

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LOUIS BOUTET DE MONVEL

## **Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et problèmes aux limites elliptiques**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 19, n° 2 (1969), p. 169-268

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1969\\_\\_19\\_2\\_169\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_2_169_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS ANALYTIQUES ET PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

par **Louis BOUTET de MONVEL** <sup>(1)</sup>

---

Récemment, M. I. Visik et G. I. Eskin ont étudié les problèmes aux limites elliptiques où interviennent des opérateurs pseudo-différentiels (voir [16], [17]) : il s'agit de résoudre le système d'équations intégrales singulières :

$$(I) \quad \int_{\Omega} k(x, x - y) f(y) dy = g(x) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(II)_j \quad \int_{\Omega} k_j(x', x' - y') f_j(y') dy' = g_j(x') \quad \text{dans } \partial\Omega$$

où  $\Omega$  est une variété à bord,  $\partial\Omega$  son bord,  $f$  une fonction inconnue,  $f_j$  les restrictions au bord de certaines dérivées de  $f$ , et les intégrales représentent (par abus de notation) des opérateurs pseudo-différentiels (ou intégraux singuliers).

On trouvera dans le séminaire de L. Hörmander [8] une étude fort intéressante de la régularité au bord des solutions.

Nous nous intéressons ici à l'analyticité des solutions. Pour que le problème se pose raisonnablement, il faut tout d'abord que les opérateurs conservent localement l'analyticité. Ce genre d'opérateur a été étudié dans [3] et [10].

Il faut en outre que les opérateurs vérifient une condition convenable sur le bord (voir [1, 2, 8 et 16] condition (1.4), ainsi que le chapitre I, § 2 du présent article).

Notre méthode consiste à introduire toute une famille d'opérateurs, qui conservent localement l'analyticité, et permettent

<sup>(1)</sup> Part of this work was sponsored by U.S. Army, DA 31 124 ARO D 462.

de construire une parametrix au problème (I), (II)<sub>j</sub>. Nous appelons ces opérateurs respectivement opérateur de Poisson, opérateur trace, et opérateur de Green singulier analytiques. Les premiers servent en gros à décrire les solutions de l'équation homogène associée à (I), et sont étudiés au § 3 du Chap. I. Les seconds (Chap. I, § 4) généralisent les opérateurs qui figurent dans les équations (II)<sub>j</sub>. Les troisièmes (Chap. I, § 5) interviennent par exemple quand on change les conditions limites (II)<sub>j</sub> et servent alors à décrire la variation de la solution.

Ces opérateurs se prêtent en outre à un calcul symbolique (Chap. I, § 6), analogue à celui des opérateurs pseudo-différentiels qui est décrit dans [7 et 9], quoique un peu plus compliqué car il fait intervenir une intégrale.

Dans la deuxième partie de cet article, nous donnons quelques applications. En particulier nous généralisons aux opérateurs pseudo-différentiels les résultats de C. Morrey et L. Nirenberg [11] sur l'analyticité au bord des solutions. Nous y généralisons aussi les constructions de R. T. Seeley [14].

Bon nombre des démonstrations de cet article sont très analogues à celles de [1, 2, 3 ou 10]; aussi les avons-nous souvent abrégées en renvoyant à ces articles. En outre nous nous sommes limités exclusivement aux opérateurs qui conservent localement l'analyticité. Ceci donne lieu à une légère simplification dans la définition des opérateurs, et dans le calcul symbolique. Les modifications à apporter dans le cas où les symboles sont seulement  $C^\infty$  sont décrites très brièvement (et sans preuves) au chap. I, § 8.

Une partie de ce travail a été exposée en décembre 1966, au séminaire d'analyse du Courant Institute, New York University. Une autre partie a été mise au point lors d'un séjour au Mathematics Research center, University of Wisconsin. Que ces deux universités trouvent ici mes remerciements pour leur accueil. Je voudrais aussi remercier M. L. Hörmander pour plusieurs conversations stimulantes sur ce sujet, ainsi que M. L. Schwartz, qui m'a suggéré en premier lieu l'étude faite ici et dans [1, 2].

Je tiens à remercier encore M. J. L. Lions pour plusieurs conversations fructueuses, et M. H. Cartan, qui a accepté de présider le Jury de cette thèse.

## CHAPITRE I

### LES OPÉRATEURS ET LE CALCUL SYMBOLIQUE

#### 0. Notations.

##### 1. *Notations particulières à $R^n$ .*

Afin de ne pas alourdir le langage, nous employons systématiquement le mot « distribution » à la place de « courant d'ordre 0 ».

Si  $f$  est une fonction (ou une distribution) sur  $R^n$ , nous notons  $\hat{f}$  sa transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\xi) = \int \exp ix.\xi f(x) dx.$$

Nous nous servons en outre constamment des définitions suivantes :

(0.1) On appelle distribution pseudo-homogène de degré  $d$  une distribution  $T$  sur  $R^n$ , qui est homogène de degré  $d$  si  $d$  n'est pas entier  $\geq 0$ , ou qui, dans ce dernier cas, se met sous la forme

$$T = f + P(x) \operatorname{Log} |x|$$

où  $f$  est une distribution homogène de degré  $d$ ,  $P$  un polynôme homogène de degré  $d$ .

La transformée de Fourier  $\hat{T}$  de  $T$  est homogène de degré  $-n-d$  en dehors de l'origine (mais n'est pas toujours globalement homogène si  $d$  est entier positif).



Et  $T$  et sa transformée de Fourier  $\hat{T}$  sont simultanément  $C^\infty$ , (resp. analytiques) en dehors de l'origine.

Par ailleurs, soit  $f(t)$  une fonction analytique sur la droite réelle, méromorphe à l'infini. On notera :

(0.2)  $e(f)(t)$  la partie entière de  $f$  :

c'est le polynôme de  $t$  tel que  $f - e(f)$  soit holomorphe, nulle à l'infini.

(0.3)  $h^+(f)$  la partie holomorphe dans le demi-plan  $\text{im } t \leq 0$ , nulle à l'infini, de  $f$  :

Si  $f$  est holomorphe au voisinage de la « couronne » complexe  $|t - iR| \geq R - \varepsilon, |t + iR| \geq R - \varepsilon$ , on a

$$h^+(f)(z) = -1/2i\pi \int_{\Gamma} f(t)/(t - z) dt$$

où  $\Gamma$  est le cercle  $|t - iR| = R - \varepsilon$ , orienté positivement.

Enfin on notera

$$\begin{aligned} (0.4) \quad H^+(f) &= h^+(f) + e(f) \\ h^-(f) &= f - H^+(f) \\ H^-(f) &= f - h^+(f) = h^-(f) + e(f). \end{aligned}$$

Si maintenant  $f$  et  $g$  sont toutes deux holomorphes au voisinage de la « couronne » ci-dessus, on pose :

$$(0.5) \quad \int^+ f(t)g(t) dt = \int_{\Gamma} f(t)g(t) dt.$$

Le résultat ne dépend que de  $h^+(f)$  si  $g$  est holomorphe dans le demi-plan supérieur, et ne dépend que de  $H^-(g)$  si  $f$  est holomorphe dans le demi-plan inférieur.

Si  $f$  et  $g$  sont toutes deux nulles à l'infini,  $\int^+ fg$  est simplement l'intégrale ordinaire du produit  $fg$  sur la droite réelle.

L'intégrale (0.5) se prolonge par continuité à d'autres espaces de fonctions. Par exemple, elle est encore bien définie si  $f$  est comme ci-dessus, et  $g$  est seulement holomorphe dans le demi-plan  $\text{im } t \geq 0$  (c'est le cas si  $g$  est la transformée de Fourier d'une hyper distribution à support dans la demi droite négative, qui ne croît pas trop vite à l'infini).

Elle est aussi bien définie si  $f$  et  $g$  admettent toutes deux un développement asymptotique suivant les puissances entières de  $t$ :

$$f \sim \sum_{n \geq n_0} a_n \bar{t}^n, \quad g \sim \sum_{n \geq n_1} b_n \bar{t}^n \quad \text{pour} \quad t \rightarrow \pm \infty$$

et sont localement intégrables à distance finie.

On notera encore le résultat du prolongement par continuité (quand il existe)  $\int^+ f(t)g(t) dt$ .

2. Dans ce chapitre,  $\bar{\Omega}$  désigne une variété à bord analytique réelle, de bord  $\partial\Omega$ , plongée dans une variété analytique réelle ambiante  $V$  (de même dimension). Nous désignons l'intérieur par  $\Omega$ . Tout au long de l'article,  $\bar{\Omega}$  est supposée connexe, de bord non vide; les énoncés restent bien sûr valables, avec quelques modifications évidentes, dans le cas général <sup>(2)</sup>.

Il sera commode de choisir une fois pour toutes une mesure  $dx$  (resp.  $dx'$ ) sur  $V$  (resp.  $\partial\Omega$ ), et un champ de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial n}$  défini au voisinage de  $\partial\Omega$ , analytique, transverse à  $\partial\Omega$ , et pointant vers l'intérieur de  $\Omega$ . Quitte à multiplier  $\frac{\partial}{\partial n}$  par une fonction analytique au voisinage de  $\partial\Omega$ , on supposera en outre  $dx$  invariante par  $\frac{\partial}{\partial n}$  (ie.  $\frac{\partial}{\partial n}(dx) = 0$ ), et  $dx' = \frac{\partial}{\partial n}(\chi_\Omega dx)$  (où  $\chi_\Omega$  désigne la fonction caractéristique de  $\Omega$  c'est-à-dire 1 dans  $\Omega$  et 0 dans  $V - \Omega$ ). On notera  $x_n$  l'unique fonction nulle sur  $\partial\Omega$ , telle que  $\frac{\partial}{\partial n} x_n = 1$ .

On a donc  $dx = dx' dx_n$  (ie. dans l'isomorphisme local de  $V$  et  $\partial\Omega \times \mathbb{R}$  défini par  $\frac{\partial}{\partial n}$ ,  $dx$  correspond au produit de  $dx'$  et de la mesure de Haar de  $\mathbb{R}$ ).

Enfin on notera  $\delta_{\partial\Omega}$  le courant d'ordre 0:  $\frac{\partial}{\partial n}(\chi_\Omega)$ .

Une fois choisies les mesures  $dx, dx'$ , on identifie comme toujours les distributions (mesures généralisées) et les courants

<sup>(2)</sup> Bien entendu, toutes ces variétés sont supposées paracompactes.

d'ordre 0 (fonctions généralisées) sur  $V$  ou  $\partial\Omega$ . Par exemple  $\delta_{\partial\Omega}$  est identifiée à  $dx'$ .

Aux paragraphes 3, 4 et 5, et pour toutes les questions locales,  $\overline{\Omega}$  est supposée plongée dans le demi-espace  $\overline{R_+^n}$  ( $x_n \geq 0$ ) de  $R^n$ , de façon que le bord  $\partial\Omega$  soit plongé dans le bord  $R^{n-1}$  de  $\overline{R_+^n}$ .  $V$  sera alors un voisinage de  $\overline{\Omega}$  dans  $R^n$ . Et on choisit  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x_n}$ ;  $dx$  et  $dx'$  sont les mesures de Haar habituelles.

Nous noterons  $x = (x', x_n)$  (ou  $y = (y', y_n)$ ) le point courant de  $R^n$ , où  $x' \in R^{n-1}$  est la variable tangentielle, et  $x_n$  la dernière coordonnée (scalaire).  $\xi = (\xi', \xi_n)$  désignera la variable duale.

Nous adoptons les notations classiques (cf. (5), (12)) pour les espaces de fonctions et de distributions. En outre, nous notons  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  (resp.  $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ ) l'espace des fonctions à support compact dans  $\overline{\Omega}$  (resp. sans condition de support) indéfiniment dérivables jusqu'au bord : une telle fonction se prolonge en une fonction  $C^\infty$  sur  $V$ . Si  $f \in \mathcal{E}'(\overline{\Omega})$ , nous notons  $\tilde{f}$  son prolongement par 0 dans  $V - \Omega$  ( $\tilde{f}$  n'est pas en général une fonction  $C^\infty$ ). Ceci permet d'identifier  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  (resp.  $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ ) à un espace de distributions sur  $V$ , à support dans  $\overline{\Omega}$ .

Nous dirons qu'une fonction  $f$  sur  $\Omega$  est analytique jusqu'au bord au voisinage d'un point  $x$  de  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  si elle admet un développement en série de Mac-Laurin convergente au voisinage de ce point : une telle fonction est donc la restriction à  $\Omega$  d'une fonction analytique dans un voisinage de  $x$  dans  $V$ . L'ensemble des fonctions qui sont partout analytiques jusqu'au bord est noté  $\mathcal{H}(\overline{\Omega})$ ; son dual  $\mathcal{H}'(\overline{\Omega})$  est l'espace des fonctionnelles analytiques à support compact dans  $\overline{\Omega}$ ; et comme ci-dessus, on l'identifie à l'espace des hyper-fonctions à support compact dans  $\overline{\Omega}$ . (Pour la définition et les propriétés de celles-ci, nous renvoyons à (20).)

Enfin nous reprenons à L. Hörmander [8] la notation suivante.

(0.6) Si  $m$  est entier positif,  $\mathcal{E}_m(\overline{\Omega})$  désigne le sous-espace des fonctions nulles à l'ordre  $m$  sur  $\partial\Omega$  de  $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ .

Si  $m$  est entier négatif,  $\mathcal{E}_m(\overline{\Omega})$  désigne l'espace des distri-

butions portées par  $\bar{\Omega}$ , qui se représentent par une somme :

$$f = \tilde{f}_0 + \sum_0^{-m-1} g_k \delta_{\partial\Omega}^{(k)}$$

où  $f_0 \in \mathcal{E}(\bar{\Omega})$ ,  $\tilde{f}_0$  désigne son prolongement par 0,  $\delta_{\partial\Omega}^{(k)} = \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^k \delta_{\partial\Omega}$ , et  $g_k$  est  $C^\infty$  au voisinage de  $\partial\Omega$ .

Dans tous les cas, on considérera  $\mathcal{E}_m(\bar{\Omega})$  comme un espace de distributions portées par  $\bar{\Omega}$ .

On définit de même  $\mathcal{D}_m(\bar{\Omega})$  (sous-espace des distributions à support compact de  $\mathcal{E}_m(\bar{\Omega})$ ), et  $\mathcal{H}_m(\bar{\Omega})$  (on impose aux fonctions qui interviennent dans la définition ci-dessus d'être analytiques).

Tous ces espaces sont munis de topologies, de façon évidente.

Si  $m < m'$ , l'espace quotient  $\mathcal{E}_m(\bar{\Omega})/\mathcal{E}_{m'}(\bar{\Omega})$  s'identifie à  $[\mathcal{E}(\partial\Omega)]^{m'-m}$ , de façon canonique une fois qu'on a choisi  $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)$  : l'isomorphisme inverse associe à la suite  $f_k$

$m \leq k < m'$  la distribution  $\sum_{-m}^{-1} f_k \delta_{\partial\Omega}^{(k-1)} + \sum_0^{m'-1} f_k \frac{x_n^k}{k!}$ .

## 1. Les opérateurs négligeables analytiques.

Nous commençons par décrire une classe d'opérateurs qui apparaissent comme restes, ou opérateurs de symbole nul, dans la théorie.

**DÉFINITION 1.1.** — Un opérateur  $R: \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{E}(\bar{\Omega})$  est appelé négligeable, analytique, de classe  $\leq p$  s'il s'écrit sous la forme :

$$Rf(x) = \int_{\Omega} r(x, y)f(y) dy + \sum_0^{p-1} \int_{\partial\Omega} r_j(x, y') \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j f(y') dy'$$

où  $r$  et les  $r_j$  sont analytiques jusqu'au bord par rapport à l'ensemble des deux variables.

On dira que  $R$  est pur, de classe  $\leq p$ , si dans l'expression ci-dessus interviennent seulement des intégrales sur le bord.

Ceci ne dépend évidemment pas du champ  $\frac{\partial}{\partial n}$  et des mesures  $dy, dy'$  choisis.

On définit de façon analogue les opérateurs négligeables analytiques de  $\overline{\Omega}$  à  $\partial\Omega$ , de  $\partial\Omega$  à  $\overline{\Omega}$ , et sur  $\partial\Omega$  ce sont les opérateurs qui se mettent respectivement sous la forme

$$Rf(x') = \int_{\Omega} r(x', y)f(y) dy + \sum_0^{p-1} \int_{\partial\Omega} r_j(x', y') \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j f(y') dy'$$

$$Rf(x) = \int_{\partial\Omega} r(x, y')f(y') dy'$$

$$Rf(x') = \int_{\partial\Omega} r(x', y')f(y') dy'$$

où  $r$  et les  $r_j$  sont analytiques, jusqu'au bord s'il y a lieu.

Dans le premier cas, nous dirons encore que  $R$  est de classe  $\leq p$ .

Remarquons que si  $R$  est de classe 0, il se prolonge continûment aux hyperdistributions (fonctionnelles analytiques réelles) à support compact dans  $\overline{\Omega}$  (ou  $\partial\Omega$  pour les opérateurs qui vont de  $\partial\Omega$  à  $\overline{\Omega}$  ou  $\partial\Omega$ ). Un opérateur de classe  $p \neq 0$  se prolonge seulement aux fonctions de classe  $p$  au voisinage du bord.

*Exemple 1.* — On suppose  $\overline{\Omega}$  compacte.

Soit  $E \subset \mathcal{H}(\overline{\Omega})$  un sous-espace de dimension finie. Si  $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  annule  $E^\perp$ , alors  $R$  est négligeable analytique de classe 0, car son noyau-distribution est égal à

$$\sum Rf_i(x)\overline{f_i(y)} dy$$

si  $f_i$  est une base orthogonale de  $E$  (pour la mesure  $dy$ ).

En particulier le projecteur orthogonal sur  $E$ ; le projecteur sur  $E'$  parallèlement à  $E$  (si  $E$  et  $E'$  ont même dimension, et  $E \cap E' = \{0\}$ ) sont négligeables analytiques de classe 0.

*Remarque.* — Si  $\overline{\Omega}$  est connexe, de bord non vide, il existe aussi des projecteurs sur  $E$  qui sont purs, de classe  $p$  pour  $p$  assez grand (parce que si  $E$  est de dimension finie, pour  $p$  assez grand, une fonction  $f \in E$  qui s'annule à l'ordre  $p$  sur  $\partial\Omega$  est nulle).

Si  $\bar{\Omega}$  est compacte, et si  $R$  est un opérateur négligeable analytique, c'est un opérateur compact pratiquement sur tous les espaces où il opère. Son image se compose de fonctions analytiques jusqu'au bord.

Si  $R$  et  $R'$  sont négligeables analytiques, il en est de même de  $R + R'$  et  $R \circ R'$ . En outre,  $R \circ R'$  est de classe  $p$  en même temps que  $R'$ .

Le noyau de  $(1 - R)$  est de dimension finie, et les fonctions qu'il contient sont analytiques jusqu'au bord. L'image de  $(1 - R)$  est fermée, de codimension finie égale à la dimension du noyau, et possède un supplémentaire topologique composé de fonctions analytiques jusqu'au bord.

*Exemple 2.* — On suppose toujours  $\bar{\Omega}$  compacte. Si  $R$  est négligeable analytique, de classe  $p$ , il existe  $R'$ , négligeable analytique, de classe  $p$ , tel que  $(1 + R')(1 - R)$  soit un projecteur sur l'image de  $(1 - R)^n$  (dès que  $n$  est assez grand pour que cette image ne contienne pas le noyau de  $(1 - R)$ ) (resp. ou  $(1 - R)(1 + R')$  soit un projecteur sur l'image de  $(1 - R)$ ).

*Preuve.* — Posons

$$\begin{aligned} E &= \mathcal{H}(\bar{\Omega}) \oplus \mathcal{H}(\partial\Omega)^p \\ E' &= \mathcal{H}'(\bar{\Omega}) \oplus \mathcal{H}'(\partial\Omega)^p \end{aligned}$$

si  $f \in \mathcal{H}(\bar{\Omega})$ , et si  $f_k = \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^k f / \partial\Omega$  désigne la trace sur  $\partial\Omega$  de la  $k$ -ième dérivée normale de  $f$ , posons

$$\tilde{f} = (f, f_0, f_1, \dots, f_{p-1}) \in E$$

(dans les quelques lignes qui suivent,  $\tilde{f}$  ne désignera pas le prolongement de  $f$  par 0 hors de  $\Omega$  comme dans le reste de l'article).

On identifie  $E$  à un sous-espace de  $E'$  grâce aux mesures  $dx, dx'$ . L'application  $f \rightarrow \tilde{f}$  est un isomorphisme sur un sous-espace  $\mathcal{H}$  de  $E$ , partout dense dans  $E'$ .

Associons à  $R$  l'opérateur  $\tilde{R} \in L(E) \cap L(E')$  défini par

$$\tilde{R}(\varphi, \varphi_0, \dots, \varphi_{p-1}) = \tilde{g}$$

où

$$g = \int_{\Omega} r(x, y) \varphi(y) dy + \sum_0^{p-1} \int_{\partial\Omega} r_j(x, y') \varphi_j(y') dy'$$

( $r$  et les  $r_j$  sont ceux de la définition 1.1).

$\tilde{R}$  est donc le prolongement de  $R$  à  $E'$  par continuité si on identifie  $\mathcal{H}(\overline{\Omega})$  à  $\tilde{\mathcal{H}}$ .

Remarquons qu'un opérateur  $\tilde{A} \in L(E')$  provient par ce procédé d'un opérateur  $A$ , négligeable analytique de classe  $\leq p$  si et seulement si  $A(E') \subset \tilde{\mathcal{H}}$  (car le noyau distribution de  $A$  est alors nécessairement une matrice de fonctions analytiques jusqu'au bord, et la restriction de  $\tilde{A}$  à  $\tilde{\mathcal{H}}$  provient donc d'un opérateur négligeable analytique de classe  $p$ ).

Le noyau de  $(1 - \tilde{R})$  dans  $E'$  est un sous-espace de dimension finie de  $\tilde{\mathcal{H}}$ .

*Premier cas.* — Supposons ce noyau nul.  $(1 - \tilde{R})$  a alors un inverse  $(1 + \tilde{R}')$ , qui opère continûment dans  $E$ ,  $E'$  et  $\tilde{\mathcal{H}}$  (puisque ces trois espaces sont stables par  $(1 - \tilde{R})$ , et que le théorème du graphe fermé y est vrai). En outre, on a

$$\tilde{R}' = \tilde{R}(1 + \tilde{R}')$$

donc l'image de  $\tilde{R}'$  est contenue dans  $\tilde{\mathcal{H}}$ , ce qui prouve que  $\tilde{R}'$  est bien associé à un opérateur négligeable analytique de classe  $p$  sur  $\overline{\Omega}$ .

*Cas général.* — Posons

$$\begin{aligned} I_{\infty} &= \cap \operatorname{im} (1 - R)^k \\ N_{\infty} &= \cup \ker (1 - R)^k \end{aligned}$$

On a  $N_{\infty} = \ker (1 - R)^k$  pour  $k$  assez grand, donc  $N_{\infty}$  est un sous-espace de dimension finie de  $\tilde{\mathcal{H}}$ .

De même  $I_{\infty} = \operatorname{im} (1 - R)^k$  pour  $k$  assez grand, et c'est un supplémentaire topologique de  $N_{\infty}$  dans  $E'$ .

De sorte que si on définit  $\tilde{R}_1$  par

$$\tilde{R}_1 = 0 \quad \text{sur} \quad I_{\infty}; \quad 1 - \tilde{R} - \tilde{R}_1 = 1 \quad \text{sur} \quad N_{\infty}$$

$\tilde{R}_1$  est bien associé à un opérateur négligeable analytique de classe  $p$ .

Le premier cas nous montre alors que  $(1 - \tilde{R} - \tilde{R}_1)$  a un inverse  $(1 + \tilde{R}')$ , où  $\tilde{R}'$  est négligeable analytique de classe  $p$ .

Il suffit alors de modifier  $\tilde{R}'$  convenablement sur  $N$  pour avoir le résultat annoncé (l'opérateur qui sert à modifier est nul sur  $I_\infty$ , et prend ses valeurs dans  $N_\infty$ , donc provient lui aussi d'un opérateur négligeable analytique de classe  $p$ ).

## 2. Les opérateurs pseudo-différentiels analytiques de type $\mu$ (d'après L. Hörmander).

1. Les notations sont les mêmes qu'au début du chapitre. Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel analytique, de degré  $d$ , sur la variété  $V$  (voisinage de  $\bar{\Omega}$ ). Nous renvoyons à [3] et [10] pour une étude plus détaillée de ces opérateurs, et nous nous contentons ici d'en rappeler la définition <sup>(3)</sup>:  $P$  est un opérateur pseudo-différentiel au sens de [6] ou [9], dont le noyau-distribution (au sens de (13))  $P(x, y)$  vérifie les conditions suivantes :

a)  $P(x, y)$  est analytique hors de la diagonale  $x = y$  de  $V \times V$ .

b) Pour tout  $x_0 \in V$ , il existe un système de coordonnées analytique au voisinage de  $x_0$  <sup>(4)</sup> dans lequel  $P(x, y)$  se met sous la forme :

$$(2.1) \quad P(x, y) = \sum P_k(x, x - y) + R(x, y)$$

où  $R(x, y)$  est analytique en  $x$  et  $y$ ,  $P_k(x, z)$  est une distribution pseudo-homogène de degré  $-n - d + k$  de  $z$ , analytique pour  $z \neq 0$ , et qui dépend analytiquement de  $x$ .

Dans (2.1) la série converge au sens suivant :

(2.2) Il existe un voisinage complexe  $V_0$  de  $x_0$ , et un nombre  $\varepsilon > 0$ , tels que les termes de la série (2.1) soient tous holomorphes dans le domaine complexe :

$$x \in V_0, \quad |\operatorname{im} z| < \varepsilon |\operatorname{re} z|, \quad |z| < \varepsilon$$

( $\operatorname{im} z$  et  $\operatorname{re} z$  désignent comme d'habitude la partie imagi-

<sup>(3)</sup> Nous suivons ici d'assez près la présentation de W. Margulies [10].

