ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN PIRIOU

Problèmes aux limites généraux pour des opérateurs différentiels paraboliques dans un domaine borné

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 1 (1971), p. 59-78

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_1_59_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,1 (1971), 59-78

PROBLÈMES AUX LIMITES GÉNÉRAUX POUR DES OPÉRATEURS DIFFERENTIELS PARABOLIQUES DANS UN DOMAINE BORNE

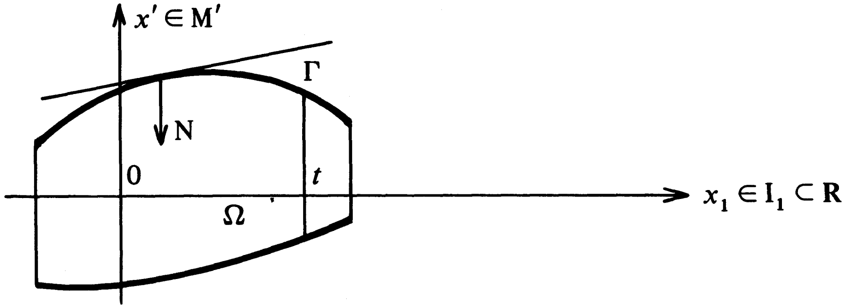
par Alain PIRIOU

Dans cet article, on utilise l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels de Volterra, étudiée dans [14], pour discuter des problèmes aux limites relatifs à un opérateur différentiel parabolique dans un domaine borné cylindrique ou non cylindrique, et on détaille certains des résultats annoncés dans [13].

Plus précisément, soient M' une variété C^∞ de dimension $n-1$, t un réel >0, I_1 un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant $[0, t]$; posons $M = I_1 \times M' = \{x = (x_1, x') \mid x_1 \in I_1, x' \in M'\}$ et considérons un ouvert Ω de M ayant, dans M, un bord Γ (C^∞, de dimension $n-1$) nulle part tangent à une sous-variété $x_1 =$ constante ; supposons que pour $t', t'' \in I_1$, l'ensemble des $x \in \Omega$ tels que $t' \leqslant x_1 \leqslant t''$ est relativement compact dans M. Soient E, F deux fibrés de même dimension sur M et un opérateur différentiel P, opérant des sections de E dans celles de F, parabolique au sens de Petrovski relativement à un poids donné a_1 sur la variable de temps x_1 (voir I, 2). Soient $G_1, \ldots, G_J$ des fibrés sur Γ et des opérateurs pseudo-différentiels $B_{j,k}$ ($1 \leqslant j \leqslant J$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $m =$ degré de P) opérant des sections de E/Γ dans celles de G_j ; on suppose que les $B_{j,k}$ sont de Volterra (voir [14] et I, 1), c'est-à-dire, essentiellement, que leur noyau-distribution est nul dans $\{(x, y) \in \Gamma \times \Gamma \mid x_1 < y_1\}$; posons $G = \overset{J}{\underset{j=1}{\oplus}} G_j$ et $B = (B_{j,k})$. Nous considérons le problème aux limites :

$$(*) \qquad \begin{cases} Pu = f & \text{dans} \quad \Omega_t = \{x \in \Omega \mid x_1 < t\} \\ B\gamma u = g & \text{dans} \quad \Gamma_t = \{x \in \Gamma \mid x_1 < t\} \end{cases}$$

où f (resp : g) est une section-distribution donnée de F/Ω_t (resp : G/Γ_t) nulle pour $x_1 < 0$, et où l'inconnue u est une section-distribution de E/Ω_t nulle pour $x_1 < 0$; on a posé $B\gamma u = \left(\sum_k B_{j,k}\, \gamma_k u\right)_{j=1,\dots,J}$ et désigné par $i^k\, \gamma_k\, u$ la restriction à Γ_t de la $k^{\text{ième}}$ dérivée de u selon un champ N donné transverse à Γ et sans composante sur l'axe x_1 (voir (4), (5) et I,2).



Pour discuter (*), nous adaptons les méthodes utilisées dans [3], [4] pour les problèmes elliptiques et nous appliquons les résultats de [14] (complétés dans I,1) : l'étude des valeurs au bord d'un potentiel de multi-couche sur Γ (voir II,1) permet de construire, à partir de P et Ω, deux pseudo-projecteurs Q_1 , Q_2 , opérant des sections de E^m/Γ dans elles-mêmes (voir (17)). Le résultat principal de cet article s'énonce alors ainsi : si BQ_1 est parabolique à droite (pour $0 \leqslant x_1 \leqslant t$), le problème (*) admet au moins une solution ; si $\begin{pmatrix} I - Q_2 \\ B \end{pmatrix}$ est parabolique à gauche (pour $0 \leqslant x_1 \leqslant t$), le problème (*) admet au plus une solution ; dans les deux cas, nous donnons une formule précise reliant u à f, g (voir (20)). L'hypothèse de parabolicité à droite pour BQ_1 et l'hypothèse de parabolicité à gauche pour $\begin{pmatrix} I - Q_2 \\ B \end{pmatrix}$ se traduisent par des conditions sur les symboles principaux de P, B (voir (18) et [14], (28)). Dans le cas particulier où dim G $= (m/2)$ dim E, ces deux hypothèses sont équivalentes et sont satisfaites si et seulement si la condition algébrique habituelle de Shapiro-Lopatinski est vérifiée (voir (21)).

Nous examinons enfin le cas particulier où les données f, g sont dans des espaces de Sobolev anisotropes (voir III,1) : en établissant (voir (31)) des propriétés de continuité dans ces espaces pour les opérateurs intervenant dans la discussion générale (20), nous montrons que l'opérateur $u \longrightarrow (\mathrm{P}u, \mathrm{B}\gamma u)$ admet, selon l'hypothèse de parabolicité, un inverse à droite ou un inverse à gauche, linéaires continus dans les espaces de Sobolev naturellement associés aux ordres des opérateurs P, B (voir (32)).

Signalons que des opérateurs de Volterra ont été considérés – d'un point de vue hilbertien – dans [15], où on applique la méthode de factorisation de Wiener-Hopf à l'étude de problèmes du type (*) dans les espaces de Sobolev lorsque $\dim \mathrm{E} = 1$, $\dim \mathrm{G} = m/2$ et de problèmes analogues avec P pseudo-différentiel de Volterra. D'autre part, on trouve dans [11], pour le cas où Ω est cylindrique la construction d'un projecteur (sur les valeurs au bord latérales des solutions de l'équation $\mathrm{P}u = 0$) ; les opérateurs Q_1, Q_2 que nous utilisons pour la discussion de (*) sont alors égaux, modulo des opérateurs régularisants, à ce projecteur ; les points (13), (29), (30) du présent article, consacrés à l'existence des valeurs au bord latérales pour certaines solutions de $\mathrm{P}u = f$, généralisent les résultats correspondants de [11].

