ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALINE BONAMI

Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$

Annales de l'institut Fourier, tome 20, n° 2 (1970), p. 335-402

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_2_335_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
20, 2 (1970), 335-402.

ÉTUDE DES COEFFICIENTS DE FOURIER DES FONCTIONS DE $L^p(G)$

par Aline BONAMI

Introduction.

Il a été établi depuis longtemps, par Riemann et Lebesgue, que les coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique intégrable tendent vers 0 à l'infini. Il était dès lors naturel de s'attacher à déterminer la rapidité avec laquelle les coefficients de Fourier d'une telle fonction tendent vers 0, suivant qu'elle appartient à telle ou telle classe de fonctions intégrables. Deux cas sont bien connus : pour que la fonction f appartienne à $L^2(T)$, il est nécessaire et suffisant que $\Sigma|\hat{f}(n)|^2$ soit fini, si $\hat{f}(n)$ désigne son nième coefficient de Fourier :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx;$$

par contre, il existe dans $L^1(T)$ des fonctions dont les coefficients de Fourier ont une décroissance arbitrairement lente. Que peut-on dire de la décroissance des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(T)$, $1 < p < 2$? C'est là un problème classique, qui a été abordé de bien des manières ([10], chapitre 12). Nous citerons à ce sujet deux théorèmes, qui nous serviront de modèle : dans son étude sur les séries lacunaires, Banach a montré que, si t_k désigne une suite lacunaire d'entiers ($lim\ t_{k+1}/t_k > 1$), et si f appartient à $L^p(T)$, $p > 1$.

la série $\sum_{k\geqslant 0} |\hat{f}(t_k)|^2$ est convergente; Hardy et Littlewood d'autre part, comme conséquence de la théorie de l'interpolation, ont montré que, si f appartient à $L^p(T)$, $1 < p \leqslant 2$, et si $\alpha \leqslant 1/2 - 1/p$, $\Sigma|\hat{f}(n)|^2|n|^{2\alpha} < \infty$.

Une manière d'étudier la décroissance à l'infini des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(T)$ consiste à chercher des suites $\lambda(n)$ telles que, quel que soit f dans $L^p(T)$, $\Sigma|\lambda(n)|^2|\hat{f}(n)|^2$ soit fini: les théorèmes cités donnent des exemples de telles suites. Lorsque la suite $\lambda(n)$ est la fonction caractéristique d'un ensemble E d'entiers, E est appelé, suivant la terminologie de Rudin [6], ensemble $\Lambda(q)$, q désignant l'exposant conjugué de p. Soit, plus généralement, G un groupe compact abélien, Γ son dual. Notre but sera d'étudier et de chercher les fonctions $\lambda(\gamma)$ sur Γ telles que, pour tout f dans $L^p(G)$, $\Sigma|\lambda(\gamma)|^2|\hat{f}(\gamma)^2$ soit fini. Nous utiliserons tantôt, comme Banach dans sa théorie des séries lacunaires, des méthodes combinatoires, tantôt, comme Hardy et Littlewood, des méthodes d'analyse fonctionnelle.

Après avoir, dans un premier chapitre, énoncé des conditions nécessaires sur les suites $\lambda(\gamma)$, nous donnons, dans le chapitre 2, des exemples d'ensembles $\Lambda(q)$ particuliers. Le principal résultat de cette partie est une généralisation du théorème de Banach: soit t_n une suite lacunaire d'entiers telle que $t_{n+1} \geqslant 3t_n$. On appelle suite k-lacunaire associée à la suite t_n la suite θ_n formée de tous les entiers qui s'écrivent sous la forme $\pm t_{n_1} \pm t_{n_2} \pm \cdots \pm t_{n_k}$, où $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$. Alors, quelle que soit la fonction f 2π-périodique telle que $\int_0^{2\pi} |f|(\mathrm{Log}^+|f|)^{k/2}\, dx < \infty$, la série $\Sigma|\hat{f}(\theta_n)|^2$ est convergente (corollaire 4).

Nous étudions, dans le troisième chapitre, les produits de Riesz $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + r\cos t_n x)$, t_n étant une suite lacunaire telle que $t_{n+1} \geqslant 3t_n$. Soit $\xi_r(n)$ le nième coefficient de Fourier d'un tel produit de Riesz. Si la suite t_n est suffisamment lacunaire, nous montrons que $\Sigma|\xi_r(n)|^2|\hat{f}(n)|^2$ est fini quel que soit f dans $L^p(T)$ si et seulement si $r^2 \leqslant p - 1$ (théorème 9). Nous considérons également les produits de Riesz dans $D^\infty = \{-1, +1\}^N$: soit (x, e_n) la nième fonction de Rade-

macher, et μ_r la mesure définie par le produit de Riesz $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + r(x, e_n))$. Nous montrons que $\mu_r * f$ appartient à $L^q(D^\infty)$ quel que soit f dans $L^p(D^\infty)$ si et seulement si $(q-1)r^2 \leqslant p-1$ (théorème 3).

Dans le chapitre 4 nous généralisons aux suites k-lacunaires une propriété bien connue des suites lacunaires : nous montrons que toute série k-lacunaire qui converge sur un ensemble de mesure positive est la série de Fourier d'une fonction de $L^2(T)$ (corollaire 3).

Au moment d'achever ce mémoire, puisque la tradition m'y autorise, je me fais un plaisir d'exprimer ma reconnaissance envers Messieurs A. Zygmund, J.-P. Kahane, et Y. Meyer. Monsieur Yves Meyer m'a aidé à concevoir et à préciser l'objet de mes recherches, et j'ai largement bénéficié de sa collaboration confiante, continue, et particulièrement enrichissante. Monsieur A. Zygmund en m'encourageant de ses conseils à chacun de ses passages à Paris, Monsieur J.-P. Kahane en servant de guide à l'évolution de mon travail, m'ont beaucoup aidée et soutenue.

J'exprime aussi mes remerciements à Madame Dumas pour la compétence et la complaisance qu'elle a apportées à la frappe de mon manuscrit.

CHAPITRE I

ENSEMBLES $\Lambda(q)$ ET MULTIPLICATEURS DE $\mathcal{F}L^p$ DANS $\mathcal{F}L^2$. CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR QU'UN ENSEMBLE SOIT $\Lambda(q)$.

Soit G un groupe compact abélien, Γ son dual, dont on sait qu'il est discret. Nous cherchons les fonctions $\lambda(\gamma)$ sur Γ telles que, pour toute fonction f appartenant à un certain espace de Banach B de fonctions intégrables sur G, $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\lambda(\gamma)|^2|\hat{f}(\gamma)|^2$ soit fini.

Il est sûrement fort difficile de caractériser ces fonctions $\lambda(\gamma)$, sauf lorsque l'espace B est $L^1(G)$ tout entier (ce sont alors les fonctions de carré sommable), ou bien si l'espace B est contenu dans $L^2(G)$ (toute fonction bornée convient alors). Les espaces de fonctions considérés dans la suite correspondront à des cas « intermédiaires ». Ce seront, suivant les cas :

— $L^p(G)$, $1 < p < 2$, l'espace des fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable;

— $L(\text{Log}\ ^+L)^\alpha$, $\alpha > 0$, l'espace des fonctions f telles que $\int |f|(\text{Log}\ ^+|f|)^\alpha\, dx$ soit fini.

— $I_p(F)$, où $1 \leqslant p < 2$, $F \subset \Gamma$, l'idéal fermé de $L^p(G)$ formé des fonctions f telles que $\hat{f}(\gamma) = 0$ si γ n'appartient pas à F.

Dans le premier cas, on dira encore que $\lambda(\gamma)$ est un multiplicateur envoyant $\mathcal{F}L^p(G)$ dans $\mathcal{F}L^2(G)$, dans le second cas un multiplicateur envoyant $\mathcal{F}L(\text{Log}^+L)^\alpha$ dans $\mathcal{F}L^2(G)$.

Si, pour groupe G, on considère le tore, les multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p(G)$ dans $\mathcal{F}L^2(G)$ sont particulièrement intéressants, car ils permettent d'obtenir des multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p(G)$ dans lui-même : on sait que la suite $\lambda(n)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(T)$ dans $\mathcal{F}L^2(T)$ si et seulement si, pour presque

toute suite $\varepsilon(n)$, $\varepsilon(n) \in \{-1, 1\}$, $\varepsilon(n)\lambda(n)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(T)$ dans lui-même ([9], p. 215).

Ensembles $\Lambda(q)$. — Un cas particulier du problème que nous nous sommes posé est la recherche des ensembles E de Γ tels que, pour toute fonction f appartenant à l'espace de Banach B, $\sum_{\gamma \in E} |\hat{f}(\gamma)|^2$ soit fini. Considérons le cas où B est $L^p(G)$, $1 < p < 2$: si q est l'exposant conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on sait que les multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p(G)$ dans $\mathcal{F}L^2(G)$ et les multiplicateurs de $\mathcal{F}L^2(G)$ dans $\mathcal{F}L^q(G)$ sont les mêmes ([9], p. 177). Un ensemble E possède alors la propriété cherchée si, et seulement si, toute E-fonction f (fonction à spectre dans E, ou encore telle que $\hat{f}(\gamma) = 0$ si $\gamma \notin E$) de $L^2(G)$ est dans $L^q(G)$. D'après le théorème du graphe fermé, il existe alors une constante A telle que, pour toute fonction f dans $L^2(G)$, $\|f\|_q \leqslant A\|f\|_2$. On reconnaît ici les ensembles $\Lambda(q)$ de Rudin [6].

Suivant Rudin, un ensemble E dans Γ est dit $\Lambda(q)$ s'il existe un nombre réel $q' < q$, et une constante $A_{q'}$ telle que pour tout E-polynôme f (polynôme à spectre dans E) : $\|f\|_q \leqslant A_{q'}\|f\|_{q'}$. On montre alors qu'à tout $r < q$ on peut faire correspondre A_r tel que pour tout E-polynôme f : $\|f\|_q \leqslant A_r\|f\|_r$. Citons deux propriétés élémentaires des ensembles $\Lambda(q)$ que nous utiliserons dans la suite, et qu'on trouvera dans [6] :

— Si E est un ensemble $\Lambda(q)$, alors E est $\Lambda(q')$ quel que soit $q' < q$.

— Si $q > 2$, et si E_1 et E_2 sont $\Lambda(q)$, il en est de même de $E_1 \cup E_2$. Nous nous intéresserons d'ailleurs uniquement au cas où q est supérieur à 2.

Définition de la constante $A(q, E)$. — *Soit* E *un ensemble* $\Lambda(q)$, $q > 2$. *On appelle* $A(q, E)$ *la plus petite constante* A *telle que, pour tout* E*-polynôme* f,

$$\|f\|_q \leqslant A\|f\|_2.$$

$A(q, E)$ *est encore la norme de la fonction caractéristique de* E *en tantque multiplicateur de* $\mathcal{F}L^2(G)$ *dans* $\mathcal{F}L^q(G)$.

La croissance de la constante $A(q, E)$ avec q, lorsque E

est $\Lambda(q)$ pour tout q, donne une idée de la lacunarité de l'ensemble E dans Γ. Deux questions se posent naturellement : existe-t-il des ensembles $\Lambda(q)$ pour tout q tels que la croissance de $A(q, E)$ soit arbitrairement rapide? Nous prouverons l'existence de tels ensembles dans le dual Γ d'un groupe compact quelconque (chapitre 2). Existe-t-il des ensembles $\Lambda(q)$ pour tout q tels que la croissance de $A(q, E)$ soit lente? Un résultat classique de Rudin [6] montre que, pour tout ensemble infini, $A(q, E)$ croît au moins comme $\sqrt{q}$. On sait d'autre part que les ensembles de Sidon (ensembles E tels que pour tout E-polynôme f: $\Sigma|\hat{f}(\gamma)| \leqslant A\|f\|_\infty$) donnent l'exemple d'ensembles $\Lambda(q)$ pour tout q tels que $A(q, E)$ ait une croissance en $\sqrt{q}$ exactement. Nous montrerons qu'il existe également, dans un groupe discret quelconque, des ensembles E tels que $A(q, E)$ ait une croissance en $q^{k/2}$ exactement, k étant un entier positif.

En tous cas, la recherche d'ensembles $\Lambda(q)$ semble plus aisée que la recherche générale des fonctions $\lambda(\gamma)$, étant liée à des problèmes combinatoires : si q est un entier pair, on peut calculer les coefficients de Fourier de $f^{q/2}$ à partir de ceux de f, et obtenir ainsi une expression explicite de $\|f\|_q$. Cet aspect combinatoire laisse espérer obtenir une caractérisation des ensembles $\Lambda(q)$, du moins pour certains groupes.

Description des groupes étudiés.

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux cas où G est l'un des trois groupes suivants : $T = R/2\pi\mathbf{Z}$, D^∞ produit dénombrable $\{-1, +1\}^N$ muni de la topologie compacte produit des topologies discrètes sur $\{-1, +1\}$, T^∞ produit d'une infinité dénombrable d'exemplaires du tore. Ces trois groupes compacts admettent respectivement pour dual $\mathbf{Z}$, l'anneau des entiers relatifs, la somme directe $\Sigma\mathbf{Z}(2)$, où $\mathbf{Z}(2)$ désigne les entiers modulo 2, la somme directe $\Sigma\mathbf{Z}$. Décrivons brièvement comment se font ces dualités : si x appartient à $\mathbf{T}$, n à $\mathbf{Z}$, (x, n) est encore égal à e^{inx}. De même, si $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ appartient à D^∞, $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$, où $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$, appartient à $\Sigma\mathbf{Z}(2)$, $(x, \varepsilon) = \prod_{n=1}^{\infty} (x_n)^{\varepsilon_n}$. Enfin, si $x = (x_n)_{n=1}^\infty$

appartient à T^∞, $\nu = (\nu_n)_{n=1}^\infty$ appartient à $\Sigma\mathbf{Z}$, $(x, \nu) = e^{i\Sigma\nu_n x_n}$. Le dual de D^∞, $\Sigma\mathbf{Z}(2)$, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{Z}(2)$, l'addition étant celle dont il est muni en tant que dual de D^∞. On notera par $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ la base canonique de $\Sigma\mathbf{Z}(2)$, formée des éléments dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf une. La fonction (x, e_n) sur D^∞ est encore la nième fonction coordonnée, traditionnellement appelée nième fonction de Rademacher. De même $\Sigma\mathbf{Z}$ est un $\mathbf{Z}$-module libre, et on notera $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ sa base canonique.

Relations entre ensembles $\Lambda(q)$ dans ces groupes.

Montrons tout d'abord qu'un ensemble $\Lambda(q)$ dans le dual de D^∞ peut être transporté dans le dual de $\mathbf{T}^\infty$ en restant $\Lambda(q)$. Plus précisément :

THÉORÈME 1. — *On appelle respectivement e_n et f_n les éléments des bases canoniques de $\Sigma\mathbf{Z}(2)$ et $\Sigma\mathbf{Z}$. Soit* E *un ensemble $\Lambda(q)$ dans $\Sigma\mathbf{Z}(2)$, et soit* F *l'ensemble de $\Sigma\mathbf{Z}$ formé des éléments $\nu = \Sigma\varepsilon_i f_i$ tels que ε_i soit égal à 0 ou 1, et $\Sigma\varepsilon_i e_i$ appartienne à* E : F *est alors $\Lambda(q)$, et*

$$A(q, F) \leqslant A(q, E).$$

On considère, parmi les fonctions continues sur T^∞, l'idéal fermé des fonctions à spectre dans $\Sigma\{0, 1\}$ (ensemble formé des $\Sigma\varepsilon_i f_i$ tels que $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$). Soit ω quelconque dans D^∞ : la forme linéaire qui, à une fonction g de l'idéal, $g(x) = \Sigma\hat{g}(\Sigma\varepsilon_n f_n)(x, \Sigma\varepsilon_n f_n)$, fait correspondre

$$\Sigma\hat{g}(\Sigma\varepsilon_n f_n)(\omega, \Sigma\varepsilon_n e_n),$$

est une forme linéaire continue, de norme inférieure ou égale à 1. Elle se prolonge donc en une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{T}^\infty$, qui définit une mesure μ_ω telle que $\|\mu_\omega\| \leqslant 1$, et $\hat{\mu}_\omega(\Sigma\varepsilon_n f_n) = (\omega, \Sigma\varepsilon_n e_n)$.

Soit alors g une F-fonction : $g(x) = \sum_{\Sigma\varepsilon_n f_n \in F} \hat{g}(\Sigma\varepsilon_n f_n)(x, \Sigma\varepsilon_n f_n)$. $g = \mu_{-\omega} * (\mu_\omega * g)$, donc $\|g\|_q \leqslant \|\mu_\omega * g\|_q$.

Élevons cette inégalité à la puissance $q^{\text{ième}}$ et sommons

sur D^∞ :

$$\|g\|_q^q \leqslant \int_{T^\infty} \int_{D^\infty} \Big| \sum_{\Sigma \varepsilon_n e_n \in E} \hat{g}(\Sigma \varepsilon_n f_n)(x, \Sigma \varepsilon_n f_n)(\omega, \Sigma \varepsilon_n e_n) \Big|^q \, d\omega \, dx.$$

Or, d'après l'hypothèse sur E, ce second membre est encore majoré par :

$$[A(q, E)]^q \Big(\sum_{\Sigma \varepsilon_n e_n \in E} |\hat{g}(\Sigma \varepsilon_n f_n)|^2 \Big)^{q/2}.$$

Finalement :

$$\|g\|_q \leqslant A(q, E) \|g\|_2.$$

Remarque. — Nous avons énoncé le théorème 1 dans le cas de D^∞; mais visiblement D^∞ peut être remplacé par tout groupe G compact abélien, le rôle de la suite e_n étant tenu par n'importe quelle suite γ_n dans Γ, dual de G, telle que tout élément γ de Γ s'écrive d'au plus une manière sous la forme $\Sigma \varepsilon_n \gamma_n$, $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ (en particulier la suite 2^n, pour les entiers, convient). Le théorème 1 montre donc que le dual de T^∞ possède « beaucoup » d'ensembles $\Lambda(q)$.

Plus riche en applications, certainement, est le théorème suivant, qui permet au contraire de trouver des ensembles $\Lambda(q)$ d'entiers à partir d'ensembles $\Lambda(q)$ dans le dual de T^∞, et que nous utiliserons au chapitre 3 :

THÉORÈME 2. — *Soient t_n et A_n deux suites d'entiers. On appelle* F *le sous-ensemble de* $\Sigma\mathbf{Z}$ *formé des suites* $(\nu_n)_{n=1}^\infty$ *telles que, pour tout n,* $|\nu_n| \leqslant A_n$; F_t *le sous-ensemble de* $\mathbf{Z}$ *formé des entiers s'écrivant sous la forme* $\Sigma \nu_n t_n$, $|\nu_n| \leqslant A_n$. *Soient f et g deux polynômes sur* $\mathbf{T}$ *et* $\mathbf{T}^\infty$, *à spectre dans* F_t *et* F *respectivement, tels que* $\hat{f}(\Sigma \nu_n t_n) = \hat{g}((\nu_n)_{n=1}^\infty)$. *Alors, si q est un entier pair, et si* $t_{n+1} > (q+1) A_n t_n$ *pour tout n, les normes de f et g, dans* $L^q(T)$ *et* $L^q(\mathbf{T}^\infty)$ *respectivement, sont égales.*

Posons $q = 2s$, et calculons explicitement $\int |f|^q \, dx = \|f\|_q^q$:

$$\|f\|_q^q = \sum_{\substack{r_i \in F_t \\ r_1 + \cdots + r_s = r_{s+1} + \cdots + r_{2s}}} \hat{f}(r_1) \ldots \hat{f}(r_s) \overline{\hat{f}(r_{s+1})} \ldots \overline{\hat{f}(r_{2s})}.$$

Si r appartient à F_t, $r = \Sigma \nu_n t_n$, on note $\tilde{r} = (\nu_n)_{n=1}^\infty$ l'élément correspondant de $\Sigma\mathbf{Z}$. Il suffit de montrer que $r_1 + \cdots + r_s = r_{s+1} + \cdots + r_{2s}$ si et seulement si

$$\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 + \cdots + \tilde{r}_s = \tilde{r}_{s+1} + \cdots + \tilde{r}_{2s},$$

ou, ce qui revient au même, que $\Sigma\nu_n t_n = \Sigma\nu'_n t_n$, si ν_n et ν'_n sont bornés en module par $s\mathrm{A}_n$, si et seulement si $\nu_n = \nu'_n$ pour tout n. Mais il est aisé de voir que cette dernière implication est une conséquence de l'hypothèse $t_{n+1} > (q+1)\mathrm{A}_n t_n$.

Remarque. — Le théorème 2 est encore valable si $\mathbf{Z}$ est remplacé par un groupe discret quelconque Γ, t_n par une suite γ_n d'éléments de Γ tels qu'un élément quelconque γ de Γ s'écrive d'au plus une manière sous la forme $\Sigma\nu_n\gamma_n$, $|\nu_n| \leqslant s\mathrm{A}_n$. Le théorème 2 ne donne aucun résultat dans le cas où q n'est pas un entier pair : la démonstration combinatoire donnée ne s'applique évidemment pas. Le résultat, pour q quelconque, résulterait, s'il existait, d'un théorème d'interpolation pour les idéaux fermés $\mathrm{I}_p(\mathrm{F})$ analogue au théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

Citons le théorème suivant, dû à Y. Meyer ([4] p. 563), qui exige une condition plus forte sur la suite t_n, mais est valable pour toute valeur de q :

THÉORÈME 3 (Y. Meyer). — *Sous les hypothèses du théorème* 2, si $\Sigma(\mathrm{A}_n t_n/t_{n+1})$ *est fini, il existe une constante* K *indépendante de* f *et* g *telle que, pour tout* q,

$$1 \leqslant q \leqslant \infty, \frac{1}{\mathrm{K}}\|g\|_q \leqslant \|f\|_q \leqslant \mathrm{K}\|g\|_q.$$

Conditions nécessaires pour qu'un ensemble soit $\Lambda(q)$.