<sup>(4)</sup> Les conditions décrites ne dépendent pas du système de coordonnées choisi.



naire et la partie réelle du vecteur complexe  $z$ ); et la série converge uniformément dans ce domaine.

Les distributions  $P_k(x, z)$  sont bien déterminées par l'opérateur  $P$ , modulo un polynôme homogène de degré  $-n-d+k$ , à coefficients analytiques en  $x$ , si  $-n-d+k$  est entier positif.

Nous appelons alors symbole complet de  $P$  la classe du noyau distribution de  $P$  modulo les fonctions analytiques sur  $V \times V$ .

Si  $V$  est plongée dans l'espace vectoriel  $R^n$  (ou au voisinage d'un point, une fois choisi un système de coordonnées analytiques), on représente le symbole complet par la série formelle :

$$(2.3) \quad \sigma(P) = \sum p_k(x, \xi)$$

où  $p_k(x, \xi)$  est la restriction à l'ouvert  $\xi \neq 0$  de la transformée de Fourier par rapport à  $z$  de la distribution  $P_k(x, z)$  : c'est une fonction analytique, homogène de degré  $d-k$  en  $\xi$ .

Les  $p_k(x, \xi)$  ont en outre la propriété suivante : pour tout  $x_0 \in V$ , il existe un voisinage complexe  $V_0$  de  $x_0$ , et des constantes positives  $\varepsilon, c, A$  tels que les  $p_k(x, \xi)$  soient toutes holomorphes dans le même domaine complexe :

$$x \in V_0, \quad |\operatorname{im} \xi| < \varepsilon |\operatorname{re} \xi|$$

et y vérifient les inégalités

$$(2.4) \quad |p_k(x, \xi)| \leq c A^k k! |\xi|^{d-k}.$$

Le premier terme de la série (2.3),  $p_0(x, \xi)$ , est appelé symbole principal, ou symbole. Il doit s'interpréter comme une fonction sur le fibré cotangent de  $V$ . (Le symbole complet peut aussi se représenter comme section de certains fibrés de jets.)

Remarquons ici que les symboles complets d'opérateurs pseudo-différentiels analytiques sur les ouverts d'une variété analytique réelle  $V$  forment un faisceau sur  $V$ . Autrement dit, si  $V_i$  est un recouvrement ouvert de  $V$ ; si pour tout  $i$  on se donne un opérateur pseudo-différentiel  $P_i$  sur  $V_i$ , de façon que les restrictions à  $V_i \cap V_j$  de  $P_i$  et  $P_j$  aient

même symbole pour tous  $i, j$ , alors il existe un opérateur pseudo-différentiel analytique  $P$  sur  $V$ , qui a même symbole complet que  $P_i$  dans  $V_i$  pour tout  $i$ .

*Preuve.* — On va construire le noyau distribution  $f(x, y)$  de  $P$ . Posons  $\Omega_0 = V \times V - \text{diag } V$ ,  $\Omega_i = V_i \times V_i$ , de sorte que les  $\Omega_i$  forment un recouvrement ouvert de  $V \times V$ .

Posons  $f_0(x, y) = 0$ ; et pour  $i \neq 0$ , soit  $f_i(x, y)$  le noyau-distribution de  $P_i$ : c'est une distribution sur  $\Omega_i$ , analytique dans  $\Omega_i - \text{diag } V_i$ .

Puisque  $P_i$  et  $P_j$  ont même symbole dans  $V_i \cap V_j$ ,

$$f_{ij} = f_i/\Omega_i \cap \Omega_j - f_j/\Omega_i \cap \Omega_j$$

est une fonction analytique dans  $\Omega_i \cap \Omega_j$ . (Aussi quand  $i$  ou  $j$  est nul, puisque de toute façon  $f_i$  est analytique hors de la diagonale de  $V$ .)

La famille  $(f_{ij})$  est une cochaîne alternée associée au recouvrement  $\Omega_i$ , à valeurs dans le faisceau des fonctions analytiques sur  $V \times V$ . C'est même un cocycle (ie.  $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$  dans  $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k$ ) car une fonction analytique est nulle si elle est nulle en tant que distribution.

Or le faisceau des fonctions analytiques réelles est cohomologiquement trivial <sup>(5)</sup>.

En particulier le deuxième groupe de cohomologie  $H^2(V \times V, \mathcal{H})$  est nul. En outre, comme  $V$  est paracompacte, le deuxième groupe de cohomologie est égal au deuxième groupe de cohomologie de Čech (voir R. Godement, Théorie des faisceaux, Hermann, Paris).

Donc il existe un recouvrement  $\Omega'_\alpha$  plus fin que  $\Omega_i$  (c'est-à-dire  $\Omega'_\alpha \subset \Omega_{i(\alpha)}$  pour une application  $\alpha \rightarrow i(\alpha)$  convenable), et des fonctions  $g_\alpha \in \mathcal{H}(\Omega'_\alpha)$  telles que

$$f_{i(\alpha)} - f_{i(\beta)} = g_\alpha - g_\beta \quad \text{dans} \quad \Omega'_\alpha \cap \Omega'_\beta.$$

Cette dernière relation signifie exactement que les distributions  $f_{i(\alpha)} - g_\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega'_\alpha)$  se recollent.

<sup>(5)</sup> Voir H. Cartan, Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 77-99; H. Grauert, On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds, *Ann. Math.* (2), 68 (1958), 460-472; L. Hormander, An introduction to complex analysis in several variables, chap. VII (Van Nostrand).

Soit maintenant  $f(x, y)$  la distribution définie par

$$f(x, y) = f_{i(x)} - g_x \quad \text{dans} \quad \Omega'_x.$$

Il est clair que  $f(x, y)$  est analytique hors de la diagonale de  $V$ , et diffère de  $f_{i(x)}$ , par une fonction analytique au voisinage de tout point  $(x, x) \in \Omega'_x$ :  $f(x, y)$  est le noyau distribution de l'opérateur cherché.

Notons aussi en passant le résultat suivant :

(2.5) Soit  $p_0(x, \xi)$  une fonction analytique sur  $T^*V - \{0\}$  (le fibré cotangent privé de la section nulle), homogène de degré  $d$  en  $\xi$ . Il existe un opérateur pseudo-différentiel analytique  $P$  sur  $V$ , de symbole principal  $p_0$ .

La construction est facile quand  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ : on peut prendre par exemple l'opérateur de noyau distribution  $P(x, x - y) dy$ , où  $P(x, z)$  est la transformée de Fourier inverse par rapport à  $z$  de la distribution  $pf p_0(x, \xi)$  sur  $V \times \mathbb{R}^n$  (la pseudo-fonction ou partie finie  $pf$  est définie comme dans (12)). Dans le cas général, on ne peut malheureusement pas recoller le résultat précédent au moyen d'une partition de l'unité. Voici cependant une autre construction :

soit  $F$  un isomorphisme analytique d'un voisinage de la diagonale  $\text{diag } V$  dans  $V \times V$  sur un voisinage de la section nulle dans  $TV$ , telle que

a)  $F(x, y)$  est un vecteur tangent en  $x$ , et  $F(x, x) = 0$ ;

b)  $y \rightarrow F(x, y)$  a pour application linéaire tangente au point  $(x, x)$  l'identité de  $T_x V$  (il existe des fonctions ayant ces propriétés; par exemple l'inverse de l'application « exponentielle » associée à une connexion sur  $V$ ).

Soit  $P_0(x, z) dz$  la distribution sur  $TV$  transformée de Fourier inverse par rapport à  $z$  de la distribution (courant d'ordre 0)  $pf p_0(x, \xi)$  sur  $T^*V$ ; soit  $P_1(x, y) dy$  l'image de  $P_0(x, z) dz$  par l'inverse de  $F$  (au voisinage de  $\text{diag } V$ ). Soit enfin  $P(x, y) dy$  une distribution sur  $V \times V$ , analytique hors de  $\text{diag } V$ , et telle que  $P - P_1$  soit analytique au voisinage de  $\text{diag } V$  (il en existe, cf. ci-dessus).

Alors l'opérateur  $P$  de noyau distribution  $P(x, y) dy$  est un opérateur pseudo-différentiel analytique de symbole principal  $p_0(x, \xi)$ .

*Preuve.* — Comme de toute façon  $P(x, y) dy$  est analytique hors de  $\text{diag } V$ , il suffit de vérifier que pour tout  $x_0 \in V$ ,  $P_1(x, y) dy$  coïncide au voisinage de  $(x_0, x_0)$  avec le noyau distribution d'un opérateur pseudo-différentiel analytique de symbole principal  $p_0(x, \xi)$  défini au voisinage de  $x_0$ . Pour cela, on peut supposer  $V \subset \mathbb{R}^n$ . On supposera aussi pour simplifier que  $P$  est de degré  $d < -n$ , de sorte que  $P_0(x, z)$  est continue.

La deuxième coordonnée de  $F$  est une fonction  $u(x, y)$ , analytique, égale à  $x - y + O(|x - y|^2)$  près de la diagonale :

$$u(x, y) = x - y + \sum_{|p| \geq 2} a_p(x)(x - y)^p = x - y + r(x, y)$$

où  $r$  est donc de l'ordre de  $|x - y|^2$  au voisinage de  $x = y$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, les  $a_p$  sont holomorphes dans la boule complexe  $|x - x_0| < \varepsilon$ , et la série converge dans le domaine complexe :  $|x - x_0| < \varepsilon, |x - y| < \varepsilon$ .

On a alors, avec  $z = u(x, y)$

$$P_1(x, y) dy = P_0(x, z) dz = P_0(x, x - y + r)|u'_y| dy$$

$|u'_y|$  désigne le déterminant jacobien de la transformation  $y \rightarrow u(x, y)$  : il admet un développement en série convergente dans le domaine ci-dessus :

$$|u'_y| = 1 + \sum_{|p| \geq 1} b_p(x)(x - y)^p.$$

Développons maintenant  $P_0$  en série de Taylor :

$$P_0(x, x - y + r) = P_0(x, x - y) + \sum_{|q| > 0} P^{(q)}(x, x - y)r^q/q!$$

( $P^{(q)}$  désigne ici la dérivée partielle d'ordre  $q$  par rapport à la deuxième variable). La série converge uniformément dans le domaine complexe  $|x - x_0| < \varepsilon, |x - y| < \varepsilon, |\text{im } x - y| < \varepsilon |\text{re } x - y|, |r| < \varepsilon |x - y|$  pour  $\varepsilon$  assez petit.

Or avec la notation ci-dessus, on a  $r(x, y) = O(|x - y|^2)$  donc  $|r(x, y)| < \varepsilon |x - y|$  pour  $|x - y|$  assez petit.

Si on développe enfin  $r^q$  en série entière, on obtient pour  $P_1$  un développement en série de la forme :

$$P_1(x, y) = P_0(x, x - y) + \sum_i c_i(x) P^{(q_i)}(x, x - y)(x - y)^{p_i}$$

Dans la série, chaque terme est pseudo-homogène de degré  $\deg P_0 - |q_i| + |p_i| < \deg P_0$ , parce que  $|u'_y| = 1 + O(x - y)$ ,  $r(x, y) = O(|x - y|^2)$  impliquent qu'on a  $|p_i| \geq 2|q_i|$ , ou  $|p_i| \geq 1$  quand  $q_i = 0$ . En outre le nombre de termes d'un degré donné (ou inférieur à un nombre donné) est fini, et le lecteur vérifiera sans peine que la série uniformément vers  $P_1(x, y)$  dans un domaine complexe de la forme

$$|x - x_0| < \varepsilon, \quad |x - y| < \varepsilon, \quad |\operatorname{im} x - y| < \varepsilon |\operatorname{re} x - y|.$$

Par définition, la somme de la série est le noyau distribution d'un opérateur pseudo-différentiel analytique de degré  $d - 1$ , défini au voisinage de  $x_0$ . De sorte

$$P(x, y) dy = P_0(x, x - y) dy + \dots$$

est bien le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel analytique, de degré  $d$ , de symbole principal  $p_0(x, \xi)$  au voisinage de  $(x_0, x_0)$ .

(Dans le cas où le degré  $d$  est plus grand que  $-n$ , il y a une petite difficulté due aux singularités du noyau distribution sur la diagonale. Le lecteur vérifiera que dans ce cas aussi la série ci-dessus converge au sens des distributions vers le noyau distribution de  $P$  au voisinage de  $(x_0, x_0)$ .)

Finalement rappelons que d'après (3), 2, n° 4, si  $P$  est un opérateur pseudo-différentiel analytique, il admet localement une représentation par intégrale de Fourier (la formule ci-dessous suppose que  $V$  est un voisinage d'un point de  $\mathbb{R}^n$ , par exemple l'origine, et vaut pour les fonctions à support assez voisin de ce point) :

$$(2.6) \quad P(f) = \int_{\mathbb{R}^n} R(x, y) f(y) dy + (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

où  $R(x, y)$  est une fonction analytique de  $(x, y)$ , et  $p(x, \xi)$  est une fonction  $C^\infty$  de  $x$ , sur  $V \times \mathbb{R}^n$ , analytique par rapport à  $x$ , et se prolonge en une fonction holomorphe dans le domaine complexe :

$$x \in V_0, \quad |\operatorname{im} \xi| < \varepsilon |\operatorname{re} \xi|$$

où  $V_0$  est un voisinage complexe de  $x_0$ ,  $\varepsilon > 0$  une constante convenable.

De plus  $p(x, \xi)$  vérifie dans ce domaine les inégalités

$$(2.7) \quad |p(x, \xi) - \sum_0^{N-1} p_k(x, \xi)| \leq cA^N N! |\xi|^{d-N}$$

où  $c, A$  sont des constantes convenables, et les  $p_k$  sont les termes du symbole complet de  $P$ .

Réciproquement, si l'opérateur  $P$  admet la représentation (2.6), où  $p(x, \xi)$  et les  $p_k(x, \xi)$  vérifient les inégalités (2.4), (2.7), c'est un opérateur pseudo-différentiel analytique, de symbole  $\Sigma p_k(x, \xi)$ .

2. Nous en arrivons au but de ce paragraphe :

**DÉFINITION 2.1.** — *Nous dirons (avec L. Hörmander, cf (8)) que  $P$  est de type  $\mu$  si son symbole complet vérifie les conditions*

$$(2.8) \quad p_k(x, -\xi) = e^{(d-k-2\mu)i\pi} p_k(x, \xi) \quad \text{pour tout } k.$$

La formule (2.8) suppose choisi un système de coordonnées analytique, de façon à pouvoir représenter le symbole par une série formelle  $\Sigma p_k(x, \xi)$  au voisinage de  $x$ . Mais la condition ne dépend pas du système choisi (cf. (6) pour les formules de changement de coordonnées). Elle signifie que  $d - 2\mu$  est entier, et que  $p_k(x, \xi)$  de la formule (2.1) a même parité que l'entier  $d - k - 2\mu$  par rapport à  $\xi$ . (La condition de L. Hörmander dans (8) impose seulement que l'égalité ait lieu sur la variété  $x \in \partial\Omega$ ,  $\xi' = 0$ ,  $\xi_n > 0$ , c'est-à-dire sur le fibré cotangent normal intérieur, pour  $p_k$  et toutes ses dérivées; mais ici les fonctions  $p_k(x, \xi)$  sont analytiques.)

Notons aussi que le symbole  $\Sigma p_k(x, \xi)$  est le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel analytique de type  $\mu$  si et seulement si  $\Sigma p_k(x, \xi) |\xi|^{-2\mu}$  est le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel de type 0. Dans le cas  $\mu = 0$ , on voit en développant  $p_k$  en série entière de  $\xi'$  au voisinage du point  $\xi' = 0$ ,  $\xi_n = 1$  que  $p_k$  admet un développement en série convergente dans le domaine complexe  $\xi_n > \frac{1}{\varepsilon} |\varepsilon'|$  (pour  $\varepsilon$  assez petit) :

$$(2.9) \quad p_k(x, \xi) = \sum \frac{1}{\alpha!} p_k^{(\alpha)}(x, \xi', 1) \xi_n^{\alpha} \xi_n^{d-k-|\alpha|}$$

(la condition de symétrie implique que les coefficients sont les mêmes pour  $\xi_n$  positif ou négatif). En particulier on voit que pour  $x$  et  $\xi'$  fixé,  $p_k(x, \xi', \xi_n)$  est une fonction analytique de  $\xi_n$  sur la droite réelle (sauf au point  $\xi_n = 0$  quand  $\xi' = 0$ ), méromorphe à l'infini, avec un pôle d'ordre au plus  $d - k$  à l'infini.

*Exemple.* — Nous allons déterminer les opérateurs pseudo-différentiels analytiques de type 0 à une variable.

**PROPOSITION 2.2.** — *Si  $P$  est un opérateur pseudo-différentiel analytique de type 0, à une variable, il est somme d'un opérateur différentiel à coefficients analytiques et d'un opérateur de degré  $-1$  (et de type 0).*

*Si  $P$  est de degré  $-1$ , son noyau distribution est une fonction  $P(x, y)$  qui coïncide pour  $x \geq y$  (resp.  $x \leq y$ ) avec une fonction  $f_1(x, y)$  (resp.  $f_2(x, y)$ ) analytique au voisinage de l'ensemble fermé  $x \geq y$  (resp.  $x \leq y$ ).*

*Preuve.* — De toute façon, le noyau distribution  $P(x, y)$  est analytique hors de la diagonale  $x = y$ . Et au voisinage de la diagonale, il admet la représentation en série convergente (2.1) :

$$P(x, y) = R(x, y) + \sum P_k(x, x - y).$$

Or la condition de symétrie de la définition 2.1 signifie que  $p_k(x, \xi)$  (dans la notation de la formule (2.3)) est proportionnelle à la puissance entière de  $\xi_n$  :  $\xi_n^{d-k}$ . Elle a la conséquence suivante :

Pour  $d - k \geq 0$ ,  $P_k(x, z)$  est proportionnelle à une dérivée de la masse de Dirac (de  $z$ ) :

$$P_k(x, z) = a_k(x) \delta^{(d-k)}(z)$$

où  $a_k$  est une fonction analytique de  $x$  (il n'y a jamais de terme de la forme  $pfz^{k-d-1}$ ). D'où la première assertion.

Et pour  $d - k < 0$ ,  $P_k(x, z)$  est de la forme :

$$P_k(x, z) = a_k(x)(z^+)^{k-d-1} + b_k(x)(z^-)^{k-d-1}$$

où  $z^+$  (resp.  $z^-$ ) désigne la partie positive (resp. négative) de  $z$ , et les fonctions  $a_k$  et  $b_k$  sont analytiques en  $x$ . (Il n'y a jamais de terme en  $z^{k-d-1} \text{Log } |z|$ .)

Comme la série  $\sum P_k(x, z)$  converge au sens des distributions au voisinage de  $z = 0$  (et même quand  $x$  parcourt un voisinage complexe convenable de l'intervalle de définition de l'opérateur), les deux séries entières

$$\sum_{k \geq \alpha+1} a_k(x) z^{k-d-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq \alpha+1} b_k(x) z^{k-d-1}$$

convergent toutes deux vers des fonctions analytiques de  $x$  et  $z$  au voisinage de  $z = 0$ . D'où la deuxième assertion.

Dans [8], L. Hörmander prouve le résultat suivant : soit  $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  une fonction à support compact dans  $\bar{\Omega}$ ,  $C^\infty$  jusqu'au bord. Désignons comme au début du chapitre par  $x_n$  une fonction positive, analytique, nulle à l'ordre 1 exactement sur le bord (la dernière fonction coordonnée si  $\bar{\Omega}$  est plongée dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^n$ ). Soit  $g$  la distribution  $g = pf(x_n^+)^\mu f$  ( $x_n^+$  désigne la partie positive de  $x_n$ , c'est-à-dire  $x_n$  dans  $\bar{\Omega}$  et 0 dans le reste de  $V$ ; la partie finie, ou pseudo-fonction  $pf$ , est définie comme dans [12]) :  $g$  est donc une distribution sur  $V$ , à support compact dans  $\bar{\Omega}$ .

Ou si  $\mu$  est entier négatif, soit  $g$  une distribution sur  $V$  de la forme :

$$g = f + \sum_{j < -\mu} \left( \frac{\partial}{\partial n} \right)^j (f_j(x') \delta_{\partial\Omega})$$

où  $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ,  $f_j \in \mathcal{D}(\partial\Omega)$  et  $\left( \frac{\partial}{\partial n} \right)^j$  désigne la dérivée d'ordre  $j$  de la distribution  $f_j \delta_{\partial\Omega}$  par rapport au champ  $\frac{\partial}{\partial n}$ .

Alors la restriction à  $\Omega$  de  $P(g)$  est une fonction  $C^\infty$  jusqu'au bord.

Ici, nous allons prouver en outre :

**THÉORÈME 2.3.** — Si  $P$  est analytique, de type  $\mu$ , et si les densités  $f$  (resp. et  $f_j$ ) qui servent à définir la distribution  $g$  ci-dessus sont analytiques jusqu'au bord au voisinage d'un point  $x_0$ , la restriction à  $\bar{\Omega}$  de  $P(g)$  est analytique jusqu'au bord au voisinage de  $x_0$ .

*Preuve.* — Nous commençons par faire plusieurs réductions : remarquons d'abord que le théorème est purement local,



parce que  $P$  conserve localement l'analyticité (cf. [3]) et en particulier  $P(g)$  est analytique en dehors du support de  $g$ . On supposera donc que  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $\bar{\Omega} = V \cap \bar{\mathbb{R}}_+^n$ . On supposera aussi que  $x_0 = 0$  est un point du bord, le cas où il est intérieur résultant immédiatement de [3].

Remarquons ensuite que le composé d'un opérateur pseudo-différentiel de type  $\mu$  et d'un opérateur différentiel à coefficients analytiques est encore un opérateur pseudo-différentiel de type  $\mu$  (le fait que le composé est encore analytique est prouvé dans [3]; et la condition (2.8) est immédiate à vérifier). Quitte alors à diminuer le support de  $g$ , ou à la modifier hors d'un voisinage de  $x_0$ , et à la remplacer par une somme de distributions-dérivées d'ordre assez élevé, on pourra supposer  $\mu > 1$  et  $g$  de la forme

$$g = f\varphi(x_n^+)^{\mu-1} e^{-x_n}$$

où  $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  égale 1 au voisinage de  $x_0$ , et  $f$  est analytique au voisinage du support de  $\varphi$ .

Puis quitte à diminuer  $V$ , on peut supposer  $f$  analytique dans  $V$  tout entier, et même  $f = 1$ , puisque le composé  $P_0 f$  est encore un opérateur pseudo-différentiel analytique de type  $\mu$ .

Nous utilisons alors la représentation intégrale (2.6): le théorème est évident pour le terme résiduel

$$\int R(x, y)g(y) dy$$

qui transforme toute distribution en une fonction analytique.

Il suffit donc de le prouver pour l'intégrale de Fourier.

On peut enfin dans ce cas supposer que le « noyau »  $p(x, \xi)$  ne dépend pas de  $x$ : on passe de là au cas général par une technique de fonctions holomorphes évidente: (2.7) signifie que l'application qui à  $y$  fait correspondre la fonction  $p(y, \xi)$  est holomorphe d'un voisinage de  $x_0$  dans l'espace des fonctions de  $\xi$  qui vérifient les inégalités (2.7); si on note  $P_y$  l'opérateur pseudo-différentiel analytique défini par

$$P_y f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} p(y, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

et si le résultat annoncé est vrai pour les opérateurs de convolution, la fonction des deux variables  $x$  et  $y$ :  $P_y f(x)$  est analytique jusqu'au bord dans  $V \times \overline{\Omega}$ ; en particulier  $Pf(x) = P_x f(x)$  est analytique jusqu'au bord dans  $\overline{\Omega}$ .

En résumé, il suffit de prouver le théorème dans le cas où  $P$  admet la représentation

$$P(g) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} p(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi$$

où  $p$  (et les fonctions  $p_k$  qui lui sont associées) vérifie les conditions (2.4), (2.7), et où  $g$  est la fonction

$$g = \varphi(x_n^+)^{\mu-1} e^{-x_n}.$$

Nous faisons enfin une dernière réduction fondée sur la remarque suivante:  $p(\xi)$  est une fonction holomorphe, à croissance lente à l'infini, dans le cône complexe ouvert:  $|\operatorname{im} \xi| < \varepsilon |\operatorname{re} \xi|$ , et  $C^\infty$  dans la fermeture de ce cône. C'est donc un multiplicateur, et  $P$  est la restriction à  $V$  d'un opérateur de convolution continu:  $\mathcal{G}'(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{G}'(\mathbf{R}^n)$ , que nous noterons encore  $P$ . Exactement,  $P$  est l'opérateur de convolution par la distribution  $P(x)$ , transformée de Fourier inverse de  $p(\xi)$ . Il résulte des conditions vérifiées par  $p$  que dans le complémentaire de l'origine,  $P(x)$  se prolonge en une fonction holomorphe, à décroissance rapide à l'infini dans le cône ouvert  $|\operatorname{im} x| < \varepsilon' |\operatorname{re} x|$  pour  $\varepsilon'$  assez petit ( $\varepsilon' < \inf(\varepsilon, 1)$ , cf. [3]).

Il est immédiat alors de vérifier que si  $T$  est une distribution tempérée,  $P(T) = P(x) * T$  est analytique en dehors du support de  $T$ . En particulier  $P((1 - \varphi)(x_n^+)^{\mu-1})$  est analytique au voisinage de  $x_0$ .