1. Préliminaires.

1. *Opérateurs de Volterra.*

Dans ce paragraphe, nous complétons les résultats de [14]. Un point y de $\mathbf{R}^n$ est noté $y = (y_1, y') = (y'', y_n)$, où $y_1, y_n \in \mathbf{R}$ et $y' = (y_2, \dots, y_n)$, $y'' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$; les autres notations sont celles des points (1), (2), (3) de [14]. Etant donnés un entier pair a_1, un réel m, un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ et deux entiers positifs d_1, d_2, rappelons qu'on désigne par $\mathrm{L}^{m,a}(\Omega, \mathbf{C}^{d_1}, \mathbf{C}^{d_2})$ la classe des opérateurs pseudo-différentiels $\mathrm{P} : \mathcal{D}(\Omega, \mathbf{C}^{d_1}) \longrightarrow \varepsilon(\Omega, \mathbf{C}^{d_2})$ dont le symbole $p(y, i\eta_1, \eta')$ admet pour $|\eta| \longrightarrow \infty$ un développement asymptotique $p \sim \sum_{j \in \mathbf{N}} p_j$, où $p_j(y, i\eta_1, \eta') \in \mathrm{C}^\infty(\Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}), \mathcal{L}(\mathbf{C}^{d_1}, \mathbf{C}^{d_2}))$ est quasi-homogène de degré $m - j$ relativement au système de poids $a = (a_1, 1, \dots, 1)$ sur η (c'est-à-dire :

$$p_j(y, i\lambda^{a_1}\eta_1, \lambda\eta') = \lambda^{m-j} p_j(y, i\eta_1, \eta') \quad \text{pour} \quad \lambda > 0) .$$

Nous commençons par établir l'invariance de $L^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2})$ par des difféomorphismes plus généraux que ceux de [7], [11], [14].

(1) PROPOSITION. – *Soient* Ω, $\widetilde{\Omega}$ *deux ouverts de* $\mathbf{R}^n$ *et* θ : $\Omega \longrightarrow \widetilde{\Omega}$ *un difféomorphisme de la forme :*

$$\theta(y_1, y') = (y_1, \theta'(y_1, y')) .$$

Si $P \in L^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2})$, *alors le transporté* $\widetilde{P}$ *de* P *par* θ *est dans* $L^{m,a}(\widetilde{\Omega}, C^{d_1}, C^{d_2})$.

Démonstration. – La proposition étant évidente lorsque P est régularisant, il suffit de considérer un opérateur de la forme

$$(Qu)(x) = \iint e^{i<x-y,\eta>} q(x, y, \eta)\, u(y)\, dy\, d\eta \qquad (u \in \mathcal{D}(\Omega),\ x \in \Omega)$$

où $q(x, y, \eta) = (2\pi)^{-n} \varphi(x, y)\ p(x, i\eta_1, \eta')$, avec $\varphi \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ telle que : $\varphi = 1$ au voisinage de la diagonale de $\Omega \times \Omega$; $\varphi = 0$ en dehors d'un fermé de $\Omega \times \Omega$ contenu dans un voisinage arbitrairement petit de cette diagonale ; les deux projections $\operatorname{Supp} \varphi \longrightarrow \Omega$ sont propres. L'intégrale double précédente est une intégrale oscillante, au sens de [6]. Pour $u \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega})$ et $x \in \widetilde{\Omega}$, il vient :

$$(\widetilde{Q}u)(x) = \iint e^{i<\theta^{-1}x - y,\eta>} q(\theta^{-1}x, y, \eta)\, (u \circ \theta)(y)\, dy\, d\eta =$$

$$= \iint e^{i<\theta^{-1}x - \theta^{-1}y,\eta>} q(\theta^{-1}x, \theta^{-1}y, \eta)\, |\operatorname{Jac} \theta^{-1}|\, u(y)\, dy\, d\eta.$$

Mais $\theta^{-1}x - \theta^{-1}y = H(x, y) \cdot (x - y)$, où $H(x, y)$ est une matrice $n \times n$ de classe C^∞ par rapport à (x, y), de terme général égal, au voisinage de la diagonale de $\widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega}$, à :

$$H_{i,j}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial \theta_i^{-1}}{\partial y_j} (y + \zeta(x - y))\, d\zeta .$$

On a $H(x, x) = D\,\theta^{-1}(x)$, différentielle de θ^{-1} en x ; $H(x, y)$ est donc inversible au voisinage de la diagonale de $\widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega}$ et sa première ligne est alors $(1, 0, \ldots, 0)$; le changement de variable ${}^tH(x, y)\eta = \eta^*$ montre que :

$$(\widetilde{Q}u)(x) = \iint e^{i<x-y,\eta>} q(\theta^{-1}x, \theta^{-1}y, {}^tH^{-1}(x, y)\eta)\, |\operatorname{Jac} \theta^{-1}|$$

$$|\operatorname{Det} H^{-1}(x, y)|\, u(y)\, dy\, d\eta .$$

Remarquons que ${}^t\mathrm{H}^{-1}(x\,,y)\,\eta = (\eta_1 + \mathrm{B}(x\,,y)\,\eta'\,,\,\mathrm{C}(x\,,y)\,\eta')$, où $\mathrm{C}(x\,,y)$ est une matrice inversible, et montrons que :

$$(2)\ q(\theta^{-1} x,\ \theta^{-1} y,\ {}^t\mathrm{H}^{-1}(x\,,y)\,\eta)$$

$$\sim \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k}{\partial\eta_l^k}\,q\right)(\theta^{-1}x\,,\theta^{-1}y\;;\eta_1,\mathrm{C}(x\,,y)\,\eta')\,.\,(\mathrm{B}(x\,,y)\,\eta')^k\ .$$

Pour cela, posons $\theta^{-1}x = \mathrm{X}$, $\theta^{-1}y = \mathrm{Y}$ et (pour K entier positif)

$$\mathrm{R_K}(x\,,y\,,\eta) = q(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}\,,{}^t\mathrm{H}^{-1}(x,y)\,\eta) - \sum_{k<\mathrm{K}} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k}{\partial\eta_1^k}\,q\right)(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}\;;\eta_1,\mathrm{C}(x\,,y)\,\eta')\,.\,(\mathrm{B}(x\,,y)\,\eta')^k\ .$$

La formule de Taylor permet d'écrire :

$$|\mathrm{R_K}(x\,,y\,,\eta)| \leqslant \mathrm{A}\sup_{0\leqslant\zeta\leqslant 1}(1 + |\eta_1 + \zeta\,\mathrm{B}(x\,,y)\,\eta'|^{1/a_1} + |\mathrm{C}(x\,,y)\,\eta'|)^{m-\mathrm{K}a_1}\,|\eta'|^{\mathrm{K}}$$

lorsque $(x\,,y)$ décrit un compact de $\widetilde{\Omega}\times\widetilde{\Omega}$; remarquons qu'il existe alors des constantes positives C_1, C_2 telles que :

$$\mathrm{C}_1\,|\eta'| \leqslant |\mathrm{C}(x\,,y)\,\eta'| \leqslant \mathrm{C}_2\,|\eta'|$$

$$|\mathrm{B}(x\,,y)\,\eta'| \leqslant \mathrm{C}_2\,|\eta'|\,.$$

Si K est choisi assez grand pour que $m - \mathrm{K}a_1 \leqslant 0$, on obtient pour $|\eta'| \leqslant \dfrac{1}{2\mathrm{C}_2}|\eta_1|$:

$$|\mathrm{R_K}(x\,,y\,,\eta) \leqslant \mathrm{C}'(1 + |\eta_1|^{1/a_1} + |\eta'|)^{m-\mathrm{K}a_1}\,|\eta'|^{\mathrm{K}}$$
$$\leqslant \mathrm{C}'(1 + |\eta_1|^{1/a_1} + |\eta'|)^{m-(a_1-1)\mathrm{K}}$$

et pour $|\eta'| > \dfrac{1}{2\mathrm{C}_2}|\eta_1|$:

$$|\mathrm{R_K}(x\,,y\,,\eta)| \leqslant \mathrm{A}(1 + |\mathrm{C}(x\,,y)\,\eta'|)^{m-\mathrm{K}a_1}\,|\eta'|^{\mathrm{K}}$$
$$\leqslant \mathrm{C}''(1 + |\eta_1| + |\eta'|)^{m-\mathrm{K}a_1}\,|\eta'|^{\mathrm{K}}$$
$$\leqslant \mathrm{C}''(1 + |\eta|)^{m-(a_1-1)\mathrm{K}}\ .$$

Puisque $m - (a_1 - 1)\,\mathrm{K} \longrightarrow -\infty$ si $\mathrm{K} \longrightarrow +\infty$, (2) résulte du théorème 2.9 de [2].