Dans les cas particuliers où G est l'un des groupes T ou D^∞, nous utiliserons une première méthode, valable également pour les multiplicateurs de $\mathcal{F}\mathrm{L}^p$ dans $\mathcal{F}\mathrm{L}^2$, ou bien $\mathcal{F}\mathrm{L}(\mathrm{Log}^+\mathrm{L})^\alpha$ dans $\mathcal{F}\mathrm{L}^2$: si $\lambda(\gamma)$ est un tel multiplicateur, d'après le théorème du graphe fermé il existe une constante A telle que, pour tout polynôme f :

$\Sigma|\lambda(\gamma)|^2|\hat{f}(\gamma)|^2 \leqslant \mathrm{A}^2\|f\|_p^2$ dans le premier cas, des constantes A et B telles que :

$\Sigma|\lambda(\gamma)|^2|\hat{f}(\gamma)|^2 \leqslant \mathrm{A}\left(\int |f|(\mathrm{Log}^+|f|)^\alpha\, dx + \mathrm{B}\right)^2$ dans le second.

Dès lors, on voit qu'on obtiendra des conditions nécessaires par la considération de familles de fonctions particulières.

Cas de T. — C'est le cas envisagé par Rudin dans [6] : en prenant pour famille de fonctions les noyaux de Fejer, il obtient des conditions portant sur les sommes $\Sigma|\lambda(n)|^2$ relatives aux entiers n d'une progression arithmétique.

THÉORÈME 4 (Rudin). — (1) *Soit* $\lambda(n)$ *un multiplicateur envoyant* $\mathcal{F}L^p(T)$ *dans* $\mathcal{F}L^2(T)$; *il existe une constante* A *telle que, pour tout entier* N, *et pour toute progression arithmétique* V_N *de longueur* N :

$$\sum_{n\in V_N} |\lambda(n)|^2 \leqslant A^2 N^{2/q} \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

(2) *Soit* $\lambda(n)$ *un multiplicateur envoyant* $\mathcal{F}L(\mathrm{Log}^+L)^\alpha$ *dans* $\mathcal{F}L^2(T)$: *il existe une constante* A *telle que, sous les mêmes hypothèses* :

$$\sum_{n\in V_N} |\lambda(n)|^2 \leqslant A^2(\log N)^{2\alpha}.$$

(3) *En particulier, si* E *est un ensemble* $\Lambda(q)$, $(q > 2)$ *il existe une constante* A *telle que, sous les mêmes hypothèses* :

$$\mathrm{card}\,(E \cap V_N) \leqslant A^2 N^{2/q}.$$

Il suffit de calculer, si K_N est le Nième noyau de Féjer, $\|K_N\|_p \leqslant N^{1/q}$, $\int |K_N|(\mathrm{Log}^+ K_N)^\alpha\, dx \leqslant B(\mathrm{Log}\ N)^\alpha$.

Rudin, dans [6], a montré que les conditions (1) et (3) sont les meilleures possibles ($N^{2/q}$ ne peut être remplacé par N^β, $\beta < 2/q$), tandis que nous montrerons au chapitre 2 que la condition (2) est la meilleure possible, du moins si 2α est un entier. Ces conditions, par contre, ne sont pas suffisantes.

On aimerait connaître pour les ensembles $\Lambda(q)$, comme dans le cas des ensembles de Sidon, des conditions portant sur le nombre d'éléments de l'ensemble contenus dans une maille (une maille étant l'ensemble des entiers qui s'écrivent $\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \cdots + \alpha_k n_k$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ étant donnés, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tels que $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_k| < K$, [3], p. 146). Nous n'avons su trouver, dans cet ordre d'idées, qu'un résultat qualitatif : si t_n est une suite lacunaire, $t_{n+1} \geqslant 3t_n$, un ensemble $\Lambda(q)$ $(q > 2)$ ne peut contenir tous les éléments de la maille $\left\{\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i t_{n_i},\ \varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}\right\}$, pour N arbitrairement grand. Il suffit, en effet, de considérer la famille de

produits de Riesz $P_N(x) = \prod_{i=1}^{N} (1 + \cos t_{n_i} x)$: il est aisé de calculer $\|P_N\|_1 = 1$, $\|P_N\|_2 = (3/2)^{N/2}$. On ne peut avoir, pour des valeurs de N arbitrairement grandes, $(3/2)^{N/2} \leqslant A$. Nous donnerons plus loin des résultats quantitatifs, dans le cas où q est un entier pair.

Remarque. — Les conditions nécessaires du théorème 5 permettent de répondre négativement à la question suivante : existe-t-il des conditions de croissance sur la suite λ_n, autres que $lim\ (\lambda_{n+1}/\lambda_n) > 1$, ayant pour conséquence que la suite λ_n forme un ensemble $\Lambda(q)$? Si $lim\ (\lambda_{n+1}/\lambda_n) > 1$, la suite λ_n est une suite de Hadamard, et constitue donc un ensemble de Sidon, dont on sait qu'il est $\Lambda(q)$ pour tout q. Mais il existe des suites croissantes λ_n telles que λ_{n+1}/λ_n tende vers 1 en décroissant arbitrairement lentement, et contenant des progressions arithmétiques arbitrairement longues.

Ce ne sont donc pas des conditions de croissance à l'infini qui permettront d'affirmer qu'un ensemble d'entiers est $\Lambda(q)$ sans être un ensemble de Sidon, mais des conditions arithmétiques de répartition.

Cas de D^∞. — Il a déjà été étudié dans [1]. On prend, dans ce cas, pour famille de fonctions les produits de Riesz de la forme $\prod_{n=1}^{N} (1+(x, \gamma_n))$, γ_n étant une suite d'éléments linéairement indépendants de $\Sigma\mathbf{Z}(2)$: un tel produit admet pour transformée de Fourier la fonction caractéristique du sous-espace vectoriel de $\Sigma\mathbf{Z}(2)$ engendré par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$. Il est facile de calculer sa norme dans $L^p(D^\infty)$, égale à $2^{N/q}$. On obtient alors, pour un multiplicateur $\lambda(\gamma)$, des conditions portant sur les sommes $\Sigma|\lambda(\gamma)|^2$ relatives aux éléments γ d'un sous-espace vectoriel de $\Sigma\mathbf{Z}(2)$.

THÉORÈME 5. — (1) *Soit* $\lambda(\gamma)$ *un multiplicateur de* $\mathcal{F}L^p(D^\infty)$ *dans* $\mathcal{F}L^2(D^\infty)$ *de norme égale à* A : *alors, pour tout sous-espace vectoriel* V *de* $\Sigma\mathbf{Z}(2)$:

$$\sum_{\gamma \in V} |\lambda(\gamma)|^2 \leqslant A^2 2^{2/q \ dim\ V} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

(2) *Soit* $\lambda(\gamma)$ *un multiplicateur de* $\mathcal{F}L(\mathrm{Log}^+ L)^\alpha$ *dans*

$\mathcal{F}L^2(D^\infty)$: *il existe une constante* A *telle que, pour tout sous-espace vectoriel* V *de* $\Sigma\mathbf{Z}(2)$:

$$\sum_{\gamma\in V} |\lambda(\gamma)|^2 \leqslant A^2(\dim V)^{2\alpha}.$$

(3) *En particulier, si* E *est un ensemble* $\Lambda(q)$, *pour tout sous-espace vectoriel* V *de* $\Sigma\mathbf{Z}(2)$:

$$\text{card } (E \cap V) \leqslant [A(q, E)]^2 2^{2/q \dim V}.$$

La condition (3) pour qu'un ensemble soit $\Lambda(q)$ est-elle suffisante? Elle est en tout cas moins forte, à priori, que la condition que nous donnerons au théorème 6. Toutefois nous ne connaissons pas d'exemple d'ensembles satisfaisant à la condition (3) et ne satisfaisant pas à la condition du théorème 6. Nous ne savons pas non plus si la condition (3) est la meilleure possible.

Il n'est en tout cas pas suffisant de se limiter, dans (3), aux conditions nécessaires relatives aux sous-espaces vectoriels engendrés par les éléments de la base canonique de $\Sigma\mathbf{Z}(2)$: l'ensemble des éléments qui s'écrivent $\Sigma\varepsilon_n e_n$, où $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_{2n+1}$ pour tout n, n'est évidemment pas $\Lambda(4)$ puisqu'il contient des sous-espaces vectoriels de dimension arbitrairement grande, tout en ayant au plus $2^{\dim V/2}$ éléments dans tout sous-espace vectoriel V engendré par des éléments de la base canonique.

Cas général. — Une méthode combinatoire permet, dans le cas général, d'obtenir des conditions nécessaires pour qu'un ensemble soit $\Lambda(q)$ lorsque q est un entier pair. Suivant Rudin, si E est un sous-ensemble de Γ, s un entier positif, γ un élément quelconque de Γ, on appelle $r_s(E, \gamma)$ le nombre de décompositions de γ en somme de s éléments de E, chacune étant comptée un nombre de fois égal au nombre de permutations avec répétition des s éléments de E.

THÉORÈME 6. — *Si* E *est un ensemble* $\Lambda(2s)$ *dans le groupe discret* Γ (*s entier positif*) *toute partie finie* E′ *de* E *satisfait à l'inégalité* :

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} (r_s(E', \gamma))^2 \leqslant [A(2s, E)]^{2s} (\text{card } E')^s.$$

Il suffit de considérer la fonction $f(x) = \sum_{\gamma\in E'} (x, \gamma)$, et d'écrire que $\|f\|_{2s} \leqslant A(2s, E)\|f\|_2$.

Or $\|f\|_2^2 = \text{card } E'$, et $f^s(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_s(E', \gamma)(x, \gamma)$: donc $\|f\|_{2s}^{2s} = \sum_{\gamma \in \Gamma} (r_s(E', \gamma))^2$.

Le théorème 6 est difficilement utilisable sous cette forme. Le corollaire suivant est d'expression plus simple :

COROLLAIRE 1. — *Soit* E *un ensemble* $\Lambda(2s)$ *dans le groupe discret* Γ. *Quelle que soit la partie finie* V *de* Γ :

$$\text{card } (E \cap V) \leqslant [A(2s, E)]^2 (\text{card } sV)^{1/s}.$$

Posons $E' = E \cap V$. Il est clair que $(\text{card } E')^s = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_s(E', \gamma)$. Or $r_s(E', \gamma) = 0$ si γ n'appartient pas à sV. En vertu de l'inégalité de Schwarz :

$$(\text{card } E')^{2s} = \Big(\sum_{\gamma \in \Gamma} r_s(E', \gamma)\Big)^2 \leqslant (\text{card } sV) \sum [r_s(E', \gamma)]^2.$$

On en déduit l'inégalité cherchée grâce au théorème 6.

Remarquons qu'en prenant pour V soit une progression arithmétique d'entiers, soit un sous-espace vectoriel de $\Sigma \mathbf{Z}(2)$, on retrouve ainsi les conditions (3) des théorèmes 4 et 5 : dans le premier cas $\text{card } (sV) = s \text{ card } V$, dans le second cas $\text{card } (sV) = \text{card } V$.

Soit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ k éléments quelconques de Γ, K un entier positif. Prenons maintenant pour sous-ensemble V de Γ la maille définie comme ensemble des éléments γ qui s'écrivent sous la forme $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \gamma_i$, où $|\varepsilon_i| \leqslant K$ pour tout i. L'ensemble sV est alors formé des éléments de Γ qui s'écrivent sous la forme $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \gamma_i$, où $|\varepsilon_i| \leqslant sK$: il a au plus $(sK + 1)^k$ éléments. Par application du corollaire 1, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — *Soit* E *un ensemble* $\Lambda(2s)$ *dans le groupe discret* Γ, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ k *éléments quelconques de* Γ, K *un entier positif : le nombre d'éléments de* E *s'écrivant sous la forme* $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \gamma_i$, *où* $|\varepsilon_i| \leqslant K$ *pour tout* i, *est majoré par* $[A(2s, E)]^2 (sK + 1)^{k/s}$.

CHAPITRE II

CONSTRUCTIONS D'ENSEMBLES $\Lambda(q)$ PARTICULIERS. MÉTHODES COMBINATOIRES.

Dans ce chapitre, nous montrons qu'il est possible de construire, dans un groupe discret quelconque, des ensembles $\Lambda(q)$ particuliers : ensembles $\Lambda(q)$ pour certaines valeurs de q et non pour d'autres, ensembles $\Lambda(q)$ pour tout q tels que la constante $A(q, E)$ correspondante (plus petite constante A telle que, pour tout E-polynôme f, $\|f\|_q \leqslant A\|f\|_2$) ait une croissance arbitrairement rapide, ensembles $\Lambda(q)$ pour tout q tels que la constante $A(q, E)$ croisse lentement. La croissance de la constante $A(q, E)$, lorsque E est un ensemble $\Lambda(q)$ pour tout q, donne en quelque sorte une mesure de la lacunarité de l'ensemble E dans le groupe discret dont il fait partie, mesure fondé sur des propriétés fonctionnelles de l'ensemble E. Plus la constante $A(q, E)$ croît lentement, et plus, bien sûr, l'ensemble E doit être lacunaire. Quel que soit l'entier k, nous donnons, dans tout groupe discret, des exemples d'ensembles $\Lambda(q)$ pour tout q tels que la constante $A(q, E)$ correspondante ait une croissance en $q^{k/2}$ exactement, ensembles dont le modèle dans $\mathbf{Z}$ est l'ensemble des entiers

$$\pm \lambda_{n_1} \pm \lambda_{n_2} \ldots \pm \lambda_{n_k},\ n_1 > n_2 > \cdots > n_k,$$

λ_n étant une suite lacunaire, $\lambda_{n+1} \geqslant 2\lambda_n$.

On serait porté à relier cette notion fonctionnelle de lacunarité d'un ensemble E à des propriétés arithmétiques de E. Le seul cas que l'on sache traiter est relatif aux groupes compacts G dont tous les éléments sont de même ordre r, r

premier. Le dual Γ de G est alors un espace vectoriel sur $\mathbf{Z}(r)$, corps des entiers modulo r. On sait, dans ce cas, que si E est une réunion finie d'ensembles indépendants, E est un ensemble de Sidon, et par conséquent $A(q, E)$ a une croissance en $\sqrt{q}$ ([7], p. 124). Réciproquement, si E est $\Lambda(q)$ pour tout q, et si $A(q, E)$ a une croissance en $\sqrt{q}$, le corollaire 1 du premier chapitre permet d'affirmer l'existence d'une constante A telle que, quel que soit le sous-espace vectoriel V de dimension finie, card $(E \cap V) \leqslant A \dim V$: en vertu du lemme de Rado [5], on sait alors que E est réunion finie d'ensembles linéairement indépendants. Remarquons qu'on a en même temps démontré que, pour de tels groupes G, les ensembles $\Lambda(q)$ pour tout q tels que $A(q, E)$ ait une croissance en $\sqrt{q}$ sont les ensembles de Sidon. On voudrait pouvoir, dans ces mêmes groupes, caractériser les ensembles $\Lambda(q)$ pour tout q tels que $A(q, E)$ ait une croissance en $q^{k/2}$, k entier. Nous montrerons que toute réunion finie d'ensembles E_i, où chaque E_i est de la forme $l_i E_i' = E_i' + \cdots + E_i'$, E_i' étant un ensemble indépendant et $l_i \in [1, k]$, est de cette sorte. Est-ce que réciproquement tout ensemble $\Lambda(q)$ pour tout q tel que $A(q, E)$ ait une croissance en $q^{k/2}$, est contenu dans une réunion finie de tels ensembles E_i? Il faudrait, pour répondre, connaître un équivalent du lemme de Rado, une caractérisation des ensembles E tels que, pour tout sous-espace vectoriel V de dimension finie, card $(E \cap V) \leqslant A (\dim V)^k$, $k > 1$.

Remarque. — Les ensembles E tels que $A(q, E)$ ait une croissance en q^α sont particulièrement intéressants, car alors toute E-fonction f appartenant à $L^2(G)$ est telle que, quel que soit $\lambda > 0$, $\exp(\lambda |f|^{1/\alpha})$ est intégrable (même démonstration que dans [9], p. 214). C'est encore dire que la fonction caractéristique de E est un multiplicateur envoyant $\mathcal{F}L^2$ dans l'espace de Banach des transformées de Fourier des fonctions f telles que $\exp(\lambda |f|^{1/\alpha})$ soit intégrable pour un certain λ. Par dualité, la fonction caractéristique de E est encore un multiplicateur de $\mathcal{F}L(\mathrm{Log}^+ L)^\alpha$ dans $\mathcal{F}L^2$: quel que soit f tel que $\int |f|(\mathrm{Log}^+ |f|)^\alpha \, dx < \infty$, $\sum_{\gamma \in E} |\hat{f}(\gamma)|^2$ est fini.

La réciproque est également vraie : si la fonction caracté-

ristique de E est un multiplicateur de $\mathcal{F}L(\mathrm{Log}^+ L)^\alpha$ dans $\mathcal{F}L^2$, E est $\Lambda(q)$ pour tout q, et $A(q, E)$ croît comme q^α. En effet, d'après le théorème du graphe fermé, il existe alors A et λ tels que, quel que soit le E-polynôme f tel que $\|f\|_2 = 1$, on a l'inégalité $\int \exp(\lambda|f|^{1/\alpha})\,dx \leqslant A$, et donc, pour tout entier n, $\lambda^n \|f\|_{n/\alpha}^{n/\alpha} \leqslant An! \leqslant An^n$.

1. Constructions d'ensembles $\Lambda(q)$ pour tout q tels que la constante $A(q, E)$ croisse arbitrairement vite.

Nous donnerons tout d'abord une condition suffisante pour qu'un ensemble soit $\Lambda(q)$, lorsque q est un entier pair.

DÉFINITION. — *Soit* E *un sous-ensemble du groupe discret* Γ, *s un entier positif,* γ *un élément quelconque de* Γ. *Suivant Rudin* ([7], p. 124), *on appelle* $R_s(E, \gamma)$ *le nombre de représentations de* γ *sous la forme* $\gamma = \pm\gamma_1 \pm \gamma_2 \cdots \pm \gamma_s$, *les* γ_i *étant des éléments deux à deux distincts de* E, *et deux représentations étant considérées comme identiques si elles diffèrent seulement par l'ordre de* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$.

THÉORÈME 1. — *Soit* E *un sous-ensemble du groupe discret* Γ, *s un entier supérieur à* 1. *S'il existe* N *tel que, pour tout* $\gamma \in \Gamma$, $\sum_{j=1}^{2s} R_j(E, \gamma) \leqslant N$, *alors* E *est un ensemble* $\Lambda(2s)$.

On peut toujours supposer que $E \cap (-E) = \varnothing$: si E est $\Lambda(2s)$, il en est de même de $-E$, et donc de $E \cup (-E)$.

Soit alors f un polynôme à spectre dans E :

$$(1)\quad \|f\|_{2s}^{2s} = \int |f|^{2s}\,dx = \sum \hat{f}(\gamma_1)\hat{f}(\gamma_2)\ldots\hat{f}(\gamma_s)\overline{\hat{f}(\gamma_{s+1})}\ldots\overline{\hat{f}(\gamma_{2s})},$$

la sommation étant étendue au sous-ensemble W de E^{2s} formé des suites $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2s})$ telles que, pour tout i, γ_i appartienne à E, et $\gamma_1 + \cdots + \gamma_s = \gamma_{s+1} + \cdots + \gamma_{2s}$.

Soit l un entier inférieur à s, $n_1, n_1', \ldots, n_l, n_l'$ des entiers tels que $\sum_{i=1}^{l} n_i \leqslant s$, $\sum_{i=1}^{l} n_i' \leqslant s$, et pour tout i, $n_i + n_i'$ est

un entier pair. On définit le sous-ensemble

$$W(l, n_1, n_1', \ldots, n_l, n_l')$$

de W de la manière suivante : $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2s})$ appartient à $W(l, n_1, n_1', \ldots, n_l, n_l')$ s'il existe $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$ distincts dans E tels que n_i des γ_j, $j = 1, 2, \ldots, s$, et n_i' des γ_k, $k = s+1, \ldots, 2s$, soient égaux à δ_i, les γ_j restants étant deux à deux distincts. Il est clair que la réunion des $W(l, n_1, n_1', \ldots, n_l, n_l')$ est W tout entier. Donnons un majorant du nombre de ces sous-ensembles de W, c'est-à-dire du nombre de suites $(l, n_1, n_1', \ldots, n_l, n_l')$ possibles : posons tout d'abord $\nu_i = n_i + n_i'$. Le nombre de suites d'entiers positifs $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l)$ telles que $\sum_{i=1}^{l} \nu_i \leqslant 2s$ est majoré par 2^{2s} (à chaque partie $\{k_1, k_2, \ldots, k_l\}$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2s\}$ on peut faire correspondre la suite ν_i définie par $\nu_i = k_i - k_{i-1}$, k_0 étant pris égal à 0, et cette application est surjective). Les ν_i étant ainsi choisis, il y a, pour chaque i, $1 + \nu_i$ choix possibles de n_i et n_i' de manière que $n_i + n_i' = \nu_i$, et donc, au total, $\prod_{i=1}^{l} (1 + \nu_i) \leqslant e^{\Sigma \nu_i} \leqslant e^{2s}$ choix possibles. On obtient finalement le majorant $(2e)^{2s}$.

Soit $S(l, n_1, n_1', \ldots, n_l, n_l')$ la somme des termes de (1) relatifs aux suites $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2s})$ de $W(l, n_1, n_1', \ldots, n_l, n_l')$. Comme un même terme s'y retrouve au plus $(s!)^2 \, \Pi(n_i! n_i'!)^{-1}$ fois, cette somme est majorée en module par :

$$\frac{(s!)^2}{(2k)!\, l! \prod_{i=1}^{l} (n_i! n_i'!)} \sum |\hat{f}(\delta_1)|^{n_1+n_1'} \ldots |\hat{f}(\delta_l)|^{n_l+n_l'} |\hat{f}(\gamma_1)| \ldots |\hat{f}(\gamma_{2k})|,$$

cette dernière sommation étant prise sur toutes les suites $(\delta_1, \ldots, \delta_l)$ d'éléments deux à deux distincts de E, et sur toutes les suites $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2k})$ d'éléments distincts de E tels que $\pm \gamma_1 \pm \gamma_2 \ldots \pm \gamma_{2k} = \Sigma(n_i - n_i')\delta_i$. On a posé $2k = 2s - \Sigma(n_i + n_i')$. Or, quels que soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2k}$ distincts :

$$|\hat{f}(\gamma_1)| \ldots |\hat{f}(\gamma_{2k})| \leqslant \prod_{i=1}^{k} [|\hat{f}(\gamma_{2i-1})|^2 + |\hat{f}(\gamma_{2i})|^2] \leqslant (k!)^{-1} \|f\|_2^{2k}.$$

Supposons $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$ fixés : il y a au plus $(2k)!N$ suites $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2k})$ telles que $\pm\gamma_1 \pm \gamma_2 \cdots \pm \gamma_{2k} = \Sigma(n_i - n_i')\delta_i$. Donc

$$|S(l, n_1, n_1', \ldots, n_l, n_l')| \leqslant \frac{(s!)^2}{k!\,l!\,\Pi(n_i!\,n_i'!)} \|f\|_2^{2k} \Sigma |\hat{f}(\delta_1)|^{n_1+n_1'} \ldots |\hat{f}(\delta_l)|^{n_l+n_l'}.$$

Comme, pour tout i, $n_i + n_i'$ est pair, et comme les δ_i sont deux à deux distincts,

$$\Sigma |\hat{f}(\delta_1)|^{n_1+n_1'} \ldots |\hat{f}(\delta_l)|^{n_l+n_l'} \leqslant \frac{l!\,\Pi\left(\frac{n_i + n_i'}{2}\right)!}{(s-k)!} \|f\|_2^{2s-k}.$$

Finalement

$$S(l, n_1, n_1', \ldots, n_l, n_l')| \leqslant \frac{(s!)^2}{k!(s-k)!} N\|f\|_2^{2s} \leqslant 2^s\, s!N\|f\|_2^{2s}.$$

$$\|f\|_{2s} \leqslant 4e\, N^{1/2s}\, s^{1/2} \|f\|_2.$$

L'ensemble E est $\Lambda(2s)$, et $A(2s, E) \leqslant 4e\, N^{1/2s}\, s^{1/2}$.