Nous pouvons donc supposer  $\varphi = 1$ . La fonction  $g$  a alors pour transformée de Fourier par rapport à  $x_n$ :

$$\hat{g}(\xi) = \Gamma(\mu)(1 + i\xi_n)^{-\mu}.$$

Définissons maintenant la fonction  $p'(\xi_n)$  par

$$p(0, \xi_n) = (1 + \xi_n^2)^\mu p'(\xi_n).$$

Comme  $P$  est un opérateur de convolution, l'image de  $g$  par  $P$ :  $G = P(g)$  dépend elle aussi de  $x_n$  seul, et a pour

transformée de Fourier par rapport à  $x_n$  :

$$G(\xi_n) = \Gamma(\mu)(1 - i\xi_n)^\mu p'(\xi_n).$$

Dans cette expression, le premier facteur  $\Gamma(\mu)(1 - i\xi_n)^\mu$  est la transformée de Fourier de la distribution

$$f = \Gamma(\mu)\Gamma(-1 - \mu)^{-1} p f(x_n^-)^{-1-\mu} e^{x_n}$$

(ou si  $\mu$  est entier positif,  $f$  est proportionnelle à une dérivée de la mesure de Dirac  $\delta$ ) :  $f$  est donc tempérée (en fait à décroissance rapide), et portée par la demi-droite négative  $x_n \leq 0$ .

On a donc pour  $x_n > 0$

$$(2.10) \quad G(x_n) = \int_0^\infty f(-t) P'(x_n + t) dt$$

(l'intégrale est prise au sens des distributions,  $P'(x)$  désigne la transformée de Fourier inverse de  $p'(\xi)$ ).

Or la réciproque de (2.6), et la définition 2.1 impliquent que l'opérateur de convolution par  $P'$  est un opérateur pseudo-différentiel analytique de type 0, à une variable.  $P'(x_n)$  coïncide donc dans la demi-droite  $x_n > 0$  avec une fonction analytique dans une demi-droite  $x_n > -\varepsilon$  (proposition 2.2).

Comme en outre  $P'(x_n)$  est holomorphe, à décroissance rapide dans tout un cône complexe :  $|\operatorname{im} x_n| < \varepsilon |\operatorname{re} x_n|$ , la formule (2.10) implique que  $G(x_n)$  est analytique jusqu'au bord pour  $x_n > 0$ , et le théorème est démontré.

### 3. Opérateurs de Poisson analytiques.

Ce paragraphe combine les méthodes et les constructions de [2] et de [3] : il s'agit de construire une classe d'opérateurs de Poisson qui conserve localement l'analyticité.

Nous commençons par décrire les distributions « homogènes » qui serviront de noyaux à nos opérateurs.

#### 1. Un exemple fondamental.

Soit  $t$  un nombre complexe de partie réelle positive.

Soit  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$  une fonction sur le bord du demi-espace  $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ .

La solution bornée  $F$  du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \left( t^2 \Delta_{x'} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) F = 0 & \text{pour } x_n > 0 \\ F = f & \text{sur le bord } \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

(où  $\Delta_{x'} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$  désigne le Laplacien sur  $\mathbb{R}^{n-1}$ )  
est donnée par la formule

$$F = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x' - y', x_n) f(y') dy'$$

où  $K(x) = K(x', x_n)$  est le noyau

$$(3.1) \quad K(x) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \pi^{-\frac{n}{2}} t x_n (x'^2 + t^2 x_n^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

$K$  a pour transformée de Fourier partielle par rapport à  $x'$  la fonction

$$(3.2) \quad \hat{K}(\xi', x_n) = \exp - t |\xi'| x_n \quad \text{pour } x_n > 0.$$

Enfin le prolongement de  $K$  par 0 dans le demi-espace  $x_n < 0$  a pour transformée de Fourier globale

$$(3.3) \quad k(\xi) = (t |\xi'| + i \xi_n)^{-1}.$$

## 2. Noyaux de Poisson analytiques élémentaires.

Soit  $K(x) = K(x', x_n)$  une distribution sur  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\hat{K}(\xi', x_n)$  la transformée de Fourier partielle par rapport à  $x'$ , et  $k(\xi)$  la transformée de Fourier globale. Nous nous intéressons aux propriétés suivantes de  $K$  :

(3.4)  $K$  est nulle pour  $x_n < 0$ . C'est une distribution homogène de degré  $-n + 1 - d$ , localement intégrable dans l'ouvert  $x \neq 0$  [Resp. si  $-n + 1 - d$  est entier positif,  $K$  est une fonction, nulle pour  $x_n < 0$ , et qui coïncide dans le demi-espace  $x_n > 0$  avec une fonction pseudo-homogène de degré  $-n + 1 - d$ ]. Et

a)  $K$  est analytique jusqu'au bord pour  $x_n \geq 0$ ,  $x \neq 0$  <sup>(6)</sup>.

b)  $\hat{K}$  est analytique jusqu'au bord pour  $x_n \geq 0$ ,  $\xi' \neq 0$ ,

<sup>(6)</sup> Autrement dit  $K$  coïncide dans le demi-espace  $x_n > 0$  avec une fonction analytique au voisinage de l'ensemble  $x_n \geq 0$ ,  $x \neq 0$ .

localement intégrable dans l'ouvert  $\xi' \neq 0$  (il n'y a pas de couches sur le bord).

DÉFINITION 3.1. — On appelle noyau de Poisson élémentaire de degré  $d$  une distribution  $K$  qui vérifie la condition (3.4)

(3.5)  $k(\xi)$  est analytique, homogène de degré  $d - 1$ , dans l'ouvert  $\xi' \neq 0$ . Et pour  $\xi' \neq 0$  fixé, elle se prolonge en une fonction holomorphe nulle à l'infini de  $\xi_n$  dans le domaine

$$|\xi_n - iR|\xi'| > (R - \varepsilon)|\xi'|$$

où  $R, \varepsilon$  sont des constantes positives convenables.

LEMME 3.2. — 1) Pour une distribution  $K$ , la propriété (3.4) implique la propriété (3.5).

2) Réciproquement, si  $k(\xi)$  est une fonction définie pour  $\xi' \neq 0$ , et qui vérifie (3.5), il existe une distribution  $K$  qui vérifie (3.4), et dont la transformée de Fourier coïncide avec  $k$  pour  $\varepsilon' \neq 0$ . Cette distribution est unique, modulo un « polynôme » de la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq -n+1-d} a_\alpha x'^\alpha (x_n^+)^{-n+1-d-|\alpha|}$$

Si  $d$  est entier et  $d \leq -n + 1$ .

( $x_n^+$  désigne la partie positive de  $x_n$ ).

Remarque à propos de (3.4) et de la définition 3.1 :

Si la dimension  $n$  est paire, la fonction

$$K_1(x) = \begin{cases} \text{Log } |x| & \text{pour } x_n > 0 \\ 0 & \text{pour } x_n < 0 \end{cases}$$

est un noyau de Poisson élémentaire de degré  $-n + 1$ .

Par suite si  $d$  est entier,  $d \leq -n + 1$ , tout noyau de Poisson élémentaire de degré  $d$  s'écrit, d'une seule façon

$$K(x) = K_0(x) + Q(x)K_1(x)$$

où  $K_0$  est un noyau de Poisson élémentaire homogène, et  $Q$  un polynôme homogène.

Le résultat n'est pas vrai en dimension impaire : alors la fonction qui vaut  $\text{Log } |x|$  pour  $x_n > 0$ , et 0 pour  $x_n < 0$

ne vérifie pas (3.4)  $b$  (ou sa transformée de Fourier n'est pas une fonction holomorphe à l'infini de  $\xi_n$ , pour  $\xi' \neq 0$  fixé). On peut dans ce cas remplacer cette fonction par la suivante (notée à nouveau  $K_1$ )

$$K_1(x) = \begin{cases} \text{Log } (x_n + |x|) & \text{pour } x_n > 0 \\ 0 & \text{pour } x_n < 0 \end{cases}$$

et on a bien alors la décomposition ci-dessus.

Dans les deux cas ( $n$  pair ou impair) la transformée de Fourier de  $K_1$  est de la forme

$$k_1(\xi) = \sum_{p=1}^{\frac{n}{2}} a_p |\xi'|^{-n+p} (|\xi'| + i\xi_n)^{-p}$$

pour  $\xi' \neq 0$ .

*Preuve de la première partie du lemme 3.2.*

On va d'abord étudier  $\hat{K}(\xi', x_n)$  pour  $x_n = 1$ .

Du fait que  $K(x', 1)$  est holomorphe dans un domaine complexe de la forme  $|\text{im } x'| < \varepsilon(1 + |\text{re } x'|)$ , et vérifie dans ce domaine une inégalité

$$(3.6) \quad |K(x', 1)| \leq c(1 + |x'|)^a$$

résulte immédiatement que  $\hat{K}(\xi', 1)$  se prolonge en une fonction holomorphe dans un cône complexe  $|\text{im } \xi'| < \varepsilon' |\text{re } \xi'|$ , où elle vérifie l'inégalité

$$(3.7) \quad |\hat{K}(\xi', 1)| \leq c' |\xi'|^\beta \exp(-a|\xi'|)$$

(où  $a, b, c'$  sont des constantes convenables).

Remarquons maintenant que  $K(x)$  admet un développement en série convergente pour  $0 < x_n < \varepsilon|x'|$  :

$$(3.8) \quad K(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p(x') x_n^p$$

où  $\alpha_p(x')$  est homogène de degré  $-n + 1 - d - p$  (sauf si  $-n + 1 - d - p$  est entier positif, auquel cas  $\alpha_p$  comporte éventuellement un terme de la forme  $P(x') \text{Log } |x'|$  où  $P$  est un polynôme homogène).

En outre les  $\alpha_p$  sont holomorphes dans un cône  $|\operatorname{im} x'| < \varepsilon |\operatorname{re} x'|$ , et y vérifient

$$(3.9) \quad |(\alpha_p x')| \leq R^{p+1} |x'|^{-n+1-d-p}$$

pour  $p > -n+1-d$ , si  $\varepsilon$  est assez petit et  $R$  assez grand.

Enfin le reste du développement vérifie une inégalité analogue, dans un domaine complexe analogue :

$$(3.10) \quad |K(x', 1) - \sum_0^{N-1} \alpha_p(x')| \leq R^{p+1} |x'|^{-n+1-d-p}$$

pour  $p > -n+1-d$ .

Soit maintenant  $a_p(\xi')$  la transformée de Fourier de la distribution  $pf\alpha_p(x')$  (où la partie finie  $pf$  est définie comme dans [12]).

Il résulte de (3) § 2, n° 2 que les  $a_p(\xi')$  vérifient dans un cône complexe analogue au cône ci-dessus les inégalités

$$(3.11) \quad |a_p(\xi')| \leq \frac{R'^{p+1}}{p!} |\xi'|^{d+p}.$$

De sorte que la série  $\sum a_p(\xi')$  converge dans ce cône complexe.

En outre, toujours d'après (3) § 2 n° 2, la fonction  $r(\xi') = \hat{K}(\xi', 1) - \sum a_p(\xi')$  est analytique dans tout le plan, et ses dérivées à l'origine vérifient les inégalités

$$(3.12) \quad |p^{(\alpha)}(0)| \leq \frac{R'^{p+1}}{p!}$$

(parce que  $p^{(\alpha)}(0)$  est la valeur à l'origine de la transformée de Fourier du reste :  $x'^\alpha pf \left( K(x', 1) - \sum_0^{N-1} \alpha_p(\xi') \right)$  pourvu qu'on ait  $|\alpha| - n + 1 - d - N < -n + 1$ ).

De sorte que le reste  $r(\xi')$  est une fonction entière, de type exponentiel.

Distinguons maintenant deux cas : supposons d'abord que  $d$  n'est pas entier. Alors, les  $a_p(\xi')$  sont toutes homogènes, et on a

$$(3.13) \quad \hat{K}\left(\lambda \xi', \frac{x_n}{\lambda}\right) = \lambda^d \hat{K}(\xi', x_n).$$

En particulier

$$(3.14) \quad \hat{K}(\xi', x_n) = x_n^{-d} \hat{K}(\xi' x_n, 1) = \sum_0^{\infty} a_p(\xi') x_n^p + x_n^{-d} r(x_n \xi')$$

Pour que  $\hat{K}(\xi', x_n)$  soit analytique jusqu'au bord, il est alors nécessaire que toutes les dérivées de  $r$  s'annulent à l'origine. Donc  $r = 0$ .

Finalement, pour  $\xi'$  fixé, on voit que  $\hat{K}(\xi', x_n)$  est la restriction à la demi droite  $x_n \geq 0$  d'une fonction entière de type exponentiel, à décroissance exponentielle sur la demi-droite  $x_n \geq 0$ .

Et par suite la transformée de Fourier globale  $k(\xi)$  (qui est la transformée de Fourier de  $\hat{K}(\xi', x_n)$  par rapport à  $x_n$ ) est, pour  $\xi' \neq 0$  fixé, holomorphe dans un demi-plan complexe  $\text{im } \xi_n < \varepsilon$ , et aussi holomorphe à l'infini, où elle admet le développement en série convergente :

$$(3.15) \quad k(\xi', \xi_n) = \sum p! a_p(\xi') (i\xi_n)^{-p-1}.$$

Supposons maintenant que  $d$  est entier. Alors on a encore  $\hat{K}\left(\lambda \xi', \frac{x_n}{\lambda}\right) = \lambda^d \hat{K}(\xi', x_n)$ . Mais les  $a_p(\xi')$  ne sont plus nécessairement homogènes. Cependant on a

$$(3.16) \quad a_p(\xi') = b_p(\xi') + Q_p(\xi') \text{Log } |\xi'|$$

où  $b_p$  est homogène (de degré  $d + p$ ),  $Q_p$  est un polynôme homogène, et les  $b_p, Q_p$  vérifient des inégalités analogues aux inégalités (3.11) vérifiées par les  $a_p$ . De sorte qu'on a

$$(3.17) \quad \hat{K}(\xi', x_n) = x_n^{-d} \hat{K}(x_n \xi', 1) = \sum_0^{\infty} b_p(\xi') x_n^p + \text{Log } (x_n |\xi'|) \sum_0^{\infty} Q_p(\xi') x_n^p + x_n^{-d} r(x_n \xi').$$

Cette fois, pour que  $\hat{K}(\xi', x_n)$  soit analytique jusqu'au bord, il est nécessaire que les  $Q_p$  soient tous nuls, et que  $r(\xi')$  soit nul à l'ordre  $d$  à l'origine.

On termine alors la démonstration comme dans le cas où  $d$  est non entier.



On a bien sûr retrouvé en passant les conditions (2.4.1) de [1].

*Preuve de la deuxième partie du lemme 3.2.*

L'assertion d'unicité est immédiate : si la transformée de Fourier  $k$  de  $K$  est nulle pour  $\xi' \neq 0$ ,  $K$  est nécessairement de la forme

$$K = \sum x'^\alpha \varphi_\alpha(x_n)$$

si de plus  $K$  vérifie (3.4),  $\varphi_\alpha(x_n)$  est nécessairement proportionnel à  $(x_n^+)^{-n+1-d-|\alpha|}$ , et l'exposant  $-n+1-d-|\alpha|$  est positif.

Nous supposons maintenant que  $k$  est une fonction définie pour  $\xi' \neq 0$ , qui vérifie (3.5). De la formule de Cauchy, on déduit que  $k$  admet une représentation intégrale :

$$(3.18) \quad k(\xi) = \int_{\gamma} a(\xi', t)(t|\xi'| + i\xi_n)^{-1} dt$$

où on a posé  $a(\xi', t) = -(2i\pi)^{-1}|\xi'|k(\xi', it|\xi'|)$  et où  $\gamma$  est un cercle convenable dans le demi-plan  $\text{ret} > 0$ .

Soit maintenant  $\hat{K}'(\xi', x_n)$  la transformée de Fourier inverse par rapport à  $\xi_n$  de  $k$  (elle est définie pour  $\xi' \neq 0$ ) on a donc (cf. (3.1), (3.2), (3.3))

$$(3.19) \quad \hat{K}'(\xi', x_n) = \begin{cases} \int_{\gamma} a(\xi', t) \exp(-tx_n|\xi'|) dt & \text{si } x_n > 0 \\ 0 & \text{si } x_n < 0 \end{cases}$$

et  $\hat{K}'$  est une fonction localement intégrable en dehors de  $\xi' = 0$  (il n'y a pas de couche sur le bord  $x_n = 0$ ). Ceci prouve déjà que si  $K$  est une distribution sur  $\mathbb{R}^n$ , dont la transformée de Fourier égale  $k$  dans l'ouvert  $\xi' \neq 0$ ,  $K$  vérifie (3.4) b.  $\hat{K}'$  est définie pour  $\xi' \neq 0$ . Pour tout  $x_n$  fixé, elle admet quand  $\xi' \rightarrow 0$  un développement asymptotique en fonctions homogènes de degré  $\geq d$  de  $\xi'$ .

Soit alors  $\hat{K}(\xi', x_n) = pf\hat{K}'(\xi', x_n)$  la distribution partie finie (ou pseudo fonction) associée à  $\hat{K}'$  (cf [12]). Et soit  $K(x) = K(x', x_n)$  la distribution dont  $\hat{K}$  est la transformée de Fourier partielle par rapport à  $x'$ .

(3.20) Nous noterons  $pf^{+k}$  la transformée de Fourier de la distribution  $K$  construite ci-dessus (c'est une distribution sur  $\mathbf{R}^n$ , qui coïncide avec  $k$  pour  $\xi' \neq 0$ , et dépend linéairement de  $k$ ).

Nous allons montrer que la distribution  $K$  convient (autrement dit vérifie (3.4)). Grâce à la représentation intégrale (3.6), il suffira de le faire quand  $k$  est de la forme

$$k(\xi) = a(\xi')(t|\xi'| + i\xi_n)^{-1}$$

où  $a(\xi')$  est analytique, homogène de degré  $d$ , pour  $\xi' \neq 0$ . On a alors

$$(3.21) \quad \hat{K}(\xi', x_n) = \begin{cases} pf[a(\xi') \exp(-t|\xi'|x_n)] & \text{pour } x_n > 0 \\ 0 & \text{pour } x_n < 0 \end{cases}$$

La dérivée  $\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\beta K$  a alors pour transformée de Fourier partielle

$$(3.22) \quad pf[(i\xi')^\alpha (-t|\xi'|)^\beta a(\xi') \exp(-t|\xi'|x_n)] \quad \text{pour } x_n > 0$$

(la dérivation  $\frac{\partial}{\partial x_n}$  commute à la partie finie  $pf$  ci-dessus, dans laquelle  $x_n$  figure en fait comme paramètre).

Prouvons que  $K$  est analytique jusqu'au bord (pour  $x \neq 0$ ): il suffit d'examiner les dérivées d'ordre assez élevé de  $K$ ; aussi peut-on supposer  $d > -n + 1$ . Alors, si on désigne par  $A(x')$  la transformée de Fourier inverse de  $a(\xi')$ , et par  $B(x')$  celle de  $|\xi'|a(\xi')$ , on a

$$(3.23) \quad K(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int t x_n (y'^2 + t^2 x_n^2) A(x' - y') dy'$$

(en fait l'intégrale converge si  $d > -n$ ).

En outre  $K$  vérifie les relations suivantes (c'est la solution d'un problème de Dirichlet):

$$\begin{cases} \left( t^2 \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 \right) K = 0 & \text{pour } x_n \geq 0 \\ K(x', 0) = A(x') \\ \left( \frac{\partial}{\partial x_n} K(x', 0) \right) = -tB(x'). \end{cases}$$

Or (cf. [3], § 1, n° 2)  $A(x')$  et  $B(x')$  sont analytiques et homogènes pour  $x' \neq 0$ , de sorte qu'on déduit immédiatement de ces relations les inégalités

$$(3.24) \quad \left| \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^\beta K(x', +0) \right| \leq c A^{|\alpha|+|\beta|} t^{|\beta|} (|\alpha| + \beta)! |x'|^{-n+1-|\alpha|-|\beta|}$$

où  $c, A$  sont des constantes qui dépendent de  $a(\xi')$ .

(3.23) prouve que  $K(x)$  est analytique dans le demi-espace  $x_n > 0$ ; (3.24) prouve qu'il est analytique jusqu'au bord (pour  $x \neq 0$ ). Et il n'y a aucune difficulté pour intégrer ces résultats le long du cercle  $\gamma$ .

Pour terminer, remarquons que  $K$  est bien localement intégrable dans l'ouvert  $x \neq 0$  (il résulte de (3.19) ou (3.21) qu'il ne peut pas contenir de couche sur le bord  $\mathbb{R}^{n-1}$ ). Enfin si  $d > -n + 1$ , ou si  $d$  n'est pas entier,  $K$  est une distribution homogène; si  $d$  est entier  $\leq -n + 1$ , les dérivées d'ordre assez élevé de  $K$  sont homogènes dans le demi-espace  $x_n > 0$ , de sorte que  $K$  est bien dans ce demi-espace somme d'une fonction homogène et du produit de  $\text{Log}|x|$  par un polynôme homogène.

Ceci termine la démonstration du lemme 3.2.

*Remarque 3.3.* — Les conditions (3.4) et (3.5) sont invariantes par les changements de coordonnées linéaires qui laissent le bord  $\mathbb{R}^{n-1}$  invariant.

*Remarque 3.4.* — Si  $K$  est un noyau de Poisson élémentaire (vérifie 3.4), il en est de même du produit de  $K$  par un polynôme homogène.

Et si  $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  est un opérateur différentiel à coefficients constants, il existe un noyau de Poisson élémentaire et un seul qui coïncide avec  $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)K$  dans le demi-espace  $x_n > 0$ .

*Preuve.* — Seule la dernière assertion n'est pas évidente: L'existence de  $K_1$  résulte immédiatement de la formule (3.22). Pour l'unicité, remarquons que plus généralement un noyau de Poisson élémentaire qui est nul pour  $x_n > 0$  est nul (parce qu'il est nécessairement porté par l'origine, et sa trans-

formée de Fourier partielle est nécessairement portée par la demi-droite  $\xi' = 0$ ).

La transformée de Fourier globale de  $K_1$  est donnée, en dehors de la droite  $\xi' = 0$ , par la formule

$$(3.25) \quad k_1(\xi) = h_{\xi_n}^+ [P(i\xi)k(\xi)]$$

ou  $h^+$  est l'opérateur défini au § 0, (0.3), l'indice  $\xi_n$  signifiant que  $P(i\xi)k(\xi)$  est considéré comme fonction de  $\xi_n$  seul :

$$h_{\xi_n}^+ [P(i\xi)k(\xi)] = - (2i\pi)^{-1} \int_{\gamma} P(i\xi', it)k(\xi', t)(t - \xi_n)^{-1} dt.$$

### 3. Noyaux de Poisson analytiques.

Soit  $K_p(x)$  une suite de noyaux de Poisson élémentaires, de degrés respectifs  $d - p$ . Nous nous intéressons à la propriété suivante de la suite  $K_p$ .

(3.26) *Il existe un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que les  $K_p$  (plus exactement leurs restrictions au demi espace  $x_n > 0$ ) se prolongent toutes en des fonctions holomorphes dans le domaine complexe*

$$\operatorname{re} x_n > -\varepsilon|x|, \quad |\operatorname{im} x| < \varepsilon|\operatorname{re} x|.$$

*Et la série*

$$\sum_0^{\infty} K_p(x)$$

*converge uniformément pour  $|x| < \varepsilon$  dans ce domaine.*

Soit maintenant  $k_p(\xi)$  une suite de fonctions vérifiant la condition (3.5), de degré  $d - 1 - p$ . Nous nous intéressons à la propriété suivante de la suite  $k_p$  :

(3.27) *Il existe quatre constantes positives  $\varepsilon, R, c, A$  telles que les  $k_p(\xi)$  se prolongent toutes en des fonctions holomorphes dans le domaine complexe*

$$|\operatorname{im} \xi'| < \varepsilon|\operatorname{re} \xi'|, \quad |\xi_n - iR|\xi'|| > (R - \varepsilon)|\xi'|$$

*et vérifient dans ce domaine les inégalités*

$$|k_p(\xi)| \leq cA^p p! |\xi'|^{d-p} (|\xi'| + |\xi_n|)^{-1}.$$

Compte tenu de la démonstration du lemme 3.2, on prouve exactement comme dans [3], § 1, n° 2.

LEMME 3.5. — 1) Si la suite  $K_p(x)$  vérifie (3.26), la suite des transformées de Fourier  $k_p(\xi)$  vérifie (3.27).

2) Si la suite  $k_p(\xi)$  vérifie (3.27), et si  $K_p(x)$  a pour transformée de Fourier la distribution  $\text{Pf}^+k_p(\xi)$  (définie ci-dessus formule (3.20)), la suite  $K_p(x)$  vérifie (3.26).

Nous allons maintenant définir les noyaux distribution de nos opérateurs. Soit  $\bar{\Omega}$  une sous-variété à bord de  $\mathbb{R}_+^n$ , de bord  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Soit  $K_p(x', y)$  une suite de distributions sur  $\partial\Omega \times \mathbb{R}^n$ , dépendant analytiquement de  $x' \in \partial\Omega$ , et qui pour  $x'$  fixé, sont des noyaux de Poisson (analytiques) élémentaires de degrés respectifs  $dp$ .

On suppose en outre que pour tout compact de  $\partial\Omega$ , il existe un voisinage  $V'$  complexe de ce compact, et un nombre  $\varepsilon > 0$ , tels que les  $K_p(x', y)$  (plus exactement leur restriction au demi-espace  $y_n > 0$ ) se prolongent toutes en des fonctions holomorphes dans le domaine

$$x' \in V', \quad \text{re } y_n > -\varepsilon|y|, \quad |\text{im } y| < \varepsilon|\text{re } y|$$

et la série  $\sum K_p(x', y)$  converge uniformément dans ce domaine pour  $|y| < \varepsilon$ .

Nous noterons encore  $K_p(x', y) = K_p(x', y', y_n)$  en séparant la variable tangentielle de la variable normale, ce qui est indispensable dans la définition qui suit.