On en déduit, comme dans [6] que le symbole $\widetilde{p}$ de $\widetilde{p}$ est donné

(3) $\widetilde{p}(\theta x, i\eta')$

$$\sim \sum_{a,j,k} \frac{1}{\alpha!\,k!}\left(\frac{\partial^k}{\partial\eta_1^k}\frac{\partial^\alpha}{\partial\eta^\alpha}p_j\right)(x\,;i\eta_1\,,{}^t\mathrm{D}'\theta'(x)\,\eta')\cdot ({}^t\mathrm{D}_1\theta'(x)\,\eta')^k\,\Pi_\alpha(x\,,\,\eta')$$

où $\mathrm{D}_1\theta'$, $\mathrm{D}'\theta'$ sont respectivement les différentielles de θ' par rapport à y_1, y' et où :

$$\Pi_\alpha(x\,,\eta') = (\mathrm{D}_y^\alpha\; e^{i<\theta'(y)-\theta'(x)-\mathrm{D}\theta'(x)\cdot(y-x),\,\eta'>})_{y=x}$$

est un polynôme en η' de degré $\leqslant \frac{1}{2}\,|\alpha|$, on voit que le terme général du second membre de (3) se décompose en termes quasi-homogènes en η, de degré $\leqslant m - j - <a\,,\alpha> + \frac{1}{2}\,|\alpha| - (a_1 - 1)\,k$, quantité qui $\longrightarrow -\infty$ quand $|\alpha| + j + k \longrightarrow +\infty$; il en résulte que $\widetilde{\mathrm{P}} \in \mathrm{L}^{m,a}(\widetilde{\Omega}\,,\mathrm{C}^{d_1}\,,\mathrm{C}^{d_2})$.

Nous pouvons maintenant décrire les variétés et les opérateurs que nous utiliserons.

Soient I_1 un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant 0 et M' une variété C^∞ de dimension $n-1$; les points génériques de $\mathrm{I}_1\,,\mathrm{M}'\,,\mathrm{I}_1 \times \mathrm{M}'=\mathrm{M}$ sont désignés respectivement par x_1, x' et $(x_1\,,x') = x$.

Soit Ω un ouvert de M, ayant dans M un bord $\Gamma = \partial\Omega$ tel que, pour tout $x \in \Gamma$, l'espace tangent en x à Γ soit distinct de l'espace tangent en x' à M'. Soit N un champ C^∞ défini dans M au voisinage de Γ, transverse à Γ, dirigé vers l'intérieur de Ω et tel que $\mathrm{N}(x)$ appartienne à l'espace tangent en x' à M'.

Au voisinage de tout point de Γ, nous pouvons alors construire des cartes locales (pour M) $\theta : \mathrm{U} \subset \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{V} \subset \mathbf{R}^n$ de la forme :

$$\theta(x_1\,,x') = (x_1,\theta'(x_1\,,x')) \tag{4}$$

et telles que

(5) $\theta(\mathrm{U} \cap \Omega) = \{y \in \mathrm{V}\,|\,y_n > 0\}$; $\theta(\mathrm{U} \cap \Gamma) = \{y \in \mathrm{V}\,|\,y_n = 0\}$;

θ transporte N en $\dfrac{\partial}{\partial y_n}$

Soient E, F deux fibrés sur M ; d'après (1), la définition suivante est équivalente à la définition (4) de [14] :

(6) DEFINITION. – $L^{m,a}(M, E, F)$ *est la classe des opérateurs* $P: \mathcal{D}(M, E) \longrightarrow \mathcal{E}(M, F)$ *tels que, pour toute carte locale* θ *de* M *de la forme* (4), *le transporté de* P/U *par* θ *soit dans*

$$L^{m,a}(V, \dim E, \dim F) .$$

En utilisant dans Γ *des cartes qui sont les restrictions de cartes* θ *de* M *vérifiant* (4), (5), *on définit de même* $L^{m,a}(\Gamma, G, H)$ *lorsque* G, H *sont deux fibrés sur* Γ.

Rappelons que $V^m(M, E, F)$ est la sous-classe des opérateurs de $L^{m,a}(M, G, F)$ dont le noyau est nul dans

$$\{(x, y) \in M \times M \mid x_1 < y_1\} ;$$

on définit de même $V^m(\Gamma, G, H)$.

Nous supposerons désormais que, pour tous $t', t'' \in I_1$, l'ensemble des $x \in \Omega$ tels que $t' \leqslant x_1 \leqslant t''$ est relativement compact dans M. Désignons par $\mathcal{D}'_+(\Gamma, E)$ le sous-espace des $u \in \mathcal{D}'(\Gamma, E)$ telles que $u = 0$ pour $x_1 < 0$.

(7) PROPOSITION. – (Voir les points (26), (28), (30) de [14]). *Soit* $P = (P_{j,k})$ *une matrice d'opérateurs* $P_{j,k} \in V^{s_k - t_j}(\Gamma, E_k, F_j)$. *Si* P *est parabolique à droite* (resp : *à gauche*), *il existe une matrice* $T = (T_{k,j})$ *d'opérateurs* $T_{k,j} \in V^{t_j - s_k}(\Gamma, F_j, E_k)$ *telle que*

$$PTu = u \text{ (resp : } TPu = u)$$

pour toute $u \in \prod_j \mathcal{D}'_+(\Gamma, F_j)$ (resp : $u \in \prod_k \mathcal{D}'_+(\Gamma, E_k)$).

Pour établir (7), il suffit de reprendre la démonstration de (30) dans [14], en utilisant un découpage assez fin sur la variable x_1 pour établir la convergence de $\sum_{\nu \geqslant 1} N_\nu$.

(8) DEFINITION. – *On dit qu'une distribution* $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ *admet des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre* k ($k \in \mathbf{N}$) *si, localement, au moyen des restrictions à* Ω *de cartes* θ *de* M *vérifiant* (4), (5), u *s'identifie à une fonction* C^k *de* y_n ($y_n \geqslant 0$) *à valeurs dans* $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{n-1}_{y''}, \mathbf{C}^{\dim E})$; *pour* $l = 0, 1, \ldots, k$, *on définit alors*

$$\gamma_l u \in \mathcal{D}'(\Gamma, E)$$

en posant (localement au moyen de θ/Γ) : $\gamma_l u = D_n^k u_{/y_n=0}$.

2. *Formulation des problèmes aux limites.*

Nous reprenons les notations I_1, a_1, M′, M, Ω, Γ du paragraphe précédent. Désormais, E, F sont deux fibrés sur M de même dimension et $P : \mathcal{D}(M, E) \longrightarrow \mathcal{D}(M, F)$ est un opérateur *différentiel* à coefficients C^∞, parabolique au sens de Petrovski quand on munit la variable x_1 du poids parabolique a_1 ; m désigne le degré de P. C'est dire que, localement, P s'identifie à une matrice $(P_{j,k})$ d'opérateurs différentiels scalaires $P_{j,k} = P_{j,k}\left(y, \dfrac{\partial}{\partial y_1}, D_{y'}\right)$ tels que :

1) $P_{j,k}$ est de degré m relativement au poids a_1 sur x_1, c.à.d. $p_{j,k}(y, \eta) = \sum_{a_1\alpha_1+|\alpha'|\leqslant m} p_{j,k,\alpha}(y)\,\eta^\alpha$ (avec $p_{j,k,\alpha} \in C^\infty$).