Remarque. — Les constantes $R_s(E, \gamma)$ avaient déjà été utilisées par Rudin pour énoncer des conditions suffisantes pour qu'un ensemble soit de Sidon : on sait ([7], p. 124) que, si, pour tout s et pour tout γ, $R_s(E, \gamma) \leqslant B^s$, E est un ensemble de Sidon. Le théorème 1 généralise en quelque sorte ce résultat, puisque, de la croissance en s de $R_s(E, \gamma)$, il permet de déduire la croissance en q de $A(q, E)$. En particulier, on retrouve grâce au théorème 1 que si, pour tout s et pour tout γ, $R_s(E, \gamma) \leqslant B^s$, E est $\Lambda(q)$ pour tout q, et $A(q, E)$ a une croissance en $\sqrt{q}$. Cet exemple montre la précision de la majoration de la constante $A(q, E)$ obtenue dans le théorème 1.

La construction d'un ensemble E de constante $A(q, E)$ arbitrairement croissante repose sur les deux lemmes suivants :

LEMME 1. — *Soit* Γ *un groupe abélien discret infini. Pour tout élément* γ *de* Γ, *on note* $d(\gamma)$ *l'ordre de* γ. *Il existe une suite* γ_n *d'éléments de* E *telle que, pour tout* k, *tout élément de* Γ *s'écrive d'au plus une manière sous la forme* $\sum_{l \geqslant k} \varepsilon_l \gamma_l$, ε_l *étant, pour tout* l, *un entier relatif majoré en module par* $\inf(2k, d(\gamma_l) - 1)$.

Considérons tout d'abord le cas où Γ possède une infinité d'éléments d'ordre p, tout en possédant au plus un nombre fini d'éléments d'ordre inférieur à p: il est alors facile de choisir par récurrence la suite γ_n parmi les éléments d'ordre p. Supposons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ choisis: quel que soit s inférieur à p, il existe au plus un nombre fini d'éléments γ tels que $s\gamma$ ait une valeur donnée, et donc au plus un nombre fini d'éléments γ tels que $s\gamma = \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \gamma_l$, où $|\varepsilon_l| < p$. On choisit alors γ_n parmi les éléments d'ordre p restants.

On construit encore la suite γ_n par récurrence dans le cas où, quel que soit p, Γ possède au plus un nombre fini d'éléments d'ordre $p\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ ayant été choisis, onchoisit γ_n tel que, pour tout $s \leqslant k$ tel que $s\gamma_n \neq 0$, $s\gamma_n$ soit différent de tous les éléments $\sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \gamma_l$, où $|\varepsilon_l| \leqslant \inf(2k, d(\gamma_l) - 1)$.

Lemme 2. — *Soit* Γ *un groupe abélien discret contenant au plus un nombre fini d'éléments d'ordre* 2, s *un entier positif,* V *un sous-ensemble fini de* Γ *contenant* K *éléments. Il existe une constante* η *indépendante de* K *telle qu'on peut trouver dans* V *un sous-ensemble* E *possédant au moins* $\eta K^{1/4s}$ *éléments et satisfaisant à la propriété: pour tout* $\gamma \in \Gamma$, $\sum_{j=1}^{2s} R_j(E, \gamma) \leqslant 1$.

On construit E par récurrence: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ ayant été choisis, on veut choisir γ_n tel que ni γ_n ni $2\gamma_n$ ne puissent s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \gamma_i$, où $\varepsilon_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $\Sigma|\varepsilon_i| < 4s$. Or le nombre des éléments qui s'écrivent sous cette forme est majoré par n^{4s}, et, si N est le nombre d'éléments d'ordre 2 dans Γ, le nombre d'éléments γ tels que 2γ s'écrive sous cette forme est majoré par $(N+1)n^{4s}$. On peut donc choisir γ_n dans V tant que $(N+2)n^{4s} \leqslant K$.

Théorème 2. — *Soit* Γ *un groupe abélien discret infini,* $\varphi(q)$ *une fonction croissante quelconque. Il existe un ensemble* E *dans* Γ *qui est* $\Lambda(q)$ *pour tout* q, *et tel que* $A(q, E) \geqslant \varphi(q)$ *dès que* $q > 3$.

Si Γ possède une infinité d'éléments d'ordre 2, il possède

alors un sous-groupe isomorphe à $\Sigma\mathbf{Z}(2)$, et la construction du sous-ensemble E a été faite dans [1]. Supposons donc que Γ possède un nombre fini d'éléments d'ordre 2. Soit $N(k)$ une suite croissante d'entiers, $n(k) = N(k+1) - N(k)$. Il existe, en vertu du lemme 1, une suite γ_n telle que, quel que soit k, tout élément de Γ s'écrive au plus d'une manière sous la forme $\sum_{l \geqslant N(k)} \varepsilon_l \gamma_l$, avec, pour tout l, $|\varepsilon_l| \leqslant \inf(2k, d(\gamma_l) - 1)$. On pourra supposer que γ_n est, pour tout n, d'ordre supérieur à 2. Soit alors V_k le sous-ensemble de Γ formé des éléments qui s'écrivent

$$\sum_{N(k) \leqslant n < N(k+1)} \varepsilon_n \gamma_n, \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\},$$

et E_k un sous-ensemble de V_k construit conformément au lemme 2, avec $s = k$. Montrons que $E = \cup E_k$ est un ensemble $\Lambda(q)$ pour tout q. Il est facile de voir que l'ensemble $E'_k = \bigcup_{j \geqslant k} E_j$ est $\Lambda(2k)$: grâce aux propriétés de la suite γ_n et des ensembles E_j, on montre aisément que, quel que soit $\gamma \in \Gamma$, $\sum_{l=1}^{2k} R_l(E'_k, \gamma) \leqslant 1$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 1. Comme E diffère de E'_k par un nombre fini d'éléments, E est également $\Lambda(2k)$, et ceci pour tout k.

Il nous reste à chercher une minoration de la constante $A(q, E)$: on utilise le théorème 7 du chapitre 1. Pour tout entier s :

$$\eta 3^{n(k)/4k} \leqslant \text{card}\,(E \cap V_k) \leqslant [A(2s, E)]^2 (3s)^{n(k)/s}.$$

Prenons en particulier $s = k^2$; on obtient la minoration

$$[A(2k^2, E)]^2 \geqslant \eta 3^{[n(k)/4k - n(k)/k^2 - 2n(k)\,\mathrm{Log}_3 k/k^2]},$$

cette dernière quantité pouvant être rendue arbitrairement grande par un choix convenable de $n(k)$ dès que $k \geqslant 100$. L'ensemble cherché est obtenu en ajoutant à E un ensemble fini F tel que $A(3, F) > \varphi(2.10^4)$.

On aurait pu, grâce à la même méthode, construire des ensembles $\Lambda(q)$ pour certaines valeurs de q et non pour d'autres. Nous ne détaillerons pas cette construction.

2. Constructions d'ensembles $\Lambda(q)$ pour tout q tels que la constante $A(q, E)$ ait une croissance en $q^{k/2}$ exactement (k entier).

Nous allons tout d'abord donner une nouvelle condition suffisante pour qu'un ensemble soit $\Lambda(2s)$, condition qui nous permettra de construire de tels ensembles dans le dual de T^∞. Si E est un sous-ensemble du groupe discret Γ, s un entier positif, γ un élément quelconque de Γ, on rappelle que $r_s(E, \gamma)$ désigne le nombre de décompositions de γ en somme de s éléments de E, chacune étant comptée un nombre de fois égal au nombre de permutations (avec répétition) des s éléments de E.

THÉORÈME 3. — *Soit* E *un sous-ensemble du dual* Γ *d'un groupe compact* G. *Si, pour tout* $\gamma \in \Gamma$, $r_s(E, \gamma) \leqslant N$, E *est de type* $\Lambda(2s)$, *et* $A(2s, E) \leqslant N^{1/2s}$.

Soit en effet f un E-polynôme, et

$$g = f^s : \hat{g}(\gamma) = \sum_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_s=\gamma} \hat{f}(\gamma_1)\hat{f}(\gamma_2) \ldots \hat{f}(\gamma_s),$$

et, grâce à l'hypothèse et à l'inégalité de Schwarz :

$$|\hat{g}(\gamma)|^2 \leqslant N \sum_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_s=\gamma} |\hat{f}(\gamma_1)|^2 |\hat{f}(\gamma_2)|^2 \ldots |\hat{f}(\gamma_s)|^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|f\|_{2s}^{2s} = \|g\|_2^2 &\leqslant N \sum_{\gamma} \sum_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_s=\gamma} |\hat{f}(\gamma_1)|^2 \ldots |\hat{f}(\gamma_s)|^2 \\ &\leqslant N \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s} |\hat{f}(\gamma_1)|^2 \ldots |\hat{f}(\gamma_s)|^2 = N\|f\|_s^{2s}. \end{aligned}$$

Finalement $\|f\|_{2s} \leqslant N^{1/2s}\|f\|_2$.

Ce résultat, dans le cas des entiers positifs, avait déjà été énoncé par Rudin dans [6], mais avec la constante $N^{1/s}$ au lieu de $N^{1/2s}$. La majoration $A(2s, E) \leqslant N^{1/2s}$ est ici la meilleure possible : on ne peut remplacer $1/2s$ par un exposant inférieur. Il suffit, pour cela, de considérer le cas où E est un ensemble lacunaire d'entiers,

$$E = \{\lambda_n | \lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant 2s - 1\} :$$

N est alors égal à $s!$. Or, d'après [6], $A(2s, E) \geqslant \frac{1}{4}(2s)^{\frac{1}{2}}$.

Appliquons le théorème 3 à certains sous-ensembles du dual de T^∞, $\Sigma\mathbf{Z}$. On appellera U le sous-ensemble de $\Sigma\mathbf{Z}$ formé des suites $(n_i)_{i=1}^\infty$ telles que, pour tout i, n_i soit positif ou nul, U_k le sous-ensemble de U formé des suites $(n_i)_{i=1}^\infty$ telles que $\Sigma n_i = k$. En particulier U_1 est encore l'ensemble $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, dont les éléments constituent la base canonique de $\Sigma\mathbf{Z}$, et $U_k = U_{k-1} + U_1$.

THÉORÈME 4. — *Le sous-ensemble* U_k *de* $\Sigma\mathbf{Z}$, *formé des suites* $(n_i)_{i=1}^\infty$ *telles que* $n_i \geqslant 0$ *pour tout* i *et* $\Sigma n_i = k$, *est* $\Lambda(q)$ *pour tout* q, *et, si* q *est un entier pair, pour toute* U_k*-fonction* : $\|f\|_k \leqslant (q/2)^{k/2}\|f\|_2$.

Montrons, pour pouvoir utiliser le théorème 3, que, pour tout $\gamma \in U$, $r_s(U_k, \gamma)$ est borné : dire que γ s'écrit comme somme de s éléments de U_k revient à dire que γ s'écrit comme somme de ks éléments de U_1. Or, U_1 étant encore la base canonique, ceci ne peut avoir lieu que d'une seule manière : soit donc

$$\gamma = r_1 f_{n_1} + r_2 f_{n_2} + \cdots + r_l f_{n_l}, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{l} r_i = ks.$$

Il s'agit de déterminer de combien de manières on peut regrouper ces différents termes pour obtenir s éléments (ordonnés) de U_k. Or le nombre de permutations des ks termes, puisqu'il y a des répétitions possibles, est $\dfrac{(ks\,!)}{(r_1\,!)(r_2\,!)\ \ldots\ (r_l\,!)}$. Une telle permutation étant choisie, cherchons à combien de regroupements en blocs de k termes elle correspond : supposons que dans le ième bloc se trouve β_j^i fois le terme f_{n_j}. Ce nombre de regroupements est alors égal à

$$\frac{(k\,!)^s}{\beta_1^1\,!\beta_2^1\,!\ \ldots\ \beta_l^1\,!\ \ldots\ \beta_1^k\,!\ \ldots\ \beta_l^k\,!}.$$

Comme $\beta_i^1 + \beta_i^2 + \cdots + \beta_i^l = r_i$, $\beta_i^1\,!\beta_i^2\,!\ \ldots\ \beta_i^k\,! \leqslant r_i\,!$, et donc le nombre précédent est minoré par $\dfrac{(k\,!)^s}{(r_1\,!)(r_2\,!)\ \ldots\ (r_l\,!)}$. Le nombre de manières de regrouper les différents termes est donc majoré par $(ks)\,!/(k\,!)^s$. On obtiendra une majoration plus simple de A(2s, E) en remarquant que $(ks)\,! \leqslant (k\,!)^s s^{ks}$.

La démonstration précédente est encore valable si on rem-

place la base canonique par n'importe quel ensemble indépendant. En particulier, dans l'énoncé du théorème, on peut remplacer la condition $\Sigma n_i = k$ par $\Sigma a_i n_i = k$, a_i entiers.

Nous verrons dans la suite que la constante $(q/2)^{k/2}$ est, en un certain sens, la meilleure possible.

D'après la remarque faite au début de ce chapitre, ce dernier théorème admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. — (1) *Soit* f *une* U_k*-fonction appartenant à* $L^2(T^\infty)$: *pour tout* $\lambda > 0$, $\exp(\lambda|f|^{2/k})$ *est intégrable.*

(2) *Pour toute fonction* f *sur* T^∞ *telle que* $\int |f|(\log^+|f|)^{k/2}\,dx$ *soit fini,* $\sum_{\gamma \in U_k} |\hat{f}(\gamma)|^2 < \infty$.

C'est dire encore que la fonction caractéristique de U_k est un multiplicateur envoyant $\mathcal{F}L(\mathrm{Log}^+ L)^{k/2}$ dans $\mathcal{F}L^2$.

Avant de donner des exemples d'ensembles $\Lambda(q)$ pour tout q ayant la propriété requise dans un groupe discret quelconque, donnons-en d'autres exemples dans le dual de T^∞.

COROLLAIRE 2. — *Soit* T_k *le sous-ensemble du dual* $\Sigma\mathbf{Z}$ de T^∞ *formé des suites* $(n_i)_{i=1}^\infty$ *telles que, pour tout* i, $n_i \in \{-1, 0, 1\}$, *et* $\Sigma|n_i| = k$: E_k *est un ensemble* $\Lambda(q)$ *pour tout* q, *et il existe une constante* $A(k)$ *ne dépendant que de* k *telle que, pour tout* q, $A(q, E_k) \leqslant A(k)q^{k/2}$.

La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME 3. — *Il existe une constante* $A(k)$ *telle que, quel que soit* $y = (y_n)_{n=1}^\infty$ *dans* T^∞, *on puisse trouver une mesure* μ_y *sur* T^∞ *ayant les deux propriétés suivantes* :

(1) *si* $(n_j)_{j=1}^\infty$ *appartient à* T_k, $\hat{\mu}_y((n_j)_{j=1}^\infty) = e^{i\Sigma|n_j|y_j}$.

(2) $\|\mu_y\| \leqslant A(k)$.

$A(k)$ *peut être pris à croissance exponentielle.*

Les éléments de T_k sont encore tous les éléments de $\Sigma\mathbf{Z}$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\pm f_{n_1} \pm f_{n_2} \ldots \pm f_{n_k}$, $n_1 > n_2 \ldots > n_k$, si f_n désigne la base canonique de $\Sigma\mathbf{Z}$. La condition (1) peut également s'écrire :

$$\hat{\mu}_y(\pm f_{n_1} \pm f_{n_2} \ldots \pm f_{n_k}) = e^{i(y_{n_1}+y_{n_2}+\ldots+y_{n_k})}.$$

Soit a_n une suite de nombres réels, $|a_n| \leqslant 1$. Le produit de Riesz $\prod_{n=1}^\infty (1 + a_n \cos x_n) = \prod_{n=1}^\infty (1 + a_n \mathcal{R}e(x, f_n))$ définit une

mesure μ de norme égale à 1, dont le spectre est la réunion des T_k, telle que $\hat{\mu}(\pm f_{n_1} \pm f_{n_2} \dots \pm f_{n_k}) = a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_k}$. Nous aurons montré l'existence de μ_y si nous réussissons à écrire chaque produit $e^{iy_{n_1}} e^{iy_{n_2}} \dots e^{iy_{n_k}}$ sous forme de somme de produits de la forme $a_{n_1} \dots a_{n_k}$, où $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$, le nombre de termes de la somme étant majoré indépendamment de y. Or chaque terme du développement de

$$\prod_{i=1}^{k} (\cos y_{n_i} + i \sin y_{n_i})$$

est combinaison linéaire de produits $\prod_{i=1}^{k} (\cos y_{n_i} + \alpha_j \sin y_{n_i})$, $0 \leqslant j \leqslant k$. La mesure cherchée sera donc une combinaison linéaire des produits de Riesz correspondants, les coefficients de cette combinaison linéaire étant indépendants de y. Un calcul explicite montre que $A(k)$ peut être choisi à croissance exponentielle.

Le corollaire 2 découle du lemme 3, comme le prouve un argument de théorie de la mesure : soit g un T_k-polynôme. Comme $g = (g * \mu_y) * \mu_{-y}$, $\|g\|_q \leqslant A(k) \|g * \mu_y\|_q$. En élevant à la puissance q et en intégrant par rapport à y, on obtient l'inégalité : $\|g\|_q^q \leqslant [A(k)]^q \int |g * \mu_y|^q \, dx \, dy$. Or, considérée comme fonction de y, $g * \mu_y(x)$ est une U_k-fonction et admet pour coefficient de Fourier en $f_{n_1} + f_{n_2} + \dots + f_{n_k}$ la quantité $\sum_{(\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^k} \hat{g}(\Sigma \varepsilon_i f_{n_i}) e^{i \Sigma \varepsilon_i x_{n_i}}$. L'ensemble U_k étant $\Lambda(q)$, et $A(q, U_k) \leqslant q^{k/2}$,

$$\|g\|_q^q \leqslant [A(k)]^q q^{kq/2} \left(\sum_{n_1 > \dots > n_k} \left| \sum_{(\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^k} \hat{g}(\Sigma \varepsilon_i f_{n_i}) e^{i \Sigma \varepsilon_i x_{n_i}} \right|^2 \right)^{q/2}.$$

Or

$$\left| \sum_{(\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^k} \hat{g}(\Sigma \varepsilon_i f_{n_i}) e^{i \Sigma \varepsilon_i x_{n_i}} \right|^2 \leqslant 2^k \Sigma |\hat{g}(\Sigma \varepsilon_i f_{n_i})|^2.$$

$$\|g\|_q \leqslant A(k) (2q)^{k/2} \|g\|_2.$$

THÉORÈME 5. — *Soit* Γ *un groupe abélien discret infini,* B *une constante positive,* E *un sous-ensemble dénombrable de* Γ *tel que, pour tout entier* s, $R_s(E, 0) \leqslant B^s$, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ *une énumération des éléments de* E. *Quel que soit l'entier* k, *l'ensemble* E_k *formé des éléments de* Γ *s'écrivant sous la forme* $\Sigma \varepsilon_n \gamma_n$, *où* $\varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$ *et* $\Sigma |\varepsilon_n| = k$, *est* $\Lambda(q)$ *pour tout* q, *et* $A(q, E_k)$ *a une croissance en* $q^{k/2}$ *exactement.*

Nous voulons montrer, par dualité, qu'il existe une constante $A(k)$ telle que, quel que soit le polynôme g sur le groupe G dual de Γ :

$$\sum_{\gamma\in E_k} |\hat{g}(\gamma)|^2 \leqslant [A(k)]^2 q^k \|g\|_p^2 \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

Soit N suffisamment grand pour que tous les éléments de E_k qui appartiennent au spectre de g puissent s'écrire au moins d'une manière sous la forme $\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \gamma_n$, où $\varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$, et $\Sigma|\varepsilon_n| = k$. Quel que soit $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ dans T^∞, le polynôme

$$P_y(x) = \prod_{n=1}^{N} (1 + B^{-1}\, \mathcal{R}e[e^{iy_n}(x, \gamma_n)])$$

est positif, et

$$\|P_y\|_1 = \hat{P}_y(0) \leqslant \sum_s (2B)^{-s} R_s(E, 0) \leqslant 2.$$

Donc $\|P_y * g\|_p \leqslant 2\|g\|_p$. Élevons cette dernière inégalité à la puissance pième, intégrons sur T^∞, puis intervertissons l'ordre des sommations : $P_y * g$, considéré comme fonction de y, est un polynôme sur T^∞, et, si ε_n est une suite de nombres, $\varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$ et $\Sigma|\varepsilon_n| = k$, le coefficient de Fourier de $P_y * g$ en $\Sigma\varepsilon_n f_n$ est égal à $(2B)^{-k}\hat{g}(\Sigma\varepsilon_n\gamma_n)(x, \Sigma\varepsilon_n\gamma_n)$. Comme l'ensemble T_k est $\Lambda(q)$ et $A(q, T_k) \leqslant A(k)q^{k/2}$, $(2B)^{-k}\left(\sum_{\gamma\in E_k} |\hat{g}(\gamma)|^2\right)^{1/2} \leqslant A(k)q^{k/2}\|g\|_p$.