DÉFINITION 3.6. — On appelle noyau de Poisson analytique de degré  $d$  sur  $\bar{\Omega}$  une distribution  $K(x, y')$  sur  $\bar{\Omega} \times \partial\Omega$  qui jouit des propriétés suivantes.

1) C'est une fonction analytique jusqu'au bord en dehors de la diagonale de  $\partial\Omega$  dans  $\bar{\Omega} \times \partial\Omega$  (et il n'y a pas de couches sur le bord).

2) Au voisinage de la diagonale de  $\partial\Omega$ ,  $K(x, y')$  diffère par une fonction analytique jusqu'au bord de la somme de la série de distributions

$$\sum_0^\infty K_p(x', x' - y', x_n).$$

On appelle opérateur de Poisson analytique sur  $\bar{\Omega}$  un opérateur continu  $\mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$  dont le noyau-distribution est un noyau de Poisson analytique.

*Remarque.* — Un opérateur de Poisson  $K$  est défini à priori comme opérateur continu  $\mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ . On constate qu'en fait il est déjà continu  $\mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{E}'(\overline{\Omega})$ , et c'est en tant qu'opérateur sur ces espaces que nous l'utiliserons au chap. II. Par ailleurs un opérateur de Poisson se prolonge par continuité à un grand nombre d'espaces : ces prolongements sont étudiés au n° 5.

On a alors les résultats suivants :

**PROPOSITION 3.7.** — *La définition 3.6 ci-dessus est invariante par changement de coordonnées analytiques.*

**PROPOSITION 3.8.** — *Si  $K$  est un opérateur de Poisson analytique, il en est de même du composé, à gauche ou à droite, de  $K$  et d'un opérateur différentiel à coefficients analytiques (sur  $\Omega$  ou  $\partial\Omega$ ).*

Pour la seconde de ces propositions, la démonstration s'appuie sur la remarque 3.4 : pour le composé, à gauche ou à droite, de  $K$  et d'un opérateur différentiel à coefficients constants, le résultat est évident. Reste à étudier les composés  $f \circ K$  et  $K \circ f$ , où  $f$  désigne brièvement l'opérateur de multiplication par une fonction  $f$ , analytique jusqu'au bord sur  $\overline{\Omega}$  (resp. analytique sur  $\partial\Omega$ ).

Le premier de ces opérateurs a pour noyau distribution :

$$f(x)K(x, y')$$

si  $K(x, y')$  est le noyau distribution de  $K$  : c'est une fonction analytique jusqu'au bord hors de la diagonale de  $\partial\Omega$ ; et au voisinage de celle-ci, elle diffère par une fonction analytique de la distribution

$$\sum_{p,q} f_q(x') x_n^q K_p(x', x' - y', x_n)$$

( $f = \sum f_q(x') x_n^q$  désigne le développement en série de Taylor de  $f$  au voisinage de  $x_n = 0$ ) : la série ci-dessus vérifie les conditions de la définition 3.5.

Le second opérateur a pour noyau distribution  $K(x', y)f(y)$ , qui est aussi analytique jusqu'au bord hors de la diagonale de  $\partial\Omega$ ; et au voisinage de celle-ci, c'est une distribution qui

diffère par une fonction analytique jusqu'au bord de la somme de la série :

$$\sum_{p, \alpha} K_p(x', x' - y', x_n) f^{(\alpha)}(y' - x')(y' - x')/\alpha!$$

et cette dernière série vérifie elle aussi les conditions de la définition 3.6 ( $f^{(\alpha)}$  désigne la dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $f$ ).

La première proposition se prouve de façon analogue, à partir de la remarque 3.3, en faisant un développement en série de Taylor du noyau distribution par rapport à la variation de  $x' - y'$  et de  $x_n$ , dans le nouveau système de coordonnées, et en remarquant aussi que le déterminant jacobien d'une transformation analytique est une fonction analytique : la nouvelle série qu'on obtient vérifie encore les conditions de la définition 3.5. Nous laissons au lecteur les détails de la démonstration (qui est en tous points analogue à celle de l'assertion (2.5) ci-dessus).

Ceci permet de généraliser aux variétés à bord analytiques réelles la définition des opérateurs de Poisson analytiques : si  $\bar{\Omega}$  est une telle variété, un opérateur de Poisson analytique sur  $\bar{\Omega}$  est un opérateur linéaire continu ;  $\mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \xi(\bar{\Omega})$ , dont le noyau distribution est une fonction analytique jusqu'au bord hors de la diagonale de  $\partial\Omega$  dans  $\bar{\Omega} \times \partial\Omega$ , et vérifie les conditions de la définition 3.5 au voisinage de tout point de cette diagonale, pour n'importe quel système de coordonnées analytiques choisi sur  $\bar{\Omega}$  au voisinage de ce point.

#### 4. Symbole et représentation par intégrale de Fourier.

Si  $K$  est un opérateur de Poisson analytique sur  $\bar{\Omega}$ , nous appelons symbole complet de  $K$  la classe de noyau distribution de  $K$  modulo les fonctions analytiques au voisinage de la diagonale de  $\partial\Omega$ . Comme pour les opérateurs pseudo-différentiels analytiques, les symboles complets des opérateurs de Poisson analytiques sur les sous-variétés à bord ouvertes de  $\bar{\Omega}$  forment un faisceau (de support  $\partial\Omega$ ).

Si  $\bar{\Omega}$  est plongée dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^n$ , ou si on a choisi un système de coordonnées analytiques, on représente le symbole complet par la série formelle :

$$\sigma(K) = \sum k_p(x', \xi).$$

(Ceci est une modification des notations de (2), où nous n'avions introduit que les transformées de Fourier partielles  $K_p(x', \xi', x_n)$ ). Les fonctions  $k_p(x', \xi)$  qui y interviennent vérifient les conditions des lemmes 3.2 et 3.5. (Nous dirons alors qu'il s'agit d'un symbole analytique.) Nous ne donnons pas ici de représentation intrinsèque du symbole complet.

Le premier terme du symbole, appelé symbole principal (ou symbole si cela ne prête pas à confusion) doit s'interpréter comme densité d'une forme différentielle en  $\xi_n$ , sur la restriction à  $\partial\Omega$  du fibré cotangent (privé du fibré cotangent normal à  $\bar{\Omega}$ ). Aussi le noterons-nous :

$$\sigma_0(K) = k_0(x', \xi) d\xi_n.$$

Le degré de  $K$  est le degré d'homogénéité de  $k_0(x', \xi) d\xi_n$  en tant que forme différentielle, c'est-à-dire  $d$  si  $k_0$  est une fonction homogène de degré  $d - 1$  en  $\xi$ .

(Nous laissons au lecteur le soin de justifier notre interprétation du symbole principal, en faisant des changements de coordonnées linéaires.)

On trouve, par le même raisonnement qu'au § 2 :

**PROPOSITION 3.9.** — *Pour tout symbole principal  $k_0(x', \xi) d\xi_n$  donné sur la restriction à  $\partial\Omega$  du fibré cotangent (privé du fibré cotangent normal) (dont la densité  $k_0(x', \xi)$  vérifie la condition (ii) du lemme 3.1), il existe un opérateur de Poisson analytique  $K$  admettant  $k_0(x, \xi) d\xi_n$  pour symbole principal.*

Nous nous proposons maintenant de décrire nos opérateurs au moyen d'une intégrale de Fourier (analogue à celle qui sert pour la représentation par intégrale de Fourier des opérateurs pseudo-différentiels analytiques rappelée au § 2).

Soit donc  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}_+^n$ , et soit  $k_p(x', \xi)$  le symbole complet d'un opérateur de Poisson analytique. Soit  $k(x', \xi)$  une fonction sur  $\partial\Omega \times \mathbb{R}_+^n$  ayant les propriétés suivantes :

1)  $k(x', \xi)$  est  $C^\infty$ , analytique pour  $\xi' \neq 0$ , et se prolonge en une fonction holomorphe, nulle à l'infini, de  $\xi_n$ , pour  $\operatorname{im} \xi_n \leq 0$ ,  $\xi'$  fixé.

2) Pour tout compact de  $\partial\Omega$ , il existe un voisinage complexe  $V'$  de ce compact, et des constantes positives  $\varepsilon, R, c, A$



telles qu'on ait pour tout  $N$  l'inégalité

$$(3.28) \quad \left| k(x', \xi) - \sum_0^{N-1} k_p(x', \xi) \right| \leq c A^N N! |\xi'|^{d-N} |\xi|^{-1}$$

dans le domaine complexe  $x' \in V'$ ,  $|\xi_n - iR|\xi'| > (R - \varepsilon)|\xi'|$ ,  $|\operatorname{Im} \xi'| \leq \varepsilon \operatorname{re} |\xi'|$  (on peut affaiblir ces conditions en omettant d'exiger que  $k(x', \xi)$  soit analytique par rapport à  $\xi'$ ).

PROPOSITION 3.10. — *L'opérateur  $K: \mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$  défini par*

$$(3.29) \quad K(f) = (2\pi)^{-n} \int \left( \int^+ e^{ix \cdot \xi} k(x', \xi) \hat{f}(\xi') d\xi_n \right) d\xi'$$

*est un opérateur de Poisson analytique sur  $\overline{\Omega}$ , de symbole  $\Sigma k_p(x', \xi)$ .*

En effet le noyau distribution de  $K$  est la fonction  $K(x', x' - y', x_n)$ , où  $K(x', z) = K(x', z', z_n)$  est la transformée de Fourier inverse de  $k(x', \xi)$  par rapport à  $\xi$ . En tenant compte de la démonstration du lemme 3.1, on vérifie exactement comme dans (3), § 2, n° 2, que cette fonction diffère de  $\Sigma K_p(x', x' - y', x_n)$  par une fonction analytique jusqu'au bord au voisinage de la diagonale de  $\partial\Omega$  (où comme au début du paragraphe,  $K_p(x', z)$  est la distribution pseudo-homogène dont  $k_p(x', \xi)$  est transformée de Fourier).

Enfin, comme pour les opérateurs pseudo-différentiels analytiques, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.11. — *Pour tout symbole analytique  $\Sigma k_p(x', \xi)$  (c'est-à-dire pour toute suite de fonctions sur  $\Omega \times \mathbb{R}^n$  qui vérifient la condition (ii) du lemme 3.5), il existe une fonction  $k(x', \xi)$  qui vérifie les conditions d'analyticité et les inégalités (3.5) ci-dessus.*

*Par suite, modulo un opérateur négligeable analytique, tout opérateur de Poisson analytique admet localement une représentation intégrale du type décrit dans la proposition 3.9.*

Preuve. — Les conditions du lemme 3.4 sont les suivantes : si  $D$  est un compact de  $\partial\Omega$ , il existe un voisinage complexe  $V'$  de  $D$  et des constantes  $\varepsilon, R, c, A$  telles que les  $k_p$  soient

toutes holomorphes dans le domaine

$$x' \in V', \quad |\operatorname{im} \xi'| < \varepsilon |\operatorname{re} \xi'|, \quad |\xi_n/|\xi'| - iR| > R - \varepsilon$$

et y vérifient les inégalités

$$(3.30) \quad |k_p(x', \xi)| \leq c A^p p! |\xi'|^{d-p} |\xi_n/|\xi'| - iR|^{-1}.$$

Quitte à diminuer  $\varepsilon$  et augmenter  $A$ , nous supposons dans les lignes qui suivent que  $|\xi'|$  désigne la fonction holo-

morphe  $\left(\sum_1^{n-1} \xi_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$  (et non la norme hermitienne de  $\xi'$ ).

Dans (3), on montre que le théorème des moments de Carleson (*Math. Scand.*, 9 (1961) 197-206) a la conséquence suivante: il existe un opérateur linéaire  $U$  qui à toute suite  $s = (s_p)$  vérifiant  $\|s\| = \sup |s_p|/p! A^p < \infty$  fait correspondre une fonction  $f(t) = U(s)$ , qui a les propriétés suivantes:

a)  $f$  est holomorphe dans l'angle  $|\operatorname{im} t| < \varepsilon' \operatorname{re} t$

b) pour  $t \leq 1$  (et  $|\operatorname{im} t| < \varepsilon' \operatorname{re} t$ ) on a

$$f(t) \leq c \|s\| \exp(-\varepsilon'/t)$$

c) pour  $t \geq 1$  (et  $|\operatorname{im} t| < \varepsilon' \operatorname{re} t$ ) on a les inégalités

$$\left| f(t) - \sum_0^{N-1} s_p t^{d-p-1} \right| \leq c' \|s\| A'^N N! t^{d-N-1} \quad \text{où } \varepsilon', c', A' \text{ sont}$$

des constantes qui dépendent de  $d$  et  $A$

Il suffit alors de prendre

$$(3.31) \quad k(x', \xi) = U(k_p(x', \xi'/|\xi'|, \xi_n/|\xi'|)) \quad (|\xi'|).$$

En effet cette fonction est bien holomorphe dans un domaine de la forme  $x' \in V', |\operatorname{im} \xi'| < \varepsilon'' |\operatorname{re} \xi'|, |\xi_n/|\xi'| - iR| < R - \varepsilon$  pour  $\varepsilon''$  assez petit. Et b —, c —, et (3.7) impliquent qu'on a dans ce domaine les inégalités:

$$|k(x', \varepsilon)| \leq cc' \exp(-\varepsilon'/|\xi'|) |\xi_n/|\xi'| - iR|^{-1}$$

pour  $|\xi'| \leq 1$

$$\left| k(x', \xi) - \sum_0^{N-1} k_p(x', \xi'/|\xi'|, \xi_n/|\xi'|) |\xi'|^{d-p-1} \right| \leq cc' A'^N N! |\xi'|^{d-N-1} |\xi_n/|\xi'| - iR|^{-1}$$

pour  $|\xi'| \geq 1$

(en particulier la fonction  $k(x', \xi)$  ainsi construite est globalement  $C^\infty$ , et même dans la classe de Gevrey  $G^2$ , avec un zéro d'ordre infini pour  $\xi' = 0$ ).

### 5. Propriétés de continuité.

Remarquons d'abord que si  $K$  est un opérateur de Poisson analytique, il admet une représentation intégrale (3.29) (proposition 3.11); aussi c'est un opérateur de Poisson au sens de [2].

En particulier, il est continu  $\mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\overline{\Omega})$ .

En outre, s'il est de degré  $d$ , il se prolonge en un opérateur continu

$$H_s^{\text{comp}}(\partial\Omega) \rightarrow H_{s-d-\frac{1}{2}}^{\text{loc}}(\overline{\Omega})$$

(où comme dans [2],  $H_s^{\text{comp}}$  et  $H_s^{\text{loc}}$  désignent l'espace des distributions qui sont localement dans  $H_s$ , à support compact (resp. sans condition de support), avec la topologie évidente).

Par ailleurs le noyau de  $K$  est analytique dans  $\Omega \times \partial\Omega$  (bord exclu).  $K$  se prolonge donc en un opérateur linéaire continu

$$\mathcal{H}'_0(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$$

(où comme au § 0,  $\mathcal{H}'_0(\partial\Omega)$  désigne l'espace des fonctionnelles analytiques réelles à support compact sur  $\partial\Omega$ , et  $\mathcal{H}(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions analytiques à l'intérieur de  $\Omega$ ).

En outre, parce que le noyau distribution de  $K$  est analytique jusqu'au bord hors de la diagonale de  $\partial\Omega$  dans  $\overline{\Omega} \times \partial\Omega$ , si  $T$  est une distribution (ou une hyper-distribution) à support compact sur  $\partial\Omega$ ,  $K(T)$  est analytique jusqu'au bord en dehors du support de  $T$ .

Finalement, nous allons prouver.

**THÉORÈME 3.12.** — *Soit  $K$  un opérateur de Poisson analytique sur  $\overline{\Omega}$ . Si  $T$  est une distribution (ou une fonctionnelle analytique réelle) à support compact sur  $\partial\Omega$ , analytique au voisinage d'un point  $x_0$ ,  $K(T)$  est analytique jusqu'au bord au voisinage de  $x_0$ .*

*Preuve.* — Nous suivons exactement la preuve du théorème 2.3. L'assertion est purement locale, puisque de toute façon  $K(T)$  est analytique en dehors du support de  $T$ .

Aussi, quitte éventuellement à diminuer  $\bar{\Omega}$  et à modifier  $T$  en dehors d'un voisinage de  $x_0$ , nous pouvons supposer que  $\bar{\Omega}$  est contenu dans le demi-espace  $\bar{R}_+^n$ ,  $\partial\Omega$  contenu dans  $R^{n-1}$ , et nous pouvons supposer que  $T$  est de la forme  $f.\varphi$  où  $f$  est analytique sur  $\partial\Omega$ , et  $\varphi \in \mathcal{D}(\partial\Omega)$  égale 1 au voisinage de  $x_0$ .

Comme le composé de  $K$  et de la multiplication par  $f$  est encore un opérateur de Poisson analytique, nous pouvons même supposer  $f = 1$ . Comme le théorème 3.12 est évident si  $K$  est un opérateur négligeable, nous supposons en outre que  $K$  admet la représentation intégrale (3.29), où la fonction  $k(x', \xi)$  est construite au voisinage de  $x_0$  comme dans la preuve de la proposition 3.11 (formule (3.31)).

Enfin nous supposons que  $k(x', \xi)$  ne dépend pas de  $x'$  (le cas général se déduit de ce cas particulier exactement comme au § 2).

Nous allons maintenant exploiter la formule (3.31) et la formule de représentation intégrale (3.18) : remarquons d'abord que les  $k_p(\xi)$  admettent une représentation intégrale :

$$k_p(\xi) = \int_{\gamma} a_p(\xi', t)(t|\xi'| + i\xi_n)^{-1} dt$$

où  $\gamma$  est le même cercle pour tous les entiers  $p$ .

Si on note  $U_t((s_p))$  la valeur de  $U((s_p))$  en  $t$ , la formule (3.31) s'écrit

$$\begin{aligned} (3.32) \quad k(\xi) &= \int_{\gamma} U_{|\xi'|}(a_p(|\xi'|^{-1}\xi', t))|\xi'| (t|\xi'| + i\xi_n) dt \\ &= \int_{\gamma} a(\xi', t)(t|\xi'| + i\xi_n) dt \end{aligned}$$

où  $a(\xi', t) = |\xi'| U_{|\xi'|}(a_p(|\xi'|^{-1}\xi', t))$  est  $C^\infty$ ,

holomorphe à croissance lente dans un cône  $|\operatorname{im} \xi'| < \varepsilon |\operatorname{re} \xi'|$ , (et ceci uniformément pour  $t \in \gamma$ ), et a un zéro d'ordre infini pour  $\xi' = 0$ .

Supposons maintenant

$$k(\xi) = a(\xi')(t|\xi'| + i\xi_n)^{-1}$$

où  $a(\xi')$  est comme ci-dessus.

La fonction  $K(\varphi)$  a pour transformée de Fourier partielle

par rapport à  $x'$

$$a(\xi')\hat{\phi}(\xi') \exp(-t|\xi'|x_n) \quad (\text{cf. (3.2)}).$$

Il s'ensuit que  $K(\varphi)$  vérifie les relations

$$\begin{cases} \left( t^2 \sum_1^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) K(\varphi) = 0 & \text{pour } x_n > 0 \\ K(\varphi)(x', +0) = A * \varphi \\ \frac{\partial}{\partial x_n} K(\varphi)(x', +0) = -tB * \varphi \end{cases}$$

où  $A$  désigne la transformée de Fourier inverse de  $a(\xi')$ ,  $B$  celle de  $|\xi'|a(\xi')$ , et  $*$  désigne le produit de convolution. Or  $a(\xi')$  est holomorphe dans un cône  $|\operatorname{im} \xi'| < \varepsilon |\operatorname{re} \xi'|$ , à croissance lente à l'infini, et toutes ses dérivées tendent vers 0 à l'origine. Il s'ensuit (cf [3], § 2, n° 2) que  $A$  et  $B$  sont analytiques en dehors de l'origine; et  $A * \varphi, B * \varphi$  sont analytiques au voisinage de  $x_0$ . On en déduit pour les dérivées de  $K(\varphi)$  en  $x_0$  des inégalités analogues à (3.24).

Si  $k$  est donné par l'intégrale (3.22), il n'y a plus qu'à intégrer ces inégalités le long de  $\gamma$ , ce qui se fait sans difficulté.

*Remarque.* — On a aussi des inégalités analogues à (3.24) pour le noyau  $K$  lui-même. Quand on en fait la somme, en tenant compte du fait que  $A$  et  $B$  sont à décroissance rapide dans tout un cône, on voit que  $K$  lui-même se prolonge en une fonction holomorphe, à décroissance rapide, dans un cône

$$\operatorname{re} x_n > -\varepsilon |x|, \quad |\operatorname{im} x| < \varepsilon |\operatorname{re} x|.$$

*Remarque.* — On démontre de façon tout à fait analogue que le transposé d'un opérateur de Poisson  $K$  conserve lui aussi localement l'analyticité (ce résultat sera utilisé au § 4, mais la démonstration est laissée au lecteur). Cela veut dire que si  $f$  est une distribution à support compact, portée par  $\overline{\Omega}$ , et si au voisinage d'un point  $x_0$  du bord  $\partial\Omega$   $f$  coïncide avec une fonction analytique au voisinage de  $x_0$  (ou plus exactement, avec la restriction de cette fonction à  $\overline{\Omega}$ , puisque de toute façon  $f$  est nulle de l'autre côté du bord), alors

' $K(f) \in \mathcal{D}'(\partial\Omega)$  est une fonction analytique au voisinage de  $x_0$ .

Il s'ensuit que si  $K$  est un opérateur de Poisson analytique, et  $f$  une hyperdistribution sur  $\partial\Omega$ , à support compact,  $K(f)$  est bien défini en tant qu'hyperdistribution portée par  $\overline{\Omega}$ . Elle est analytique jusqu'au bord en dehors du support de  $f$ . Et le théorème 3.12 est encore valable dans ce cas.

*Exemple.* —  $\overline{\Omega}$  désigne comme ci-dessus une variété à bord analytique réelle,  $V$  une variété ouverte dans laquelle  $\overline{\Omega}$  est plongée. Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel analytique de type 0 (définition 2.1) sur  $V$ .

L'opérateur  $K$  qui à  $f \in \mathcal{D}(\partial\Omega)$  fait correspondre la restriction à  $\Omega$  de la distribution  $P(f(\delta)_{\partial\Omega})$  est un noyau de Poisson analytique. (On a repris les notations du début du chapitre.)

On le vérifie immédiatement en choisissant (localement) une représentation par intégrale de Fourier de  $P$ ):

$$P(f) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Il suffit alors de remplacer  $p(x, \xi)$  par sa partie holomorphe nulle à l'infini pour  $\text{im } \xi_n \leq 0$ ,  $h_{\xi_n}^+ p(x, \xi)$ : les conditions de la définition 2.1 entraînent que  $h_{\xi_n}^+ p(x, \xi)$  vérifie celles de la proposition 3.10.

Le fait qu'ici la fonction qui intervient dans l'intégrale de Fourier dépend de  $x = (x', x_n)$  et pas seulement de  $x'$  ne gêne pas. Un peu plus généralement, si  $K: \mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  est défini par la formule intégrale:

$$K(f) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} k(x, \xi) \hat{f}(\xi') d\xi$$

où  $k(x, \xi)$  vérifie les conditions de la proposition 3.9 et en outre dépend analytiquement de  $x = (x', x_n)$ , on voit en faisant un développement de Taylor de son noyau-distribution  $K(x', x_n, x' - y', x_n)$  (où  $K$  est la transformée de Fourier de  $k$ ) et en appliquant la définition 3.6, que c'est un noyau de Poisson analytique de symbole complet:

$$(3.33) \quad \sigma(K) = \sum_{p,q} \frac{i^q}{q!} \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^q \left( \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^q k_p(x', 0, \xi).$$

En particulier le symbole complet de l'opérateur  $K$  ci-dessus est donc

$$(3.34) \quad \sigma(K) = \sum_{k,q} \frac{i^q}{q!} h^{\pm}_{\xi_n} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^q \left( \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^q p_k(x', 0, \xi) \right]$$

( $h^{\pm}$  est l'opération définie par (0.3), l'indice  $\xi_n$  signifiant qu'on le fait opérer sur  $\left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^q \left( \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^q p_k$  considéré comme fonction de  $\xi_n$  seul).

### 6. Noyaux de Poisson généralisés.

Il sera commode pour le chapitre II d'introduire la généralisation suivante :

DÉFINITION 3.13. — On appelle opérateur d'extension pur, analytique, de degré  $d$ , sur  $\overline{\Omega}$ , un opérateur linéaire continu :  $\mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ , de la forme

$$\Sigma E_j \circ Q_j$$

où  $Q_j$  est un opérateur pseudo-différentiel analytique de degré  $d - j - 1$  sur  $\partial\Omega$ , et  $E_j$  est défini par

$$E_j(f) = f \cdot \delta_{\partial\Omega}^{(j)}.$$

On appelle opérateur de Poisson analytique généralisé de degré  $d$  un opérateur linéaire continu  $\mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ , somme d'un opérateur de Poisson analytique de degré  $d$  et d'un opérateur d'extension pur analytique de degré  $d$ .

Dans la définition ci-dessus, on a posé (conformément aux notations du § 0)

$$\delta_{\partial\Omega}^{(j)} = \left( \frac{\partial}{\partial n} \right)^j \delta_{\partial\Omega} = \left( \frac{\partial}{\partial n} \right)^{j+1} (\chi_{\Omega}).$$

Et la notation de produit :  $f \cdot \delta_{\partial\Omega}^{(j)}$  est relative à l'isomorphisme de  $\overline{\Omega}$  et  $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$  défini par  $\frac{\partial}{\partial n}$  au voisinage de  $\partial\Omega$ .