2) Si on pose :

$$p_{j,k}^{(0)}(y, \eta) = \sum_{a_1\alpha_1+|\alpha'|=m} p_{j,k,\alpha}\,\eta^\alpha ,$$

alors $\det(p_{j,k}^{(0)}(y, \xi_1 + i\eta_1, \eta')) \neq 0$ pour $\xi_1 \geqslant 0, \eta \in \mathbf{R}^n, (\xi_1, \eta) \neq 0$.

Il est donc équivalent de dire que P est un opérateur de $V^m(M, E, F)$ différentiel et parabolique au sens de la définition (26) de [14]. (Rappelons que pour un opérateur différentiel parabolique au sens de Petrovski, le poids parabolique est nécessairement un entier pair et le degré un multiple du poids parabolique).

Soit J entier $\geqslant 1$; on donne, pour $j = 1, 2, \ldots, J$ des réels m_j et des fibrés G_j sur Γ ; soient, pour $j = 1, 2, \ldots, J$ et $k = 0, 1, \ldots, m-1$ des opérateurs de Volterra $B_{j,k} \in V^{m_j-k}(\Gamma, E, G_j)$; posons $G = \bigoplus_{j=1}^{J} G_j$ et $B = (B_{j,k})$; désignons par μ le plus petit entier $\geqslant 0$ tel que $B_{j,k} = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant J$, $\mu < k$.

Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ admet des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre $m-1$, posons $\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)$; si $u \in \mathcal{D}'_+(\Omega, E)$ admet des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre μ, définissons $B\gamma u \in \mathcal{D}'_+(\Gamma, G)$ par $(B\gamma u)_j = \sum_{k=0}^{\mu} B_{j,k}(\gamma_k u)$ $(1 \leqslant j \leqslant J)$.

Fixons un réel t tel que $t \in I_1$, $0 < t$. Lorsque A est un sous-ensemble quelconque de M, posons $A_t = \{x \in A \mid x_1 < t\}$. Nous considérons le problème aux limites :

$$\begin{cases} Pu = f & \text{dans} \quad \Omega_t & (9) \\ B\gamma u = g & \text{dans} \quad \Gamma_t & (10) \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{D}'_+(\Omega_t, F)$, $g \in \mathcal{D}'_+(\Gamma_t, G)$ sont données et où l'inconnue u est dans $\mathcal{D}'_+(\Omega_t, E)$. (On rappelle que l'indice + signifie que les distributions considérées sont nulles pour $x_1 < 0$).

2. Discussion des problèmes aux limites.

1. *Valeurs au bord transverses d'un potentiel de multi-couche.*

Lorsque $j \in N$ et $v \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, nous désignerons par $v \otimes \delta^{(j)}$ la distribution sur M, portée par Γ, dont la transportée par toute carte θ de M vérifiant (4), (5) est $w \otimes D_n^j\, \delta_{y_n}$, où w est la transportée de v par θ/Γ et $\delta_{y_n} \in \mathcal{D}'(R_{y_n})$ la mesure de Dirac en 0.

(11) Proposition. – *Soient Φ, Ψ deux fibrés sur* M, *r un réel et un opérateur pseudo-différentiel anisotrope* $Q \in L^{r,a}(M, \Phi, \Psi)$ *de type compact* (*ce que nous traduirons en écrivant* $Q \in L_c^{r,a}(M, \Phi, \Psi)$). *On suppose que chaque composante quasi-homogène $q_l(y, i\eta_1, \eta')$ du symbole de* Q *est une fraction rationnelle de η.* Si $v \in \mathcal{D}'(\Gamma, \Phi)$, *alors* $(Q(v \otimes \delta^{(j)}))/\Omega$ *admet des valeurs au bord transverse de tout ordre ; de plus,*

$$\gamma_k[(Q(v \otimes \delta^{(j)}))/\Omega] = Q_{k,j}\, v$$

où $Q_{k,j} \in L_c^{r+k+j+1,a}(\Gamma, \Phi, \Psi)$ *est indépendant de* v. *Si de plus* $Q \in V^r(M, \Phi, \Psi)$, *alors* $Q_{k,j} \in V^{r+k+j+1}(\Gamma, \Phi, \Psi)$.

La preuve de (11) est analogue à celles des propositions correspondantes de [3] et [8]. Elle montre en particulier que le symbole principal de $Q_{k,j}$ est donné, lorsqu'on utilise dans Γ des cartes qui sont les restrictions de cartes θ de M vérifiant (4), (5), par :

$$(12)\quad q_{k,j}^{(0)}(y'', i\eta_1, \widetilde{\eta}) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma q_0(y'', 0\,; i\eta_1, \widetilde{\eta}, \eta_n)\, \eta_n^{k+j}\, d\eta_n\,,$$

où $\widetilde{\eta} = (\eta_2 , \ldots , \eta_{n-1})$, q_0 est le symbole principal de Q et γ un cercle du demi-plan $\mathrm{I}m\ \eta_n > 0$ entourant les pôles η_n de $q_0(y'' , 0 ; i\eta_1 , \widetilde{\eta} , \eta_n)$ situés dans ce demi-plan.

Donnons maintenant deux propriétés relatives à l'opérateur différentiel parabolique P introduit dans I,2.

(13) COROLLAIRE. – *Soit* $u \in \mathcal{D}'(\Omega , \mathrm{E})$ *telle que* :

i) $\mathrm{P}u = 0$ *dans* Ω,

ii) *Il existe* $\widetilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathrm{M} , \mathrm{E})$, *avec* $\widetilde{u} = u$ *dans* Ω.

Alors u admet des valeurs au bord transverses de tout ordre.

Démonstration. – D'après le théorème de Hahn-Banach, nous pouvons choisir $\widetilde{u}$ telle que Supp $\widetilde{u} \in \overline{\Omega}$; alors Supp $\mathrm{P}\widetilde{u} \subset \Gamma$, donc $\mathrm{P}\widetilde{u}$ est une multi-couche sur Γ, c'est-à-dire une somme localement finie de distributions de la forme $\nu \otimes \delta^{(j)}$, où $\nu \in \mathcal{D}'(\Gamma , \mathrm{F})$; si T est une paramétrix (de type compact) de P dans M, on a $\widetilde{u} = \mathrm{T}(\mathrm{P}\widetilde{u}) + \mathrm{R}\widetilde{u}$, avec R régularisant ; on conclut en appliquant (11) pour Q = T.

(14) Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega , \mathrm{E})$ admet une valeur au bord transverse d'ordre 0, on appelle prolongement canonique de u par 0 la distribution $u^\circ \in \mathcal{D}'(\mathrm{M} , \mathrm{E})$ définie localement par :

$$< u^\circ , \varphi > = \int_0^{+\infty} < u(. , y_n), \varphi(. , y_n) > dy_n \ (\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)) .$$

Au voisinage d'un point de Γ, P se met, d'une façon unique, sous la forme $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{m} \mathrm{P}_j \mathrm{D}_n^j$, où P_j est un opérateur différentiel tangentiel d'ordre anisotrope $m - j$ (pour simplifier les notations, nous avons identifié N et $i\mathrm{D}_n$ par l'intermédiaire de cartes θ vérifiant (4), (5)). Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega , \mathrm{E})$ vérifie les hypothèses du corollaire précédent, on obtient la formule des sauts :

$$\mathrm{P}(u^\circ) = \widetilde{\mathrm{P}}(\gamma u)$$

où, pour $\nu = (\nu_0 , \nu_1 , \ldots , \nu_{m-1}) \in \mathcal{D}'(\Gamma, \underset{m}{\oplus} \mathrm{E})$, $\widetilde{\mathrm{P}}(\nu)$ désigne la multi-

$$\frac{1}{i} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1-j} \mathrm{P}_{j+l+1} (\nu_l \otimes \delta^{(j)}) \quad \text{(voir [8]).}$$

2. *Discussion générale des problèmes aux limites paraboliques.*

Considérons maintenant le problème (9), (10).

