à zéro et ceci quel que soit S appartenant au bord de N_h. Par conséquent la restriction de q à N_h peut être étendue à la variété P, ($\pi_2(P) = 0$), déduite de N_h par attachement de 3-cellules.

f_h étant évidemment homotope à zéro dans P, $f_0 = q \circ f_h$ serait homotope à zéro dans $q(P) \subset M_0$ donc dans M_0.

7. *La hauteur de la tour est nulle.*

Si $h > 1$ $h_1(N_{h-1})$ est fini, sinon, $d(f_h)$ étant nul d'après le $2^{\text{ème}}$ théorème du § 2, f_{h-1} aurait une courbe double simple à antécédents disjoints et par suite f_0 également ce qui est impossible. Le bord de N_{h-1} est donc formé de sphères, donc $\pi_1(N_{h-1})$ s'injecte dans $\pi(M_{h-1})$; il est donc abélien et par suite isomorphe à $H_1(N_{h-1})$, donc fini. Ceci étant contraire à la construction de la tour de Whitehead, h est inférieur ou égal à 1.

La hauteur de la tour ne peut être égale à 1 car f_1 est singulière d'après le théorème du § 3. Elle est donc nulle.

f_h étant un plongement et h étant égal à zéro, f_0 est un plongement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.L. BATUDE, Thèse de troisième cycle, Faculté des Sciences de Dijon.

[2] J. CERF, Théorèmes de transversalité, Notes.

[3] A. HAEFLIGER, Plongements différentiables de variétés dans variétés, *Comment, Math. Helv.* 36 (1961), 47-82.

[4] M.W. HIRSCH, Smooth regular neighborhoods, *Annals of Math.* Vol. 76, n° 3 nov. (1962), 524-530.

[6] PAPAKYRIAKOPOULOS, On dehn's lemma and the sphere theorem, *Annals of Maths.* Vol. 66 n° 1 Juillet (1957).

[5] J. MUNKRES, Elementary differential topology, Lecture given at MIT (1961), Princeton University Press.

[7] SEIFERT und THRELFALL, Lehrbuch de topologie, Chilsea publishing company.

[8] WHITEHEAD, On 2-spheres in 3-manifolds, *Bull Amer. Math. Soc. 64* (1958), 161-166.

[9] WHITEHEAD, On C^1 complexe, *Annals of Math.* 41 (1960), 809-824.

[10] WHITNEY, The singularities of a smooth n-manifold in a $2n-1$ space *Annals of Math.* 45 (1944) 247-293.

Manuscrit reçu le 24 mai 1971

Jean-Loïc BATUDE
Département de Mathématiques
Université de Dijon
21 – Dijon