Il nous reste à montrer que la croissance de $A(q, E_k)$ est en $q^{k/2}$ exactement. Or un raisonnement analogue à celui qui nous a permis de passer des ensembles U_k aux ensembles T_k nous permettrait de passer des ensembles E_k aux ensembles Γ_k dans $\Sigma\mathbf{Z}(2)$, dual de D^∞, définis comme ensembles des suites $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ telles que $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ et $\Sigma\varepsilon_n = k$: on en déduit l'existence d'une constante $A(k)$ telle que

$$A(q, \Gamma_k) \leqslant A(k)A(q, E_k).$$

Or, d'après le théorème 5 du chapitre 1, et étant donné que pour tout sous-espace vectoriel V de $\Sigma\mathbf{Z}(2)$ engendré par des éléments de la base canonique card $(E_k \cap V) = C^k_{dim V}$, on a l'inégalité $[A(q, \Gamma_k)]^2 \geqslant C^k_N 2^{-2N/q}$ pour tout N; et donc,

si q est entier, en prenant $N = q$, on obtient

$$A(q, \Gamma_k) \geqslant \eta^k q^{k/2}.$$

Remarque. — Les ensembles E considérés dans le théorème 5 sont des ensembles de Sidon particuliers ([7], p. 124). On est conduit à se demander si l'hypothèse sur E peut se remplacer par l'hypothèse plus faible que E soit de Sidon? Il n'en est rien : nous avons montré dans [1] l'existence dans $\Sigma\mathbf{Z}(2)$ de deux ensembles indépendants E_1, E_2 dont la réunion est par conséquent de Sidon, mais tels que $E_1 + E_2$ contienne des sous-espaces vectoriels de dimension arbitrairement grande.

COROLLAIRE 3. — *Le sous-ensemble* Γ_k *de* $\Sigma\mathbf{Z}(2)$, *formé des suites* $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$ *telles que* $\Sigma\varepsilon_i = k$, *est* $\Lambda(q)$ *pour tout* q, *et il existe une constante* $A(k)$ *telle que* $A(q, \Gamma_k) \leqslant A(k)q^{k/2}$.

La fonction caractéristique de Γ_k est par conséquent un multiplicateur de $\mathcal{F}L(\mathrm{Log}^+ L)^{k/2}$ dans $\mathcal{F}L^2(D^\infty)$.

COROLLAIRE 4. — *Soit* λ_n *une suite lacunaire d'entiers,* $\lambda_{n+1} \geqslant 2\lambda_n$. *On appelle* E_k *l'ensemble formé par la suite k-lacunaire correspondante, c'est-à-dire la suite des entiers qui s'écrivent sous la forme*

$$\pm \lambda_{n_1} \pm \lambda_{n_2} \ldots \pm \lambda_{n_k},\ n_1 > n_2 > \cdots > n_k.$$

L'ensemble E_k *est* $\Lambda(q)$ *pour tout* q, *et il existe une constante* $A(k)$ *telle que* $A(q, E_k) \leqslant A(k)q^{k/2}$.

Là encore, on en déduit que la fonction caractéristique de E_k est un multiplicateur de $\mathcal{F}L(\mathrm{Log}^+ L)^{k/2}$ dans $\mathcal{F}L^2(T)$.

Le lemme suivant montre que la condition $\lambda_{n+1} \geqslant 2\lambda_n$ est indispensable dans l'énoncé du corollaire 4 :

LEMME 4. — *Quel que soit* ρ_0 *dans l'intervalle* $]1, 2[$, *il existe un entier* k *et une suite lacunaire* λ_n *satisfaisant, pour tout* n, *à la condition* $\lambda_{n+1} > \rho_0\lambda_n$, *telle que tout entier relatif puisse s'écrire au moins d'une manière sous la forme*

$$\pm \lambda_{n_1} \pm \lambda_{n_2} \pm \cdots \pm \lambda_{n_k},\ n_1 > n_2 > \cdots > n_k.$$

Puisque $\rho_0 < 2$, il existe un entier k tel que $\rho_0^k < \sum_{l=1}^{k-1} \rho_0^l$, et donc $\rho > \rho_0$ tel que $\rho^k = \sum_{l=1}^{k-1} \rho^l$. Soit $u(r)$ une suite

d'entiers satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) pour tout r, $u(r+1) \geqslant u(r) + k$;

(2) dès que $l > u(0) - k$, $\rho - 1/\rho^l > \rho_0$;

(3) pour tout r, $1/\rho + (r - k + 2)/\rho^{u(r)} < 1/\rho_0$.

Écrivons n sous la forme $n = rk - r'$, $0 \leqslant r' < k$. Si $r' > 0$, on choisit λ_n égal à la partie entière de $\rho^{u(r)-r'}$. Si $r' = 0$ on choisit λ_n dans l'intervalle

$$[\rho^{u(r)}, \rho^{u(r)} + r - k + 1],$$

tel que $\lambda_n - \sum_{m=n-k+1}^{n-1} \lambda_m = r$, ce qui est possible grâce au choix de ρ. Les conditions (1)(2) et (3) sur la suite $u(r)$ garantissent la lacunarité de la suite λ_n.

Remarque. Si k et ρ_0 sont tels que $\rho_0 \geqslant \sum_{l=1}^{k} \rho_0$, la construction précédente n'est plus possible. Mais alors on peut montrer, en utilisant la méthode de M. Yves Meyer ([4], p. 558) basée sur le théorème de Marcinkiewicz ([11], p. 231), que la suite k-lacunaire associée à une suite λ_n telle que $\lambda_{n+1} > \rho_0 \lambda_n$ forme un ensemble $\Lambda(q)$ pour tout q. Nous ne savons pas si, dans ce cas, la croissance en q de $A(q, E_k)$ est encore en $q^{k/2}$.

3. Évaluations précises de certaines constantes $A(q, E)$.

Nous allons étudier des méthodes combinatoires plus fines, qui nous permettront de montrer directement le corollaire 3, sans passages par T^∞, et de donner une meilleure majoration de la constante $A(q, \Gamma_k)$, du moins en ce qui concerne sa croissance en k : comme $\Gamma = U\Gamma_k$, nous pourrons en déduire, dans le chapitre suivant, des exemples de multiplicateurs.

Le théorème suivant avait déjà été établi, sous une forme affaiblie, dans [1].

THÉORÈME 6. — *Pour tout Γ_k-polynôme f sur D^∞ et pour tout entier pair q :*

$$\|f\|_q \leqslant (q-1)^{k/2} \|f\|_2.$$

Il suffit de considérer le cas où f est un Γ_k-polynôme réel, qu'on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k} a_{n_1 n_2 \ldots n_k} \left(x, \sum_{i=1}^{k} e_{n_i} \right),$$

avec $a_{n_1 n_2 \ldots n_k} = a_{n_{\sigma(1)} n_{\sigma(2)} \ldots n_{\sigma(k)}}$ quelle que soit la permutation σ de $\{1, 2, \ldots, k\}$, et $a_{n_1 n_2 \ldots n_k} = 0$ si deux des n_i sont égaux. Comme

$$\hat{f}(e_{n_1} + \cdots + e_{n_k}) = k!\, a_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$
$$\|f\|_2 = (k!)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} |a_{n_1 \ldots n_k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part :

$$f^q(x) = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_{kq}) \in \mathbf{N}^{kq}} a_{n_1 \ldots n_k} a_{n_{k+1} \ldots n_{2k}} \cdots a_{n_{k(q-1)+1} \ldots n_{kq}} \left(x, \sum_{i=1}^{kq} e_{n_i} \right),$$

ou, comme $\int_{D^\infty} (x, \gamma)\, dx = 0$ si et seulement si $\gamma = 0$, et $\sum_{i=1}^{kq} e_{n_i} = 0$ si et seulement si les n_i sont deux à deux égaux,

$$\|f\|_q^q = \int f^q\, dx = \Sigma a_{n_1 \ldots n_k} a_{n_{k+1} \ldots n_{2k}} \cdots a_{n_{k(q-1)+1} \ldots n_{kq}}$$

la sommation étant prise sur le sous-ensemble de $\mathbf{N}^{kq}$ formé des suites $(n_1, n_2, \ldots, n_{kq})$ telles que les n_i soient deux à deux égaux. Comme on sait de plus que $a_{n_1 \ldots n_k} = 0$ si deux des n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, sont égaux, on peut se restreindre aux suites $(n_1, n_2, \ldots, n_{kq})$ telles que les n_i soient tous différents dans chacun des blocs $i \in [kl + 1, k(l + 1)]$.

Soit donc précisément W le sous-ensemble de $\mathbf{N}^{kq}$ formé des suites $(n_1, n_2, \ldots, n_{kq})$ telles que :

(a) lorsque i appartient à un bloc $[kl + 1, k(l + 1)]$, les n_i correspondants sont tous distincts.

(b) si les n_i, $i = 1, 2, \ldots, kq$, prennent l valeurs distinctes, chacune est prise un nombre pair de fois.

Nous aurons besoin, pour la démonstration du théorème 4, de deux lemmes combinatoires portant sur l'ensemble W. Donnons tout d'abord deux définitions : si $q = 2s$, on appelle $E(k, s)$ l'ensemble des applications α de

$$\{1, 2, \ldots, 2ks\} \quad \text{dans} \quad \{1, 2, \ldots, ks\}$$

telles que :

(a') si i et j appartiennent au même bloc $[kl + 1, k(l + 1)]$, $\alpha(i)$ et $\alpha(j)$ sont différents ;

(b') pour tout $l = 1, 2, \ldots, ks$, card $\alpha^{-1}(l) = 2$.

On appelle φ l'application de $E(k, s) \times N^{ks}$ dans N^{2ks} définie par :

$$\varphi[(r_1, r_2, \ldots, r_{ks}), \alpha] = (r_{\alpha(1)}, r_{\alpha(2)}, \ldots, r_{\alpha(2ks)}).$$

Il est aisé de voir que W appartient à l'image par φ de $E_{ks} \times N^{ks}$. Plus précisément, on a le lemme suivant :

LEMME 5. — *Pour tout* $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_{2ks})$ *appartenant à* W, card $\varphi^{-1}(\nu) \geqslant (ks)!$.

Supposons en effet que les n_i prennent l valeurs distinctes $t_1, t_2, \ldots, t_l$, chacune un nombre de fois respectivement égal à $2\beta_1, 2\beta_2, \ldots, 2\beta_l$. La projection sur N^{ks} de $\varphi^{-1}(\nu)$ est alors formée des suites $(r_1, r_2, \ldots, r_{ks})$ telles que les r_i prennent les valeurs $t_1, t_2, \ldots, t_l$, chacune un nombre de fois respectivement égal à $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$. Le nombre de ces suites est :

$$\frac{(ks)!}{\beta_1!\beta_2! \ldots \beta_l!}.$$

Ayant choisi une telle suite $(r_1, r_2, \ldots, r_{ks})$, il nous reste à compter le nombre des applications $\alpha \in E(k, s)$ telles que, pour tout i, $r_{\alpha(i)} = n_i$. Soit N_i l'ensemble $\{j ; n_j = s_i\}$, R_i l'ensemble $\{j ; r_j = s_i\}$: les applications cherchées sont toutes les applications $\alpha \in E(k, s)$ telles que pour tout $i = 1, 2, \ldots, l$, $\alpha(N_i) = R_i$. Or la restriction à N_i d'une telle application satisfait à l'unique condition que, pour tout $j \in R_i$, $\alpha^{-1}(j)$ possède deux éléments : ν appartenant à W, N_i ne peut contenir deux éléments d'un même bloc. Il est aisé de voir que le nombre de telles applications de N_i dans R_i est égal à $2^{-\beta_i}(2\beta_i)!$. Le nombre d'applications α telles que, pour toute valeur de i, $\alpha(N_i) = R_i$ est donc égal à

$$2^{-\beta_1}(2\beta_1)!2^{-\beta_2}(2\beta_2)! \ldots 2^{-\beta_l}(2\beta_l)!.$$

Donc :

$$\text{card } \varphi^{-1}(\nu) = (ks)! \frac{(2\beta_1)!}{2^{\beta_1}\beta_1!} \ldots \frac{(2\beta_l)!}{2^{\beta_l}\beta_l!} \geqslant (ks)!$$

LEMME 6. — *Card* $E(k, s) \leqslant \left(\frac{2s-1}{s}\right)^{ks} [(ks)!]^2$.

Card $E(k, s)$ est encore le nombre de choix possibles de ks couples $\alpha^{-1}(1)$, $\alpha^{-1}(2)$, ..., $\alpha^{-1}(ks)$ parmi les nombres $\{1, 2, \ldots, 2ks\}$, étant entendu qu'un couple ne peut être formé de deux éléments d'un même bloc $[k(l-1)+1, kl]$.

Supposons avoir choisi $\alpha^{-1}(1)$, $\alpha^{-1}(2)$, ... $\alpha^{-1}(n)$, et montrons qu'il y a alors au plus $\frac{2s-1}{s}(ks-n)^2$ choix possibles pour $\alpha^{-1}(n+1)$. Supposons que dans le choix considéré de $\alpha^{-1}(1), \ldots, \alpha^{-1}(n)$, r_i des éléments constituant $\alpha^{-1}(1), \ldots, \alpha^{-1}(n)$ appartiennent au ième bloc

$$[k(i-1)+1, ki].$$

On a évidemment $\Sigma r_i = 2n$. Si l'on choisit le premier élément de $\alpha^{-1}(n+1)$ parmi les $k - r_i$ éléments restants du ième bloc, il y a, pour le second élément, $2ks - 2n - k + r_i$ choix possibles, puisqu'il ne peut ni appartenir au ième bloc, ni être égal à l'un des $2n$ éléments précédemment choisis. Comme les deux éléments de $\alpha^{-1}(n+1)$ sont permutables, il y a donc, pour $\alpha^{-1}(n+1)$, un nombre de choix égal à :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2s}(2ks-2n-k+r_i)(k-r_i).$$

En tenant compte de ce que $\Sigma r_i = 2n$, par un calcul élémentaire, on montre que :

$$\frac{s}{2}\sum_{i=1}^{2s}(2ks-2n-k+r_i) = (2s-1)(ks-n)^2 + n^2 - \frac{s}{2}\Sigma r_i^2.$$

Or $4n^2 = (\Sigma r_i)^2 \leqslant 2s\Sigma r_i^2$ grâce à l'inégalité de Schwarz. Ceci achève la démonstration du lemme 6.

Il est dès lors facile de terminer la démonstration du théorème 6. Grâce au lemme 5 :

$$\|f\|_q^q \leqslant \sum_{(n_1, \ldots, n_{kq}) \in W} |a_{n_1 \ldots n_k}| \ldots |a_{n_{k(q-1)+1} \ldots n_{kq}}|$$

$$\leqslant \frac{1}{(ks)!} \sum_{\substack{(r_1, r_2, \ldots r_{ks}) \in \mathbb{N}^{ks} \\ \alpha \in E_{ks}}} |a_{r_{\alpha(1)} r_{\alpha(2)} \ldots r_{\alpha(k)}}| \ldots |a_{r_{\alpha(kq-k+1)} \ldots r_{\alpha(kq)}}|.$$

Posons alors :

$$S(\alpha) = \sum_{(r_1, \ldots, r_{ks}) \in \mathbb{N}^{ks}} |a_{r_{\alpha(1)} r_{\alpha(2)} \ldots r_{\alpha(k)}}| \ldots |a_{r_{\alpha(kq-k+1)} \ldots r_{\alpha(kq)}}|.$$

Il est facile de montrer que pour tout α :

$$S(\alpha) \leqslant \Big(\sum_{n_1, \ldots, n_k} |a_{n_1 \ldots n_k}|^2 \Big)^s :$$

il suffit d'effectuer la sommation successivement par rapport à $r_1, r_2, \ldots, r_{ks}$, et d'utiliser à chaque étape l'inégalité de Schwarz, deux des facteurs $a_{r_{\alpha(ik+1)} \ldots r_{(ik+k)}}$ et deux seulement dépendant de l'une des variables r_i. Donc :

$$\|f\|_q^q \leqslant \frac{1}{(ks)!} \sum_{\alpha \in E(k, s)} S(\alpha) \leqslant \frac{\operatorname{card} E(k, s)}{(ks)!} (\Sigma |a_{n_1 \ldots n_k}|^2)^s.$$

Or on a vu que $(\Sigma |a_{n_1 \ldots n_k}|^2)^s = (k!)^{-s} \|f\|_2^q$.

Finalement $\|f\|_q^q \leqslant \left(\dfrac{2s-1}{s} \right)^{ks} (ks)! \, (k!)^{-s} \|f\|_2^q$.

La démonstration du théorème 6 s'achève en remarquant que $(ks)! \leqslant (k!)^s s^{ks}$.

Le théorème 6 peut être généralisé de la manière suivante :

Corollaire 5. *Soit* E *un ensemble de* $\Sigma \mathbf{Z}(2)$ *tel que pour tout* n, $1 \leqslant n \leqslant 2sk$, $R_n(E, 0)$ *soit borné : alors l'ensemble* kE *est de type* $\Lambda(2s)$.

Nous ne ferons pas la démonstration, fort semblable à celle du théorème 6.

Remarque. — L'équivalence des normes dans L^2 et L^q des fonctions sur D^∞ à spectre dans Γ_k permet d'obtenir le résultat de théorie des probabilités suivant :

on considère, sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une suite ξ_i de variables aléatoires réelles, indépendantes, symétriques et équidistribuées, dont les moments d'ordre $2s$ soient bornés. Alors, il existe une constante A ne dépendant que de k, de s et de la loi de probabilité des ξ_i, telle que, pour toute variable aléatoire de la forme

$$f(\omega) = \sum_{n_1 < \cdots < n_k} a_{n_1 \ldots n_k} \xi_{n_1}(\omega) \ldots \xi_{n_k}(\omega),$$

on ait $\|f\|_{2s} \leqslant A \|f\|_2$.

Le théorème 6 donne ce résultat lorsque les ξ_n sont des variables de Bernoulli. Considérons donc le cas général : il suffit de prendre pour f une combinaison linéaire finie, et l'on pose, lorsque x appartient à D^∞,

$$F(\omega, x) = \sum_{n_1 < \cdots < n_k} a_{n_1 \ldots n_k} \xi_{n_1}(\omega)(e_{n_1}, x) \ldots \xi_{n_k}(\omega)(e_{n_k}, x).$$

Or, pour tout $x \in D^\infty$, les variables aléatoires $\xi_i(\omega)(e_i, x)$ sont indépendantes et ont même distribution que les ξ_i. Donc $\int_\Omega (F(x, \omega))^{2s}\, dP(\omega)$ ne dépend pas de x, et est égal à

$$\int_\Omega (f(\omega))^{2s}\, dP(\omega).$$

Donc :

$$\|f\|_{2s}^{2s} = \int_{\Omega \times D^\infty} (F(x, \omega))^{2s}\, dP(\omega)$$

$$\leqslant (2s-1)^{sk} \int_\Omega [\Sigma |a_{n_1 \ldots n_k}|^2 \xi_{n_1}^2 \ldots \xi_{n_k}^2]^s\, dP(\omega).$$

$$\|f\|_{2s}^{2s} \leqslant [(2s-1)^{sk} \|\xi_i\|_{2s}^{2s} \|\xi_i\|_2^{-2s}] \|f\|_2^{2s}.$$

On ne peut obtenir par contre l'équivalence des normes dans le kième chaos de Wiener, résultat qui a été obtenu indépendamment par M. Schreiber [8], par des méthodes combinatoires proches des nôtres.

Une amélioration de la méthode du théorème 6 va nous permettre d'obtenir le résultat suivant relatif au dual de T^∞ :

THÉORÈME 7. — *Le sous-ensemble* N_k *de* $\Sigma\mathbf{Z}$, *formé des suites* $(n_i)_{i=1}^\infty$ *telles que* $\Sigma|n_i| = k$, *est* $\Lambda(q)$ *pour tout* q, *et, si* q *est un entier pair, pour toute* N_k*-fonction* f :

$$\|f\|_q \leqslant (q-1)^{k/2} \|f\|_2.$$

Posons encore $q = 2s$.

Nous allons définir une application ψ de $\mathbf{Z}^k$ dans N_k de la manière suivante : à la suite $t = (t_n)_{n=1}^k$ on fait correspondre la suite $\nu = (n_j)_{j=1}^\infty$ telle que :

— s'il existe deux t_n opposés, $\nu = 0$.

— sinon, pour tout j, n_j est égal soit au nombre des t_n égaux à j, soit à l'opposé du nombre des t_n égaux à $-j$. On appelle $\delta(t)$, pour $t \in \mathbf{Z}^k$, la quantité $k!(\Pi|n_j|!)^{-1}$, si $(n_j)_{j=1}^\infty = \psi(t)$. On montre aisément que, pour tout ν dans

N_k, $\nu = (n_j)_{j=1}^{\infty}$, card $\psi^{-1}(\nu) = \dfrac{k!}{\Pi(|n_j|)!} = \mathcal{E}(t)$, quel que soit t tel que $\nu = \varphi(t)$.

Soit alors f un N_k-polynôme : $f(x) = \sum_{\nu \in N} a(\nu) e^{i\nu.x}$, où $\nu.x = \Sigma n_i x_i$ si $\nu = (n_i)_{i=1}^{\infty}$. Mais d'après ce qui précède on peut encore écrire : $f(x) = \sum_{t \in Z^k} a(\psi(t))[\mathcal{E}(t)]^{-1} e^{i\psi(t).x}$, si du moins on a posé $a(0) = 0$. Posons alors $b(t) = a(\psi(t))\ [\mathcal{E}(t)]^{-1}$:

$$f(x) = \sum_{t \in Z^k} b(t) e^{i\psi(t).x}.$$

D'une part :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\nu \in N_k} |a(\nu)|^2 = \sum_{t \in Z^k} \mathcal{E}(t) |b(t)|^2,$$

d'autre part :

$$|f|^{2s} = \sum_{t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(2s)}} b(t^{(1)}) b(t^{(2)}) \ldots b(t^{(s)}) \overline{b(t^{(s+1)})} \ldots \overline{b(t^{(2s)})} e^{i\left[\sum_{l=1}^{s} \psi(t^{(l)}) - \sum_{s+1}^{2s} \psi(t^{(l)})\right].x},$$

$$\|f\|_{2s}^{2s} = \sum b(t^{(1)}) \ldots b(t^{(s)})\ \overline{b(t^{(s+1)})} \ldots \overline{b(t^{(2s)})},$$

la sommation étant prise sur le sous-ensemble W de Z^{2ks} formé des suites $(t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(2s)})$ d'éléments de Z^k telles que :

(a) pour tout l la suite $t^{(l)}$ ne possède pas deux $t_n^{(l)}$ opposés ;

(b) $$\sum_{l=1}^{s} \psi(t^{(l)}) = \sum_{s+1}^{2s} \psi(t^{(l)}).$$

A une suite $(t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(2s)})$ on peut faire correspondre biunivoquement une suite $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2ks})$ par :

$$\theta_i = t_j^{(l)} \quad \text{si} \quad i = j + lk,\ 0 < j \leqslant k \quad \text{et} \quad l \leqslant s,$$
$$\theta_i = -t_j^{(l)} \quad \text{si} \quad i = j + lk,\ 0 < j \leqslant k \quad \text{et} \quad l > s.$$

La suite $(t^{(1)}, \ldots, t^{(2s)})$ appartient à W si et seulement si la suite $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2ks})$ appartient au sous-ensemble W′ défini par les conditions

(a') pour tout l il ne peut exister deux θ_i opposés appartenant au l-ième bloc $i \in [k(l-1)+1, kl]$.