Soient (voir [14]) T_1, $T_2 \in V_c^{-m}(M, F, E)$ tels que :

(15) $PT_1 u = u$ dans Ω_t pour toute $u \in \mathcal{D}'_+(M_t, F)$.

(16) $T_2 P u = u$ pour toute $u \in \mathcal{D}'_+(M_t, E)$ nulle en dehors de $\bar{\Omega}$.

Pour $i = 1, 2$, la proposition (11), appliquée à l'opérateur $T_i\, P_{j+l+1}$ montre que pour toute $v \in \mathcal{D}'\left(\Gamma, \underset{m}{\oplus} E\right)$, les distributions $(T_i\ \widetilde{P}v)/\Omega$ ont des valeurs au bord transverses de tout ordre et que :

(17) $\gamma[(T_i \widetilde{P} v)/\Omega] = Q_i v$, où $Q_i = (Q_{k,l}^{(i)})_{0 \leqslant k,l \leqslant m-1})$,

$$Q_{k,l}^{(i)} \in V_c^{k-l}(\Gamma, E, E)$$

Remarquons que pour x_1 voisin de $[0, t]$, T_1 et T_2 ont même symbole qu'une paramétrix de P ; donc Q_1 et Q_2 ont même symbole pour x_1 voisin de $[0, t]$; (12) implique alors (pour un choix correspondant de carte) que le terme de degré $k - l$ du symbole de $Q_{k,l}^{(i)}$ est :

$$(18)\quad q_{k,l}^{(0)}(y'' ; \zeta_1, \widetilde{\eta}) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \sum_{j=0}^{m-1-l} p^{(0)-1}(y'', 0 ; \zeta_1, \eta') \ldots$$

$$\ldots p_{j+l+1}^{(0)}(y'', 0 ; \zeta_1, \widetilde{\eta})\ \eta^{j+k}\, d\eta_n$$

où $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ ($\xi_1 \geqslant 0$), $\widetilde{\eta} = (\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_{n-1})$, $p^{(0)}$ et $p_{j+l+1}^{(0)}$ sont les symboles principaux respectifs de P et P_{j+l+1}, γ est un cercle du demi-plan $\mathrm{I}m\ \eta_n > 0$ entourant les zéros η_n de

$$\det p^{(0)}(y'', 0 ; \zeta_1, \widetilde{\eta}, \eta_n)$$

situés dans ce demi-plan.

On en déduit, comme dans [3], l'interprétation suivante du symbole principal $q^{(0)}$ de Q_1 et Q_2 (pour x_1 voisin de $[0, t]$) :

Désignons par $E^+_{y'', \zeta_1, \widetilde{\eta}}$ (resp : $E^-_{y'', \zeta_1, \widetilde{\eta}}$) le sous-espace de

$$\mathbf{C}^{m \dim E} \approx (E_{(y'', 0)})^m$$

constitué par les données de Cauchy $U(0), \ldots, D_n^{m-1} U(0)$ des solutions U de l'équation différentielle $p^{(0)}(y'', 0 ; \zeta_1, \widetilde{\eta}, D_n)\, U(y_n) = 0$ qui sont bornées pour $y_n \geqslant 0$ (resp : pour $y_n \leqslant 0$) ; alors

$$\mathbf{C}^{m \dim \mathrm{E}} = \mathrm{E}^{+}_{y'', \zeta_1, \tilde{\eta}} \oplus \mathrm{E}^{-}_{y'', \zeta_1, \tilde{\eta}}$$

et $q^{(0)}(y'', \zeta_1, \widetilde{\eta})$ est la projection de $\mathbf{C}^{m \dim \mathrm{E}}$ sur $\mathrm{E}^{+}_{y'', \zeta_1, \tilde{\eta}}$ parallèlement à $\mathrm{E}^{-}_{y'', \zeta_1, \tilde{\eta}}$; notons que $\dim \mathrm{E}^{+}_{y'', \zeta_1, \tilde{\eta}} = \dfrac{m}{2} \dim \mathrm{E}$ (sauf dans certains cas, que nous excluons, lorsque $n = 2$). Pour discuter le problème (9), (10), nous faisons l'hypothèse :

(19) f admet un prolongement $\widetilde{f} \in \mathcal{D}'_{+}(\mathrm{M}_t, \mathrm{F})$ tel que $\mathrm{T}_1 \widetilde{f}$ ait des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre μ.

(20) THEOREME.

i) *On suppose la matrice* BQ_1 *parabolique à droite pour* $0 \leqslant x_1 \leqslant t$; *soit* A_1 *un inverse à droite de* BQ_1. *Alors :*

$$u = (\mathrm{T}_1 \widetilde{f} + \mathrm{T}_1 \widetilde{\mathrm{P}} \mathrm{A}_1 (g - \mathrm{B} \gamma \mathrm{T}_1 \widetilde{f}))/\Omega_t \quad \textit{vérifie} \quad (9), (10) .$$

ii) *On suppose la matrice* $(\mathrm{I} - \mathrm{Q}_2) \oplus \mathrm{B}$ *parabolique à gauche pour* $0 \leqslant x_1 \leqslant t$; *soit* A_2 *un inverse à gauche de* $(\mathrm{I} - \mathrm{Q}_2) \oplus \mathrm{B}$. *Alors* (9), (10) *impliquent* :

$$u = (\mathrm{T}_1 \widetilde{f} + \mathrm{T}_2 \widetilde{\mathrm{P}} \mathrm{A}_2 (0, g - \mathrm{B} \gamma \mathrm{T}_1 \widetilde{f}))/\Omega_t .$$

Démonstration de i) :

Posons $\widetilde{u} = \mathrm{T}_1 \widetilde{f} + \mathrm{T}_1 \widetilde{\mathrm{P}} \mathrm{A}_1 (g - \mathrm{B} \gamma \mathrm{T}_1 \widetilde{f})$ et $u = \widetilde{u}/\Omega_t$; on a $\mathrm{P} \widetilde{u} = \widetilde{f}$ dans Ω_t d'après (15), donc (9) est vérifiée. D'autre part, $\gamma(\mathrm{T}_1 \widetilde{\mathrm{P}} \mathrm{A}_1 (g - \mathrm{B} \gamma \mathrm{T}_1 \widetilde{f})) = \mathrm{Q}_1 \mathrm{A}_1 (g - \mathrm{B} \gamma \mathrm{T}_1 \widetilde{f})$, donc

$$\mathrm{B} \gamma u = \mathrm{B} \gamma \mathrm{T}_1 \widetilde{f} + \mathrm{B} \mathrm{Q}_1 \mathrm{A}_1 (g - \mathrm{B} \gamma \mathrm{T}_1 \widetilde{f}) = g , \quad \text{d'où} \quad (10) .$$

Démonstration de ii) :

Si u vérifie (9), (10), posons $u_1 = u - (\mathrm{T}_1 \widetilde{f})/\Omega_t$; on a $\mathrm{P} u_1 = 0$ dans Ω_t d'après (15), donc (voir (14)) $\mathrm{P}(u_1^{\circ}) = \widetilde{\mathrm{P}}(\gamma u_1)$ et (16) implique $u_1^{\circ} = \mathrm{T}_2 \widetilde{\mathrm{P}}(\gamma u_1)$, d'où $\gamma u_1 = \mathrm{Q}_2(\gamma u_1)$; il en résulte que

$$((\mathrm{I} - \mathrm{Q}_2) \oplus \mathrm{B}) (\gamma u_1) = (0, g - \mathrm{B} \gamma \mathrm{T}_1 \widetilde{f}) ,$$

soit $\gamma u_1 = \mathrm{A}_2 (0, g - \mathrm{B} \gamma \mathrm{T}_1 \widetilde{f})$, donc $u_1^{\circ} = \mathrm{T}_2 \widetilde{\mathrm{P}} \mathrm{A}_2 (0, g - \mathrm{B} \gamma \mathrm{T}_1 \widetilde{f})$ et finalement $u = (\mathrm{T}_1 \widetilde{f} + \mathrm{T}_2 \widetilde{\mathrm{P}} \mathrm{A}_2 (0, g - \mathrm{B} \gamma \mathrm{T}_1 \widetilde{f}))/\Omega_t$.

