

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

KHELIFA HARZALLAH

Sur une démonstration de la formule de Lévy-Kinchine

Annales de l'institut Fourier, tome 19, n° 2 (1969), p. 527-532

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_2_527_0

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE LEVY-KINCHINE

par Kh. HARZALLAH

Soit Γ un groupe abélien localement compact et G son dual. Soit ψ une fonction réelle définie sur Γ .

DÉFINITION. — La fonction ψ est dite définie négative si elle est continue, symétrique et vérifie :

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^n [\psi(\gamma_i) + \psi(\gamma_j) - \psi(\gamma_i - \gamma_j)] \xi_i \xi_j \geq 0$$

pour tout choix de $n \in \mathbb{N}$, de $\gamma_i \in \Gamma$ et de $\xi_i \in \mathbb{R}$.

Remarques :

1) Il revient au même de dire $\psi(0) \geq 0$ et $e^{-t\psi}$ de type positif pour tout $t > 0$.

2) Lorsque $\psi(0) = 0$ on a :

$$\sqrt{\psi(\gamma + \gamma')} \leq \sqrt{\psi(\gamma)} + \sqrt{\psi(\gamma')}.$$

3) Si ψ_0 est continue et vérifie :

$$2\psi_0(\gamma) + 2\psi_0(\gamma') = \psi_0(\gamma + \gamma') + \psi_0(\gamma - \gamma')$$

alors elle est définie négative, car si on pose

$$\theta(\alpha, \beta) = \psi_0(\alpha) + \psi_0(\beta) - \psi_0(\alpha - \beta)$$

on a

$$mn\theta(\alpha, \beta) = \theta(m\alpha, n\beta) \quad \text{pour} \quad m \text{ et } n \in \mathbb{Z}.$$

4) Si μ est une mesure de Radon sur $G \setminus \{0\}$, positive, symétrique et telle que

$$\psi_1(\gamma) = \frac{1}{2} \int |1 - \gamma|^2 d\mu < \infty \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma$$

alors ψ_1 est définie négative.

Il suffit de démontrer la continuité car ψ_1 vérifie (1).

Or ψ_1 est semi-continue inférieurement; la remarque (2) montre qu'elle est localement bornée.

Donc si φ est une fonction continue sur Γ , symétrique, positive, à support compact et vérifiant $\int \varphi d\gamma = 1$, on a

$$\psi_1(\gamma) = \psi_1 * \varphi(\gamma) - \operatorname{Re} \int (-x, \gamma)(1 - \hat{\varphi}(x)) d\mu(x)$$

et ψ_1 est différence de deux fonctions continues car $\int (1 - \hat{\varphi}) d\mu < \infty$.

THÉORÈME 1. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *La fonction ψ est définie négative.*

(b) *La fonction ψ est continue, symétrique et est telle que*

$\alpha) \psi(0) \geq 0$

$\beta) \psi * \sigma - \psi$ *est de type positif pour toute mesure σ sur Γ , positive, symétrique, à support compact et de masse unité.*

(c) *La fonction ψ se met sous la forme :*

$$\psi(\gamma) = a + \psi_0(\gamma) + \psi_1(\gamma)$$

où $a \in \mathbf{R}^+$ et où ψ_0 et ψ_1 sont définies par les remarques (3) et (4).

De plus la décomposition précédente est unique et on a :

$$\psi_0(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \psi(n\gamma).$$

Démonstration. — On sait déjà que (c) implique (a).

Pour déduire (b) de (a) il suffit d'étudier le cas des fonctions : $1 - e^{-\psi}$. Pour terminer la démonstration supposons $\psi(0) = 0$. (σ et σ' sont des mesures intervenant dans (b)).

Soit μ_σ la mesure ≥ 0 , symétrique, de masse finie sur G définie par

$$\psi * \sigma - \psi = (\mu_\sigma)^\wedge$$

On a :

$$\psi * \sigma * \sigma' - \psi * \sigma' = (\hat{\sigma}'. \mu_{\sigma})^{\wedge}$$

Donc

$$\psi * \sigma + \psi * \sigma' - \psi * \sigma * \sigma' - \psi$$

est transformée de Fourier de $(1 - \hat{\sigma}')\mu_{\sigma}$ et aussi (par symétrie) de

$$(1 - \hat{\sigma})\mu_{\sigma'}.$$

Par un raisonnement classique on peut trouver une mesure symétrique $\mu \geq 0$ sur $G \setminus \{0\}$ telle que

$$\mu_{\sigma} = 1_{[\hat{\sigma}=1]} \cdot \mu_{\sigma} + (1 - \hat{\sigma})\mu$$

où $1_{[\hat{\sigma}=1]}$ désigne la fonction caractéristique de

$$[\hat{\sigma} = 1] = \{x \in G | \hat{\sigma}(x) = 1\}$$

On en déduit :

$$(2) \quad (\psi * \sigma - \psi)(\gamma) = \int (-x, \gamma) 1_{[\hat{\sigma}=1]}(x) d\mu_{\sigma}(x) \\ + \int (-x, \gamma)(1 - \hat{\sigma}(x)) d\mu(x)$$

et

$$(3) \quad \psi * \sigma(0) - \psi * \sigma(\gamma) + \psi(\gamma) \\ = \int (1 - (-x, \gamma)) 1_{[\hat{\sigma}=1]}(x) d\mu_{\sigma}(x) \\ + \int (1 - (-x, \gamma))(1 - \hat{\sigma}(x)) d\mu(x)$$

Prenons $2\sigma = \delta_{\xi} + \delta_{-\xi}$ et $\gamma = 0$ dans (2); on obtient :

$$(4) \quad \psi(\xi) = \alpha(\xi) + \frac{1}{2} \int |1 - \xi|^2 d\mu$$

Où α est une fonction continue à déterminer. Prenons dans (3) la même σ et $\gamma = \xi$. La première intégrale est nulle; donc

$$2\psi(\xi) - \frac{1}{2} \psi(2\xi) = \frac{1}{4} \int |1 - \xi|^4 d\mu$$

En comparant avec (4) il vient $\alpha(2\xi) = 4\alpha(\xi)$.