(b') Pour tout n, le nombre des θ_i, $i = 1, 2, \ldots, 2ks$, égaux à n est égal au nombre des θ_i égaux à $-n$.

Nous allons montrer, comme pour le théorème 6, que W' appartient à l'image d'un ensemble produit par une application convenable.

On appelle $E(k, s)$ l'ensemble des bijections α de $\{1, 2, \ldots, 2ks\}$ dans $\{-ks, -ks+1, \ldots, -1, 1, \ldots, ks\}$ telles que, si i et j appartiennent au même bloc $[k(l-1)+1, kl]$, $\alpha(i)$ et $-\alpha(j)$ soient différents. D'autre part, α étant fixé dans $E(k, s)$, on définit δ_α par $\delta_\alpha(i) = 1$ si $\alpha(i) > 0$, $\delta_\alpha(i) = -1$ si $\alpha(i) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, 2ks$. On considère alors l'application φ de $\mathbf{Z}^{ks} \times E(k, s)$ dans W' définie par :

$$\varphi[(r_1, r_2, \ldots, r_{ks}), \alpha] = (\delta_\alpha(1) r_{|\alpha(1)|}, \delta_\alpha(2) r_{|\alpha(2)|}, \ldots, \delta_\alpha(2ks) r_{|\alpha(2ks)|}).$$

Comme dans le lemme 1, $\theta = (\theta_i)_{i=1}^{2ks}$ étant donné dans W', calculons card $\varphi^{-1}(\theta)$. Nous ferons l'hypothèse, pour ce calcul, que les θ_i prennent $2l$ valeurs distinctes, $\nu_1, -\nu_1, \nu_2, -\nu_2, \ldots, \nu_l, -\nu_l$, chacune un nombre de fois respectivement égal à $\beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_l, \beta_l$ et que, dans le jième bloc,

$$[k(j-1)+1, kj],$$

la valeur ν_i, ou son opposée, est prise $\beta_i^{(j)}$ fois : $2\beta_i = \sum_j \beta_i^{(j)}$, $2\Sigma\beta_i = 2ks$.

La projection de $\varphi^{-1}(\theta)$ sur $\mathbf{Z}^{ks}$ est alors formée de toutes les suites $(r_1, r_2, \ldots, r_{ks})$ telles que les r_i prennent les l valeurs ν_1 ou $-\nu_1$, ν_2 ou $-\nu_2$, ν_l ou $-\nu_l$, chacune un nombre de fois respectivement égal à $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$. Le nombre de telles suites est égal à :

$$\frac{2^{ks}(ks)!}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_l!}.$$

Ayant choisi une telle suite $(r_1, \ldots, r_{ks})$, il nous reste à compter le nombre d'applications $\alpha \in E(k, s)$ telles que pour tout $i = 1, 2, \ldots, 2ks$, $\delta_\alpha(i) r_{|\alpha(i)|} = \theta_i$. Soient :

$$\Theta_i = \{j;\ \theta_j = \nu_i\}, \qquad \Theta_i' = \{j;\ \theta_j = -\nu_i\},$$
$$R_i = \{j;\ r_j = \nu_i\}, \qquad R_i' = \{-j;\ r_j = -\nu_i\}.$$

Les applications α cherchées sont toutes les applications telles que : $\alpha(\Theta_i) = R_i \cup R_i'$, $\alpha(\Theta_i') = (-R_i) \cup (-R_i')$, et

ceci pour tout i. Leur nombre est égal à $(\beta_1!)^2(\beta_2!)^2 \dots (\beta_l!)^2$. Donc :

$$\text{card } \varphi^{-1}(\theta) = 2^{ks}(ks)!(\beta_1!)(\beta_2!) \dots (\beta_l!).$$

Or $\beta_i! \geqslant \prod_j (\beta_i^{(j)}!)^{1/2}$, puisque $\sum_j \beta_i^{(j)} = 2\beta_i$, et $\beta_i^{(j)} \leqslant \beta_i$. Donc card $\varphi^{-1}(\theta) \geqslant 2^{ks}(ks)! \prod_j \left(\prod_i \beta_i^{(j)}!\right)^{1/2}$. Mais, si θ correspond à la suite $(t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(2s)})$, on reconnaît dans la quantité $\prod_i (\beta_i^{(j)}!) : k![\varepsilon(t^{(j)})]^{-1}$.

Posons alors $c(t) = |b(t)|[\varepsilon(t)]^{1/2}$, et, pour $\alpha \in \mathrm{E}(k, s)$,

$$\mathrm{S}(\alpha) = \sum_{(r_1, \dots, r_{ks}) \in \mathbf{Z}^{ks}} p_\alpha(r_1, r_2, \dots, r_{ks}),$$

où

$$p_\alpha(r_1, r_2, \dots, r_{ks}) = \prod_{l=1}^{2s} c[\delta_\alpha(lk-k+1)r_{|\alpha(lk-k+1)|}, \dots, \delta_\alpha(lk)r_{|\alpha(lk)|}].$$

On montre, comme dans la démonstration du théorème 6, que, pour tout $\alpha \in \mathrm{E}(k, s)$,

$$\mathrm{S}(\alpha) \leqslant \left(\sum_{t \in \mathbf{Z}^k} |c(t)|^2\right)^s.$$

Or, d'après ce qui précède,

$$\|f\|_{2s}^{2s} \leqslant \frac{1}{(ks)!2^{ks}(k!)^s} \sum_{\alpha \in \mathrm{E}(k, s)} \mathrm{S}(\alpha).$$

Donc

$$\|f\|_{2s}^{2s} \leqslant \frac{\text{card } \mathrm{E}(k, s)}{2^{ks}(ks)!(k!)^s} \left(\sum_{t \in \mathbf{Z}^k} |c(t)|^2\right)^s = \frac{\text{card } \mathrm{E}(k, s)}{2^{ks}(ks)!(k!)^s} \|f\|_2^{2s}.$$

La démonstration s'achève en montrant, comme dans le lemme 6, que

$$\text{card } \mathrm{E}(k, s) \leqslant 2^{ks}[(ks)!]^2 \left(\frac{2s-1}{s}\right)^{ks} \leqslant 2^{ks}(ks)!\,(k!)^s(2s-1)^{ks}.$$

Remarque. — Le théorème 2 du chapitre 1 permet de déduire du théorème 6 un résultat analogue sur $\mathbf{Z}$: si μ_i est une suite suffisamment lacunaire, $\mu_{i+1} \geqslant (2s+1)\mathrm{A}_i\mu_i$, l'ensemble $\mathrm{F}_\mu^{(k)}$ défini par :

$$\mathrm{F}_\mu^{(k)} = \{n = \Sigma n_i\mu_i \ | \forall i, \ |n_i| \leqslant \mathrm{A}; \ \Sigma|n_i| = k\}$$

est un ensemble $\Lambda(2s)$, et $\mathrm{A}(2s, \mathrm{F}_\mu^{(k)}) \leqslant (2s-1)^{k/2}$.

Ce résultat pourrait également s'obtenir directement, par une adaptation de la démonstration précédente : la seule propriété de $F_\mu^{(k)}$ à utiliser est la suivante : si $n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots, n^{(2s)}$ appartiennent à $F_\mu^{(k)}$ et si $\sum_{j=1}^{2s} n^{(j)} = 0$, alors, pour tout i, $\Sigma n_i^{(j)} = 0$.

Mais, comme on l'a fait pour le théorème 6, on peut alors obtenir la généralisation suivante du théorème 7, dont nous ne donnerons pas la démonstration :

COROLLAIRE 6. — *Soit* E *un ensemble d'entiers tel que, quel que soit* $l \leqslant ks$ *il y ait au plus* N *décompositions de* 0 *sous la forme* $\Sigma a_i n_i = 0$, *où les* n_i *appartiennent à* E, *et les* a_i *sont des entiers relatifs bornés en module par* $2s$ *et tels que* $\Sigma|a_i| = 2l$. *Alors l'ensemble* E_k *des entiers s'écrivant sous la forme* $\pm n_1 \pm n_2 \ldots \pm n_k$ *où* $n_1, \ldots, n_k$ *appartiennent à* E, *est* $\Lambda(2s)$.

CHAPITRE III

PRODUITS DE RIESZ MULTIPLICATEURS DE NORME 1

Soit t_n une suite lacunaire d'entiers, $t_{n+1} \geqslant 3t_n$. On sait que le produit de Riesz $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2r \cos t_n x)$ définit une mesure positive, de masse totale 1, si $r \leqslant \frac{1}{2}$. C'est donc un convoluteur de tous les L^p, $p \leqslant 1$. Le but de ce chapitre est de répondre à la question suivante : la convolution par ce produit de Riesz envoie-t-elle $L^p(T)$ dans un espace $L^q(T)$ plus petit, $q > p$? Autrement dit a-t-elle un effet régularisant sur les fonctions de L^p? Nous saurons montrer qu'il en est bien ainsi, et, dans le cadre général de produits de Riesz sur un groupe compact quelconque, nous saurons également répondre si r est suffisamment petit. Dans certains cas, nous saurons expliciter la liaison entre r, p et q.

De tels résultats sont évidemment à rapprocher des résultats classiques sur les noyaux de Riesz, de transformée de Fourier $\frac{1}{|n|^\alpha}$. Dans les deux cas il s'agit de mesures positives de masse totale 1, dans les deux cas il y a, par convolution, effet régularisant sur les L^p. Toutefois les noyaux de Riesz ont également un effet régularisant local : ils envoient, par convolution, une classe de Lipschitz dans une classe de Lipschitz plus restrictive. Les produits de Riesz ne possèdent pas cette propriété : leurs coefficients de Fourier sont constants sur les entiers $\{\pm t_n\}$, et la convolution par un produit de Riesz conserve donc, à un facteur près, la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-\alpha} \cos t_n x$, dont on sait qu'elle appartient à Λ_α et non à $\Lambda_{\alpha+\varepsilon}$.

Énonçons et démontrons tout d'abord le théorème suivant, qui s'applique en particulier aux produits de Riesz sur le tore.

THÉORÈME 1. — *Soit* G *un groupe compact abélien,* Γ *son dual,* γ_i *une suite d'éléments de* Γ *tels que tout* $\gamma \in \Gamma$ *s'écrive d'au plus une manière sous la forme* $\Sigma\varepsilon_i\gamma_i$, *où* $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ *si* $2\gamma_i = 0$, $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ *si* $2\gamma_i \neq 0$. *Soit* $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$, *et soit* μ_r *la mesure positive définie par le produit de Riesz* $\prod_{i=1}^{\infty} f_i(x)$, *où* $f_i(x) = 1 + r(x, \gamma_i)$ *si* $2\gamma_i = 0$, $f_i(x) = 1 + 2r\,\mathcal{R}e(x, \gamma_i)$ *si* $2\gamma_i \neq 0$. *Alors, si* r *est suffisamment petit, quel que soit* $p > 1$, *il existe* $q > p$ *tel que la convolution par la mesure* μ_r *envoie* $L^p(G)$ *dans* $L^q(G)$.

Il suffit de montrer que, si r est suffisamment petit, il existe $p < 2$ tel que la convolution par μ_r envoie $L^p(G)$ dans $L^2(G)$: le théorème s'en déduira par interpolation. Or ce dernier résultat est une simple conséquence du théorème 5 du chapitre 2, et du fait que, dans l'énoncé de ce théorème, $A(k)$ peut être pris à croissance exponentielle : soit E_k le sous-ensemble de Γ formé des éléments γ qui s'écrivent sous la forme $\Sigma\varepsilon_i\gamma_i$, avec $\Sigma|\varepsilon_i| = k$. On sait que, pour tout $p < 2$, et pour tout polynôme f :

$$\sum_{\gamma \in E_k} |\hat{f}(\gamma)|^2 \leqslant \left(\frac{A}{p-1}\right)^k \|f\|_p^2,$$

où A est une constante absolue. Donc, si $r^2 < A^{-1}(p-1)$,

$$\sum_k r^{2k} \sum_{\gamma \in E_k} |\hat{f}(\gamma)|^2 \leqslant B^2 \|f\|_p^2.$$

Or le premier membre de cette dernière inégalité est exactement la norme dans $L^2(G)$ de $f * \mu_r$. Ceci démontre le théorème pour $r < A^{-1/2}$.

Nous nous intéresserons dans la suite au cas où G est l'un des groupes D^∞ ou T^∞, γ_i la base canonique de $\Sigma\mathbf{Z}(2)$ ou $\Sigma\mathbf{Z}$. Les théorèmes obtenus au chapitre précédent pourraient nous permettre de préciser le théorème 1 dans ces deux cas. Mais, surtout, nous allons pouvoir tirer parti du fait que ces groupes sont des produits infinis. Considérons, par exemple, le cas de D^∞ : on s'intéresse alors aux mesures μ_r, $0 \leqslant r \leqslant 1$, définies par les produits de Riesz $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + r(x, e_n))$. La suite

des coefficients de Fourier de μ_r est donnée par :

$$\hat{\mu}_r(\Sigma \varepsilon_n e_n) = \prod_{n=1}^{\infty} r^{\varepsilon_n}.$$

Nous allons voir que les propriétés de telles suites comme multiplicateurs sont liées à des propriétés sur le groupe à deux éléments $\{-1, 1\}$.

THÉORÈME 2. — *Soit* G *un groupe compact abélien,* Γ *son dual,* λ *une fonction de* Γ *dans* C *telle que* $\lambda(0) = 1$. *On définit sur* $\Sigma\Gamma$ *la fonction* ν *par* $\nu((\gamma_i)_{i=1}^{\infty}) = \prod_{i=1}^{\infty} \lambda(\gamma_i)$. *Alors* ν *est un multiplicateur de* $\mathcal{F}L^p(G^\infty)$ *dans* $\mathcal{F}L^q(G^\infty)$ *si et seulement si* λ *est un multiplicateur de* $\mathcal{F}L^p(G)$ *dans* $\mathcal{F}L^q(G)$ *de norme* 1.

Supposons tout d'abord que ν est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^q(G^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^q(G^\infty)$. D'après le théorème du graphe fermé, il existe une constante A telle que, pour tout polynôme g sur G^∞ :

$$\|\Sigma \nu(\gamma)\hat{g}(\gamma)(x, \gamma)\|_q \leqslant A\|g\|_p.$$

On considère alors g de la forme $g(x) = f(x_1)f(x_2) \ldots f(x_n)$ *si* $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, où f est un polynôme sur G.

$\hat{g}(\gamma) = \hat{f}(\gamma_1) \ldots \hat{f}(\gamma_n)$ si $\gamma = (\gamma_j)_{j=1}^{\infty}$ et $\gamma_j = 0$ si $j > n$, $\hat{g}(\gamma) = 0$ dans le cas contraire.

Donc

$$\begin{aligned}
&\Sigma \nu(\gamma)\hat{g}(\gamma)(x, \gamma) \\
&\quad = \sum_{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \Gamma^n} \lambda(\gamma_1) \ldots \lambda(\gamma_n)\hat{f}(\gamma_1) \ldots \hat{f}(\gamma_n)(x_1, \gamma_1) \ldots (x_n, \gamma_n) \\
&\quad = \Big(\sum_{\gamma_1} \lambda(\gamma_1)\hat{f}(\gamma_1)(x_1, \gamma_1)\Big) \ldots \Big(\sum_{\gamma_n} \lambda(\gamma_n)\hat{f}(\gamma_n)(x_n, \gamma_n)\Big) \\
&\qquad \|\Sigma \nu(\gamma)\hat{g}(\gamma)(x, \gamma)\|_q = \|\Sigma \lambda(\gamma)\hat{f}(\gamma)(x, \gamma)\|_{L^q(G)}^n,
\end{aligned}$$

et de même $\|g\|_p^n = \|f\|_{L^p(G)}^n$. Donc, pour tout n,

$$\|\Sigma \lambda(\gamma)\hat{f}(\gamma)(x, \gamma)\|_{L^q(G)}^n \leqslant A\|f\|_{L^p(G)}^n;$$

c'est dire que $\|\Sigma \lambda(\gamma)\hat{f}(\gamma)(x, \gamma)\|_{L^q(G)} \leqslant \|f\|_{L^p(G)}$.

Supposons maintenant que λ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(G)$ dans $\mathcal{F}L^q(G)$ de norme 1. Nous allons montrer qu'alors,

pour tout polynôme g sur G^∞, $\|\Sigma\nu(\gamma)\hat{g}(\gamma)(x, \gamma)\|_q \leqslant \|g\|_p$. Or un polynôme ne dépend que d'un nombre fini de variables : on est donc amené à montrer, pour tout n, que la restriction de ν à Γ^n est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(G^n)$ dans $\mathcal{F}L^q(G^n)$ de norme 1. On raisonne alors par récurrence, en utilisant le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soient* (X_1, μ_1) *et* (X_2, μ_2) *deux espaces mesurés,* $T^{(1)}$ (*resp.* $T^{(2)}$) *une application linéaire bornée de* $L^p(X_1)$ *dans* $L^q(X_1)$ (*resp.* $L^p(X_2)$ *dans* $L^q(X_2)$), *de norme* A_1 (resp. A_2). *On suppose* $q \geqslant p \geqslant 1$. *Alors l'application* T *définie sur les fonctions* f *de* $L^p(X_1 \times X_2)$ *de la forme* $f(x, y) = g(x)h(y)$ *par* $Tf(x, y) = T^{(1)}g(x)T^{(2)}h(y)$ *se prolonge en une application linéaire bornée de* $L^p(X_1 \times X_2)$ *dans* $L^q(X_1 \times X_2)$, *de norme inférieure ou égale à* A_1A_2.

La démonstration est une simple application de l'inégalité de Minkowski. Soit f dans $L^p(X_1 \times X_2)$. On définit encore $Tf = T^{(1)}_{x_1}[T^{(2)}_{x_2}f]$, $T^{(2)}_{x_2}f$ désignant l'image par $T^{(2)}$ de f considérée comme fonction de x_2, et $T^{(1)}_{x_1}[T^{(2)}_{x_2}f]$ l'image par $T^{(1)}$ de la fonction $T^{(2)}_{x_2}f$ considérée comme fonction de x_1 : cette dernière fonction appartient à $L^p(X_1)$ pour presque tout x_2 puisque, grâce à l'inégalité de Minkowski relative à l'exposant q/p :

$$\left[\int_{X_2}\left(\int_{X_1}|T^{(2)}_{x_2}f(x_1, x_2)|^p\, d\mu_1\right)^{q/p} d\mu_2\right]^{p/q}$$
$$\leqslant \int_{X_1}\left(\int_{X_2}|T^{(2)}_{x_2}f|^q\, d\mu_2\right)^{p/q} d\mu_1 \leqslant A_2^p\int_{X_1\times X_2}|f|^p\, d(\mu_1\otimes\mu_2).$$

Pour presque tout x_2, $\int_{X_1}|Tf|^q\, d\mu_1 \leqslant A_1^q\left(\int_{X_1}|T^{(2)}_{x_2}f|^p\, d\mu_1\right)^{q/p}$.

Donc $\int_{X_1\times X_2}|Tf|^q\, d(\mu_1\otimes\mu_2) \leqslant A_1^qA_2^q\left(\int_{X_1\times X_2}|f|^p\, d(\mu_1\otimes\mu_2)\right)^{q/p}$, ce qui termine la démonstration.

Remarquons qu'on a en même temps démontré que les fonctions ν étudiées dans le théorème 2 ne peuvent définir que des multiplicateurs de norme 1.

Le théorème 2 pourra nous servir à deux usages : si, sur un groupe G on connaît un multiplicateur de norme égale à 1, on en déduira un multiplicateur sur G^∞. Si, au contraire, on connaît un multiplicateur de la forme étudiée sur G^∞, on en déduira que le multiplicateur correspondant sur G est de norme 1.

Application du théorème 2 à D^∞.

En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, nous pourrions montrer, grâce au théorème 6 du chapitre 2 que la convolution par la mesure μ_r définie par le produit de Riesz $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + r(x, e_n))$ envoie $L^p(D^\infty)$ dans $L^2(D^\infty)$ si $r^2 < p - 1$, du moins dans le cas où l'exposant conjugué de p est un entier pair. Le théorème 2 va nous permettre d'améliorer et de généraliser ce résultat.

THÉORÈME 3. — *La convolution avec la mesure μ_r, définie par le produit de Riesz $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + r(x, e_n))$ envoie $L^p(D^\infty)$ dans $L^q(D^\infty)$ si et seulement si* $(q - 1)r^2 \leqslant p - 1$.

D'après le théorème 2, la convolution avec μ_r envoie $L^p(D^\infty)$ dans $L^q(D^\infty)$ si et seulement si la fonction λ, définie sur $\mathbf{Z}(2)$ par $\lambda(0) = 1$, $\lambda(1) = r$, est de norme 1 en tant que multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(\{-1, 1\})$ dans $\mathcal{F}L^q(\{-1, 1\})$, c'est-à-dire si et seulement si, quels que soient a et b :

$$\|a + br(x, e_1)\|_q \leqslant \|a + b(x, e_1)\|_p,$$

ou encore

$$(1) \qquad \left(\frac{|a + br|^q + |a - br|}{2}\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{|a + b|^p + |a - b|^p}{2}\right)^{1/p}.$$

Montrons tout d'abord que la condition $(q - 1)r^2 \leqslant p - 1$ est nécessaire : écrivons pour cela que (1) est réalisé si $a = 1$, b est réel et infiniment petit : le premier membre de (1) est alors égal à $1 + \frac{q-1}{2} r^2 b^2 + o(b^2)$, le second membre à $1 + \frac{p-1}{2} b^2 + o(b^2)$. L'inégalité (1) pour tout b entraîne donc $(q - 1)r^2 \leqslant p - 1$.