(21) *Remarque.* – Dans le cas particulier où $\dim G = (m/2) \dim E$, les hypothèses de (20), (i) et de (20), (ii) sont équivalentes ; de plus, elles sont vérifiées si et seulement si, en reprenant les notations de (18), la restriction $\widetilde{b}^{(0)}(y'', \zeta_1, \widetilde{\eta})$ à $E^+_{y'', \zeta_1, \widetilde{\eta}}$ du symbole principal $b^{(0)}(y'', \zeta_1, \widetilde{\eta})$ de B est un isomorphisme pour $\xi_1 \geqslant 0$, $(\zeta_1, \widetilde{\eta}) \neq 0$ (lorsque $0 \leqslant x_1 \leqslant t$), c'est-à-dire si la condition habituelle de Shapiro-Lopatinski est satisfaite ; il est en effet évident que cette condition est vérifiée quand on fait l'hypothèse de (20), (i) ou l'hypothèse de (20), (ii) ; réciproquement, posons $a_1^{(0)} = i \circ \widetilde{b}^{(0)^{-1}}$, où i est l'injection canonique de $E^+_{y'', \zeta_1, \widetilde{\eta}}$ dans $\mathbf{C}^{m \dim E}$; alors

$$a_1^{(0)} = (a_{k,j}^{(0)})_{0 \leqslant k \leqslant m-1, 1 \leqslant j \leqslant J} ,$$

avec $a_{k,j}^{(0)} \in \sigma_{k-m_j}$ (voir [14], définition (9)) ; les propriétés d'holomorphie et de dérivabilité de $a_{k,j}^{(0)}$ résultent du fait que $E^+_{y'', \zeta_1, \widetilde{\eta}}$ admet localement en $(y'', \zeta_1, \widetilde{\eta})$ une base constituée de $(m/2) \dim E$ vecteurs choisis parmi les vecteurs

$$v_{k,l,r}(y'', \zeta_1, \widetilde{\eta}) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma p^{(0)^{-1}}(y'', 0\, ; \zeta_1, \eta') \sum_{j=0}^{m-1-l} p_{j+l+1}^{(0)}$$
$$(y'', 0\, ; \zeta_1, \widetilde{\eta})\, \eta_n^{j+k}\, e^{iy_n \eta_n}\, \varepsilon_r\, d\eta_n$$

où $k, l = 0, \ldots, m-1$; $r = 1, \ldots, \dim E$; $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ est une base de $\mathbf{C}^{\dim E}$). Par construction, on a $b^{(0)} q^{(0)} a_1^{(0)} = I$, donc BQ_1 est parabolique à droite ; pour montrer que $(I - Q_2) \oplus B$ est parabolique à gauche, posons $a_2^{(0)} = (I - a_1^{(0)} b^{(0)}, a_1^{(0)})$; alors :

$$a_2^{(0)} \begin{pmatrix} I - q^{(0)} \\ b^{(0)} \end{pmatrix} = (I - a_1^{(0)} b^{(0)})(I - q^{(0)}) + a_1^{(0)} b^{(0)} = I$$

(22) *Remarque.* – On peut donner un résultat analogue à (20) pour les problèmes de transmission du type correspondant à ceux de [10].

3. Discussion dans les espaces de Sobolev.

1. *Espaces utilisés.*

(23) DEFINITIONS. – *Soient* σ, $\tau \in \mathbf{R}$.

i) $H^{+}_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n)$ *désigne l'espace des distributions* $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ telles que $u = 0$ *pour* $x_1 < 0$, $\hat{u} = \mathcal{F}u$ *est une fonction vérifiant*

$$\int (1 + \eta_1^{2/a_1} + |\eta'|^2)^\sigma (1 + \eta_1^{2/a_1} + |\widetilde{\eta}|^2)|^\tau |\hat{u}(\eta)|^2 \, d\eta < +\infty$$

(*on rappelle que* $\widetilde{\eta} = (\eta_2, \ldots, \eta_{n-1})$, $\eta = (\eta_1, \widetilde{\eta}, \eta_n) = (\eta_1, \eta')$). *Cet espace est naturellement muni d'une structure hilbertienne ; la norme associée est notée* $\|u\|_{\sigma,\tau}$.

ii) $H^{+}_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n, t)$ *est l'espace des distributions* u *définies dans* $\{y \in \mathbf{R}^n \mid y_1 < t\}$, *et admettant un prolongement* $U \in H^{+}_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n)$. *On le munit de la norme définie par* $\|u\|^{(t)}_{\sigma,\tau} = \operatorname*{Inf}_{U} \|U\|_{\sigma,\tau}$

iii) $H^{+}_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n_+, t)$ *est l'espace des distributions* u *définies dans* $\{y \in \mathbf{R}^n \mid y_1 < t, \ y_n > 0\}$ *et admettant un prolongement* $U \in H^{+}_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n)$. *On le munit de la norme définie par* $\|u\|^{+,t}_{\sigma,\tau} = \operatorname*{Inf}_{U} \|U_{\sigma,\tau}\|$.

Lorsque $\tau = 0$, nous remplacerons σ, τ par σ dans toutes les notations précédentes ; les espaces correspondants sont alors les espaces utilisés dans [1], [11].

(24) Remarquons que pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha'', \alpha_n)$, il existe une constante C telle que $\|D^\alpha u\|_{\sigma - \alpha_\eta, \tau - <a'', \alpha''>} \leqslant C \|u\|_{\sigma,\tau}$ pour toute $u \in H_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n)$; d'autre part, si $\sigma \leqslant \sigma_1$ et $\sigma + \tau \leqslant \sigma_1 + \tau_1$, alors $H_{\sigma_1,\tau_1}(\mathbf{R}^n) \subset H_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n)$, avec une injection continue. Ces propriétés restent évidemment valables pour les espaces-quotients

$$H^{+}_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n, t) \quad \text{et} \quad H^{+}_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n_+, t).$$

(25) Posons

$$\Lambda_{\sigma,\tau}(\zeta_1, \widetilde{\eta}, \zeta_n) = (1 + \zeta_1^{1/a_1} + |\widetilde{\eta}| - \zeta_n)^\sigma (1 + \zeta_1^{1/a_1} + |\widetilde{\eta}|)^\tau$$

lorsque $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ ($\xi_1 \geqslant 0$), $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ ($\xi_n \leqslant 0$), les arguments étant choisis tels que

$|\arg \zeta_1| \leqslant \pi/2$, $|\arg(1 + \zeta_1^{1/a_1} + |\widetilde{\eta}| - \zeta_n)| \leqslant \pi/2$,

$|\arg(1 + \zeta_1^{1/a_1} + |\widetilde{\eta}|) \leqslant \pi/2$.