Prenons enfin dans (3)

$$4\sigma = \delta_{\xi} + \delta_{-\xi} + \delta_{\eta} + \delta_{-\eta}$$

et

$$\gamma = \eta.$$

La première intégrale s'annule car $[\hat{\sigma} = 1] = [\xi = 1] \cap [\eta = 1]$.

La relation (3) prend la forme :

$$4\psi(\eta) - \psi(2\eta) + 2(\psi(\xi) + \psi(\eta)) - \psi(\eta + \xi) - \psi(\eta - \xi) \\ = \frac{1}{2} \int |1 - \eta|^2 \cdot [|1 - \eta|^2 + |1 - \xi|^2] d\mu.$$

En remplaçant ψ par son expression dans (4) et en tenant compte du fait que $\alpha(2\xi) = 4\alpha(\xi)$, on obtient

$$2(\alpha(\xi) + \alpha(\eta)) = \alpha(\xi + \eta) + \alpha(\xi - \eta)$$

car on vérifie sans peine la relation

$$2|1 - \eta|^2 - \frac{1}{2}|1 - \eta^2|^2 + |1 - \xi|^2 \\ + |1 - \eta|^2 - \frac{1}{2}|\xi - \eta|^2 - \frac{1}{2}|\xi - \bar{\eta}|^2 \\ = \frac{1}{2}|1 - \eta|^2 \cdot [|1 - \eta|^2 + |1 - \xi|^2].$$

La propriété (c) du théorème est ainsi établie. Le reste de la démonstration est simple.

Remarque. — Dans le cas des fonctions définies négatives à valeurs complexes, c'est-à-dire des fonctions ψ continues et telles que :

$$\sum_{i,j=1}^n [\psi(\gamma_i) + \overline{\psi(\gamma_j)} - \psi(\gamma_i - \gamma_j)] \xi_i \bar{\xi}_j \geq 0$$

pour tout choix de $n \in \mathbf{N}$, de $\gamma_i \in \Gamma$ et de $\xi_i \in \mathbf{C}$, on a seulement un résultat partiel :

THÉORÈME 2. — Si ψ est définie négative à valeurs dans \mathbf{C} alors il existe

1) une mesure de Radon positive sur $G \setminus \{0\}$ telle que

$$\int |1 - \gamma|^2 d\mu < \infty \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma$$

2) une fonction α continue vérifiant

$$2\alpha(\xi) + 2\alpha(\eta) = \alpha(\xi + \eta) + \alpha(\xi - \eta)$$

telles que

$$\psi * \sigma - \psi = \int \alpha d\sigma + ((1 - \hat{\sigma})\mu)^\wedge$$

pour toute mesure σ sur Γ positive, symétrique à support compact et de masse unité.

De plus α et μ sont uniques et on a :

$$\alpha(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Re} \psi(n\xi).$$

Démonstration. — Comme dans le cas réel on peut définir μ_σ puis μ ; cependant μ_σ et μ ne sont plus nécessairement symétriques. En prenant $2\sigma = \delta_\xi + \delta_{-\xi}$ on obtient :

$$\begin{aligned} (5) \quad \frac{1}{2} [\psi(\gamma + \xi) + \psi(\gamma - \xi)] - \psi(\gamma) \\ = \int (-x, \gamma) 1_{[\hat{\sigma}=1]}(x) d\mu_\sigma(x) \\ + \frac{1}{2} \int (-x, \gamma) |1 - \xi(x)|^2 d\mu(x) \end{aligned}$$

Soit $\alpha(\xi) = \int 1_{[\hat{\sigma}=1]} d\mu_\sigma$ pour $2\sigma = \delta_\xi + \delta_{-\xi}$.

La relation (5) donne :

$$(6) \quad \operatorname{Re} \psi(\xi) = \alpha(\xi) + \frac{1}{2} \int |1 - \xi|^2 d\mu.$$

puis évidemment

$$\alpha(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Re} \psi(n\xi)$$

Mais en comparant la partie réelle de l'égalité (5) avec l'égalité (6) et tenant compte de la forme « quadratique » de α on obtient :

$$\operatorname{Re} \int (-x, \gamma) 1_{[\hat{\sigma}=1]}(x) d\mu_\sigma(x) = \alpha(\xi) \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma$$

donc

$$\int (-x, \gamma) 1_{[\hat{\sigma}=1]}(x) d\mu_\sigma(x) = \alpha(\xi) \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma$$

D'où le résultat en intégrant (5) :

$$\psi * \nu - \psi = \int \alpha d\nu + ((1 - \hat{\nu})\mu)^\wedge$$

où ν est une mesure ≥ 0 , symétrique, à support compact et de masse unité.

Remarques. — 1) Si ψ est bornée on obtient, pour $\psi(0)$ nul,

$$\psi(\xi) = \int (1 - (-x, \xi)) d\mu(x).$$

2) Dans tout ce qui précède la différence $\gamma - \xi$ a désigné, suivant le contexte, soit le caractère $(x, \gamma - \xi) = \gamma(x) \cdot \overline{\xi(x)}$, soit la fonction $\gamma(x) - \xi(x)$.

Manuscrit reçu le 10 juillet 1969.

Kh. HARZALLAH,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Tunis, Tunisie.