Le cas où $p = 1$ est complétement traité, puisque on sait, quel que soit r, que μ_r est une mesure.

Nous montrerons tout d'abord que la condition

$$(q - 1)r^2 \leqslant p - 1$$

est suffisante lorsque $1 < p \leqslant q \leqslant 2$. Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact,* T *un convoluteur de* $L^p(G)$ *dans* $L^q(G)$ *tel que, si* f *est une fonction réelle, il en est de même de* Tf : *la norme de* T *en tant que convoluteur de* $L^p(G)$ *dans* $L^q(G)$ *est alors la borne inférieure des constantes* A *telles que, pour tout* f *réel :* $\|Tf\|_q \leqslant A\|f\|_p$.

Soit donc A tel que pour tout f réel $\|Tf\|_q \leqslant A\|f\|_p$. Si f n'est pas réel, $f = g + ih$, $Tf = Tg + iTh$, et :

$$|f|^2 = |g|^2 + |h|^2,\ |Tf|^2 = |Tg|^2 + |Th|^2.$$

On veut montrer que, quels que soient g et h réels,

$$\left(\int (|Tg|^2 + |Th|^2)^{q/2}\, dx\right)^{1/q} \leqslant \left(\int (|g|^2 + |h|^2)^{p/2}\, dx\right)^{1/p}.$$

Il suffit de considérer, pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$, la fonction réelle $g \cos\alpha + h \sin\alpha$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_G |Tg\cos\alpha + Th\sin\alpha|^q\, dx &= \int_G \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Tg\cos\alpha + Th\sin\alpha|^q\, d\alpha\, dx,\\ &= \int_G (|Tg|^2 + |Th|^2)^{q/2}\, dx \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\cos\alpha|^q\, dx.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_G |Tg\cos\alpha + Th\sin\alpha|^q\, dx\, d\alpha &\leqslant \frac{A^q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_G |g\cos\alpha + h\sin\alpha|^p\, dx\right)^{q/p} d\alpha\end{aligned}$$

ou, grâce à l'inégalité de Minkowski,

$$\begin{aligned}A^q &\leqslant \left[\int_G \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g\cos\alpha + h\sin\alpha|^q\, d\alpha\right)^{p/q} dx\right]^{q/p}\\ &= \frac{A^q}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\cos\alpha|^q\, d\alpha \times \left(\int_G (|g|^2 + |h|^2)^{p/2}\, dx\right)^{q/p}.\end{aligned}$$

L'inégalité cherchée est obtenue en divisant chacun des membres de l'inégalité par un même facteur $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\cos\alpha|^q\, d\alpha$.

Il nous suffit donc de montrer (1) pour tous a et b réels, et même positifs. Le second membre de (1) est symétrique par rapport à a et b. Or, si $a > b$,

$$a + br \geqslant b + ar, |a - br| \geqslant |b - ar|.$$

On peut donc se restreindre à des choix de a et b tels que $a \geqslant b$. On veut donc finalement montrer que, pour tout $u \in [0, 1]$:

$$(2) \quad \left(\frac{(1+ur)^q + (1-ur)^q}{2}\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{(1+u)^p + (1-u)^p}{2}\right)^{1/p}.$$

LEMME 3. — *Soient p et q deux nombres réels,*

$$1 < p \leqslant q \leqslant 2.$$

Quel que soit $u \in [0, 1]$ l'inégalité :

$$(2) \quad \left[\frac{(1+ur)^q + (1-ur)^q}{2}\right]^{1/q} \leqslant \left[\frac{(1+u)^p + (1-u)^p}{2}\right]^{1/p}$$

est satisfaite dès que $(q-1)r^2 \leqslant p - 1$.

Commençons la démonstration par quelques remarques : il suffit de montrer que (2) est réalisé si $u \in [0, 1[$, et comme le premier membre de (2) est une fonction croissante de r, si $(q-1)r^2 = p - 1$. D'autre part l'inégalité (2) a un caractère transitif : si elle est réalisée pour p_0, q_0, $r_0^2 = \dfrac{p_0 - 1}{q_0 - 1}$, et u_0, et pour p_1, q_1, $r_1^2 = \dfrac{p_1 - 1}{q_1 - 1}$, u_1, avec $p_1 = q_0$, $u_1 = r_0 u_0$, elle est également réalisée pour p_0, q_1, $r^2 = \dfrac{p_0 - 1}{q_1 - 1}$, u_0.

L'ensemble de ces remarques va nous permettre de déduire (2) du résultat suivant : soit $u_0 < 1$ donné, $1 < p_0 < q_0 \leqslant 2$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $p \in [p_0, q_0]$, pour tout $r \geqslant 1 - \varepsilon$, $q = 1 + \dfrac{p-1}{r^2}$, et $u \in [0, u_0]$ l'inégalité (2) soit réalisée.

L'inégalité (2) sera en effet obtenue pour u_0, p_0, q_0, $r_0^2 = \dfrac{p_0 - 1}{q_0 - 1}$ en utilisant n fois ce résultat, n étant tel que $(1 - \varepsilon)^n \leqslant r_0$, et la transitivité de (2).

Démontrons donc le résultat sous sa nouvelle forme. Soit

$$f(u) = \frac{(1+ur)^q + (1-ur)^q}{(1+u)^p + (1-u)^p} \cdot 2^{1/p-1/q}.$$

$f(0) = 1$, $f'(u)$ est du signe de :

$$\begin{aligned} g(u) &= r[(1+ur)^{q-1} - (1-ur)^{q-1}][(1+u)^p + (1-u)^p] \\ &\quad - [(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}][(1+ur)^q + (1-ur)^q]. \\ &= r[(1+ur)^{q-1} - (1-ur)^{q-1}][(1+u)^{p-1} + (1-u)^{p-1}] \\ &\quad - [(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}][(1+ur)^{q-1} + (1-ur)^{q-1}] \end{aligned}$$

$g(0) = 0$ et $g'(u)$, en tenant compte de ce que

$$(q-1)r^2 = p - 1,$$

est égal à :

$$\begin{aligned} g'(u) &= (p-1)[((1+ur)^{q-2} + (1-ur)^{q-2})((1+u)^{p-1} \\ &\quad + (1-u)^{p-1}) - ((1+u)^{p-2} + (1-u)^{p-2})(1+ur)^{q-1} \\ &\quad + (1-ur)^{q-1}) + r((1+u)^{p-2} - (1-u)^{p-2})((1+ur)^{q-1} \\ &\quad - (1-ur)^{q-1}) - \frac{1}{r}((1+ur)^{q-2} \\ &\quad - (1-ur)^{q-2})(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1})]. \end{aligned}$$

$g'(u)$ est du signe de :

$$\begin{aligned} &'r^2 - 1)\left[\frac{(1+u)^{p-2} - (1-u)^{p-2}}{u}\right]\left[\frac{(1+ur)^{q-2} - (1-ur)^{q-2}}{u}\right] \\ &+ (1+r^2)(1-r)\left[\frac{(1-ur)^{q-2}(1-u)^{p-2} - (1+ur)^{q-2}(1+u)^{p-2}}{2}\right] \\ &- (1+r)\left[\frac{(1+ur)^{q-2}(1-u)^{p-2} - (1+u)^{p-2}(1-ur)^{q-2}}{2}\right]. \end{aligned}$$

Si $q = 2$, il est aisé de montrer que $g'(u) \leqslant 0$ pour tout $u \in [0, 1]$, donc $g(u)$ est négatif et $f(u)$ décroissant : $f(u) \leqslant f(0) = 1$. Ce cas étant traité, on pourra supposer $q_0 < 2$.

Considérons la quantité dont nous cherchons le signe comme fonction de r, soit $G_u(r)$:

$$G_u(r) = G_u(1) + G'_u(1)(r-1) + G''_u(\theta r)(r-1)^2.$$

On calcule aisément $G_u(1) = 0$,

$$G'_u(1) = 2\left[\frac{(1+u)^{p-2} - (1-u)^{p-2}}{2}\right] + 8(2-p)(1-u^2)^{p-3}$$
$$+ 8(p-1)(1-u^2)^{p-2}\left[\frac{\mathrm{Log}(1+u) - \mathrm{Log}(1-u)}{u}\right]$$
$$G'_u(1) \geqslant -2\,\frac{[(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}][(1-u)^{p-2} - (1+u)^{p-2}]}{u^2}$$
$$+ 4p(1-u^2)^{p-2}\left[\frac{\mathrm{Log}(1+u) - \mathrm{Log}(1-u)}{u}\right].$$

Des deux inégalités :

$$(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1} \leqslant (p-1)[\mathrm{Log}(1+u) - \mathrm{Log}(1-u)]$$
$$(1-u)^{p-2} - (1+u)^{p-2} \leqslant 2(2-p)(1-u^2)^{p-2}u$$

on déduit l'existence d'une constante $\alpha > 0$ ne dépendant que de p_0, q_0, u_0 telle que $G'_u(1) \geqslant \alpha$ si $u \in [0, u_0]$, $p \in [p_0, q_0]$. On montre aisément d'autre part qu'il existe un majorant β de $G''_u(r)$ lorsque $r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $u \in [0, u_0]$, $p \in [p_0, q_0]$. $G_u(r)$ est donc négatif dès que $\beta(1-r) \leqslant \frac{\alpha}{2}$. Du signe de $g'(u)$ on déduit, comme dans le cas où $q = 2$, que $f(u) \leqslant 1$ si $u \in [0, u_0]$, $p \in [p_0, q_0]$, $-r \leqslant \frac{\alpha}{2\beta}$.

Ceci termine la démonstration du lemme 3, et permet d'obtenir le théorème 3 lorsque $1 < p \leqslant q \leqslant 2$. Le cas où $2 \leqslant p \leqslant q < \infty$ se déduit par dualité, le cas où $p < 2 < q$ se déduit par combinaison des deux autres cas : si

$$(q-1)r^2 \leqslant p-1, \mu_r = \mu_{r_1} * \mu_{r_2} \quad \text{avec} \quad r_1^2 \leqslant p-1, r_2^2 \leqslant \frac{1}{q-1}.$$

La convolution avec μ_{r_1} envoie L^p dans L^2, puis la convolution avec μ_{r_1} envoie L^2 dans L^q.

Remarques. — *a*) Le théorème 3 montre que la constante $(q-1)^{k/2}$ du théorème 6 du chapitre précédent est la meilleure possible : elle ne peut être remplacée par $\alpha^{k/2}$, où $\alpha > q-1$.

b) Le cas des mesures μ_r sur D^∞ est, dans le cadre des produits de Riesz, particulièrement intéressant car les mesures μ_r forment un semi-groupe de mesures positives de masse

totale 1 : μ_1 est encore la masse de Dirac à l'origine, $\mu_{r_1} * \mu_{r_2} = \mu_{r_1 r_2}$. L'analogie avec les noyaux de Riesz sur le tore est donc plus profonde. On pourrait se demander si le seul fait que les mesures μ_r forment un semi-groupe explique leur effet régularisant sur les L^p : mais il est aisé de construire des semi-groupes n'ayant aucun effet régularisant. Les mesures ν_t définies par $\hat{\nu}_t(\gamma) = e^{-t(1-(x_0,\gamma))}$, où $x_0 \neq 0$ appartient à D^∞, en fournissent un exemple.

Propriétés extrémales des mesures (μ_r).

Nous avons ainsi trouvé, dans le dual de D^∞, des multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p(D^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^q(D^\infty)$ de norme égale à 1 et dont la valeur en 0 est 1. Considérons, dans l'ensemble des multiplicateurs envoyant $\mathcal{F}L^p(D^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^q(D^\infty)$, muni de la topologie faible, l'ensemble des multiplicateurs λ de norme égale à 1, et tels que $\lambda(0) = 1$. C'est un compact convexe. Il est donc naturel de se demander si les multiplicateurs trouvés, suites des coefficients de Fourier des mesures μ_r, sont extrémaux dans cet ensemble. Nous avons su montrer qu'il n'en est rien dans le cas où $q = 2$. Dans ce cas, si λ est un point extrémal, quelle que soit la suite $\theta(\gamma)$, $e^{i\theta(\gamma)}\lambda(\gamma)$ définit un autre point extrémal. Nous avons obtenu le résultat précis suivant :

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que la convolution avec la mesure :

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 + (p-1)^{1/2}(x, e_{2j+1}) + (p-1)^{1/2}(x, e_{2j+2}) + (p-1+\varepsilon)(x, e_{2j+1} + e_{2j+2}))$$

envoie $L^p(D^\infty)$ dans $L^2(D^\infty)$.

Autrement dit, il a été possible d'augmenter $(p-1)^{|\gamma|/2}$ [1] dont on savait que c'était un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(D^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^2(D^\infty)$, de la valeur ε pour une infinité d'éléments de Γ_2, de $\varepsilon(p-1)^{1/2}$ pour une infinité d'éléments de Γ_3..., et d'obtenir encore un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(D^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^2(D^\infty)$.

Ce résultat est encore une conséquence du théorème 2 : il suffit de montrer qu'il existe ε tel que, quels que soient

[1] Si $\gamma = \Sigma \varepsilon_n e_n$, on pose $|\gamma| = \Sigma \varepsilon_n$.

a, u, ρ, ϖ réels :

$$a^2 + (p-1)(u^2+\rho^2) + [(p-1)^2+\varepsilon]\varpi^2 \leqslant \|a + u(x, e_1) + \rho(x, e_2) + \varpi(x, e_1+e_2)\|_p^2.$$

On montre aisément qu'il suffit que cette inégalité soit satisfaite si $a = 1$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $|\varpi| \leqslant \inf(u, \rho)$. Nous nous placerons dans cette hypothèse par la suite. L'inégalité cherchée est alors obtenue à partir des deux remarques suivantes :

α) nous avons vu que quels que soient a et b :

$$a^2 + (p-1)b^2 \leqslant \|a + b(x, e_1)\|_p^2 \quad \text{(lemme 3)},$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $b = 0$. Donc, grâce au lemme 1, quels que soient u, ρ, ϖ :

$$1 + (p-1)(u^2+\rho^2) + (p-1)^2\varpi^2 \leqslant \|1 + u(x, e_1) + \rho(x, e_2) + \varpi(x, e_1+e_2)\|_p^2,$$

l'inégalité étant stricte si u, ρ ou ϖ est différent de 0. Quel que soit $\eta > 0$ il existe donc $\delta > 0$ tel que, quels que soient u, ρ, ϖ vérifiant $u^2 + \rho^2 + \varpi^2 \geqslant \eta$:

$$1 + (p-1)(u^2+\rho^2) + ((p-1)^2+\delta)\varpi^2 \leqslant \|1 + u(x, e_1) + \rho(x, e_2) + \varpi(x, e_1+e_2)\|_p^2.$$

β) Il existe ε tel que, dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^3$, l'inégalité :

$$1 + (p-1)(u^2+\rho^2) + [(p-1)^2+\varepsilon]\varpi^2 \leqslant \|1 + u(x, e_1) + \rho(x, e_2) + \varpi(x, e_1+e_2\|_p^2$$

soit satisfaite. Nous sommes ramenés ici à un problème local : il suffit alors de former le développement de Taylor à l'ordre 4, au voisinage de 0, de la fonction :

$$g(u, \rho, \varpi) = \|1 + u(x, e_1) + \rho(x, e_2) + \varpi(x, e_1+e_2)\|_p^p - (1 + (p-1)(u^2+\rho^2) + ((p-1)^2+\varepsilon)\varpi^2)^{\frac{p}{2}}$$

pour montrer que $g(u, \rho, \varpi)$ est positif au voisinage de 0 si ε est convenablement choisi. Nous n'expliciterons pas les calculs.

Il est naturel de se demander s'il est possible d'augmenter $(p-1)^{|\gamma|/2}$ non plus seulement sur les caractères de Γ_2 de

la forme $e_{2j-1} + e_{2j}$, mais sur tous les caractères de Γ_2. Plus précisément, nous nous posons la question suivante : $(p-1)^{|\gamma|/2}$ est-il un point extrémal du compact convexe formé des multiplicateurs λ de $\mathcal{F}L^p(D^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^2(D^\infty)$ de norme égale à 1, tels que $\lambda(0) = 1$, et tels que $\lambda(\gamma)$ soit constant sur chaque Γ_n? La réponse est cette fois oui. C'est une conséquence immédiate du résultat suivant dont nous ébaucherons la démonstration :

Si $\lambda(\gamma)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(D^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^2(D^\infty)$ de norme égale à 1 tel que $\lambda(0) = 1$ et tel que $\lambda(\gamma)$ soit constant sur chaque Γ_n, et si, pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $|\lambda(\gamma)| = (p-1)^{|\gamma|/2}$ lorsque $\gamma \in \Gamma_i$, alors $|\lambda(\gamma)| \leqslant (p-1)^{n/2}$ lorsque $\gamma \in \Gamma_n$.

On considère le produit de Riesz $P_N(x) = \prod_{k=1}^{N} (1 + N^{-\alpha}(x, e_k))$, et on cherche des conditions nécessaires pour que pour tout N :

$$\Sigma |\lambda(\gamma)|^2 |\hat{P}_N(\gamma)|^2 \leqslant \|P_N\|_p^2.$$

Or si α a été choisi dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2(n-2)}\right[$, on peut montrer que :

$$\|P_N\|_p^2 = 1 + (p-1)N^{1-2\alpha} + \frac{(p-1)^2}{2!} N^{2-4\alpha} + \cdots + \frac{(p-1)^n}{n!} N^{n(1-2\alpha)} + \sigma\left(\frac{1}{N}\right) N^{n(1-2\alpha)},$$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n} |\lambda(\gamma)|^2 |\hat{P}_N(\gamma)|^2 = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} N^{k-2\alpha k} \frac{(p-1)^k}{k!} + \frac{|\lambda(n)|^2}{n!} N^{n(1-2\alpha)} + \sigma\left(\frac{1}{N}\right) N^{n(1-2\alpha)},$$

si $\lambda(n)$ désigne encore la valeur de $\lambda(\gamma)$ lorsque γ appartient à Γ_n. La condition $|\lambda(n)| \leqslant (p-1)^{n/2}$ s'en déduit aussitôt.

Ainsi nous connaissons des points extrémaux du compact formé des multiplicateurs λ de $\mathcal{F}L^p(D^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^2(D^\infty)$, de norme égale à 1, tels que $\lambda(0) = 1$, et tels que $\lambda(\gamma)$ soit constant sur chaque Γ_n : ce sont toutes les suites $e^{i\theta(n)}(p-1)^{|\gamma|/2}$, où $\theta(n)$ est une suite quelconque de nombres réels. Mais nous n'obtenons pas ainsi tous les points extrémaux du compact : nous allons le montrer dans le cas particulier où $p = \frac{4}{3}$. Supposons en effet qu'il n'y ait pas

d'autres points extrémaux : alors tous les multiplicateurs λ du compact seraient tels que $|\lambda(\gamma)| \leqslant (p-1)^{|\gamma|/2}$ pour tout γ. Nous allons donner l'exemple, dans le cas où $p = 4/3$, d'un multiplicateur qui ne satisfait pas à cette inégalité : considérons la suite $\lambda(\gamma)$ égale à 1 si $\gamma = 0$, à t si $\gamma \in \Gamma_2$, à 0 dans les autres cas. C'est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^{4/3}(D^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^2(D^\infty)$ de norme 1 si, pour tout polynôme f à spectre dans Γ_2 :

$$\|1 + tf\|_4 \leqslant (1 + \|f\|_2^2)^2,$$

ou encore en développant :

$$1 + 6t^2\|f\|_2^2 + 4t^3\|f\|_3^3 + t^4\|f\|_4^4 \leqslant 1 + 2\|f\|_2^2 + \|f\|_2^4.$$

Or au cours de la démonstration du théorème 6, chapitre 2, on a obtenu pour un Γ_2-polynôme la majoration précise $\|f\|_4^4 \leqslant 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \|f\|_2^4$, d'où l'on déduit par interpolation

$$\|f\|_3^3 \leqslant \sqrt{6}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \|f\|_2^3.$$

On vérifie alors que, si $t = 2^{1/2}.3^{-5/4}$, $\lambda(\gamma)$ est un multiplicateur de norme 1. Or $2^{1/2}.3^{-5/4} > 3^{-1}$, valeur de $(p-1)^{|\gamma|/2}$ si $p = 4/3$, $|\gamma| = 2$.

Application du théorème 2 à T^∞.

On sait, grâce au théorème 2, que si $\lambda(n)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(T)$ dans $\mathcal{F}L^q(T)$ de norme égale à 1 et tel que $\lambda(0) = 1$, la suite $\nu(\gamma)$ sur $\Sigma\mathbf{Z}$, définie par

$$\nu((n_i)_{i=1}^\infty) = \prod_{i=1}^\infty \nu(n_i),$$

est encore un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(T^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^q(T^\infty)$ de norme égale à 1. Habituellement on ne connaît malheureusement pas explicitement la norme d'un multiplicateur. L'emploi du théorème 2 en sera limité.

Nous avons pu toutefois trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les suites $\lambda(n)$ telles que $\lambda(0) = 1$, $\lambda(1) = \lambda(-1) = r$, $\lambda(n) = 0$ si $|n| > 1$ soient des multi-

plicateurs de $\mathcal{F}L^2(T)$ dans $\mathcal{F}L^q(T)$, et en déduire le théorème :

THÉORÈME 4. — *la fonction* λ_r *définie sur* ΣZ *par les deux conditions :*

— $\lambda_r((n_i)_{i=1}^{\infty}) = 0$ *si l'un des* n_i *n'appartient pas à* $\{-1, 0, 1\}$

— $\lambda_r((n_i)_{i=1}^{\infty}) = r^{\Sigma|n_i|}$ *sinon*

est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^2(T^\infty)$ *dans* $\mathcal{F}L^q(T^\infty)$ *si et seulement si* $(q-1)r^2 \leqslant 1$.

Si $r \leqslant \frac{1}{2}$, λ_r est la suite des coefficients de Fourier du produit de Riesz

$$(1 + 2r\cos x_1)(1 + 2r\cos x_2) \ldots (1 + 2r\cos x_n) \ldots$$

Même si $r > \frac{1}{2}$, on pourra encore parler de produit de Riesz, celui-ci ne définissant plus une mesure positive comme dans le cas $r \leqslant \frac{1}{2}$ mais un convoluteur de $L^2(T^\infty)$ dans $L^q(T^\infty)$, si $(q-1)r^2 \leqslant 1$.