Si  $\overline{\Omega}$  est plongée dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^n$ , (on suppose alors  $\left( \frac{\partial}{\partial n} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ ), on représente le symbole de  $E_j \circ Q_j$

par la série formelle

$$(3.35) \quad \sigma(E_j \circ Q_j) = (i\xi_n)^j \sigma(Q_j) = \Sigma q_p^j(x', \xi') (i\xi_n)^j.$$

Le symbole de l'opérateur de Poisson généralisé  $K + \Sigma E_j \circ Q_j$  est la somme des symboles de chaque terme. Le symbole principal s'interprète toujours comme une forme différentielle et on le note

$$(3.36) \quad \sigma_0(K + \Sigma Q_j \circ E_j) \\ = k_0(x', \xi', \xi_n) d\xi_n + \Sigma q_0^j(x', \xi') (i\xi_n)^j d\xi_n.$$

Sa densité vérifie une condition analogue à (3.5), sauf qu'elle admet un pôle quand  $\xi_n \rightarrow \infty$ , les autres variables étant fixées.

Naturellement si  $E$  est un opérateur d'extension pur, son image se compose de distributions portées par  $\partial\Omega$ .

Un opérateur de Poisson généralisé se prolonge continûment  $\mathcal{E}'(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ . En fait, il est déjà continu  $\mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{E}_{-m}(\overline{\Omega})$  (\*) pour  $m$  assez grand; et si  $f$  est analytique au voisinage d'un point  $x_0$  de  $\partial\Omega$ , son image est dans  $\mathcal{H}_m(\overline{\Omega})$  au voisinage de  $x_0$  (plus exactement si  $V$  est un voisinage assez petit de  $x_0$ , considéré comme sous-variété à bord de  $\overline{\Omega}$ , la restriction est dans  $\mathcal{H}_m(V)$ ).

#### 4. Opérateurs Trace analytiques.

Nous regroupons sous ce nom d'une part les opérateurs annoncés dans l'introduction: sommes d'opérateurs de la forme

$$(4.1) \quad f \rightarrow T(f) = Q(\text{Tr}_j f)$$

où  $\text{Tr}_j f$  désigne la restriction à  $\partial\Omega$  de la  $j$ -ième dérivée de  $f$  par rapport à  $\frac{\partial}{\partial n}$ , et  $Q$  un opérateur pseudo-différentiel analytique sur le bord  $\partial\Omega$ ;

d'autre part les opérateurs qui sont formellement adjoints

(\*) Définition (0.6).



d'un opérateur de Poisson : un tel opérateur a pour noyau-distribution une distribution de la forme :

$$(4.2) \quad T(x', y) = T(x', y', y_n)$$

où  $T(x', y', x_n)$  est un noyau de Poisson analytique.

**DÉFINITION 4.1.** — *Nous appelons opérateur trace analytique pur de classe  $\leq p$  une somme d'opérateurs du premier type décrit ci-dessus, où les dérivées normales qui interviennent sont d'ordre  $p - 1$  ( $j \leq p - 1$ ). Nous appelons opérateur de classe 0 un opérateur du deuxième type; et enfin opérateur de classe  $\leq p$  la somme des deux.*

Soit  $T = T_0 + \sum_0^{p-1} Q_j \circ \text{Tr}_j$  un opérateur trace analytique de classe  $\leq p$ . Nous dirons que  $T$  est de degré  $d$  si  $Q_j$  est de degré  $d - j$  et si l'adjoint de  $T_0$  est un noyau de Poisson de degré  $d + 1$ .

Le symbole d'un opérateur trace analytique est la classe de son noyau-distribution modulo les noyaux d'opérateurs négligeables analytiques (§ 1). Comme aux § 2 et § 3, les symboles d'opérateurs trace analytiques sur les ouverts de  $\overline{\Omega}$  forment un faisceau porté par le bord  $\partial\Omega$ .

Si  $\overline{\Omega}$  est plongé dans le demi-espace  $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ , on représente le symbole par la série formelle :

$$(4.3) \quad \sigma(T) = \sum t_k(x', \xi)$$

où  $t_k$  est défini ainsi : soit d'une part

$$\sigma(Q) = \sum q_{j,k}(x', \xi')$$

le symbole de  $Q_j$ , où  $q_{j,k}$  est de degré  $s - j - k$  en  $\xi'$ . D'autre part le noyau-distribution  $T_0(x', y)$  de  $T_0$  admet modulo une fonction analytique jusqu'au bord un développement en série :

$$T_0(x', y) = \sum T_{0,k}(x', x' - y', y_n)$$

où  $T_{0,k}$  est homogène de degré  $-n - d + k$  <sup>(8)</sup>, vérifie les

(8) Sauf si  $d$  est entier, où elle se décompose comme dans la formule (3.4).

conditions des lemmes 3.1 et 3.4, et a pour transformée de Fourier par rapport aux deux dernières variables la fonction

$$t_{0,k}(x', \xi).$$

On pose alors

$$t_k(x', \xi) = \Sigma (i\xi_n)^j q_{j,k}(x', \xi') + t_{0,k}(x', \xi', -\xi_n)$$

$t_k(x', \xi)$  est donc une fonction analytique pour  $\xi' \neq 0$ , holomorphe pour  $\text{im } \xi_n \geq 0$ , méromorphe avec un pôle d'ordre  $\leq p-1$  pour  $\xi_n = \infty$  ( $\xi' \neq 0$  fixé).

En outre elles vérifient la condition suivante :

Pour tout compact de  $\partial\Omega$ , il existe un voisinage complexe  $V_c$  de ce compact, et des constantes  $\varepsilon$ ,  $R$ ,  $c$ ,  $A$ , tels que les  $t_k(x', \xi)$  soient toutes holomorphes (méromorphes à l'infini) en  $\xi_n$  dans le domaine complexe :

$$x' \in V_c, \quad |\text{im } \xi'| < \varepsilon |\text{re } \xi'|, \quad |\xi_n \neq iR|\xi'|| > (R - \varepsilon)|\xi'|$$

et qu'on ait dans ce domaine les inégalités :

$$(4.4) \quad |t_k| \leq cA^k k! |\xi'|^{d-k-p+1} |\xi|^{p-1}.$$

Le premier terme du symbole complet prend nom de symbole principal, ou symbole s'il n'y a pas de confusion. On voit en faisant des changements de coordonnées analytiques (ou simplement linéaires) laissant le bord invariant, qu'il faut l'interpréter comme une fonction sur la restriction au bord du fibré cotangent à (plus exactement, du complémentaire de la section nulle).

Comme aux § 2 et § 3, pour tout symbole principal  $t_0(x, \xi)$  donné, il existe un opérateur trace analytique admettant  $t_0$  pour symbole.

Les propositions suivantes se démontrent exactement comme au § 3 :

**PROPOSITION 4.2.** — *Si  $T$  est un opérateur trace analytique de degré  $s$ , de classe  $\leq p$ , il se prolonge en un opérateur continu*

$$H_{\sigma}^{\text{comp}}(\overline{\Omega}) \rightarrow H_{\sigma-s-\frac{1}{2}}^{\text{loc}}(\partial\Omega)$$

pour  $\sigma + \frac{1}{2} > p$ .

*Il se prolonge aussi en un opérateur continu:  $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{E}(\partial\Omega)$ . Et si  $f$  est analytique jusqu'au bord au voisinage de  $x_0$ ,  $T(f)$  est analytique au voisinage de  $x_0$ .*

*En outre, si  $T$  est de classe 0 (i.e. ne comporte pas de restriction au bord), il se prolonge continûment:*

$$\mathcal{H}'(K) \rightarrow \mathcal{H}'(\partial\Omega) \cap \mathcal{H}(\partial\Omega - K).$$

(Ici  $\mathcal{H}'(K)$  désigne l'espace des hyper-distributions à support dans un compact  $K \subset \overline{\Omega}$ , et  $\mathcal{H}'(\partial\Omega) \cap \mathcal{H}(\partial\Omega - K)$  désigne l'espace des hyper-distributions sur  $\partial\Omega$  qui sont analytiques hors de  $K \cap \partial\Omega$ , avec la topologie définie dans (3), § 0.3.)

Ces propositions sont évidentes pour les opérateurs trace qui sont strictement de classe  $\leq p$ . Pour les opérateurs de classe 0, il est commode de se servir d'une représentation par intégrale de Fourier:

**PROPOSITION 4.3.** — *Si  $T$  est un opérateur trace analytique de classe 0,  $T$  admet localement, et modulo un opérateur négligeable analytique de classe 0, la représentation:*

$$(4.5) \quad T(f) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix' \cdot \xi'} d\xi' \int t(x', \xi', \xi_n) \hat{f}(\xi) d\xi_n$$

où  $\hat{f}$  est la transformée de Fourier de la fonction qui vaut  $f$  pour  $x_n \geq 0$  et 0 pour  $x_n < 0$  et où  $t(x', \xi) = t(x', \xi', \xi_n)$  est une fonction  $C^\infty$  de  $x'$ , analytique pour  $\xi' \neq 0$ , se prolonge en une fonction holomorphe de  $x', \xi$ , dans le domaine complexe  $x' \in V_\varepsilon$ ,  $|\operatorname{im} \xi'| < \varepsilon |\operatorname{re} \xi'|$ ,  $|\xi_n + iR|\xi'|| > (R - \varepsilon)|\xi'|$ , où  $V_\varepsilon$  est un voisinage complexe d'un compact donné de  $\partial\Omega$ ,  $\varepsilon, R$  des constantes convenables (dépendant du compact) et vérifie dans ce domaine, pour tout  $N$ , l'inégalité:

$$(4.6) \quad \left| t(x', \xi) - \sum_0^{N-1} t_k(x', \xi) \right| \leq c A^N N! |\xi'|^{s-N+1} |\xi|^{-1}$$

où  $c, A$ , dépendent elles aussi du compact choisi, mais pas de  $N$ .

Il existe aussi une représentation par intégrale de Fourier analogue pour les opérateurs de classe  $\leq p$  (avec  $p \geq 1$ ). Dans celle-ci, il faut remplacer l'intégrale par une partie

finie  $\int^+$ . C'est cette représentation (ainsi que les formules du § 6) qui justifie la définition de la représentation du symbole ci-dessus.

*Remarque.* — Les conditions d'holomorphic par rapport à  $\xi_n$  — ou aussi bien les conditions de régularité au bord du noyau  $T(x', y)$  par rapport à  $y_n$  — sont plus fortes qu'il n'est nécessaire; elles suffisent cependant pour l'étude des opérateurs pseudo-différentiels analytiques de type 0; nous indiquons brièvement au § 7 les généralisations qu'il faut faire pour l'étude des opérateurs à coefficients  $C^\infty$  seulement.

*Exemple.* — Soit  $\bar{\Omega}$  une variété à bord analytique réelle comme ci-dessus, et soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel analytique de type 0 défini au voisinage de  $\bar{\Omega}$ . Alors l'opérateur  $T$  qui à  $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  fait correspondre la restriction à  $\partial\Omega$  de  $P_\Omega(f)$  est un opérateur trace analytique (si  $V$  est un voisinage ouvert analytique de  $\bar{\Omega}$ ,  $P_\Omega(f)$  est la restriction à  $\Omega$  de la distribution (sur  $V$ );  $P(f)$ ,  $f$  étant elle-même considérée comme distribution sur  $V$ ).

Comme au § 3, n° 6, on le voit en regardant le noyau-distribution de  $T$ . On trouve que le symbole complet de  $T$  est (dans le cas où  $\bar{\Omega}$  est plongée dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^n$ ):

$$(4.7) \quad \sigma(T) = \sum_{k,q} \frac{i^{-q}}{q!} H_{\xi_n}^- \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^q \left( \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^q P_k(x', 0, \xi) \right]$$

où  $H^-$  est l'opérateur défini par (0.4), l'indice  $\xi_n$  signifiant qu'on le fait opérer sur  $\left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^q \left( \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^q P_k$  considéré comme fonction de  $\xi_n$  seul.

## 5. Noyaux de Green singuliers analytiques.

Les opérateurs que nous définissons ici sont une généralisation des opérateurs du type  $K \circ T$ , où  $K$  est un opérateur de Poisson analytique, et  $T$  un opérateur trace analytique. Leur intérêt apparaîtra de façon évidente au § 6: ils apparaissent dès qu'on essaie de composer des opérateurs pseudo-différentiels.

1. Comme au § 3, nous commençons par décrire les distributions qui interviennent comme noyaux.

a) *Noyaux élémentaires.*

Soit  $G(x', x_n, y_n)$  une distribution sur  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Comme au § 3, nous noterons  $\hat{G}(\xi', x_n, y_n)$  la transformée de Fourier partielle par rapport à  $x'$  de  $G$ , et  $g(\xi', \xi_n, \eta_n)$  sa transformée de Fourier.

Nous nous intéressons aux propriétés suivantes de  $G$  :

(5.1) a)  $G$  est homogène de degré  $-n-d$  <sup>(9)</sup>.

$G$  est nulle en dehors du quadrant  $x_n \geq 0, y_n \leq 0$ .

$G$  est analytique jusqu'au bord en dehors de l'origine dans ce quadrant <sup>(10)</sup>; et c'est une fonction localement intégrable en dehors de l'origine (pas de couches portées par le bord).

b)  $\hat{G}$  est analytique jusqu'au bord dans le quadrant  $x_n \geq 0, y_n \leq 0$ , en dehors du plan  $x' = 0$ ; et c'est une fonction localement intégrable hors du plan  $x' = 0$  (pas de couches portées par le bord).

(5.2)  $g$  est analytique, homogène de degré  $d-1$ , dans l'ouvert  $\xi' \neq 0$  et pour  $\xi' \neq 0$  fixé, elle se prolonge en une fonction holomorphe, nulle à l'infini, de  $\xi_n, \eta_n$ , dans le domaine

$$|\xi_n - iR|\xi'|| > (R - \varepsilon)|\xi'|, \quad |\eta_n + iR|\xi'|| > (R - \varepsilon)|\xi'|$$

où  $R, \varepsilon$ , sont des constantes positives convenables.

On appelle noyau de Green singulier élémentaire (analytique) de degré  $d$ , de classe 0, une distribution qui vérifie (5.1).

La condition (5.2) implique que pour  $\xi' \neq 0$  fixé,  $g(\xi', \xi_n, \eta_n)$  est une fonction holomorphe de  $\frac{1}{\xi_n}, \frac{1}{\eta_n}$ , y compris sur les « droites » complexes  $\frac{1}{\xi_n} = 0$  ou  $\frac{1}{\eta_n} = 0$ .  $g$  admet alors

<sup>(9)</sup> Sauf si  $-n-d$  est entier positif, où on suppose seulement que  $G$  se décompose en une somme :  $G = G_0 + P(x) - G_1$  où  $G_0$  est une fonction homogène de degré  $n-d$ ,  $P(x)$  est un polynôme homogène de degré  $-n-d$ , et  $G_1$  est la fonction nulle pour  $x_n < 0$  ou  $y_n > 0$ , et égale à  $\text{Log}(|X'|^2 + X_n^2 + y_n^2)$  pour  $x_n \geq 0, y_n \geq 0$ .

<sup>(10)</sup> Ceci signifie que dans l'ouvert  $x_n > 0, y_n < 0$ ,  $G$  coïncide avec une fonction analytique au voisinage de l'ensemble localement fermé :  $x_n \geq 0, y_n \leq 0, (x', x_n, y_n) \neq 0$ . La condition sur  $\hat{G}$  est analogue.

une représentation intégrale analogue à (3.18) :

(5.3)

$$g(\xi', \xi_n, \eta_n) = \iint_{\gamma \times \gamma} a(\xi', t, s)(t|\xi'| + i\xi_n)^{-1}(s|\xi'| - i\eta_n)^{-1} dt ds$$

où  $\gamma$  est un cercle assez grand du demi plan  $\operatorname{re} t > 0$  ( $\operatorname{re} s > 0$ ) et où on a posé  $a(\xi', t, s) = -(4\pi^2)^{-1}|\xi'|^2 g(\xi', it|\xi'|, -is|\xi'|)$ .

*Exemple.* — En particulier, la fonction :

$$(5.4) \quad g = (t|\xi'| + i\xi_n)^{-1}(s|\xi'| - i\eta_n)^{-1}$$

provient du noyau élémentaire

$$(5.5) \quad G = \begin{cases} \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) (tx_n - sy_n)((tx_n - sy_n)^2 + |x'|^2)^{-\frac{n}{2}} \\ \text{si } x_n \geq 0, y_n \leq 0 \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Dans ce cas, la transformée de Fourier partielle vaut

$$(5.6) \quad \hat{G} = \begin{cases} \exp [(-tx_n + sy_n)|\xi'|] & \text{pour } x_n \geq 0, y_n \leq 0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

*Remarque.* — Si  $-n-d$  est entier positif, la décomposition indiquée en note ci-dessus est mal adaptée, parce que la fonction qui est nulle pour  $x_n < 0$  ou  $y_n > 0$ , et égale  $\operatorname{Log}(|x'|^2 + x_n^2 + y_n^2)$  dans le quadrant  $x_n > 0, y_n < 0$ , ne vérifie pas (5.1). Comme au § 3, on peut la remplacer par la fonction

$$G_1(x', x_n, y_n) = \begin{cases} \operatorname{Log}(|x'|^2 + (x_n - y_n)^2) & \text{pour } x_n > 0, y_n < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \\ \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$G_1(x', x_n, y_n) = \begin{cases} \operatorname{Log}((x_n - y_n) + ((x_n - y_n)^2 + |x'|^2)^{\frac{1}{2}}) \\ \text{pour } x_n > 0, y_n < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \\ \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Toujours dans le cas où  $-n-d$  est entier positif, deux noyaux élémentaires qui ont même transformée de Fourier pour  $\xi' \neq 0$  diffèrent par une fonction qui coïncide dans le

quadrant  $x_n > 0$ ,  $y_n < 0$  avec un polynôme homogène (en effet la différence est alors une somme finie  $\sum x'^\alpha \varphi_\alpha(x_n, y_n)$ . Si elle vérifie (5.1) (note), les  $\varphi_\alpha$  sont nécessairement somme d'une fonction homogène et d'un terme logarithmique; si de plus les  $\varphi_\alpha$  sont analytiques jusqu'au bord, ce sont des polynômes).

b) Comme au § 3 (et nous laissons la démonstration au lecteur) on a le résultat suivant :

Si  $G$  vérifie (5.1), sa transformée de Fourier vérifie (5.2).

Réciproquement, si  $g$  est une fonction définie pour  $\xi' \neq 0$ , qui vérifie (5.2), alors  $g$  admet un prolongement  $pf^+g$  dont la transformée de Fourier inverse vérifie (5.1).

Et comme au § 3,  $pf^+g$  est définie comme suit : si  $\hat{G}'$  est la transformée de Fourier inverse de  $g$  par rapport à  $\xi_n, \eta_n$  ( $\hat{G}'$  est définie seulement pour  $\xi' \neq 0$ ),  $pf^+g$  a pour transformée de Fourier inverse par rapport à  $\xi_n \eta_n$  la distribution  $pf\hat{G}'$ , où la partie finie  $pf$  est définie comme dans [12] (dans ce cas, c'est une partie finie par rapport à  $\xi'$ , les deux autres variables  $x_n y_n$  jouant le rôle de paramètres).

c) Soit maintenant  $G_k(x', x_n, y_n)$  une suite de noyaux élémentaires de degrés respectifs  $d - k$ .

Comme au § 3, on a le résultat suivant (et ici encore nous laissons la démonstration au lecteur) :

(5.7) *On suppose que les  $G_k$  (ou plus exactement leurs restrictions au quadrant  $x_n > 0, y_n < 0$ ) se prolongent toutes en des fonctions holomorphes dans le domaine complexe*

$$\begin{aligned} \text{re } x_n &> -\varepsilon(|x'| + |x_n| + |y_n|), & \text{re } y_n &< \varepsilon(|x'| + |x_n| + |y_n|) \\ |\text{im } x'| + |\text{im } x_n| + |\text{im } y_n| &< \varepsilon(|\text{re } x'| + |\text{re } x_n| + |\text{re } y_n|) \end{aligned}$$

*et que la série  $\sum G_k(x', x_n, y_n)$  converge uniformément dans l'intersection de ce domaine et de la boule  $|x'| + |x_n| + |y_n| < \varepsilon$ .*

Alors

(5.8) *Les  $g_k(\xi', \xi_n, \eta_n)$  se prolongent toutes en des fonctions holomorphes dans le domaine complexe*

$$\begin{aligned} |\text{im } \xi'| &< \varepsilon' |\text{re } \xi'|, & |\xi_n - iR|\xi''|| &> (R - \varepsilon)|\xi'|, \\ |\eta_n + iR|\xi''|| &> (R - \varepsilon)|\xi'| \end{aligned}$$

et vérifient dans ce domaine les inégalités

$$|g_k(\xi', \xi_n, \eta_n)| \leq c A^k k! |\xi'|^{d-k+1} (|\xi'| + |\xi_n|)^{-1} (|\xi'| + |\eta_n|)^{-1}$$

où  $\varepsilon', R, c, A$  sont des constantes convenables.

Réciproquement, si  $g_k(\xi', \xi_n, \eta_n)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) est une suite de fonctions définies pour  $\xi' \neq 0$ , vérifiant la condition (5.2) (les degrés respectifs étant  $d - 1 - k$ ), et vérifiant (5.8); et si  $G_k$  est la transformée de Fourier et inverse de la distribution  $p^{d-k} g_k$ , alors la suite  $G_k$  vérifie la condition (5.8).

a) Soit maintenant  $\bar{\Omega}$  une variété à bord plongée dans  $\mathbb{R}_+^n$ , de bord  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Soit  $G_k(x', z', z_n, y_n)$  une suite de distributions sur  $\partial\Omega \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , qui a les propriétés suivantes :

pour  $x'$  fixé,  $G_k$  est un noyau de Green singulier élémentaire (analytique) de degré  $d - k$  des variables  $z', z_n, y_n$ .

$G_k$  dépend analytiquement de  $x' \in \partial\Omega$ . Et pour tout compact  $K$  de  $\partial\Omega$ , il existe un voisinage complexe  $V'$  de ce compact et une constante  $\varepsilon > 0$  tels que les  $G_k$  (ou plus exactement leur restrictions ou quadrant  $z_n > 0, y_n < 0$ ) se prolongent toutes en des fonctions holomorphes dans le domaine complexe

$$x' \in V' \text{ re } z_n > -\varepsilon(|z'| + |z_n| + |y_n|), \quad \text{re } y_n < \varepsilon(|z'| + |z_n| + |y_n|) \\ |\text{im } z'| + |\text{im } z_n| + |\text{im } y_n| < \varepsilon(|\text{re } z'| + |\text{re } z_n| + |\text{re } y_n|)$$

Et la série  $\sum_0^\infty G_k(x', z', z_n, y_n)$  converge uniformément dans ce domaine pour  $|z'| + |z_n| + |y_n| < \varepsilon$ .

DÉFINITION 5.1. — On appelle noyau de Green singulier analytique de degré  $d$ , de classe 0, sur  $\Omega$ , une distribution  $G(x, y)$  sur  $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$  qui a la propriété suivante :

a)  $G$  est analytique jusqu'au bord en dehors de la diagonale de  $\partial\Omega$  dans  $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$  (et il n'y a pas de couches portées par le bord).

b) Au voisinage de la diagonale de  $\partial\Omega$  dans  $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ ,  $G$



diffère de la somme de la série de distributions :

$$\Sigma G_k(x', x' - y', x_n, -y_n)$$

par une fonction analytique jusqu'au bord.

On appelle opérateur de Green singulier analytique de degré  $d$ , de classe 0, un opérateur linéaire continu:  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$  dont le noyau-distribution est un noyau de Green singulier analytique de degré  $d$ , de classe 0.

On complète immédiatement cette définition, comme au § 4 : on appelle opérateur de Green singulier analytique pur, de classe  $p$ , de degré  $d$ , un opérateur  $G$  de la forme

$$G = \sum_0^{p-1} K_j \circ \text{Tr}_j$$

où  $K_j$  est un opérateur de Poisson de degré  $d - j$   $\text{Tr}_j$  désigne l'opérateur  $f \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j f / \partial\Omega$ .

Enfin un opérateur de degré  $d$ , de classe  $p$ , est par définition la somme d'un opérateur de degré  $d$ , de classe 0 et d'un opérateur pur de classe  $p$ , de degré  $d$ .

Le noyau-distribution d'un tel opérateur admet au voisinage de la diagonale de  $\partial\Omega$  une décomposition

$$(5.9) \quad G(x, y) = \Sigma G_m(x', x' - y', x_n, -y_n) + R(x, y)$$

où  $R(x, y)$  est le noyau-distribution d'un opérateur négligeable analytique de classe  $p$ , et

$$(5.10) \quad G_m(x', z', z_n, y_n) = G_m^0(x', z', z_n, y_n) + \sum_0^{p-1} K_m^j(x', z', z_n) \delta^{(j)}(y_n)$$

où  $G_m^0$  est un noyau de Green élémentaire de degré  $d - m$  et  $K_m^j$  un noyau de Poisson élémentaire de degré  $d - m - j$ .

(Les  $G_m^0$ ,  $K_m^j$  sont entièrement déterminés par  $G$  modulo un polynôme homogène si  $d$  est entier.)