$\Lambda_{\sigma,\tau}$ est holomorphe par rapport à ζ_1 lorsque $\xi_1 > 0$ et par rapport à ζ_n lorsque $\xi_n < 0$; si $J_{\sigma,\tau}$ est l'opérateur défini par

$$J_{\sigma,\tau}\, U = \mathcal{F}^{-1}\, \Lambda_{\sigma,\tau}(i\eta_1\,,\, \tilde{\eta}\,,\, i\eta_n)\, \mathcal{F} U\,,$$

on vérifie facilement que la norme dans $H^+_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n\,,\,t)$ (resp : $H^+_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n_+\,,\,t)$) est équivalente à

$$\int_{y_1<t} |J_{\sigma,\tau}\, U|^2\, dy \text{ (resp : } \int_{y_1<t,\, y_n>0} |J_{\sigma,\tau} U|^2\, dy)\,,$$

où $U \in H^+_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n)$ est un prolongement (arbitraire) de u.

(26) LEMME. — *Pour qu'une distribution u soit dans* $H^+_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n_+\,,\,t)$, *il faut et il suffit que* $u \in H^+_{\sigma-1,\tau+1}(\mathbf{R}^n_+\,,\,t)$ *et* $D_n\, u \in H^+_{\sigma-1,\tau}(\mathbf{R}^n_+\,,\,t)$. *La norme* $\|u\|^{+,t}_{\sigma,\tau}$ *est alors équivalente à la norme*

$$\|u\|^{+,t}_{\sigma-1,\tau+1} + \|D_n\, u\|^{+,t}_{\sigma-1,\tau}.$$

On a une propriété analogue dans $H^+_{\sigma,\tau}(\mathbf{R}^n\,,\,t)$.

Démonstration. — Supposons

$$u \in H^+_{\sigma-1,\tau+1}(\mathbf{R}^n_+\,,\,t) \quad,\quad D_n\, u \in H^+_{\sigma-1,\tau}(\mathbf{R}^n_+\,,\,t)\ ;$$

soient $U \in H_{\sigma-1,\tau+1}(\mathbf{R}^n)$, $V \in H_{\sigma-1,\tau}(\mathbf{R}^n)$ des prolongements respectifs de u, $D_n\, u$. Remarquons que :

$$J_{\sigma,\tau} = J_{\sigma-1,\tau+1}\, J_{1,-1} = J_{\sigma-1,\tau+1}\,(1 - i\, J_{0,-1}\, D_n)\,,$$

d'où $J_{\sigma,\tau}\, U = J_{\sigma-1,\tau+1}\, U - i\, J_{\sigma-1,\tau}\, D_n\, U$; puisque $D_n\, U = V$ lorsque $y_1 < t,\ y_n > 0$, on obtient :

$$\int_{y_1<t,\, y_n>0} |J_{\sigma,\tau}\, U|^2\, dy = \int_{y_1<t,\, y_n>0} |J_{\sigma-1,\tau+1}\, U - i\, J_{\sigma-1,\tau}\, V|^2\, dy\,,$$

ce qui établit la partie non triviale de (26).

Grâce à (26), le lemme 2.1.1 de [3] se transpose :

(27) LEMME. — *Soient des réels* σ, τ, σ_j, τ_j $(j = 1, 2)$ *tels que* $\sigma \leqslant \sigma_1 \quad \sigma + \tau \leqslant \sigma_j + \tau_j$. *Soit* K *un compact de*

$$\{y \in \mathbf{R}^n \,|\, 0 \leqslant y_1 \leqslant t \ \ ,\ \ y_n \geqslant 0\}\,.$$

Si $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{r,s})$ *est une matrice* R × S *d'opérateurs différentiels d'ordre* *(anisotrope) m à coefficients* C^∞ *dans* $\{y \in \mathbf{R}^n \mid y_n \geqslant 0\}$, *telle que la matrice des coefficients de* D_n^m *soit de rang* S *dans* K ; *alors il existe une constante* C *telle que* :

$$\|u\|_{\sigma,\tau}^{+,t} \leqslant C(\|\mathcal{R} u\|_{\sigma_1-m,\tau_1}^{+,t} + \|u\|_{\sigma_2,\tau_2}^{+,t})$$

pour toute $u \in (H^+_{\sigma_2\tau_2}(\mathbf{R}^n_+, t))^S$ *ayant son support dans* K.

Il est facile d'établir la proposition suivante :

(28) Proposition. — *Soit* ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et* $\mathcal{C} \in V_c^{r,a}(\omega)$; *alors :*

i) *Pour tout compact* K *de* ω *et tous réels* σ, τ, *il existe une constante* C *telle que* $\|\mathcal{C}u\|_{\sigma-r,\tau} \leqslant C\,\|u\|_{\sigma,\tau}$ *lorsque* Supp $u \subset K$.

ii) *Pour tout compact* K″ *de* $\{y \in \omega \mid y_n = 0\}$, *pour tous réels* σ, τ *et pour tout entier* $\nu \geqslant 0$ *vérifiant* $\sigma < -(\nu + 1/2)$, *il existe une constante* C *telle que* $\|\mathcal{C}(v \otimes \delta_{y_n}^{(\nu)})\|_{\sigma-r,\tau} \leqslant C\,\|v\|_{\sigma+\tau+1/2}$ *pour toute* $v \in H^+_{\sigma+\tau+\nu+1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$ *ayant son support dans* K″.

A l'aide des espaces $H_s^+(\mathbf{R}^n, t)$, $H_s^+(\mathbf{R}^n_+, t)$ et de partitions de l'unité localement finies, on définit naturellement les espaces

$$H_s^{+,K'}(M_t, E)$$

(constitué en particulier de distributions nulles pour $x' \notin K'$, K′ étant un compact donné de M′), $H_s^+(\Omega_t, E)$, $H_s^+(\Gamma_t, E)$; les normes y sont respectivement notées $\|u\|_s^{M_t,K'}$, $\|u\|_s^{\Omega_t}$, $\|u\|_s^{\Gamma_t}$.

2. *Discussion des problèmes aux limites paraboliques.*

Bien que ce ne soit pas utile pour la démonstration du théorème (32) ci-dessous, nous commençons par établir une variante de (13) pour l'opérateur différentiel parabolique P de degré m.

(29) Proposition. — *Soient* s, $\sigma \in \mathbf{R}$ *et* $k \in \mathbf{N}$ *tels que*

$$m + \sigma > k + \frac{1}{2}, \quad m + \sigma \geqslant s\,.$$

Si $u \in H_s^+(\Omega_t, E)$ *vérifie* $Pu \in H_\sigma^+(\Omega_t, F)$, *alors* u *admet des valeurs au bord transverses jusqu'à l'ordre* k, *avec* $\gamma_k u \in H^+_{s-k-1/2}(\Gamma_t, E)$; *de plus, il existe une constante* C *(indépendante de* u*) telle que* :

$$\|\gamma_k u\|^{\Gamma_t}_{s-k-1/2} \leqslant C(\|Pu\|^{\Omega_t}_{\sigma} + \|u\|^{\Omega_t}_{s})$$

Démonstration. — La question étant locale, il suffit de montrer que $\|\gamma_k u\|^{(t)}_{s-k-1/2} \leqslant C(\|Pu\|^{+,t}_{\sigma} + \|u\|^{+,t}_{s})$ si u garde son support dans un compact fixe K de $\{y \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leqslant y_1 \leqslant t,\ y_n \geqslant 0\}$ et si P est parabolique dans K. Or la variante anisotrope de la formule (2.5.13) de (5) montre que

$$\|\gamma_k u\|^{(t)}_{s-k-1/2} \leqslant C' \|u\|^{+,t}_{\sigma+m, s-(\sigma+m)} \qquad \text{puisque} \qquad \sigma + m > k + \frac{1}{2}.$$

Mais, d'après (27), on a :

$$\|u\|^{+,t}_{\sigma+m,s-(\sigma+m)} \leqslant C''(\|Pu\|^{+,t}_{\sigma,s-(\sigma+m)} + \|u\|^{+,t}_{s,0})$$

d'où l'inégalité cherchée puisque $s - (\sigma + m) \leqslant 0$.