En utilisant le théorème 2 et le lemme 2, on montre que λ_r est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^2(T^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^q(T^\infty)$ si et seulement si, quels que soient a et b réels :

$$\left(\int_0^{2\pi} |a + br\cos x|^q \frac{dx}{2\pi}\right)^{1/q} \leqslant \left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right)^{1/2}.$$

On peut même supposer a et b positifs, et $a > b$: en effet, dans cette hypothèse, pour tout x,

$$|b + ar\cos x| < a + br\cos x.$$

On veut donc montrer que :

$$\int_0^{2\pi} (1 + ur\cos x)^q \frac{dx}{2\pi} \leqslant \left(1 + \frac{u^2}{2}\right)^{q/2}$$

pour tout $u \in [0, 1]$, si et seulement si $(q-1)r^2 \leqslant 1$.

Posons

$$f(u) = \left(\int_0^{2\pi} (1 + ur\cos x)^q \frac{dx}{2\pi}\right)^{1/q} \left(1 + \frac{u^2}{2}\right)^{-1/2}.$$

$f'(u)$ est du signe de :

$$g(u) = r\int_0^{2\pi}(1 + ur\cos x)^{q-1}\cos x\,dx - \frac{u}{2}\int_0^{2\pi}(1 + ur\cos x)^{q-1}\,dx.$$

$$g'(u) = (q-1)r^2\int_0^{2\pi}(1 + ur\cos x)^{q-2}\cos^2 x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + ur\cos)\,x^{q-1}\,dx - (q-1)\frac{ur}{2}\int_0^{2\pi}(1 + ur\cos x)^{q-2}\cos x\,dx.$$

Pour que $f(u) \leqslant 1$ si $u \in [0, 1]$, il est nécessaire que f soit décroissante au voisinage de l'origine, donc g négative, donc encore g' négative. Or $g'(u) = [(q-1)r^2 - 1]\Pi + o(u)$, il est donc nécessaire que $(q-1)r^2 \leqslant 1$. Pour que $g'(u)$ soit négative, il suffit que pour tout $\rho \in [0, 1]$ et $\alpha > 0$:

$$I(\alpha, \rho) = \int_{-\pi}^{\pi}(1 + \rho\cos x)^{\alpha}[1 + (\alpha+2)\rho\cos x - 2\cos^2 x]\,dx \geqslant 0.$$

Montrons donc cette inégalité :
Supposons tout d'abord $\alpha < 1$: une intégration par parties donne encore :

$$I(\alpha, \rho) = \alpha\rho\int_{-\pi}^{\pi}(1 + \rho\cos x)^{\alpha-1}[(\alpha+2)\rho - \cos x]\sin^2 x\,dx.$$

Or $(\alpha+2)\rho - \cos x$ est négatif dans un intervalle $[-\theta, +\theta]$, avec $\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ et

$$\int_{-\theta}^{\theta}(1 + \rho\cos x)^{\alpha-1}(\cos x - (\alpha+2)\rho)\sin^2 x\,dx \leqslant \int_{\pi-\theta}^{\pi+\theta}(1 + \rho\cos x)^{\alpha-1}((\alpha+2)\rho - \cos x)\sin^2 x\,dx,$$

ce dernier membre étant encore égal à

$$\int_{-\theta}^{\theta}(1 - \rho\cos x)^{\alpha-1}((\alpha+2)\rho + \cos x)\sin^2 x\,dx :$$

on utilise les deux inégalités évidentes

$$(1 + \rho\cos x)^{\alpha-1} \leqslant (1 - \rho\cos x)^{\alpha-1},$$
$$\cos x - (\alpha+2)\rho \leqslant \cos x + (\alpha+2)\rho.$$

Donc, si $\alpha < 1$, $I(\alpha, \rho) \geqslant 0$. Supposons maintenant $\alpha \geqslant 1$, et dérivons $I(\alpha, \rho)$ par rapport à ρ :

$$J(\alpha, \rho) = \frac{\partial I}{\partial \rho}(\alpha, \rho)$$
$$= \int_0^{2\pi} (1 + \rho \cos x)^{\alpha-1} \cos x[2\alpha + 2 - (\alpha + 2)(\alpha + 1)\rho \cos x - 2\cos^2 x]\, dx.$$

Le crochet est cette fois négatif lorsque x appartient à un intervalle $[\pi - \theta, \pi + \theta]$, $\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. La fonction à intégrer est donc négative dans chacun des intervalles $\left[\frac{\pi}{2}, \pi - \theta\right]$, $\left[\pi + \theta, \frac{3\pi}{2}\right]$. Un raisonnement analogue au précédent faisant intervenir les intervalles symétriques du cercle trigonométrique permettra de conclure que $J(\alpha, \rho)$ est positif, et donc $I(\alpha, \rho) \geqslant 0$.

COROLLAIRE 1. — *Soit* $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$: *la fonction* λ_r *est un multiplicateur de* $\mathcal{F}L^p(T^\infty)$ *dans* $\mathcal{F}L^q(T^\infty)$ *si et seulement si* $(q - 1)r^2 \leqslant p - 1$.

Par dualité, on déduit en effet du théorème 4 que λ_r est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(T^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^2(T^\infty)$ si et seulement si $r^2 \leqslant p - 1$. Soit alors $p < 2 < q$: si r satisfait à l'inégalité $(q - 1)r^2 \leqslant p - 1$, $r = r_1 r_2$, avec $r_1^2 \leqslant p - 1$, $(q - 1)r_2^2 \leqslant 1$. Donc $\lambda_r = \lambda_{r_1}\lambda_{r_2}$ envoie $\mathcal{F}L^p(T^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^q(T^\infty)$. Réciproquement, si λ_r est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(T^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^q(T^\infty)$, quel que soit $u \in [0, 1]$ l'inégalité $\left(\int (1 + ur \cos x)^q\, dx\right)^{1/q} \leqslant \left(\int (1 + u \cos x)^p\, dx\right)^{1/p}$ est réalisée. Un développement limité des deux membres montre que nécessairement $(q - 1)r^2 \leqslant p - 1$.

Remarque. — Le théorème 4 est beaucoup moins complet que son analogue sur D^∞, le théorème 3 : c'est seulement dans le cas où $p \leqslant 2 \leqslant q$ qu'il permet d'affirmer que le produit de Riesz $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2r \cos x_n)$ envoie, par convolution, $L^p(T^\infty)$ dans $L^q(T^\infty)$ si et seulement si $(q - 1)r^2 \leqslant p - 1$. On ne peut, d'ailleurs, espérer généraliser ce résultat à d'autres valeurs de p et q : on peut montrer, du moins, que λ_1

n'est pas un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(T^\infty)$ dans lui-même, quel que soit $p \neq 2$: sinon, quel que soit $u \in [0, 1]$, l'inégalité :

$$\int (1 + \cos x)^p \, dx \leqslant (1 + \cos x + u \cos 2x)^p \, dx$$

serait satisfaite. Or le second membre est égal à

$$\int (1 + \cos x)^p \, dx + pu \int \cos 2x(1 + \cos x)^{p-1} \, dx + uo(u),$$

et $\int \cos 2x(1 + \cos x)^{p-1} \, dx$ est différent de 0 si $p \neq 2$. L'inégalité n'est donc pas satisfaite pour un choix convenable de u.

Les analogues des mesures μ_r dans le cas de T^∞ sont peut-être, plutôt que les produits de Riesz considérés, les produits $\prod_{i=1}^{\infty} P_r(x_i)$, où P_r est le noyau de Poisson, $P_r(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{inx}$: ces produits définissent des mesures positives de masse totale 1, qui, cette fois, forment un semi-groupe. Nous n'avons su, malheureusement, calculer la norme de P_r en tant que multiplicateur, de manière à pouvoir utiliser le théorème 2. Les seuls résultats que nous possédons ont été obtenus à partir des résultats combinatoires du chapitre précédent :

THÉORÈME 5. — (1) *Soit q un entier pair.* P_r *désigne le noyau de Poisson,* $P_r(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{inx}$. *La convolution avec la mesure* ν_r *définie par le produit de Riesz* $\prod_{i=1}^{\infty} P_r(x_i)$ *envoie* $L^2(T^\infty)$ *dans* $L^q(T^\infty)$ *si et seulement si* $(q - 1)r^2 \leqslant 1$.

(2) *Soit q un entier pair, p son exposant conjugué. L'inégalité* $\sum_n |\hat{f}(n)|^2 r^{2|n|} \leqslant \|f\|_p^2$ *est réalisée pour tout polynôme f si et seulement si* $(q - 1)r^2 \leqslant 1$.

D'après le théorème 2, (1) et (2) sont équivalents. Les coefficients de Fourier de ν_r sont donnés par $\hat{\nu}_r((n_i)_{i=1}^{\infty}) = r^{\sum |n_i|}$. Or du théorème 7 du chapitre 2 on déduit, par dualité, que, si p est l'exposant conjugué de q et si f est un polynôme sur T^∞,

$$\sum_{\gamma \in U_k} |\hat{f}(\gamma)|^2 \leqslant (q - 1)^k \|f\|_p^2,$$

donc, quel que soit r tel que $(q-1)r^2 < 1$,

$$\sum_k r^{2k} \sum_{\gamma \in U_k} |\hat{f}(\gamma)|^2 \leqslant (\Sigma(q-1)^k r^{2k}) \|f\|_p^2.$$

C'est dire que, quel que soit r tel que $(q-1)r^2 < 1$, la convolution avec ν_r envoie $L^2(T^\infty)$ dans $L^q(T^\infty)$. Donc, grâce au théorème 2, pour tout polynôme f sur T,

$$\Sigma|\hat{f}(n)|^2 r^{2|n|} \leqslant \|f\|_p^2.$$

Mais, par continuité, cette inégalité est encore vraie si $(q-1)r^2 = 1$.

Il reste à montrer que la condition $(q-1)r^2 \leqslant 1$ est nécessaire : cela résulte de l'étude faite lors de la démonstration du théorème 4.

Le même raisonnement permet de déduire du théorème 4 du chapitre 2 le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — (1) *Soit q un entier pair. La fonction δ_r définie sur $\Sigma\mathbf{Z}$ par $\delta_r((n_i)_{i=1}^\infty) = 0$ si l'un des n_i est négatif, $\delta_r((n_i)_{i=1}^\infty) = r^{\Sigma n_i}$ sinon, est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^2(T^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^q(T^\infty)$ si et seulement si $r^2 \leqslant \frac{2}{q}$.*

(2) *Soit q un entier pair, p son exposant conjugué. L'inégalité $\sum_{n \geqslant 0} |\hat{f}(n)|^2 r^{2n} \leqslant \|f\|_p^2$ est réalisée pour tout polynôme f si et seulement si $r^2 \leqslant \frac{2}{q}$.*

Là encore (1) et (2) sont équivalents, et on déduit du théorème 4, chapitre 2, la condition suffisante comme dans la démonstration précédente. Pour montrer que la condition $r^2 \leqslant \frac{2}{q}$ est nécessaire, il suffit de remarquer que si la suite égale à 0 pour $n < 0$, à r^n pour $n \geqslant 0$, est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^2(T)$ dans $\mathcal{F}L^q(T)$ de norme égale à 1, alors, pour tout $u \in [0, 1]$, l'inégalité $\|1 + \mathrm{rue}^{ix}\|_q^2 \leqslant 1 + u^2$ est réalisée. Or, lorsque u tend vers 0,

$$\|1 + \mathrm{rue}^{ix}\|_q^2 = 1 + \frac{q}{2} r^2 u^2 + u^2 o(u).$$

Donc $r^2 \leqslant \frac{2}{q}$.

Remarque. — Les théorèmes 5 et 6 montrent la précision des théorèmes 4 et 7 obtenus au chapitre précédent grâce à des méthodes combinatoires. Toutefois les résultats décrits ne sont valables que lorsque l'exposant q est un entier pair, et les méthodes utilisées ne peuvent pas laisser espérer d'extension à tout réel q supérieur à 2. D'autre part les méthodes d'interpolation classiques sont insuffisantes pour passer du cas où q est un entier pair au cas général : considérons par exemple la partie (2) du théorème 5 : elle revient à dire que, si q est un entier pair, l'application qui à une fonction fait correspondre la suite de ses coefficients de Fourier envoie $L^p(T)$ dans l'espace à poids $l^2_{\omega_p}$ où $\omega_p = (p-1)^{|n|/2}$. Or si une méthode d'interpolation fait correspondre au couple L^{p_0}, L^{p_1} l'espace L^p tel que $\frac{1}{p} = \frac{s}{p_0} + \frac{1-s}{p_1}$, elle fera correspondre au couple $l^2_{\omega_{p_0}}$, $l^2_{\omega_{p_1}}$ l'espace à poids l^2_ω, où

$$\omega = (p_0 - 1)^{|n|s/2}(p_1 - 1)^{|n|(1-s)/2}$$

et on ne peut espérer mieux. Pour prouver les théorèmes 6 et 7 dans leur généralité il faudrait donc d'autres méthodes de démonstration.

Le théorème suivant est une conséquence du théorème 6.

U désigne le sous-ensemble de $\Sigma\mathbf{Z}$ formé des suites $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ telles que, pour tout i, n_i soit positif ou nul; $I_1(U)$ désigne l'idéal fermé de $L^1(T^\infty)$ formé des fonctions f telles que $\hat{f}(\gamma) = 0$ si γ n'appartient pas à U.

THÉORÈME 7. (1) *la fonction* δ_r *définie sur* U *par* $\delta_r((n_i)_{i=1}^{\infty}) = r^{\Sigma n_i}$ *est un multiplicateur de* $I_1(U)$ *dans* $\mathcal{F}L^2(T^\infty)$ *si et seulement si* $r^2 \leqslant \frac{1}{2}$.

(2) *L'inégalité* $\Sigma|\hat{f}(n)|^2 r^{2n} \leqslant \|f\|_1^2$ *est réalisée pour toute fonction* f *de* $H^1(T)$ *si et seulement si* $r^2 \leqslant \frac{1}{2}$.

Supposons $r^2 \leqslant \frac{1}{2}$ et montrons que, si T est le convoluteur associé au multiplicateur r^n, $\|Tf\|_2 \leqslant \|f\|_1$ pour tout f dans $H^1(T)$. Il suffit même de montrer cette inégalité pour tout f dans $H^1(T)$ tel que $\hat{f}(0) \neq 0$. Alors $f = gh$, où g et h appartiennent à $H^2(T)$ et $\|g\|_2^2 = \|h\|_2^2 = \|f\|_1$. Or

$Tf = (Tg)(Th)$ car, pour tout n :

$$\widehat{Tf}(n) = r^n \sum_m \hat{g}(n-m)\hat{h}(m) = \sum_m (r^{n-m}\hat{g}(n-m)(r^m\hat{h}(m)).$$

Donc $\|Tf\|_2 \leqslant \|Tg\|_4 \|Th\|_4 \leqslant \|g\|_2\|h\|_2 = \|f\|_1$, par application du théorème 6. La nécessité de la condition $r^2 \leqslant \frac{1}{2}$ est obtenue, comme dans le théorème 6, par la considération des fonctions $f(x) = 1 + ue^{ix}$.

Le théorème 2 peut s'adapter de manière à permettre de passer de (2) à (1) : $L^1(T)$ et $L^1(T^\infty)$ sont remplacés respectivement par $H^1(T)$ et $I_1(U)$.

Le théorème 7 admet le corollaire suivant :

Corollaire 1. — *Soit* U_k *le sous-ensemble de* U *formé des suites* $(n_i)_{i=1}^\infty$ *telles que* $\Sigma n_i = k$. *Pour toute fonction* f *appartenant à* $I_1(U)$:

$$\sum_{\gamma \in U_k} |\hat{f}(\gamma)|^2 \leqslant 2^k \|f\|_1^2.$$

Donnons une dernière application du théorème 2 aux ensembles $\Lambda(q)$ dans T^∞, qui est en quelque sorte une généralisation du théorème 4 : du théorème 4 on déduit que le sous-ensemble de $\Sigma\mathbf{Z}$ formé des suites $(n_i)_{i=1}^\infty$ telles que $n_i = 0$, sauf pour k valeurs de i pour lesquelles n_i appartient à $\{-1, 1\}$, est un ensemble $\Lambda(q)$ pour tout q. Dans le théorème suivant, $\{-1, 1\}$ va être remplacé par un ensemble $\Lambda(q)$ symétrique par rapport à 0 quelconque.

Théorème 8. — *Soit* q *un entier pair,* E *un ensemble* $\Lambda(q)$ *d'entiers qui ne contienne pas* 0 *et qui soit symétrique par rapport à* 0 : *alors l'ensemble* E_k *dans* $\Sigma\mathbf{Z}$, *formé des suites* $(n_i)_{i=0}^\infty$ *telles que* $n_i = 0$ *sauf pour* k *valeurs de* i *pour lesquelles* n_i *appartient à* E, *est* $\Lambda(q)$.

Il suffit de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout polynôme f réel à spectre dans E :

$$\int (1 + rf)^q \, dx \leqslant (1 + \|f\|_2^2)^{q/2}.$$

Développons le premier membre de l'inégalité : tenant compte de ce que E est $\Lambda(q)$ et ne contient pas 0, on en obtient un

majorant de la forme $\sum_{n=0}^{q/2} A_n r^{2n} \|f\|_2^{2n}$, qui, grâce à un choix convenable de r, peut être majoré par $(1 + \|f\|_2^2)^{q/2}$.

C'est dire que la suite $\lambda(n)$ définie par $\lambda(0) = 1$, $\lambda(n) = r$ si $n \in E$, $\lambda(n) = 0$ si $n \notin E \cup \{0\}$, est un multiplicateur de norme 1 de $\mathcal{F}L^2(T)$ dans $\mathcal{F}L^q(T)$. On applique alors le théorème 2, et on fait agir le multiplicateur correspondant de $\Sigma\mathbf{Z}$ sur les fonctions à spectre dans E_k.

Étude des produits de Riesz sur T.

Soit t_n une suite lacunaire d'entiers, $t_{n+1} \geqslant 3t_n$. Grâce à l'étude précédente, nous allons pouvoir préciser les propriétés régularisantes des produits de Riesz $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2r \cos t_n x)$. Dans le cas général, un argument de théorie de la mesure, déjà utilisé au chapitre 2, nous permettra de donner des conditions suffisantes pour qu'un tel produit de Riesz envoie, par convolution, $L^2(T)$ dans $L^q(T)$. Lorsque la suite t_n est suffisamment lacunaire, la considération des isomorphismes entre idéaux fermés de $L^q(T)$ et $L^q(T^\infty)$ étudiés au chapitre 1 nous permettra de donner des conditions nécessaires et suffisantes.

COROLLAIRE 2. — *Soit t_n une suite lacunaire d'entiers, $t_{n+1} \geqslant 3t_n$, et r un nombre réel compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. La mesure μ_r, définie par le produit de Riesz $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2r \cos t_n x)$, envoie, par convolution, $L^2(T)$ dans $L^q(T)$ si $4(q-1)r^2 \leqslant 1$.*

Soit $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ dans T^∞, et ν_y la mesure sur T définie par le produit de Riesz $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \cos(y_n + t_n x))$. Quel que soit le polynôme f sur T et y dans T^∞ : $\|f * \mu_r\|_q \leqslant \|f * \mu_r * \nu_y\|_q$. Élevons chaque membre de cette inégalité à la puissance qième, et intégrons par rapport à y : $f * \mu_r * \nu_y\, x$, considéré comme fonction de y, est un polynôme sur T^∞ admettant pour coefficient de Fourier en $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ la quantité

$$\hat{f}(\Sigma n_j t_j)(2r)^{\Sigma|n_j|} e^{i\Sigma n_j t_j x}$$

si, pour tout j, n_j appartient à $\{-1, 0, 1\}$, 0 sinon. Sa norme dans $L^q(T^\infty)$ est donc majorée par $(\Sigma|\hat{f}(\Sigma n_j t_j)|^2)^{1/2} \leqslant \|f\|_2$ grâce à la condition $4(q-1)r^2 \leqslant 1$, et au théorème 4.

THÉORÈME 9. — *Soient t_n une suite lacunaire d'entiers, $t_{n+1} \leqslant 3t_n$, et q un réel supérieur à 2. On suppose que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

(1) *q est un entier pair, et, pour tout n, $t_{n+1} > (q+1)t_n$.*

(2) *la série $\Sigma(t_n/t_{n+1})$ est convergente.*

Alors la suite $\xi_r(n)$ définie par :

— $\xi_r(n) = 0$ si n ne peut pas s'écrire sous la forme $\Sigma\varepsilon_j t_j$, $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$

— $\xi_r(n) = r^{\Sigma|\varepsilon_j|}$ si $n = \Sigma\varepsilon_j t_j$

est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^2(T)$ dans $\mathcal{F}L^q(T)$ si et seulement si $(q-1)r^2 \leqslant 1$.

A toute fonction f à spectre dans l'ensemble

$$\{n = \Sigma\varepsilon_j t_j,\ \varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}\},$$

on peut faire correspondre la fonction $\tilde{f}$ sur T^∞, à spectre dans l'ensemble $\{(n_j)_{j=1}^\infty;\ n_j \in \{-1, 0, 1\}\}$ définie par $\hat{\tilde{f}}((\varepsilon_j)_{j=1}^\infty) = \hat{f}(\Sigma\varepsilon_j t_j)$. D'après les théorèmes 2 et 3 du chapitre 1, si la suite t_n et le réel q vérifient l'une ou l'autre des conditions (1) et (2), il existe une constante A telle que pour toute fonction f: $\|f\|_q \leqslant A\|\tilde{f}\|_{L^q(T^\infty)}$, et $\|\tilde{f}\|_{L^q(T^\infty)} \leqslant A\|f\|_q$.

Soit alors f un polynôme sur T, et F défini par :

$$\hat{F}(n) = \xi_r(n)\hat{f}(n)$$

pour tout n. La fonction $\tilde{F}$ n'est autre que l'image par le multiplicateur λ_r, défini dans le théorème 4, de la fonction $\tilde{f}$. D'après le théorème 4, si $(q-1)r^2 \leqslant 1$, $\|\tilde{F}\|_{L^q(T^\infty)} \leqslant \|f\|_{L^2(T^\infty)}$, et donc $\|F\|_q \leqslant A\|f\|_q$: $\xi_r(n)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^2(T)$ dans $\mathcal{F}L^q(T)$.