La transformée de Fourier de  $G_m$  est alors (avec les notations déjà utilisées).

$$g_m(x', \xi', \xi_n, \eta_n) = g_m^0(x', \xi', \xi_n, \eta_n) + \sum_0^{p-1} k_m^j(x', \xi', \xi_n) (i\eta_n)^j.$$

Elle a des propriétés analogues à celle de la formule (5.2). Sauf qu'elle admet un pôle d'ordre  $p - 1$  quand  $\eta_n \rightarrow \infty$  (les autres variables étant fixées). Et les  $g_m$  sont toutes holomorphes dans un même domaine du type décrit dans (5.8), et y vérifient les inégalités avec des constantes  $c, A$  convenables :

$$(5.11) \quad |g_m(x', \xi', \xi_n, \eta_n)| \\ \leq c A^m m! |\xi'|^{d-p+1-m} (|\xi'| + |\xi_n|)^{-1} (|\xi'| + |\eta_n|)^{p-1}.$$

Comme aux paragraphes 3 et 4, cette définition est invariante par changement de coordonnées analytiques. Aussi, comme aux § 3 et § 4, on définit un noyau de Green singulier analytique sur une variété à bord analytique réelle comme suit : c'est un opérateur  $G$  dont le noyau-distribution  $G(x, y)$  est hors de la diagonale de  $\partial\Omega$  le noyau-distribution d'un opérateur négligeable analytique, c'est-à-dire de la forme

$$G(x, y) = G_0(x, y) + \sum_0^{p-1} K_j(x, y') (\delta)_{\partial\Omega}^{(j)}$$

où  $(\delta)_{\partial\Omega}^{(j)}$  est la dérivée d'ordre  $j$  par rapport à  $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)$  de la mesure superficielle  $(\delta)_{\partial\Omega}$  (cf. § 1), et  $G_0$  et les  $K_j$  sont analytiques jusqu'au bord et tel que, au voisinage de tout point  $(x'_0, x'_0)$  de la diagonale de  $\partial\Omega$ , et pour tout système de coordonnées analytiques choisi au voisinage de ce point,  $G(x, y)$  vérifie les conditions décrites dans la définition 5.1.

2. Comme aux paragraphes précédents, le symbole complet de  $G$  est la classe du noyau-distribution de  $G$  modulo les noyaux d'opérateurs négligeables analytiques. Les symboles complets de noyaux de Green singuliers analytiques sur les ouverts de  $\bar{\Omega}$  forment un faisceau de support  $\partial\Omega$ .

Si  $\bar{\Omega}$  est plongé dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^n$ , on représente le symbole complet par la série formelle :

$$(5.12) \quad \sigma(G) = \sum g_m(x', \xi', \xi_n, \eta_n)$$

où  $g_m$  est la transformée de Fourier de la distribution  $G_m$  de la formule (5.10), et la suite des  $g_m$  vérifie la condition (5.11) ci-dessus.

Le premier du symbole, ou symbole principal, doit s'interpréter comme une forme différentielle en  $\xi_n$  sur le complémentaire de la section nulle dans le fibré  $F$  sur  $\partial\Omega$  défini comme suit :

$F$  est le produit fibré de deux exemplaires du fibré cotangent à  $\Omega$  au-dessus du fibré cotangent à  $\partial\Omega$  (parce que dans les formules de changement de variables,  $\varepsilon_n$  et  $\eta_n$  se transforment de la même façon).

On le notera  $g_0(x', \xi', \xi_n, \eta_n) d\xi_n$ .

Si  $g_0(x', \xi', \xi_n, \eta_n) d\xi_n$  est un symbole principal donné (c'est-à-dire une fonction sur le fibré ci-dessus vérifiant les conditions décrites dans *b*), *c*), il existe un noyau de Green singulier analytique  $G$  admettant  $g_0$  pour symbole principal (la preuve est analogue à celle du § 2).

Si  $G$  est un noyau de Green singulier analytique de classe  $\leq p$ , il admet localement, et modulo un opérateur négligeable analytique, une représentation par intégrale de Fourier :

(5.13)

$$G(f) = (2\pi)^{-n-1} \int e^{i\omega \cdot \xi} g(x', \xi', \xi_n, \eta_n) \hat{f}(\xi', \eta_n) d\xi' d\xi_n d\eta_n \quad (11)$$

où  $g(x', \xi', \xi_n, \eta_n)$  est une fonction  $C^\infty$ , analytique pour  $\xi' \neq 0$ , holomorphe en  $\xi_n$  pour  $\text{im } \xi_n < 0$ , et en  $\eta_n$  pour  $\text{im } \eta_n > 0$  ( $\xi'$  fixé) et pour tout compact de  $\partial\Omega$ , il existe un voisinage  $V_\varepsilon$  de ce compact et des constantes  $\varepsilon, R, c, A$  tels que  $g$  soit holomorphe dans le domaine complexe :

$$\begin{aligned} x' \in V_\varepsilon, \quad |\text{im } \xi'| &< \varepsilon |\text{re } \xi'|, \\ |\xi_n + iR|\xi'|| &> (R - \varepsilon)|\xi'|, \quad |\eta_n - iR|\xi'|| > (R - \varepsilon)|\xi'| \end{aligned}$$

et y vérifient les inégalités :

$$\begin{aligned} (5.14) \quad |g(x', \xi', \xi_n, \eta_n) - \sum_0^{N-1} g_k(x', \xi', \xi_n, \eta_n)| \\ \leq cA^N N! (|\xi'| + |\xi_n|)^{-1} (|\xi'| + |\eta_n|)^{p-1} |\xi'|^{d+1-N-p}. \end{aligned}$$

On vérifie exactement comme au § 3 que les opérateurs qui

(11) Il s'agit en fait d'une « partie finie » d'intégrale par rapport à  $\xi_n, \eta_n$  :

$$\int d\xi' \int^+ d\xi_n \int^+ e^{i\omega \cdot \xi} g(X'\xi' \xi_n \eta_n) \hat{f}(\xi' \eta_n) d\eta_n.$$

viennent d'être définis jouissent des propriétés suivantes :

**PROPOSITION 5.2.** — *Si  $G$  est un noyau de Green singulier analytique,  $P$  un opérateur différentiel à coefficients analytiques défini au voisinage de  $\bar{\Omega}$ ,  $G \circ P$  et  $P \circ G$  sont des noyaux de Green singuliers analytiques.*

**PROPOSITION 5.3.** — *Si  $G$  est un noyau de Green singulier analytique, de degré  $d$ , de classe  $p$ .*

1)  $G$  se prolonge continûment  $H_s^{\text{comp}}(\bar{\Omega}) \rightarrow H_{s-d}^{\text{loc}}(\bar{\Omega})$  pour  $s - \frac{1}{2} > p$ .

*En particulier  $G$  est continu  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{E}(\bar{\Omega})$ .*

2) Si  $p = 0$ ,  $G$  se prolonge en un opérateur continu  $H'(K) \rightarrow H'(\bar{\Omega}) \cap H(\bar{\Omega} - K)$  pour tout compact  $K$  de  $\bar{\Omega}$ . <sup>(12)</sup>

3) Pour toute  $f$ ,  $G(f)$  est analytique à l'intérieur de  $\Omega$ .

4) Enfin si  $f$  est analytique jusqu'au bord au voisinage d'un point  $x_0 \in \partial\Omega$ , il en est de même de  $G(f)$ .

3. Enfin comme au § 3, il sera commode pour la suite de généraliser encore nos opérateurs :

un opérateur de Green singulier analytique (de classe  $p$ ) généralisé est par définition un opérateur de la forme

$$G = G_0 + \sum_0^{m-1} E_j \circ T_j$$

où  $G_0$  est un opérateur de Green de classe  $p$ , les  $E_j$  sont des opérateurs d'extension purs analytiques et les  $T_j$  sont des opérateurs trace de classe  $p$ .

On peut se limiter au cas où  $E_j$  est l'opérateur d'extension :

$$E_j(f) = f(x') \cdot \delta^{(j)}(x_n) \quad (j = 0, 1, \dots, m-1).$$

Le symbole de  $G$  est alors défini par

$$(5.15) \quad \sigma(G) = \sigma(G_0) + \sum_0^{m-1} \sigma(T_j)(x', \xi', \eta_n)(i\xi_n)^j.$$

Un tel opérateur n'est plus continu  $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ , mais seulement continu  $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}_{-m}(\Omega)$  pour  $m$  assez grand.

<sup>(12)</sup> La définition de ces espaces se trouve dans [3] 1 0.3 et a été rappelée au 1 4.

S'il est de classe 0 (ie  $G_0$  et les  $T_j$  sont de classe 0) il se prolonge continûment  $\mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ .

S'il est de classe  $p \neq 0$ , il se prolonge seulement continûment à  $H_s^{\text{comp}}(\Omega)$  pour  $s > p - \frac{1}{2}$ .

*Exemple.* — Soit  $P$  un opérateur différentiel à coefficients analytiques, et soit  $G$  l'opérateur défini par

$$G(f) = P(\tilde{f}) - P_{\Omega}(f)$$

où  $P(\tilde{f})$  est la dérivée au sens des distributions du prolongement de  $f$  par 0, et  $P_{\Omega}(f)$  la dérivée au sens des fonctions. ( $G(f)$  est donc la partie distribution superficielle portée par  $\partial\Omega$  dans  $P(\tilde{f})$ ). Alors  $G$  est un noyau de Green singulier analytique généralisé qui opère de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathcal{E}^{-m}(\Omega)$  si  $P$  est de degré  $m$ .

Le symbole principal de  $G$  est

$$(5.16) \quad \sigma_0(G) = [\sigma_0(P)(\xi', \xi_n) - \sigma_0(P)(\xi', \eta_n)](i\xi_n - i\eta_n)^{-1} d\xi_n.$$

En effet si  $\Omega$  est le demi-espace  $R_+^n$ , et  $P = \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m$ , on a

$$G(f) = \sum_0^{m-1} \text{Tr}_k f \cdot \delta^{(m-1-k)}(x_n) = \sum_0^{m-1} E_{m-1-k} \text{Tr}_k(f)$$

de sorte que dans ce cas le symbole de  $G$  est

$$\sigma(G) = \sum_0^{m-1} (i\eta_n)^k (i\xi_n)^{m-1-k} = [(i\xi_n)^m - (i\eta_n)^m](i\xi_n - i\eta_n)^{-1}.$$

Le cas général s'en déduit aussitôt.

Toujours dans le cas où  $\Omega$  est le demi-espace, en écrivant  $P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum \frac{x_n^p}{p!} \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^p P\left(x', 0, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ , on obtient pour le symbole complet la formule

$$(5.17) \quad \sigma(G) = \sum_p \frac{i^p}{p!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^p [(\sigma(P)(x', 0, \xi', \xi_n) - \sigma(P)(x', 0, \xi', \eta_n))(i\xi_n - i\eta_n)^{-1}]$$

(bien entendu cette somme est finie. Le terme indexé par  $p$  est nul si  $p$  est plus grand que le degré de  $P$ ).

## 6. Composition et calcul symbolique.

1. Il n'est en général pas question de composer nos opérateurs directement : en effet leurs noyaux-distributions sont des fonctions analytiques hors de la diagonale de  $\Omega$  ou  $\partial\Omega$ , et éventuellement croissent trop vite à l'infini. On a cependant un résultat parfaitement utilisable. En vue de ceci, nous introduisons les notations suivantes : soit  $\Omega'$  un ouvert relativement compact de  $\Omega$ , de bord  $\partial\Omega' \subset \partial\Omega$ , et soit  $\varphi$  une fonction égale à 1 dans  $\Omega'$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux de nos opérateurs, nous notons  $(A\varphi B)_{\Omega'}$  l'opérateur qui à  $f \in \mathcal{D}(\cdot)$  (ou  $\mathcal{D}(\partial\Omega\Omega')$  suivant la nature de  $B$ ) fait correspondre la restriction à  $\Omega'$  (ou  $\partial\Omega'$ ) de  $A(\varphi(B(f)))$ .

Ceci est en accord avec la notation que nous avons utilisée au § 2.3 à propos des opérateurs pseudo-différentiels. Si  $P$  est un tel opérateur, nous notons  $P_{\Omega}$  l'opérateur qui à une fonction  $f \in \mathcal{D}(\Omega)$  fait correspondre la restriction à  $\Omega$  de  $P(\tilde{f})$ , où  $\tilde{f}$  est le prolongement de  $f$  par 0.

On a alors le théorème suivant, où  $Q, P, K, T, G$  désignent respectivement un opérateur pseudo-différentiel sur  $\partial\Omega$  un opérateur pseudo-différentiel de type 0 sur  $\Omega$ , un noyau de Poisson, un opérateur trace, un noyau de Green singulier analytiques sur  $\Omega$ .

### THÉORÈME 6.1.

$$1) \quad (G\varphi K)_{\Omega'}, \quad (P_{\Omega}\varphi K)_{\Omega'}, \quad (K\varphi Q)_{\Omega'}$$

sont des noyaux de Poisson analytiques sur  $\Omega'$ .

$$2) \quad (T\varphi G)_{\Omega'}, \quad (T\varphi P_{\Omega})_{\Omega'}, \quad (Q\varphi T)_{\Omega'}$$

sont des opérateurs trace analytique sur  $\Omega'$

$$3) \quad (G^1\varphi G^2)_{\Omega'}, \quad (G\varphi P_{\Omega})_{\Omega'}, \quad (P_{\Omega}\varphi G)_{\Omega'}, \quad (T\varphi K)_{\Omega'},$$

et  $(P^1\varphi P^2)_{\Omega'} - (P_{\Omega}^1\varphi P_{\Omega}^2)_{\Omega'}$

sont des noyaux de Green singuliers analytiques sur  $\Omega'$ .

4)  $(T\varphi K)_{\partial\Omega'}$  est un opérateur pseudo-différentiel analytique sur  $\partial\Omega'$ .

Tous ces théorèmes se prouvent de la même manière. Il convient d'abord d'introduire la notion de famille bornée d'opérateurs analytiques d'un des types décrits ci-dessus :

(6.1) Une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'opérateurs pseudo-différentiels analytiques sur  $\Omega$  (resp. de noyaux de Poisson analytiques, etc...) est bornée si

a) le noyau-distribution  $A_i(x, y)$  de  $A_i$  parcourt un ensemble borné de fonctions analytiques jusqu'au bord hors de la diagonale de  $\Omega$  (resp.  $\partial\Omega$ , resp. et dans le cas d'un opérateur de classe  $\leq p$  où  $p \geq 1$ , dont le noyau-distribution se met sous la forme

$$A(x, y) + \sum_0^{p-1} A_j(x, y') (\delta)_{\Omega}^{(j)}(y)$$

$A$  et les  $A_j$  parcourent un ensemble borné de fonctions analytiques jusqu'au bord sur  $\Omega \times \Omega - \Delta$ ,  $\Omega \times \partial\Omega - \Delta$ ,  $\partial\Omega \times \Omega - \Delta$ ,  $\partial\Omega \times \partial\Omega - \Delta$  suivant les cas,  $\Delta$  désignant la diagonale de  $\partial\Omega$ ;

b) et, localement, dans la série de définition (2.1) (resp. Définition 3.6, Définition 4.1, (5.1)). la série converge uniformément dans un domaine du type décrit, et le reste parcourt un ensemble borné de fonctions analytiques jusqu'au bord au voisinage de la diagonale de  $\Omega$  ou  $\partial\Omega$  (resp. dans le cas d'un opérateur de classe  $\leq p$ , où  $p > 0$ , il faut faire les mêmes modifications que ci-dessus).

Si  $A_i$  est une famille bornée d'opérateurs analytiques, les  $A_i$  admettent localement une représentation par intégrale de Fourier du type (2.6) (resp. (3.6), (4.5), (5.5)) :

$$(6.2) \quad A_i(f) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a_i(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi + R_i(f)$$

où  $R_i$  parcourt une famille bornée d'opérateurs négligeables analytiques, et les  $a_i(x, \xi)$  vérifient uniformément les inégalités (2.7) (resp. (3.5), (4.6), (5.6)) : cela se prouve par la méthode de [3], § 2.4.

Pour en revenir au théorème 6.1, remarquons d'abord que toutes les assertions sont locales, car le noyau de  $(A \circ B)_{\Omega'}$  est en tout cas une fonction analytique hors de la diagonale de  $\Omega'$  ou  $\partial\Omega'$  (ou dans le cas d'un opérateur de classe  $p$ ,

est somme de distributions-dérivées par rapport à  $y$  de fonctions  $f(x, y)$  analytiques jusqu'au bord hors de la diagonale de i.e. de la forme  $R(x, y) + \sum_0^{p-1} R_j(x, y') (\delta)_{\partial\Omega}^{(j)}(y)$ , où  $R$  et les  $R_j$  sont analytiques jusqu'au bord hors de la diagonale de  $\partial\Omega$ ).

On a alors les résultats suivants :

1)  $(A\varphi B_i)_{\Omega'}$  parcourt un ensemble borné si  $B_i$  parcourt un ensemble borné d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques, en particulier si  $B_i$  parcourt un ensemble borné de multiplicateurs par une fonction analytique : cela résulte immédiatement de la démonstration de la proposition 3.7 et des résultats analogues des § 4 et § 5.

2)  $(A_i\varphi B_j)_{\Omega'}$  parcourt un ensemble borné si  $B_j$  parcourt un ensemble borné d'opérateurs dont le symbole complet ne dépend pas de  $x \in \Omega$ , ou  $x' \in \partial\Omega$  (dans le cas où  $\Omega$  est inclus dans le demi-espace  $R_+$ ), et  $A_i$  parcourt un ensemble borné d'opérateurs.

Pour démontrer cela, on utilise la représentation intégrale (6.2) ci-dessus : on peut supposer que la fonction  $b_i(x, \xi)$  qui y intervient ne dépend pas de  $x$ .

Le cas général se déduit immédiatement de ces deux résultats par la technique des produits tensoriels topologiques :

le deuxième opérateur  $B$  admet au voisinage de  $\text{supp } \varphi$  une représentation intégrale

$$B = \int f_t \circ B_t dt + R$$

où  $R$  est négligeable analytique,  $B_t$  parcourt un ensemble borné d'opérateurs « à coefficients constants »,  $f_t$  parcourt un ensemble borné d'opérateurs de multiplication (par une fonction analytique). (En fait, puisqu'on peut supposer le support de  $\varphi$  très petit, on obtient la formule ci-dessus en faisant un développement de Taylor, ou en utilisant la formule de Cauchy, dans (6.2).)

On a alors

$$(A \circ \varphi \circ B)_{\Omega'} = \int (A \circ \varphi \circ f_t \circ B_t)_{\Omega'} dt + (A \circ \varphi \circ R)_{\Omega'}.$$

Le reste  $(A \circ \varphi \circ R)_{\Omega'}$  est évidemment négligeable, analy-



tique. Dans l'intégrale,  $f_t$  et  $\varphi$  commutent;  $A \circ f_t$  parcourt un ensemble borné d'opérateurs analytiques,  $B_t$  aussi, donc le « composé »  $(A \circ \varphi \circ f_t \circ B_t)_{\Omega'}$  aussi, et l'intégrale est parfaitement convergente.

Bien entendu le deuxième résultat ci-dessus doit être vérifié dans chaque cas.

Nous nous contenterons d'examiner en détail le cas de  $(P^1 \varphi P^2)_{\Omega'}$  —  $(P^1_{\Omega} \varphi P^2_{\Omega})_{\Omega'}$ , et laissons au lecteur l'examen des autres cas.

2. Soient donc  $P^1$  et  $P^2$  deux opérateurs pseudo-différentiels analytiques, de type 0 sur  $\Omega$ .

Nous supposons  $\Omega$  plongé dans  $R^n_+$ , et, conformément aux indications ci-dessus, que  $P^2$  est un opérateur de convolution. Nous supposons aussi pour commencer que  $P^1$  est un opérateur de convolution.

Quitte à modifier  $P^1$  et  $P^2$  par des opérateurs négligeables analytiques, nous supposons qu'ils sont définis par les formules

$$\begin{aligned} P^1 f &= p^1(\xi) \hat{f} \\ P^2 f &= p^2(\xi) \hat{f} \end{aligned}$$

où les fonctions  $p^1$  et  $p^2$  vérifient les conditions (2.7) du § 2.

Le composé  $P^1(1 - \varphi)P^2$  est alors parfaitement défini, et son noyau-distribution est une fonction analytique sur  $V' \times V'$  si  $V'$  est un voisinage convenable de  $\Omega'$ . Il parcourt même visiblement un ensemble borné de fonctions analytiques si  $P^1$ ,  $P^2$  parcourent des ensembles bornés d'opérateurs pseudo-différentiels analytiques de convolution.

On pourra donc supposer dans la suite  $\varphi = 1$ , et  $\Omega = \Omega' = R^n_+$ .

Nous distinguons maintenant deux cas :

a)  $P^2$  est un opérateur différentiel, de degré  $m$ , à coefficients analytiques.

On a alors au sens des distributions

$$P^2 f = P^2_{\Omega} f + G^2 f$$

où  $G^2$  est le noyau de Green singulier analytique généralisé décrit au § 5. On en déduit immédiatement qu'avec

$$G = (P^1 P^2)_{\Omega} - (P^1_{\Omega} P^2_{\Omega})$$

on a

$$\widehat{Gf} = h_{\xi_n}^{\dagger}(p'(\xi)\widehat{G^2f}).$$

Il résulte alors des inégalités (2.1) vérifiées par les fonctions  $p^1$  et  $p^2$ , et du fait que  $h^+$  est une opération linéaire continue sur l'espace des fonctions holomorphes, méromorphes à l'infini dans l'ensemble  $|t + iR| > (R - \varepsilon)$ , que  $G$  vérifie les conditions de la définition 5.1.

Le symbole de  $G$  est dans ce cas :

(6.3)

$$\sigma(G) = h_{\xi_n}^{\dagger}[\sigma(P^1)(\xi', \xi_n) \cdot (\sigma(P^2)(\xi', \xi_n) - \sigma(P^2)(\xi', \eta_n)(i\xi_n - i\eta_n)^{-1})]$$

où le produit  $\sigma(P^1) \cdot \sigma(P^2)$  désigne le produit habituel de séries formelles. (Cela résulte de la formule (5.15).)

b) On suppose maintenant que  $P^2$  vérifie la condition suivante :

$$P^2(\xi', \xi_n) = 0\left(\frac{1}{\xi_n}\right) \quad \text{quand} \quad \xi_n \rightarrow \infty \quad (\xi' \text{ fixé}).$$

On a alors, avec  $G = (P^1 P^2)_{\Omega} - P_{\Omega}^1 P_{\Omega}^2$

$$\widehat{Gf} = h_{\xi_n}^{\dagger}[P^1(1 - h^+)(P^2 \hat{f})] = h_{\xi_n}^{\dagger}[P_+^1 H_{\xi_n}^-(P^2 - \hat{f})].$$

Si on pose  $P_+^1 = h_{\xi_n}^{\dagger} P^1$ ,  $P_-^2 = H_{\xi_n}^- P^2 = h_{\xi_n}^- P^2$ .

Donc on a

$$\begin{aligned} & \widehat{Gf}(\xi', \xi_n) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\delta \rightarrow +0} (2i\pi)^{-2} \int P_+^1(\xi', t)(\xi_n - t - i\varepsilon)^{-1} dt \\ & \quad \int P_-^2(\xi', \eta_n) \hat{f}(\xi', \eta_n)(\eta_n - t - i\delta)^{-1} d\eta_n \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\delta \rightarrow +0} (2i\pi)^{-2} \int P_-^2(\xi', \eta_n) \hat{f}(\xi', \eta_n) d\eta_n \\ & \quad \int P_+^1(\xi', t)(\xi_n - t - i\varepsilon)^{-1}(\eta_n - t - i\delta)^{-1} dt \\ &= (2\pi)^{-1} \int i(P_+^1(\xi', \xi_n) - P_+^1(\xi', \eta_n))(\xi_n - \eta_n)^{-1} \\ & \quad P_-^2(\xi', \eta_n) \hat{f}(\xi', \eta_n) d\eta_n \end{aligned}$$

(on a utilisé la formule de Cauchy, et la relation

$$\begin{aligned} & (\xi_n - t - i\varepsilon)^{-1}(\eta_n - t - i\delta)^{-1} \\ &= -(\xi_n - i\varepsilon - \eta_n + i\delta)^{-1}[(\xi_n - t - i\varepsilon)^{-1} - (\eta_n - t - i\delta)^{-1}] \end{aligned}$$

On trouve finalement

$$\widehat{Gf} = (2\pi)^{-1} \int^+ g(\xi', \xi_n, \eta_n) \hat{f}(\xi', \eta_n) d\eta_n$$

avec

$$(6.4) \quad g(\xi', \xi_n, \eta_n) \\ = -H_{\eta_n}^-[ (P_+^1(\xi', \xi_n) - P_+^1(\xi', \eta_n))(i\xi_n - i\eta_n)^{-1} P_-^2(\xi', \eta_n) ].$$

Ici encore on voit que  $G$  est un opérateur de Green singulier analytique.

Dans le cas général,  $P^2$  est somme d'un opérateur différentiel et d'un opérateur qui vérifie la condition du  $b$  ci-dessus : l'opérateur différentiel a pour symbole la partie polynomiale  $e_{\xi_n} \sigma(P^2)$  (formule (0.4)) (c'est bien un polynôme de  $\xi$  : si  $P^2$  a pour symbole  $\Sigma P_k(\xi', \xi_n)$ , on voit en utilisant l'homogénéité des  $P_k$ , la condition de symétrie qui exprime qu'ils sont de type 0, et la formule de Taylor au voisinage de la droite  $\xi' = 0$ , qu'on a

$$P^2(\xi) = \sum_{d-k-|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} P_k^{(\alpha)}(0, 1) \xi'^\alpha \xi_n^{d-k-|\alpha|} + 0(|\xi'|^{d+1} |\xi|^{-1}).$$

En regroupant les deux formules ci-dessus, on obtient la suivante dans laquelle  $L(p^1, p^2)$  désigne le symbole final obtenu (pour  $G = (P^1 P^2)_\Omega - P_\Omega^1 P_\Omega^2$ ), et comme ci-dessus,

$P_+^1(\xi) = h_{\xi_n}^+ P^1(\xi)$  désigne la « partie holomorphe pour  $\text{im } \xi_n < 0$ , nulle à l'infini » de  $P^1$  (0.1)

$P_-^2(\xi) = H_{\xi_n}^- P^2(\xi)$  désigne la « partie holomorphe pour  $\text{im } \xi_n > 0$  » de  $P^2$  :

$$(6.5) \quad L(P^1, P^2) = h_{\xi_n}^+ H_{\eta_n}^- [ (P_+^1(\xi', \xi_n) - P_+^1(\xi', \eta_n)) \\ (P_-^2(\xi', \xi_n) - P_-^2(\xi', \eta_n))(i\xi_n - i\eta_n)^{-1} ]$$

(en effet dans la formule (6.5), le deuxième membre ne dépend pas de  $P_+^1(\xi', \eta_n)$  si  $P^2$  est un polynôme, et de toute façon, ne dépend que de la partie polynomiale de  $P_-^2(\xi', \xi_n)$ ).