(30) *Remarque.* — La démonstration précédente et (29) restent valables quand on suppose seulement que P est un opérateur différentiel d'ordre anisotrope m, à coefficients C^∞ et que Γ n'est pas caractéristique pour P lorsque $0 \leqslant x_1 \leqslant t$.

(31) Proposition. — *Les opérateurs* $T_t \widetilde{P}$ (voir (14), (15), (16)) *sont linéaires continus de* $\prod_{k=0}^{m-1} H^{+}_{s-k-1/2}(\Gamma_t, E)$ *dans* $H^{+}_{s}(\Omega_t, E)$ *pour tout* $s \in \mathbf{R}$.

Démonstration. — La question étant locale, il suffit de voir que $\|T_t \widetilde{P} v\|^{+,t}_{s} \leqslant C \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k\|^{(t)}_{s-k-1/2}$, où $v = (v_0, \ldots, v_{m-1})$.

D'après (28), ii) et la définition de $\widetilde{P}$, il vient, pour $\sigma \in \mathbf{R}$ choisi assez grand :

$$\|T_t \widetilde{P} v\|^{+,t}_{s-\sigma,\sigma} \leqslant C \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k\|^{(t)}_{s-k-1/2}.$$

Mais, d'après (27), on a :

$$\|T_t \widetilde{P} v\|^{+,t}_{s,0} \leqslant C'(\|P T_t \widetilde{P} v\|^{+,t}_{s-m,0} + \|T_t \widetilde{P} v\|^{+,t}_{s-\sigma,\sigma})$$

d'où l'inégalité cherchée grâce à (28), ii), puisque $PT_t - I$ est de symbole nul quand x_1 est voisin de $[0, t]$.

Nous pouvons maintenant interpréter le théorème (20). L'hypothèse (19) est certainement vérifiée lorsque $f \in H^+_\sigma(\Omega_t, E)$ avec $\sigma + m - \mu > 1/2$. Posons $\mathcal{R}u = (Pu, B\gamma u)$.

(32) THEOREME. — *Soient s, $\sigma \in \mathbf{R}$, avec*

$$\sigma + m - \mu > \frac{1}{2}, \quad \sigma + m \geqslant s$$

i) *On suppose la matrice* BQ_1 *parabolique à droite pour* $0 \leqslant x_1 \leqslant t$. *Alors il existe une application linéaire continue*

$$\mathcal{E}_1 : H^+_\sigma(\Omega_t, F) \times \prod_{j=1}^{J} H^+_{s-m_j-1/2}(\Gamma_t, G_j) \longrightarrow H^+_s(\Omega_t, E)$$

telle que $\mathcal{R}\mathcal{E}_1 = I$.

ii) *On suppose la matrice* $(I - Q_2) \oplus B$ *parabolique à gauche pour* $0 \leqslant x_1 \leqslant t$.

Alors il existe une application linéaire continue

$$\mathcal{E}_2 : H^+_\sigma(\Omega_t, F) \times \prod_{j=1}^{J} H^+_{s-m_j-1/2}(\Gamma_t, G_j) \longrightarrow H^+_s(\Omega_t, E)$$

telle que $u = \mathcal{E}_2 \mathcal{R}_u$ *pour toute* $u \in \mathcal{D}'_+(\Omega_t, E)$ *vérifiant*

$$\mathcal{R}u \in H^+_\sigma(\Omega_t, F) \times \prod_{j=1}^{J} H^+_{s-m_j-1/2}(\Gamma_t, G_j).$$

Démonstration de i). — Considérons un opérateur linéaire continu de prolongement $\pi : H^+_\sigma(\Omega_t, F) \longrightarrow H^{+,K'}_\sigma(M_t, F)$, où K' est un compact de M' ; soit $\underset{\sim}{u}$ la distribution définie par la formule de (20), i) quand on prend $\widetilde{f} = \pi f$. Alors

$$\|T_1 \widetilde{f}\|_s^{\Omega_t} \leqslant \|T_1 \widetilde{f}\|_{\sigma+m}^{\Omega_t} \leqslant C \|f\|_\sigma^{\Omega_t}.$$

On a d'autre part, d'après (31)

$$\|T_1 \widetilde{P} A_1(g - B\gamma T_1 \widetilde{f})\|_s^{\Omega_t} \leqslant C \sum_{k=0}^{m-1} \|(A_1(g - B\gamma T_1 \widetilde{f}))_k\|_{s-k-1/2}^{\Gamma_t}$$

$$\leqslant C' \Big(\sum_{j=1}^{J} \|g_j\|_{s-m_j-1/2}^{\Gamma_t} + \|f\|_\sigma^{\Omega_t} \Big)$$

La démonstration de ii) est analogue.

(33) *Remarque.* – Il est possible, à partir de (20) et (32), de discuter les problèmes aux limites mixtes du type :

$$\begin{aligned} Pu &= f \quad \text{dans} \quad \Omega_t^{\circ} = \{x \in \Omega \mid 0 < x_1 < t\} \\ B(\gamma u) &= g \quad \text{dans} \quad \Gamma_t^{\circ} = \{x \in \Gamma \mid 0 < x_1 < t\} \\ \sigma u &= \varphi \quad \text{dans} \quad \Omega_0' = \{x \in \Omega \mid x_1 = 0\} \end{aligned}$$

où
$$\sigma u = \left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k} \Big/ x_1 = 0\right) \; 0 \leqslant k \leqslant \frac{m}{a_1} - 1 \; .$$

Les discussions (20), (32) correspondent au cas $\varphi = 0$, dont on déduit le cas général (voir par exemple [1], [12]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. Agranovich et M.I. Visik, Uspechi Matem. Nauk, XIX, 3, 53-161. *Russian Math. Surveys,* 19, (1964), 53-157.

[2] L. Hörmander, Proceedings of Symposia in pure Math., 10, AMS (1967) 138-183.

[3] L. Hörmander, *Ann. of Math.,* 83, (1966), 129-209.

[4] L. Hörmander, Cours à Stanford University (Juillet 1967).

[5] L. Hörmander, Springer-Verlag (1964).

[6] L. Hörmander, Fourier Integral Operators (à paraître).

[7] C. Hunt et A. Piriou, Comptes Rendus, Série A, (1969), 214-217.

[8] P. Kree, *Annali di Matematica,* LXXXIII, (1969), 113-132.

[9] P. Kree, Conf. del Sem. di Mat. dell'Univ. di Bari, 114-115 (1968).

[10] P. Kree, Comptes Rendus, Série A, (1969), 699-701.

[11] J.E. Lewis, *Journal of Math.* Analysis and Application, 26, (1969) 479-511.

[12] J.L. Lions et E. Magenes, Dunod (Paris), (1968), tome 2.

[13] A. Piriou, Comptes Rendus, série A, (1969), 692-695.

[14] A. Piriou, *Annales de l'Institut Fourier*, 20, 1, (1970).

[15] M.I. Visik et G.I. Eskin, Mat. Sbornik, 71 (113), (1966), 162-190.

Manuscrit reçu le 28 octobre 1969

Alain Piriou
Faculté des Sciences
Département Mathématiques
Parc Valrose, Avenue Valrose
06 – Nice