Supposons réciproquement que $\xi_r(n)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^2(T)$ dans $\mathcal{F}L^q(T)$: il existe une constante B telle que, pour tout polynôme f, $\|F\|_q \leqslant B\|f\|_2$. On a alors :

$$\|\tilde{F}\|_{L^q(T^\infty)} \leqslant \|\tilde{f}\|_{L^2(T^\infty)} :$$

c'est dire que λ_r, défini dans le théorème 4, est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^2(T^\infty)$ dans $\mathcal{F}L^q(T^\infty)$. On a nécessairement : $(q-1)r^2 \leqslant 1$. Ceci termine la démonstration.

CHAPITRE IV

ENSEMBLES $\Lambda(q)$ ET CONVERGENCE PRESQUE PARTOUT

Soit λ_n une suite lacunaire d'entiers, telle que $\lambda_{n+1} \geqslant 3\lambda_n$. Nous avons montré, dans les chapitres précédents, que la suite k-lacunaire associée, formée des entiers qui s'écrivent sous la forme $\pm \lambda_{n_1} \pm \lambda_{n_2} \ldots \pm \lambda_{n_k}$, $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$, possède, du point de vue de l'analyse harmonique, des propriétés voisines de celles de la suite λ_n. Nous nous proposons, dans ce chapitre, de montrer que les suites k-lacunaires jouissent d'une dernière propriété des suites lacunaires : toute série k-lacunaire qui converge sur un ensemble de mesure positive est la série de Fourier d'une fonction de $L^2(T)$. Nous verrons que d'autres ensembles $\Lambda(4)$ jouissent de la même propriété, et nous examinerons le cas de groupes autres que le tore. La matière de ce chapitre, qui doit beaucoup à la contribution de M. Yves Meyer, a déjà fait l'objet d'une note aux comptes-rendus commune [2]. On trouvera tout ce qui concerne le cas classique des séries lacunaires dans [9], p. 204.

DÉFINITION. — *Soit* G *un groupe compact abélien,* Γ *son dual,* Λ *un sous-ensemble de* Γ, E *un sous-ensemble de* G *de mesure positive. On dit que* E *est associé à* Λ *s'il existe une constante* η *telle que, pour tout polynôme* f *à spectre dans* Λ, *on ait* $\|f\|_2^2 \leqslant \eta^2 \int_E |f|^2 \, dx$.

Montrons tout de suite l'existence, dans tout groupe discret, d'ensembles possédant des ensembles de mesure positive associés :

THÉORÈME 1. — *Si* Λ *est un ensemble* $\Lambda(q)$ *dans* Γ $(q > 2)$, *il existe une constante positive* $\varepsilon < 1$ *telle que tout sous-ensemble* E *de mesure supérieure à* $1 - \varepsilon$ *soit associé à* Λ.

Λ étant $\Lambda(q)$, il existe une constante A telle que, pour tout polynôme f à spectre dans Λ, $\|f\|_q \leqslant A\|f\|_2$. Grâce à l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\complement E} |f|^2\,dx \leqslant \left(\int_{\complement E} dx\right)^{q-2|q} \left(\int |f|^q\,dx\right)^{2/q} \leqslant A^2(\text{mes } \complement E)^{q-2/q}\|f\|_q^2.$$

Il suffit donc de choisir ε tel que $A^2\varepsilon^{q-2/q} < 1$.

Le lemme suivant relève de la même démonstration :

LEMME 1. — *Si* Λ *est un ensemble* $\Lambda(q)$ *dans* Γ $(q > 2)$, *et possède l'ensemble* E *pour ensemble associé, il existe une constante positive* ε *telle que tout ensemble* F *contenu dans* E, *satisfaisant à l'hypothèse* $\text{mes}(E\setminus F) \leqslant \varepsilon$, *soit encore associé à* Λ.

Là encore, soit f un polynôme à spectre dans Λ. Si F est contenu dans E,

$$\int_{E\setminus F} |f|^2\,dx \leqslant A^2[\text{mes}(E\setminus F)]^{q-2/q} \int |f|^2\,dx$$
$$\leqslant A^2\eta^2[\text{mes}(E\setminus F)]^{q-2/q} \int_E |f|^2\,dx.$$

Il suffit de choisir ε tel que $A^2\eta^2\varepsilon^{q-2/q} < 1$.

Le théorème suivant a pour but de montrer, dans le cas général, les rapports entre la notion d'ensemble associé et la convergence presque partout.

Soit G un groupe compact abélien, Γ son dual qu'on supposera dénombrable, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ une énumération des éléments de Γ. Soit T une suite double β_i^n, qu'on supposera posséder les propriétés suivantes :

(i) Pour tout i, $\beta_i^0 = 1$.

(ii) Pour tout n, β_i^n tend vers 1.

On dira que la série $\Sigma a_n(x, \gamma_n)$ est T-sommable au point x, si d'une part, pour tout i, $\sigma_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\beta_i^n(x, \gamma_n)$ est convergent, d'autre part $\sigma_i(x)$ tend vers une limite lorsque i tend vers l'infini. Si G est le tore, et si l'ordre pris sur les entiers est l'ordre $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$, la notion de T-sommabilité est alors la notion de T*-sommabilité habituelle ([9], p. 204). De même, si $G = D^\infty$, et si, lorsque $n = \Sigma\varepsilon_i 2^i$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ $\gamma_n = \Sigma\varepsilon_i e_i$, la T-sommabilité est également la

notion de T*-sommabilité habituelle des séries de Fourier-Walsh.

THÉORÈME 2. — *Soit* Λ *un ensemble* $\Lambda(q)$ $(q > 2)$ *dans* Γ *supposé dénombrable,* E *un ensemble de mesure positive associé à* Λ : *si la série* $\Sigma a_n(x, \gamma_n)$ *a son spectre contenu dans* Λ, *et est* T*-sommable sur* E, *alors* $\Sigma|a_n|^2$ *est fini.*

Nous ne ferons pas la démonstration, reposant sur le lemme 1, qui est tout à fait semblable à la démonstration de [9], p. 205, utilisée pour passer du lemme 6-5 au théorème 6-4.

THÉORÈME 3. — Γ *étant un groupe dénombrable, soit* Λ *un ensemble* $\Lambda(4)$ *d'entiers dans* Γ *vérifiant la propriété suivante : quelle que soit la partie finie* Γ_0 *de* Γ, *il existe une partie finie* Λ_0 *de* Λ *telle que, pour tous* γ *et* γ' *appartenant à* $\Lambda \setminus \Lambda_0$, $\gamma - \gamma'$ *n'appartienne pas à* Γ_0 : *alors, quel que soit l'ensemble* E *de mesure positive dans* G, *il existe une partie finie* Λ_0 *de* Λ *telle que* $\Lambda \setminus \Lambda_0$ *admette* E *pour ensemble associé.*

Soit f une fonction à spectre dans Λ, E un ensemble de mesure positive : $\int_E |f|^2\,dx = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{g}(\gamma)\hat{\chi}_E(-\gamma)$, si $g = |f|^2$, χ_E est la fonction caractéristique de E. Comme

$$\hat{g}(\gamma) = \sum_{\delta\in\Lambda} \hat{f}(\delta)\overline{\hat{f}(\delta - \gamma)},\ \hat{g}(\gamma)$$

est non nul seulement si γ s'écrit comme différence de deux éléments de Λ, $\gamma \in \Lambda - \Lambda$. D'autre part,

$$\hat{g}(0) = \Sigma|\hat{f}(\delta)|^2 = \|f\|_2^2.$$

$$\int_E |f|^2\,dx = \|f\|_2^2(\text{mes E}) + \sum_{\substack{\gamma\neq 0\\ \gamma\in\Lambda-\Lambda}} \hat{g}(\gamma)\hat{\chi}_E(-\gamma).$$

Or ce dernier terme est, grâce à l'inégalité de Schwarz, majoré en module par

$$(\Sigma|\hat{g}(\gamma)|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{\gamma\neq 0\\ \gamma\in\Lambda-\Lambda}} |\hat{\chi}_E(-\gamma)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque Λ est $\Lambda(4)$, $(\Sigma|\hat{g}(\gamma)|^2)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_4^2 \leqslant A^2\|f\|_2^2$. D'autre part, grâce à l'hypothèse, et comme χ_E est dans $L^2(G)$,

il est possible, en enlevant à Λ un nombre fini de termes Λ_0, ne dépendant que de E, de rendre $\left(\sum_{\substack{\gamma\neq 0\\ \gamma\in\Lambda-\Lambda}} |\hat{\chi}_E(\gamma)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ inférieur à $A^{-2}(\text{mes E})/2$. On a alors la majoration :

$$\int_E |f|^2\,dx \geqslant (\text{mes E})/2 \int |f|^2\,dx.$$

Le chapitre 2 donne des exemples d'ensembles $\Lambda(4)$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.

COROLLAIRE 1. — *Si Λ satisfait aux hypothèses du théorème* 3, *toute série $\Sigma a_n(x, \gamma_n)$, à spectre dans Λ, qui est T-sommable sur un ensemble de mesure positive, est la série de Fourier d'une fonction de* $L^2(G)$.

La T-sommabilité, non plus que la convergence de $\Sigma|a_n|^2$, ne dépendent évidemment pas d'un nombre fini de facteurs.

La question se pose naturellement, grâce au théorème 3, de savoir si, lorsque Λ possède E pour ensemble associé, et Λ_0 est une partie finie de Γ, $\Lambda \cup \Lambda_0$ possède encore E pour ensemble associé.

THÉORÈME 4. — *Soit Λ un ensemble $\Lambda(q)$ dans $\Gamma(q > 2)$, admettant* E *pour ensemble associé : si Λ_0 est une partie finie de Γ, $\Lambda \cup \Lambda_0$ admet encore* E *pour ensemble associé si et seulement si il n'existe pas de polynôme, à spectre dans $\Lambda \cup \Lambda_0$, s'annulant presque partout sur* E.

Cette condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante, en nous restreignant au cas où Λ_0 est réduit à un élément de Γ, $\Lambda_0 = \{\lambda_0\}$: le cas général s'en déduit aisément.

Appelons $L^2(E)$ l'espace de Banach des fonctions f telles que $\int_E |f|^2\,dx < \infty$, $L^2_\Lambda(G)$ l'espace de Banach des fonctions de L^2 à spectre dans Λ, $L^2_\Lambda(E)$ l'ensemble des restrictions à E des fonctions de $L^2_\Lambda(G)$: puisque E est associé à Λ, $L^2_\Lambda(E)$ est fermé dans $L^2(E)$. Définissons de même $L^2_{\Lambda\cup\{\lambda_0\}}(G)$, $L^2_{\Lambda\cup\{\lambda_0\}}(E)$: $L^2_{\Lambda\cup\{\lambda_0\}}(E)$, qui possède $L^2_\Lambda(E)$, sous-espace fermé de $L^2(E)$, comme sous-espace de codimension 1, est lui-même fermé dans $L^2(E)$. Si donc l'application continue de $L^2_{\Lambda\cup\{\lambda_0\}}(G)$ dans $L^2_{\Lambda\cup\{\lambda_0\}}(E)$, qui à toute fonction fait correspondre sa restriction à E, est injective, d'après un théorème de

Banach ([3] p. 140), cette application est bicontinue : c'est dire que E est associé à $\Lambda \cup \{\lambda_0\}$.

Soit donc f dans $L^2_{\Lambda\cup\{\lambda_0\}}(G)$: $f(x) = a_0(x, \lambda_0) + g(x)$, où $g(x)$ est à spectre dans Λ. Il s'agit de montrer que, d'après les hypothèses sur E, si f est nul sur E presque partout, f est identiquement nul. Considérons la fonction

$$f(x + h) - (h, \lambda_0)f(x) = \Sigma \hat{g}(\gamma)[(h, \gamma) - (h, \lambda_0)](x, \gamma).$$

C'est une fonction à spectre dans Λ, qui s'annule sur l'ensemble $E_h = E \cap (E - h)$. Or, si χ est la fonction caractéristique de E, $\text{mes}(E \setminus E_h) \leqslant \int_0^{2\pi} |\chi(x + h) - \chi(x)|\, dx$. Donc $\text{mes}(E \setminus E_h) \leqslant \varepsilon$ si h appartient à un voisinage de l'origine suffisamment petit, et, d'après le lemme 1, E_h est alors associé à Λ. La fonction $f(x + h) - (h, \lambda_0)f(x)$, qui s'annule sur E_h, est identiquement nulle : pour tout $\gamma \in \Lambda$,

$$\hat{g}(\gamma)[(h, \gamma - \lambda_0) - 1] = 0$$

quel que soit h dans un voisinage de l'origine. Mais un tel voisinage contient un voisinage de la forme ([7], p. 31)

$$V = \{h \in G; |1 - (h, \gamma_i)| \leqslant \varepsilon \quad \text{si} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Donc $(h, \gamma - \lambda_0) \equiv 1$, identiquement, dans V pour un nombre fini au plus d'éléments $\gamma \in \Lambda$. Donc f est un polynôme à spectre dans $\Lambda \cup \{\lambda_0\}$: d'après l'hypothèse, f est identiquement nul.

Corollaire 2. — *On suppose* G *connexe : alors, si* Λ *est un ensemble* $\Lambda(q)$ $(q > 2)$, *admettant* E *pour ensemble associé, pour toute partie finie* Λ_0 *de* Γ, $\Lambda \cup \Lambda_0$ *admet encore* E *pour ensemble associé.*

Il suffit de reprendre la démonstration précédente : le polynôme f, qui est tel que $f(x + h) - (h, \lambda_0)f(x)$ soit nul dès que h appartient à un voisinage de l'origine, s'annule sur un ensemble non vide à la fois ouvert et fermé, et est donc identiquement nul.

Nous avons démontré en même temps que tout polynôme sur un groupe G connexe s'annule sur un ensemble de mesure nulle.

Le corollaire 2 s'applique en particulier au cas où G est l'un des groupes T ou T^∞.

THÉORÈME 5. — *Si* $\lambda_{n+1} \geqslant 3\lambda_n$, *la suite k-lacunaire formée des entiers qui s'écrivent sous la forme* $\Sigma\varepsilon_n\lambda_n$, *où* $\varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$, $\Sigma|\varepsilon_n| = k$, *admet pour ensemble associé tout ensemble de mesure positive.*

Appelons Λ_k cette suite k-lacunaire. Soit E un ensemble de mesure positive. Nous allons montrer, par récurrence, que E est associé à Λ_k : c'est évidemment vrai pour Λ_0. Supposons donc que E est associé à Λ_{k-1}, et montrons, ce qui est suffisant d'après le théorème 4, que E est alors associé à un ensemble Λ'_k, différant de Λ_k par un nombre fini de termes : on prendra pour Λ'_k l'ensemble des entiers qui s'écrivent sous la forme $\Sigma\varepsilon_n\lambda_n$, où $\varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$, $\Sigma|\varepsilon_n| = k$ et $\sum_1^N |\varepsilon_n| < k$, ou encore $\pm\lambda_{n_1} \pm \lambda_{n_2} \ldots \pm \lambda_{n_k}$, avec $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$ et $n_1 > N$. Tout polynôme f à spectre dans Λ'_k s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n>N} [g_n(x)e^{i\lambda_n x} + h_n(x)e^{-i\lambda_n x}],$$

où g_n et h_n ont leur spectre dans l'ensemble des entiers qui s'écrivent $\sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j\lambda_j$, avec $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$ et $\Sigma|\varepsilon_j| = k - 1$. Les spectres de g_n et h_n sont donc contenus dans Λ_{k-1}. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une constante η telle que, quel que soit φ à spectre dans Λ_{k-1},

$$\int_E |\varphi|^2\,dx \geqslant \eta^2 \int |\varphi|^2\,dx.$$

Donc :

$$\int_E \Sigma(|g_n|^2 + |h_n|^2)\,dx \geqslant \eta^2 \int \Sigma(|g_n|^2 + |h_n|^2)\,dx = \eta^2 \int |f|^2\,dx.$$

Soit alors $F(x) = |f(x)|^2 - \Sigma(|g_n|^2 + |h_n|^2)$, et soit K le spectre de F. Comme dans la démonstration du théorème 3, on fait les majorations suivantes :

$$\left|\int_E F\,dx\right| = |\Sigma\hat{F}(n)\hat{\chi}_E(-n)| \leqslant (\Sigma|\hat{F}(n)|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\in K} |\hat{\chi}_E(-n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme Λ_k est un ensemble $\Lambda(4)$, il existe A, indépendante de f, telle que

$$(\Sigma|\hat{F}(n)|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|f\|_4^2 \leqslant A^2\|f\|_2^2.$$

Or il existe N_0 tel que, puisque χ_E appartient à L^2,

$$\left(\sum_{|n|>N_0} |\hat{\chi}_E(-n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant A^{-2}\eta^2/2,$$

et le spectre K de F, dont les éléments sont minorés en module par $\lambda_N - 2\lambda_{N-1} - \cdots - 2\lambda_{N-k+1} - \lambda_{N-k}$, peut être rendu, par un choix convenable de N, extérieur à $[-N_0, N_0]$: si $\lambda_{n+1} \geqslant 3\lambda_n$, la quantité $\lambda_N - 2\lambda_{N-1} - 2\lambda_{N-2} - \cdots - \lambda_{N-k}$ tend vers l'infini avec N. Finalement, N étant ainsi choisi, $\int_E |f|^2\,dx \geqslant \eta^2/2 \int_E |f|^2\,dx$.

COROLLAIRE 3. — *Toute série k-lacunaire, qui est T-sommable sur un ensemble de mesure positive, est la série de Fourier d'une fonction de* L^2.

THÉORÈME 6. — *Soit* N_k *le sous-ensemble de* $\Sigma\mathbf{Z}$ *formé des suites* $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ *telles que* $\Sigma|n_i| = k$: *quel que soit* k, N_k *admet pour ensemble associé tout ensemble de mesure positive.*

Nous ne ferons pas la démonstration, tout à fait analogue à celle du théorème 5.

Il est naturel de chercher, de la même manière, quels sont les ensembles E de D^∞ associés aux ensembles Γ_k de $\Sigma\mathbf{Z}(2)$ formés des suites $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, telles que $\Sigma\varepsilon_i = k$. Comme D^∞ est totalement discontinu, cette fois tous les ensembles de mesure positive ne conviennent pas : les polynômes s'annulent sur des ensembles de mesure positive.

Appelons intervalle dyadique dans D^∞, par analogie avec la représentation classique de D^∞ par $[0, 1]$, tout ensemble I de D^∞ défini par :

$$I = \{w \in D^\infty;\ (w, e_i) = w_i,\ i = 1, 2, \ldots, N\},$$

N, $w_1, w_2, \ldots, w_N$ étant donnés.

THÉORÈME 7. — *Soit* E *un sous-ensemble de* D^∞ *tel que son intersection avec tout intervalle dyadique soit de mesure positive* : E *est alors associé à* Γ_k *quel que soit* k.

La condition sur E est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'existe pas de polynôme s'annulant presque partout sur E : l'ensemble des zéros d'un polynôme est une réunion finie d'intervalles dyadiques, et réciproquement toute réunion finie d'intervalles dyadiques est contenue dans

l'ensemble des zéros d'un polynôme. Dès lors, on peut appliquer le théorème 4, et la démonstration suit celle du théorème 5. Comme D^∞ possède un nombre dénombrable d'intervalles dyadiques, il est aisé de construire des ensembles satisfaisant aux hypothèses du théorème, et de mesure arbitrairement petite : ε étant donné, on peut l'écrire $\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n > 0$. On choisit alors un ensemble de mesure inférieure à ε_n dans le nième intervalle dyadique, et on prend pour E la réunion de tous ces ensembles : la mesure de E est bien inférieure à ε.

Remarque. — *a*) Il n'est pas nécessaire, pour k donné, que E ne soit pas contenu (à un ensemble de mesure nulle près) dans l'ensemble des zéros de tous les polynômes : il suffit qu'aucun polynôme à spectre dans l'un des Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, ne s'annule presque partout sur E. En particulier, pour que E soit associé à l'ensemble formé des éléments de la base canonique, Γ_1, il faut et il suffit qu'aucun polynôme $\sum_{i=1}^{N} a_i(x, e_{n_i})$ ne s'annule presque partout sur E. Or, si un tel polynôme est nul sur l'ensemble défini par $(x, e_{n_i}) = x_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, N$, il est non nul sur l'ensemble $(x, e_{n_1}) = x_1$, $(x, e_{n_i}) = -x_i$ pour $i = 2, \ldots, N$. L'ensemble de ses zéros est donc de mesure inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$. Tout ensemble de mesure supérieure à $\frac{1}{2}$ est donc associé à Γ_1. Par contre, il existe des ensembles de mesure $\frac{1}{2}$ qui ne sont pas associés à Γ_1, comme l'ensemble des x tels que $(x, e_{n_1}) = (x, e_{n_2})$.

b) Il existe des séries à spectre dans Γ_2, s'annulant sur un ensemble de mesure positive, et qui ne sont pas les séries de Fourier de fonctions de L^2 : c'est le cas de

$$\sum_{n>2} (x, e_n)[(x, e_1) - (x, e_2)].$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bonami, Ensembles $\Lambda(p)$ dans le dual de D^∞, *Ann. Inst. Fourier*, tome 18, fascicule 2, p. 193.

[2] A. Bonami et Y. Meyer, Propriétés de convergence de certaines séries trigonométriques, *C.R. Acad. Sc.* Paris, tome 269, p. 68.

[3] J.-P. Kahane et R. Salem, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, *Actualités scientifiques et industrielles* n° 1301, 1962.

[4] Y. Meyer, Endomorphismes des idéaux fermés de $L^1(G)$, Classes de Hardy et Séries lacunaires, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 4e série, tome 1, 1968, p. 499.

[5] R. Rado, A combinatorial theorem on vector spaces, *J. London Math. Soc.*. 37, p. 351.

[6] W. Rudin, Trigonometric series with gaps, *J. of Math. and Mech.*, 9, p. 203.

[7] W. Rudin, Fourier Analysis on groups, Interscience tracts in pure and applied mathematics n° 12, 1962.

[8] M. Schreiber, Fermeture en probabilité des chaos de Wiener, *C.R. Acad. Sci.*, tome 265, p. 859.

[9] A. Zygmund, Trigonometric series, tome 1, Cambridge University Press, 1959.

[10] A. Zygmund, Trigonometric series, tome 2, Cambridge University Press, 1959.

(*Thèse, Fac. Sciences Orsay*, 1970.)

Aline Bonami,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
91-Orsay.