Dans le cas général, le symbole de  $P^1$  dépend de  $x$ , et nous pouvons supposer que  $P^1$  est défini par

$$P^1(f) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} P^1(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Alors l'opérateur  $G = (P^1 P^2)_\Omega - P_\Omega^1 P_\Omega^2$  est donné par la formule

$$G(f) = (2\pi)^{-n-1} \int e^{ix'\xi'} d\xi' \int^+ d\xi_n \int^+ g(x, \xi', \xi_n, \eta_n) \hat{f}(\xi', \eta_n) d\eta_n$$

avec  $g(x)\xi', \xi_n, \eta_n = L[P^1(x, \xi), P^2(\xi)]$  où  $L$  est l'opérateur bilinéaire défini ci-dessus. (Le fait que dans cette formule,  $g$  dépend de  $x = (x', x_n)$ , et pas seulement de  $x'$ , n'est pas gênant (cf. § 3, n° 5).)

Enfin il est clair que  $G$  parcourt un ensemble borné d'opérateurs quand  $P^1$  et  $P^2$  parcourent des ensembles bornés.

3. Les autres propositions se démontrent de façon analogue. Les tableaux qui suivent décrivent le symbole principal, puis dans le cas où  $\Omega$  est plongé dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^n$ , la série qui représente le symbole complet, pour les composés décrits dans le théorème 6.1.

$$(6.6) \text{ (i) } \sigma_0(G\varphi K)_{\Omega'} = \int^+ \sigma_0(G)\sigma_0(K) \\ = \left( \int^+ g_0(x', \xi', \xi_n, \eta_n) k_0(x', \xi', \eta_n) d\eta_n \right) d\xi_n,$$

$$(ii) \quad \sigma_0(P_\Omega \varphi K)_{\Omega'} = h_{\xi_n}^+ \sigma_0(P)\sigma_0(K),$$

$$(iii) \quad \sigma_0(K\varphi Q)_{\Omega'} = \sigma_0(K)\sigma_0(Q).$$

$$(6.7) \text{ (i) } \sigma_0(T\varphi G)_{\Omega'} = \int^+ \sigma_0(T)\sigma_0(G) \\ = \int^+ t_0(x', \xi', \xi_n) g_0(x', \xi', \xi_n, \eta_n) d\xi_n,$$

$$(ii) \quad \sigma_0(T\varphi P_\Omega)_{\Omega'} = H^- \sigma_0(T)\sigma_0(P),$$

$$(iii) \quad \sigma_0(Q\varphi T)_{\Omega'} = \sigma_0(Q)\sigma_0(T).$$

$$(6.8) \text{ (i) } \sigma_0(G^1 \varphi G^2)_{\Omega'} \\ = \left( \int^+ g_0^1(x', \xi', \xi_n, t) g_0^2(x', \xi', t, \eta_n) dt \right) d\xi_n,$$

$$(ii) \quad \sigma_0(P_\Omega \varphi G)_{\Omega'} = h_{\xi_n}^+ \sigma_0(P)\sigma_0(G),$$

$$(iii) \quad \sigma_0(G\varphi P_\Omega)_{\Omega'} = H_{\eta_n}^- \sigma_0(G)\sigma_0(P),$$

$$(iv) \quad \sigma_0(K\varphi T)_{\Omega'} = \sigma_0(K)(\xi', \xi_n)\sigma_0(T)(\xi', \eta_n),$$

$$(v) \quad \sigma_0((P^1 \varphi P^2)_{\Omega'} - (P_\Omega^1 \varphi P_\Omega^2)_{\Omega'}) = L(\sigma_0(P^1), \sigma_0(P^2))$$

( $L$  étant défini comme ci-dessus (6.5)).

$$(6.9) \quad \sigma_0(T\varphi K)_{\Omega'} = \int^+ t_0(x', \xi', t) k_0(x', \xi', t) dt.$$

Complétons ces formules par les suivantes, qui résultent de la démonstration de la proposition 3.8 :

$$\begin{aligned}
 (6.10) \quad (i) \quad & \sigma_0(x_n^q K) = \left(i \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^q \sigma_0(K), \\
 (ii) \quad & \sigma_0(T x_n^q) = \left(-i \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^q \sigma_0(T), \\
 (iii) \quad & \sigma_0(x_n^p G x_n^q) = \left(i \frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^p \left(-i \frac{\partial}{\partial \eta_n}\right)^q \sigma_0(G).
 \end{aligned}$$

Compte tenu de ces formules, et de la méthode de développement en série du noyau distribution du composé d'un de nos opérateurs  $A$  avec un multiplicateur par une fonction analytique, on trouve alors pour les symboles complets :

$$\begin{aligned}
 (6.11) \quad (i) \quad & \sigma(GK) = \sum_{\gamma} \frac{i^{|\gamma|}}{\gamma!} \int^+ \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{\gamma} \sigma(G)(x', \xi', \xi_n, t) \\
 & \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\gamma} \sigma(K)(x', \xi', t) dt, \\
 (ii) \quad & \sigma(P_{\Omega} K) = \sum_{p, \gamma} \frac{i^{p-|\gamma|}}{p! \gamma!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^p h \xi_n \\
 & \quad \left[ \left( \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{\gamma} \sigma(P)(x', 0, \xi', \xi_n) \right) \cdot \left( \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\gamma} \sigma(K)(x', \xi', \xi_n) \right) \right], \\
 (iii) \quad & \sigma(KQ) = \sum_{\gamma} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{\gamma} \sigma(K)(x', \xi', \xi_n) \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\gamma} \sigma(Q)(x', \xi'). \\
 (6.12) \quad (i) \quad & \sigma(TG) = \sum_{\gamma} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!} \int^+ \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{\gamma} \sigma(T)(x', \xi', t) \\
 & \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\gamma} \sigma(G)(x', \xi', t, \eta_n) dt, \\
 (ii) \quad & \sigma(TP_{\Omega}) = \sum_{p, \gamma} \frac{i^{-p-|\gamma|}}{p! \gamma!} H \bar{\xi}_n \\
 & \quad \left[ \left( \left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{\gamma} \sigma(T)(x', \xi', \xi_n) \right) \cdot \left( \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\gamma} \sigma(P)(x', 0, \xi', \xi_n) \right) \right], \\
 (iii) \quad & \sigma(QT) = \sum_{\gamma} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{\gamma} \sigma(Q)(x', \xi') \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\gamma} \sigma(T)(x', \xi', \xi_n). \\
 (6.13) \quad (i) \quad & \sigma(G^1 G^2) = \sum_{\gamma} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!} \int^+ \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{\gamma} \sigma(G^1)(x', \xi', \xi_n, t) \\
 & \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\gamma} \sigma(G^2)(x', \xi', t, \eta_n) dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \sigma(P_\Omega G) &= \sum_{p, \gamma} \frac{i^{p-|\gamma|}}{p! \gamma!} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^p h_{\xi_n}^\dagger \\
&\quad \left[ \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^p \left( \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^\gamma \sigma(P)(x', \xi', \xi_n) \right) \left( \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)^\gamma \sigma(G)(x', \xi', \xi_n, \eta_n) \right) \right], \\
\text{(iii)} \quad \sigma(GP_\Omega) &= \sum_{p, \gamma} \frac{i^{-p-|\gamma|}}{p! \gamma!} H_{\eta_n}^- \\
&\quad \left[ \left( \left( \frac{\partial}{\partial \eta_n} \right)^p \left( \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^\gamma \sigma(G)(x', \xi', \xi_n, \eta_n) \right) \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^p \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)^\gamma \sigma(P)(x', 0, \xi', \eta_n) \right) \right], \\
\text{(iv)} \quad \sigma(KT) &= \sum_\gamma \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!} \left( \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^\gamma \sigma(K)(x', \xi', \xi_n) \\
&\quad \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)^\gamma \sigma(T)(x', \xi', \eta_n), \\
\text{(v)} \quad \sigma((P^1 P^2)_\Omega - P_\Omega^1 P_\Omega^2) &= \sum_{p, q, \gamma} \frac{i^{p-q-|\gamma|}}{p! q! \gamma!} \\
&\quad \left( \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^p L \left[ \left( \left( \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^q \left( \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^\gamma \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^p \sigma(P^1)(x', 0, \xi', \xi_n), \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^q \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)^\gamma \sigma(P^2)(x', 0, \xi', \xi_n) \right) \right] \right], \\
(6.14) \quad \sigma(TK) &= \sum_\gamma \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!} \int^\gamma \left( \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^\gamma \sigma(T)(x', \xi', t) \\
&\quad \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)^\gamma \sigma(K)(x', \xi', t) dt.
\end{aligned}$$

Dans toutes les formules,  $\gamma$  parcourt l'ensemble des multi-indices de dérivation sur  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Et si  $\sigma(A) = \sum a_p$ ,  $\sigma(B) = \sum b_q$  sont deux symboles, le produit  $\sigma(A) \cdot \sigma(B)$  désigne le produit habituel des séries formelles, dans lequel on regroupe les termes de même degré :  $\sigma(A)\sigma(B) = \sum a_p b_q = \sum_r \sum_{p+q=r} a_p b_q$ .

4. Nous terminons ce paragraphe par la proposition suivante.

**PROPOSITION 6.2.** — Soit  $G$  un noyau de Green singulier analytique de degré  $-1$ , de classe  $\leq p$ , sur  $\Omega$ . Il existe alors un noyau de Green singulier analytique de degré  $-1$ , de classe  $\leq p$  sur  $\Omega$  :  $G'$  tel que  $(1 - (1 + G')\varphi(1 - G))_\Omega$  soit négligeable sur  $\Omega'$ .

Le symbole complet de  $G'$  est nécessairement  $\sum \sigma(G)^k$  (les puissances successives du symbole de  $G$  doivent être prises ici au sens de la loi de composition de la formule (6.13) (i))

Il suffit donc de montrer que la somme de cette série est un symbole analytique de classe  $\leq p$ , i.e., vérifie localement les inégalités (5.3). Pour cela, observons que les termes du symbole de  $G$  sont des fonctions holomorphes de  $\xi_n, \eta_n$ , nulles pour  $\xi_n \rightarrow \infty$ , ayant un pôle d'ordre  $\leq p - 1$  en  $\eta_n$  pour  $\eta_n \rightarrow \infty$ , et continues à la frontière, dans le domaine complexe :

$$\begin{aligned} |\xi_n + iR|\xi'| &\geq (R - \varepsilon)|\xi'|, \\ |\eta_n - iR|\xi'| &\geq (R - \varepsilon)|\xi'| \end{aligned}$$

si  $R$  et  $\varepsilon$  sont choisis convenablement.

Les fonctions de deux variables ayant ces propriétés forment un espace de Banach (pour  $|\xi'| = 1$  fixé), sur lequel l'application

$$(f, g) \rightarrow \int^+ f(\xi_n, t)g(t, \eta_n) dt$$

est une application bilinéaire continue, de norme  $\leq 1$  si les normes ont été bien choisies.

A partir de là, en remplaçant les valeurs absolues qui y figurent par les normes dans notre espace de Banach, et compte tenu de la formule (6.12 (i)), la démonstration est exactement la même que dans (3) § 1.1 (avec la même norme formelle).

## 7. L'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels. Opérateurs généralisés et transposition.

### 1. Opérateurs pseudo-différentiels sur $\Omega$ .

$\Omega$  désigne comme toujours une variété à bord analytique réelle, plongée dans une variété ambiante  $V$ . Au paragraphe 2, nous avons construit une première famille d'opérateurs linéaires continus  $P_\Omega: \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{E}'(\overline{\Omega})$  définis comme suit :

il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $\overline{\Omega}$  dans  $V$  et un opérateur pseudo-différentiel analytique  $P$  sur  $U$  tels que  $P_\Omega(f) = P(\tilde{f})/\Omega$  (où  $\tilde{f}$  désigne le prolongement de  $f$  par 0).

En fait l'opérateur  $P_\Omega$  ainsi défini ne dépend que du noyau-distribution de  $P$  dans  $\Omega \times \Omega$ , et pas du choix de  $U$ , ni même de  $V$  (parce que deux variétés analytiques voisinage de  $\overline{\Omega}$  sont isomorphes, de façon unique, au voisinage de  $\overline{\Omega}$ , et deux opérateurs pseudo-différentiels analytiques définis

au voisinage de  $\bar{\Omega}$  qui ont même noyau-distribution dans  $\Omega \times \Omega$  ont même noyau dans un voisinage de  $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ . Dans la notation  $P_\Omega$ , on pourra considérer par exemple que  $P$  est un germe d'opérateur pseudo-différentiel analytique au voisinage de  $\bar{\Omega}$ ; et  $P_\Omega$  est l'opérateur « canoniquement » associé à ce germe.

En fait  $P_\Omega$  se prolonge continûment  $\mathcal{E}'(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ . Il diminue le support singulier et le support singulier analytique, et il respecte aussi localement la régularité  $C^\infty$  ou l'analyticité jusqu'au bord.

*Remarque.* — Si  $f$  est une distribution portée par  $\bar{\Omega}$ ,  $P_\Omega(f)$  est une distribution sur  $\Omega$ . Cette distribution est bien sûr prolongeable, et est en particulier prolongeable en une distribution portée par  $\bar{\Omega}$ . Mais il n'est en général pas possible de choisir le prolongement de façon qu'il dépende continuellement de  $f$ , et que ce soit précisément  $\widetilde{P_\Omega(f)}$  si  $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ .

**DÉFINITION 7.1.** — *Un opérateur pseudo-différentiel analytique sur  $\Omega$  est un opérateur linéaire continu  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{E}(\bar{\Omega})$ , de la forme  $P_\Omega + G$ , où  $P_\Omega$  est associé à un opérateur pseudo-différentiel analytique de type 0 défini, au voisinage de  $\bar{\Omega}$ , comme ci-dessus, et  $G$  est un opérateur de Green singulier analytique (de degré entier).*

Un tel opérateur respecte localement la régularité  $C^\infty$ , et l'analyticité, jusqu'au bord. Il se prolonge en un opérateur continu  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) + \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\bar{\Omega}) + \mathcal{E}'(\Omega)$ . (Par contre, sauf si  $G$  est de classe 0, il ne se prolonge pas en général à  $\mathcal{E}'(\bar{\Omega})$ .)

Comme aux paragraphes 3, 4, 5, on définit un opérateur pseudo-différentiel généralisé sur  $\Omega$ : c'est la somme d'un opérateur pseudo-différentiel sur  $\Omega$  et d'un opérateur de Green singulier généralisé. Un tel opérateur est continu  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  (en fait continu  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{E}_{-m}(\bar{\Omega})$  pour masser grand).

## 2. Classe d'un opérateur pseudo-différentiel.

**DÉFINITION 7.2.** — *Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel (de type 0) défini au voisinage de  $\bar{\Omega}$ . Nous dirons que  $P$  est de classe  $m$  (relativement à  $\partial\Omega$ ) si son symbole complet  $\Sigma p_k(x, \xi)$*



a la propriété suivante : pour tout  $x \in \partial\Omega$ , et pour tout  $k$  entier  $\geq 0$  et tout  $l$  entier  $\geq 0$ ,

$$\xi_n^{-l-m} \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^l p_k(x, \xi)$$

reste borné quand  $\xi_n \rightarrow \infty$  (les autres variables étant fixées).

Cette définition suppose bien sûr qu'on a choisi un système de coordonnées, pour y exprimer le symbole de  $P$  par la série  $\Sigma p_k(x, \xi)$ . Mais on vérifie immédiatement que la condition ne dépend pas du système de coordonnées choisi.

Remarquons aussi qu'il n'y a en fait qu'un nombre fini de conditions (parce que  $\xi_n^{-l-m} \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^l p_k$  est en tout cas borné quand  $\xi_n \rightarrow \infty$  ( $x, \xi'$  fixés) si  $l + m + k$  dépasse le degré de  $P$ ).

On dira aussi que l'opérateur pseudo-différentiel  $P_\Omega + G$  sur  $\Omega$  est de classe  $m$  si  $G$  est de classe  $m$  et si  $P$  est de classe  $m$  relativement à  $\partial\Omega$ .

*Exemples.* — Si  $P$  est de degré  $m$ , il est de classe  $m$ . Si  $P$  (resp.  $P'$ ) est de classe  $m$  (resp.  $m'$ ),  $PP'$  est de classe  $m + m'$  <sup>(13)</sup>. Il en est de même de  $P_\Omega P'_\Omega$  (les formules (6.13) (v), (6.5) montrent que  $(PP')_\Omega - P_\Omega P'_\Omega$  est un opérateur de Green de classe  $m$ ).

Sur le demi-espace  $R_+^n$ , un opérateur différentiel tangentiel  $P\left(x, \frac{\partial}{\partial x'}\right)$  est de classe 0; l'opérateur  $x_n^k \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{m+k}$  est de classe  $m$ . Plus généralement, le lecteur vérifiera que (7.1) l'opérateur différentiel  $\Sigma a_k \left( x, \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k$  est de classe  $m$  si et seulement si pour tout  $k$ , les coefficients de  $a_k$  s'annulent à l'ordre  $k - m$  sur le bord  $R^{n-1}$ .

On a en outre les résultats suivants :

**LEMME 7.3.** — *Un opérateur pseudo-différentiel de type 0 sur  $V$  est (au moins localement) somme d'un opérateur différentiel et d'un opérateur pseudo-différentiel de classe 0 (relativement à  $\partial\Omega$ ).*

<sup>(13)</sup> Pour simplifier la notation, nous omettons la fonction  $\varphi$  qui sert à tronquer, comme au 6, avant de composer.

LEMME 7.4. — *Tout opérateur pseudo-différentiel (de type 0) de classe  $m$  (relativement à  $\partial\Omega$ ) se met au moins localement sous la forme*

$$P = \Sigma Q_k \circ P_k$$

où  $P_k$  est de degré au plus  $m$ , et  $Q_k$  est un opérateur différentiel de classe 0.

*Preuve.* — Nous supposons que  $V$  est l'espace numérique  $R^n$ , et  $\bar{\Omega}$  le demi-espace  $\bar{R}_+^n$ . Le lemme 7.3 a déjà été prouvé au § 6 : la partie « polynôme différentiel » de  $P$  a pour symbole la partie polynomiale de  $\sigma(P)$  :

$$e_{\xi_n}[\sigma(P)(x, \xi)]$$

(on a déjà remarqué au § 6 que  $\rho_{\xi_n}\sigma(P)$  est un polynôme de  $\xi$  :

$$(7.2) \quad e_{\xi_n}\sigma(P) = \sum_{d-k-|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \left( \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^\alpha P_k(x, 0, 1) \xi'^\alpha \xi_n^{d-k-|\alpha|}$$

si  $\sigma(P) = \Sigma P_k(x, \xi', \xi_n)$ ).

On prouve le lemme 7.4 par récurrence descendante sur  $m$  : comme c'est vrai si  $P$  est de degré  $m$ , il suffit de prouver que si  $P$  est de degré  $m$  et de classe  $m-1$  ( $m > 0$ ), il se décompose sous la forme

$$P = P_0 + \sum_1^{n-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \circ P_j + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \circ P_n$$

où  $P_0, P_1, \dots, P_n$  sont de degré  $m-1$ .

Or soit  $p_0(x, \xi)$  le symbole principal de  $P$ . On a

$$p_0(x, \xi) = p'_0(x, \xi) + x_n p''_0(x, \xi)$$

avec

$$\begin{aligned} p'_0(x, \xi) &= p_0(x', 0, \xi) \\ p''_0(x, \xi) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_n} p_0(x', tx_n, \xi) dt \end{aligned}$$

$p'_0$  est homogène de degré  $m$ , donc  $p'_0 = \frac{1}{m} \Sigma \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} p'_0$ .

Si  $P$  est de classe  $m-1$ , on a  $p'_0(x, 0, \xi_n) = 0$ , donc

$$p'_0 = \sum_1^{n-1} \xi_j \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi_j} p'_0(x, t\xi', \xi_n) dt.$$

En regroupant ces résultats, on obtient pour  $p_0$  une décomposition

$$p_0 = \sum_{j=1}^{n-1} (i\xi_j) p_j + ix_n \xi_n p_n.$$

Il suffit alors de prendre pour  $P_1, \dots, P_n$  des opérateurs ayant pour symboles respectifs  $p_1, \dots, p_n$ , et de définir  $P_0$  par la formule ci-dessus ( $P_0$  est alors de degré  $m - 1$ ).

### 3. Transposés. Formule de Green.

Dans ce numéro, nous considérons un opérateur pseudo-différentiel sur  $\Omega$  (resp. opérateur de Poisson, opérateur trace, généralisés ou non) comme un opérateur continu  $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  (resp.  $\mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}'(\partial\Omega)$ ). Et c'est en tant que tels que nous transposons ces opérateurs.

Naturellement le transposé opère en principe sur des espaces de courants tordus d'ordre  $n$  ou  $n - 1$  sur  $\overline{\Omega}$  ou  $\partial\Omega$ , et nous identifions ces espaces à des espaces de fonctions, une fois choisies des mesures (à densités analytiques) sur  $\overline{\Omega}$  et  $\partial\Omega$ .

On a tout d'abord les résultats suivants.

**PROPOSITION 7.5.** — (i) *Le transposé d'un opérateur de Poisson est un opérateur trace de classe 0.*

(ii) *Le transposé d'un opérateur d'extension pur est un opérateur de trace pur.*

(iii) *Le transposé d'un opérateur trace est un opérateur de Poisson généralisé.*

(iv) *Le transposé d'un opérateur de Green singulier de classe 0 est un opérateur de Green singulier de classe 0.*

(v) *Le transposé d'un opérateur de Green singulier généralisé (resp. de classe 0) est un opérateur de Green singulier généralisé (resp. normal).*

Nous nous contenterons d'indiquer la démonstration quand  $\Omega$  est plongé dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^n$ .

(i) est en fait la définition d'un opérateur trace de classe 0 (§ 4.) preuve de (ii) : le transposé de l'opérateur d'extension pur

$$E_k : f \rightarrow f \delta^{(k)}(x_n).$$

est l'opérateur de trace pur

$${}^tE_k = (-1)^k \text{Tr}_k: f \rightarrow (-1)^k \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(x', +0).$$

Comme le transposé d'un opérateur pseudo-différentiel analytique sur le bord  $\partial\Omega$  en est encore un ([3] § 2 n° 5), ceci démontre (ii).

(iii) résulte immédiatement de (i) et (ii).

(iv) se démontre exactement de la même façon que pour un opérateur pseudo-différentiel analytique (cf [3] § 2 n° 5), à partir du fait que le symétrique d'un noyau de Green élémentaire:  $G(-x, -y_n, -x_n)$  en est encore un. Nous laissons au lecteur les détails de la démonstration.

Enfin (v) résulte de ce qui précède, et du fait qu'un opérateur de Green singulier (resp. opérateur de Green singulier généralisé de classe 0, opérateur de Green singulier généralisé) admet une décomposition en somme :

$$\begin{aligned} G &= G_0 + \sum K_j \circ \text{Tr}_j, \\ \text{resp. } G &= G_0 + \sum E_j \circ T_j, \\ G &= G_0 + \sum K_j \text{Tr}_j + \sum E_j T_j + \sum E_i Q_{ij} \text{Tr}_j \end{aligned}$$

où  $G_0$  est un opérateur de Green singulier de classe 0,  $E_j$ ,  $\text{Tr}_j$  sont les opérateurs d'extension et de trace purs ci-dessus, et  $K_j$ ,  $T_j$ ,  $Q_{ij}$  sont respectivement des opérateurs de Poisson, des opérateurs trace de classe 0, et des opérateurs pseudo-différentiels sur le bord.

En examinant la décomposition en série des noyaux au voisinage de la diagonale du bord  $\partial\Omega$ , on obtient pour les symboles les formules suivantes :

$$\begin{aligned} (7.3) \quad \sigma({}^tK)(x', \xi) &= \sum_{\gamma} \frac{i^{|\gamma|}}{\gamma!} \left( \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^{\gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)^{\gamma} \sigma(K)(x', -\xi', -\xi_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7.4) \quad \sigma({}^tT)(x', \xi) &= \sum_{\gamma} \frac{i^{|\gamma|}}{\gamma!} \left( \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^{\gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)^{\gamma} \sigma(T)(x', -\xi', -\xi_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7.5) \quad \sigma({}^tG)(x', \xi', \xi_n, \eta_n) &= \sum_{\gamma} \frac{i^{|\gamma|}}{\gamma!} \left( \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^{\gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)^{\gamma} \sigma(G)(x', -\xi', -\eta_n, -\xi_n). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant prouver

**PROPOSITION 7.6.** — *Le transposé d'un opérateur pseudo-différentiel analytique généralisé sur  $\Omega$  est encore un opérateur pseudo-différentiel analytique généralisé sur  $\Omega$ .*

*Preuve.* — Comme c'est déjà vrai pour les opérateurs de Green singuliers analytiques, il suffira de le prouver pour l'opérateur  $P_\Omega$  associé à un opérateur pseudo-différentiel de type 0,  $P$ , défini au voisinage de  $\bar{\Omega}$ .

Remarquons d'abord que le transposé de  $P$  est aussi un opérateur pseudo-différentiel de type 0 : on sait d'après [3] § 2 n° 5 que c'est un opérateur pseudo-différentiel analytique ; et la condition de symétrie sur le symbole est bien vérifiée, cela résulte immédiatement de la formule qui donne le symbole de  ${}^tP$  (quand  $\bar{\Omega}$  est plongé dans  $\bar{R}_+^n$ ) :

$$(7.6) \quad \sigma({}^tP) = \sum_{\gamma} \frac{i^{|\gamma|}}{\gamma!} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right)^{\gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\gamma} \sigma(P)(x, -\xi).$$

On démontre alors la proposition en deux étapes : d'abord la proposition est vraie si  $P$  est un opérateur différentiel :  ${}^t(P_\Omega)$  est alors l'opérateur qui à  $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  fait correspondre la dérivée au sens des distributions  ${}^tP(\tilde{f})$ , où  $\tilde{f}$  est le prolongement de  $f$  par 0. Et on a vu (§ 5, n° 3, exemple) que  ${}^t(P_\Omega) - ({}^tP)_\Omega$  est alors un opérateur de Green singulier généralisé, dont le symbole est donné par les formules (5.16) (5.17).

Grâce au lemme 7.3, il suffira donc de prouver la proposition quand  $P$  est de classe 0 relativement à  $\partial\Omega$ . On a dans ce cas.

**LEMME 7.7.** — *Si  $P$  est de classe 0 relativement à  $\partial\Omega$ , on a  ${}^t(P_\Omega) = ({}^tP)_\Omega$ .*

*Preuve.* — C'est vrai si  $P$  est un opérateur différentiel de classe 0 : alors dans la formule de Green, toutes les intégrales sur le bord sont nulles.

C'est encore vrai si  $P$  est de degré 0 (ou négatif) : alors  $P$  est continu

$$L_{\text{comp}}^2(V) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(V)$$

(où  $V$  désigne le voisinage de  $\bar{\Omega}$  sur lequel  $P$  est défini) et on a donc

$$\int_{\bar{\Omega}} P_{\Omega} f \cdot g = \int_V P(\tilde{f}) \tilde{g} = \int_V \tilde{f} P(\tilde{g}) = \int_{\bar{\Omega}} f({}^tP)_{\Omega} g.$$

Dans le cas général, on peut d'après le lemme 7.4 supposer que  $P$  est le composé :

$$P = Q \circ P'$$

où  $Q$  est un opérateur différentiel de classe 0, et où  $P'$  est de degré 0.

On a alors, parce que  $Q$  est local

$$P_{\Omega} = Q_{\Omega} \circ P'_{\Omega}.$$

Donc  ${}^t(P_{\Omega}) = {}^t(P'_{\Omega})({}^tQ_{\Omega}) = ({}^tP')_{\Omega}({}^tQ)_{\Omega}$ .

Or  ${}^tQ$  est aussi un opérateur différentiel de classe 0, et on a pour  $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$

$${}^tQ(\tilde{f}) = ({}^tQ)_{\Omega} f$$

(il n'apparaît pas de couches sur le bord quand on dérive au sens des distributions).

Il s'ensuit qu'on a pour  $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$

$$\begin{aligned} {}^t(P_{\Omega})f &= ({}^tP')_{\Omega}({}^tQ)_{\Omega}f = {}^tP'[({}^tQ)_{\Omega}f]/\Omega \\ &= {}^tP'[{}^tQ\tilde{f}]/\Omega = [{}^tP' \cdot {}^tQ](\tilde{f})/\Omega = ({}^tP)_{\Omega}f. \end{aligned}$$

La formule de Green est la formule qui donne le symbole de  ${}^t(P_{\Omega}) - ({}^tP)_{\Omega}$ . On l'obtient en combinant les formules 7.2, 7.6, et (6.17). Remarquons que  ${}^t(P_{\Omega}) - ({}^tP)_{\Omega}$  est un opérateur local, de la forme

$$\Sigma E_k \circ Q_{k,l} \left( x', \frac{\partial}{\partial x'} \right) \circ \text{Tr}_l$$

et est donc complètement déterminé par son symbole. Nous nous contentons ici d'en donner le premier terme (symbole principal) :

$$\begin{aligned} (7.7) \quad \sigma_0({}^t(P_{\Omega}) - ({}^tP)_{\Omega}) &= [e_{\xi_n} \sigma_0(P)(x', 0, -\xi', -\xi_n) \\ &\quad - e_{\eta_n} \sigma_0(P)(x', 0, -\xi', -\eta_n)](i\xi_n - i\eta_n)^{-1}. \end{aligned}$$

La proposition 7.6 suggère une autre définition de la classe d'un opérateur pseudo-différentiel sur  $\Omega$  (cette autre définition ne présente en fait d'intérêt que pour les opérateurs pseudo-différentiels généralisés) : nous dirons que l'opérateur pseudo-différentiel généralisé  $A$  est de classe 0 s'il se prolonge en un opérateur continu  $\mathcal{E}'(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  — ou de façon équivalente, si le transposé  ${}^tA$  est un opérateur pseudo-différentiel normal (non généralisé). Nous dirons que  $A$  est de classe  $m$  s'il existe un opérateur de Green singulier généralisé  $G$  de classe  $m$  tel que  $A - G$  soit de classe 0.

Pour tout opérateur pseudo-différentiel de type 0 :  $P$ , défini au voisinage de  $\bar{\Omega}$ , il existe au moins un opérateur pseudo-différentiel généralisé de classe 0 sur  $\bar{\Omega}$ , de la forme  $P_{\Omega} + G$  (où  $G$  est un opérateur de Green singulier généralisé) : par exemple l'opérateur  ${}^t(P)_{\Omega}$ . Celui-ci est un opérateur normal (non généralisé) si et seulement si  $P$  est de classe 0 (à cause de la formule de Green ci-dessus, qui montre que dans le cas contraire,  $P_{\Omega} - {}^t(P)_{\Omega}$  est une somme non nulle  $\sum E_k Q_{kl} \left( x', \frac{\partial}{\partial x'} \right) \text{Tr}_k$ , de sorte que si  $P_{\Omega} + G$  est de classe 0,  $G$  ne peut pas être un opérateur de Green singulier normal (non généralisé)).

#### 4. Terminons par les remarques suivantes :

Sur une variété à bord compacte, les opérateurs pseudo-différentiels (considérés comme opérateurs continus  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ) forment une algèbre. Il en est de même de l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & K \\ T & Q \end{pmatrix}$$

où  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel sur  $\Omega$ ,  $K$  un opérateur de Poisson,  $T$  un opérateur trace, et  $Q$  un opérateur pseudo-différentiel sur  $\partial\Omega$  (une telle matrice est la matrice d'un opérateur linéaire continu :

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \oplus \mathcal{D}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \oplus \mathcal{D}(\partial\Omega)).$$

(Si  $\bar{\Omega}$  n'est pas compacte, il faut tronquer comme au § 6

avant de pouvoir composer, et on a seulement un résultat de calcul symbolique.)

Sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels, on définit deux symboles : le premier est celui qui à l'opérateur  $P_\Omega + G$  associe le symbole de  $P$  (dans  $\Omega$ , ou au voisinage de  $\bar{\Omega}$ ). Le premier symbole est nul si et seulement si le noyau-distribution de  $P$  est analytique — autrement dit si  $P_\Omega + G$  est déjà un opérateur de Green singulier; il revient au même de dire que le noyau distribution de  $P_\Omega + G$  est analytique dans  $\Omega \times \Omega$  (pas jusqu'au bord) — donc  $P_\Omega + G$  se prolonge en un opérateur continu  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) + \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ . Le deuxième symbole est le symbole de  $G$ . On s'en sert surtout quand  $P_\Omega = 0$ , ou  $P_\Omega = 1$  (et  $G$  est de degré 0). Les opérateurs généralisés par contre ne forment pas une algèbre. On peut cependant définir le composé dans les deux cas suivants :

(7.8)  $A \circ B$  est bien défini

- 1) si  $B$  est un opérateur normal;
- 2) ou si  $A$  est de classe 0.

Les formules du § 6 sont encore valables dans ces deux cas.

Remarquons enfin que l'opérateur  $P_\Omega$  est la restriction à  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  d'un opérateur continu :  $\mathcal{E}'(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ . En particulier  $P_\Omega$  a une extension continue canonique :

$$\mathcal{D}_{-m}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{E}(\bar{\Omega}) \quad (\S 3, \text{n}^\circ 5).$$

Nous noterons cette extension  $P_{\Omega, m}$ , ou  $P_\Omega$  s'il n'y a pas risque de confusion. Nous nous servirons à plusieurs reprises de cette remarque au chap. II, où nous remplaçons  $P_\Omega$  par  $P_{\Omega, m}$  pour  $m$  assez grand. Si on identifie  $\mathcal{D}_{-m}(\bar{\Omega})$  à la somme directe de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  et de  $m$  exemplaires de  $\mathcal{D}(\partial\Omega)$ , ceci apparaît comme un cas particulier de l'opération qui consiste à remplacer  $P_\Omega$  par  $P_\Omega \oplus K$ , où  $K$  est un opérateur de Poisson (vectoriel).

Il résulte de 3, n° 5 (formule (3.34)) que les formules de calcul symbolique (6.6) (ii), (6.11) (ii) et (6.8) (ii), (6.13) (ii) sont encore valables quand  $K$  (resp.  $G$ ) est un opérateur généralisé, à condition de remplacer  $P_\Omega$  par  $P_{\Omega, m}$  pour  $m$  assez grand.



## 7. Opérateurs à symbole $C^\infty$ .

Nous indiquons ici très brièvement les généralisations à faire.

Tout d'abord, la première généralisation consiste à définir les opérateurs comme dans (2), ou (6), ou (9) : les symboles sont seulement  $C^\infty$  ; il n'y a pas de condition de croissance sur la suite des termes du symbole ; et les opérateurs sont définis directement par une intégrale de Fourier.

Cette représentation intégrale est plus maniable que dans le cas des opérateurs analytiques.

Une deuxième généralisation est nécessaire : en effet la notion raisonnable d'opérateur pseudo-différentiel de type  $\mu$  dans le cas où le symbole est seulement  $C^\infty$  est celle qui est donnée par L. Hörmander : si le symbole complet de  $P$  est  $\Sigma p_k(x, \xi)$ ,  $P$  est de type  $\mu$  si pour tout  $k$  ( $s_k$  désignant le degré de  $p_k$ )

$$p_k(x, \xi) = e^{(s_k-2)i\pi} p_k(x, -\xi)$$

s'annule avec toutes ses dérivées sur la variété  $x_n = 0$ ,  $\xi' = 0$ ,  $\xi_n > 0$ .

Ceci n'impose plus de condition sur le degré  $s_k$  de  $p_k$ , ni de condition de symétrie sur la fonction  $p_k$  elle-même ; et l'adjoint d'un opérateur de type 0 n'est pas en général de type 0.

Afin de pouvoir généraliser aux opérateurs à symbole  $C^\infty$  la théorie qui est traitée au chapitre II, il convient alors d'introduire une classe plus large d'opérateurs trace, et de noyaux de Green singuliers : il faut par exemple que l'opérateur  $f \rightarrow \text{Tr}_\Omega P(f)$  soit un opérateur trace si  $P$  est un opérateur pseudo-différentiel de type 0.

Un opérateur trace plus général sera alors un opérateur  $T$ , qui, localement, et modulo un opérateur négligeable (avec la généralisation évidente du § 1), se met sous la forme :

$$T(f)(x') = (2\pi)^{-n} \int e^{ix' \cdot \xi} t(x', \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

(ici encore l'intégrale est éventuellement une partie finie convenable par rapport à  $\xi_n$ ) où  $t(x', \xi)$  admet un dévelop-

pement asymptotique stable par dérivation :

$$(7.1) \quad t(x', \xi) \sim \Sigma t_k(x', \xi)$$

cette fois,  $t_k(x', \xi)$  est homogène de degré  $s_k$  en  $\xi$  ( $s_k \rightarrow -\infty$ ),  $C^\infty$  pour  $\xi' \neq 0$ , holomorphe en  $\xi_n$  pour  $\text{im } \xi_n > 0$ , et enfin il existe un nombre  $\mu_k \leq \mu$ , où  $\mu$  est un nombre fixé, ne dépendant que de  $T$  (correspondant en gros à la classe de  $T$  au sens du § 4) tel que  $(\xi_n + i|\xi'|)^{\mu_k} t_k$  soit une fonction  $C^\infty$  de  $\xi_n$  sur la demi-sphère de Riemann fermée  $\text{im } \xi_n \geq 0$  (point à l'infini compris), privée de l'origine.

Le développement asymptotique (7.1) signifie alors qu'on a pour tout compact  $K$  de  $\partial\Omega$ ,

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\beta \left( t - \sum_0^{N-1} t_k \right) \right| \leq c_{\alpha, \beta, N, k} |\xi|^{|\mu - \beta|} |\xi'|^{s_N - \mu + |\beta|}$$

pour  $x' \in K$ ,  $\text{im } \xi_n \geq 0$ .

Comme  $f$  admet un développement asymptotique  $f \sim \Sigma f_k(\xi') \xi_n^{-k-1}$  pour  $\xi_n \rightarrow \infty$ , la partie finie de l'intégrale est bien définie, par un procédé de limites d'intégrales dans le domaine complexe.

Les noyaux de Green singuliers doivent être généralisés de façon analogue.

Les formules de composition, etc... sont les mêmes qu'au § 6. Mais on ne peut plus transposer ces opérateurs.

## CHAPITRE II

### Applications.

Nous allons maintenant nous servir des opérateurs construits au chapitre 1 pour étudier certains problèmes.

Au § 1, nous montrons comment on peut, au moyen de noyaux de Poisson, représenter les solutions d'un opérateur différentiel elliptique à coefficients analytiques. Notre méthode présente en outre l'intérêt suivant : dans le cas d'opérateurs analytiques, quitte à introduire des hyper-distributions sur le bord, on peut représenter toutes les solutions, sans aucune condition de croissance au bord (du moins quand la variété où tout se passe est compacte). Combiné avec les résultats des §§ 4 et 5, ceci généralise les résultats de J. L. Lions et E. Magenes [18], [19].

Au § 2, nous décrivons un exemple pour illustrer les constructions des § 3 et 4.

Au § 3, nous généralisons aux opérateurs pseudo-différentiels analytiques de type 0 les constructions de R. T. Seeley [14] : il s'agit en gros de montrer que les solutions d'un opérateur pseudo-différentiel analytique de type 0 et leurs dérivées successives ont pour trace sur le bord des fonctions qui sont liées par des relations, qu'on peut décrire au moyen de projecteurs pseudo-différentiels.

Au § 4, nous appliquons les résultats du § 3 à l'étude des problèmes aux limites elliptiques généraux pour des opérateurs pseudo-différentiels analytiques de type 0 : nous montrons comment, au moyen des opérateurs construits au chapitre 1, on peut construire une parametrix.

Les résultats des §§ 3 et 4 sont uniquement des résultats de calcul symbolique. Dans le cas où la variété où tout se

pas est compacte, on peut aller plus loin, et construire de vrais projecteurs, ou de vrais inverses. C'est ce que nous indiquons au § 5.

Enfin tout au long de ce chapitre, nous considérons des opérateurs qui opèrent sur les sections de fibrés vectoriels complexes (analytiques réels). Cette généralisation est presque indispensable pour les §§ 3 et 4. La définition de ces opérateurs ne présente aucune difficulté (elle est indiquée dans [3] pour les opérateurs pseudo-différentiels] : par exemple si  $E$  est un fibré sur  $\partial\Omega$ ,  $F$  un fibré sur  $\bar{\Omega}$ , un opérateur de Poisson analytique  $K: \mathcal{D}(\partial\Omega, E) \rightarrow \mathcal{E}(\bar{\Omega}, F)$  est un opérateur dont le noyau-distribution est une fonction analytique jusqu'au bord hors de la diagonale de  $\partial\Omega$  dans  $\bar{\Omega} \times \partial\Omega$ , et qui localement, pour un choix de trivialisations de  $E$  et  $F$ , a une matrice dont les coefficients sont des opérateurs de Poisson analytiques (ceci ne dépend pas des trivialisations choisies de  $E$  et  $F$ ).

Le symbole principal de  $K$  est une « forme différentielle »  $k_0(x', \xi', \xi_n) d\xi_n$ , dont la « densité »  $k_0(x', \xi', \xi_n)$  est une section analytique sur  $T^*\Omega/\partial\Omega - \{\xi' = 0\}$  (fibré cotangent à  $\Omega$ , privé du fibré cotangent normal, sur  $\partial\Omega$ ) du pull-back à  $T^*\Omega/\partial\Omega$  du fibré  $L(E, F/\partial\Omega)$ .

Les formules du § 6 (chap. 1) marchent encore, avec quelques modifications évidentes, pour ces opérateurs.

### 1. Solutions d'un opérateur différentiel elliptique à coefficients analytiques sur une variété à bord compacte.

Les notations sont les mêmes qu'au chapitre 1. Comme annoncé, nous nous proposons de prouver :

**THÉORÈME 1.1.** — *On suppose que  $\bar{\Omega}$  est une variété à bord analytique réelle compacte connexe. Soit  $P = P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$  un opérateur différentiel à coefficients analytiques, de degré  $m$ , elliptique (ou un système elliptique opérant sur les sections de fibrés vectoriels analytiques).*

*Il existe alors une suite  $K_1, \dots, K_q$  de noyaux de Poisson analytiques sur  $\Omega$  tels que toute solution  $f$  de  $P$  qui est  $C^\infty$*

jusqu'au bord se mette sous la forme

$$(1.1) \quad f = \sum_1^q K_j(f_j)$$

où  $f_j$  est la restriction au bord  $\partial\Omega$  de la  $j$ -ième dérivée normale de  $f$ .

En outre, toute solution de  $P$  (sans aucune restriction sur la régularité ou la croissance au bord) se met sous la forme (1.1), où cette fois les  $f_j$  sont des hyper-distributions (fonctionnelles analytiques réelles) sur le bord  $\partial\Omega$ .

*Preuve.* — Commençons par plonger  $\bar{\Omega}$ ,  $P$  dans une variété analytique ambiante  $V$  (comme au chapitre 1). On sait d'après (3) qu'il existe un opérateur pseudo-différentiel analytique  $Q$ , parametrix de  $P$  dans  $V$ : si  $T$  est une hyper-distribution sur  $V$ , à support compact,  $Q(P(T)) - T$  est une fonction analytique.

$Q \circ P - 1$  lui-même est un opérateur négligeable analytique (son noyau-distribution est une fonction analytique sur  $V \times V$ ).

Observons de plus que si  $T$  est une hyper-distribution portée par un voisinage compact connexe de  $\bar{\Omega}$ , et si  $P(T) = 0$  alors on a  $T = 0$  car  $T$  est une fonction analytique (cf. (3)).

Quitte alors à ajouter à  $Q$  un opérateur négligeable analytique et à diminuer  $V$  au besoin, on pourra donc supposer  $Q \circ P = 1$ .

Soit alors  $T \in \mathcal{H}'(\bar{\Omega})$  une hyper-distribution portée par  $\bar{\Omega}$ , solution de  $P$  dans  $\Omega$ :  $P(T)$  est donc une hyper-distribution portée par  $\partial\Omega$ . Or sur l'ensemble des hyper-distributions portées par  $\partial\Omega$ , on a le résultat suivant :

LEMME 1.2. — *Toute hyper-distribution portée par  $\partial\Omega$  s'écrit, d'une façon et d'une seule :*

$$T = P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) T_1 + R$$

où  $T_1$  est portée par  $\partial\Omega$ , et  $R$  est de la forme

$$R = \sum_0^{m-1} T_j(x') (\delta)_{\partial\Omega}^{(j)} \quad \text{avec} \quad T_j \in \mathcal{H}'(\partial\Omega).$$

Cette décomposition est compatible avec les topologies d'espace de Fréchet de  $\mathcal{H}'(\partial\Omega)$  et de l'espace des hyper-distributions portées par  $\partial\Omega$ .

Ici,  $(\delta)_{\partial\Omega}^{(j)}$  désigne la  $j$ -ième dérivée par rapport à  $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)$  de la mesure superficielle  $(\delta)_{\partial\Omega}$ .

La donnée du champ  $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)$  définit un isomorphisme d'un voisinage de  $\partial\Omega$  sur  $\partial\Omega \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Nous noterons  $x_n$  la fonction deuxième projection. C'est relativement à cette décomposition en produit cartésien qu'il faut comprendre la notation multiplicative  $T_j(x')(\delta)_{\partial\Omega}^{(j)}$ .

Dans cette décomposition en produit, on a :

$$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = a_0(x) \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^m + \sum_0^{m-1} a_k\left(x, \frac{\partial}{\partial x'}\right) \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{m-k}$$

où  $a_0$  est une fonction analytique,  $a_k\left(x, \frac{\partial}{\partial x'}\right)$  un opérateur différentiel à coefficients analytiques ne faisant intervenir que des dérivées tangentielles.

$$\text{Si} \quad T = \sum_0^N T_j(x')(\delta)_{\partial\Omega}^{(j)}$$

on a

$$P(T) = \sum_{j,k} a_k\left(x, \frac{\partial}{\partial x'}\right) T_j(x')(\delta)_{\partial\Omega}^{(j+m-k)}.$$

Compte tenu de la relation

$$f(x)(\delta)_{\partial\Omega}^{(q)} = \sum_p \binom{q}{p} (-1)^p \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^p f(x', 0)(\delta)_{\partial\Omega}^{(j-p)}$$

on voit alors immédiatement, par récurrence sur  $N$ , que le lemme est vrai pour  $T$ . Dans le résultat  $T_1 = Q(T)$  et  $R = R(T)$  dépendent linéairement et continûment de  $T$ .

Pour le cas général, on remarque que toute hyper-distribution portée par  $\partial\Omega$  s'écrit, d'une seule façon

$$T = \Sigma T_j(x')(\delta)_{\partial\Omega}^{(j)}$$

où  $T_j(x') \in \mathcal{H}'(\partial\Omega)$  est une suite d'hyper-distributions sur

$\partial\Omega$  telle que la suite  $\frac{1}{j!} A^j T_j$  soit bornée pour tout  $A > 0$ .

On voit alors aisément que les opérateurs  $Q$  et  $R$  ci-dessus se prolongent continûment.

Remarquons que pour le résultat du lemme, il suffit que le bord  $\partial\Omega$  ne soit pas caractéristique pour  $P$  (i.e. que  $a_0$  n'ait pas de zéro). (Bien sûr le lemme 2.1 équivaut au théorème de Cauchy-Kowalewsky d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy non caractéristique quand les données initiales sont analytiques.)

Revenant aux notations ci-dessus ( $T$  est portée par  $\bar{\Omega}$  et solution de  $P$  dans  $\Omega$ ), on voit donc que quitte à retrancher de  $T$  une hyper-distribution portée par le bord (nulle dans  $\Omega$ ), on peut supposer que  $P(T)$  est de la forme :

$$P(T) = \sum_0^{m-1} (T_j(x'))(\delta)_{\partial\Omega}^{(j)}.$$

$$\text{Donc } T = Q(P(T)) = \sum_0^{m-1} Q(T_j(x'))(\delta)_{\partial\Omega}^{(j)}.$$

Comme l'opérateur qui à  $T_j \in \mathcal{H}'(\partial\Omega)$  fait correspondre  $Q(T_j(x'))(\delta)_{\partial\Omega}^{(j)}$  est un noyau de Poisson analytique (I § 2.5), la deuxième partie du théorème est démontrée.

Si maintenant  $f$  est une fonction  $C^\infty$  (ou seulement de classe  $C^m$ ) jusqu'au bord sur  $\bar{\Omega}$ , et est solution de  $P$ ,  $P(T)$  ne dépend que des valeurs au bord des dérivées normales d'ordre inférieur à  $m-1$  de  $f$ .

Précisément on a, avec l'expression de  $P$  ci-dessus

$$P(f) = \sum_{j,k} a_k \left( x, \frac{\partial}{\partial x'} \right) f_j(x') (\delta)_{\partial\Omega}^{m-j-k}$$

où  $f_j$  est la restriction au bord de  $\left( \frac{\partial}{\partial n} \right)^j f$ .

On obtient alors l'assertion du théorème en posant

$$K_j(f_j) = \sum_{k=0}^{m-j} Q \left( a_k \left( x, \frac{\partial}{\partial x'} \right) f_j(x') (\delta)_{\partial\Omega}^{m-j-k} \right).$$

*Remarque 1.* — La régularité des distributions  $T_j$  qui interviennent dans la formule (4.1) est, bien sûr, liée à la

régularité au bord de la solution  $T$  qu'elles servent à représenter. Par exemple, si  $T$  ne croît pas plus vite qu'une puissance de la distance au bord, on peut choisir les  $T_j$  dans l'espace des distributions ordinaires sur  $\partial\Omega$ .

*Remarque 2.* — Dans la formule (1.1) présentée ici, les  $T_j$  ne sont pas déterminées de façon unique. On verra aux §§ 3 et 4 comment on peut réduire le nombre des  $T_j$ . Mais en général, il n'est pas possible d'avoir une formule de représentation telle que (1.1) où les  $T_j$  soient déterminées de façon unique.

## 2. Un exemple.

Nous décrivons ici un exemple simple, afin d'illustrer la théorie développée aux paragraphes suivants.

Soit  $\bar{\Omega}$  le disque ferme  $|z| \leq 1$  du plan complexe. On posera  $z = x + iy$ .

Soit  $P$  l'opérateur pseudo-différentiel défini par

$$Pf = (\xi + i\eta)(\xi - i\eta)^{-1}\hat{f}.$$

Nous allons étudier l'opérateur  $P_\Omega$ .

Nous nous servons des opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right), & \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right), \\ Q(f) &= (\pi \bar{z})^{-1} * f, & \bar{Q}(f) &= (\pi z)^{-1} * f \\ \left(Q \text{ est inverse de } \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{Q} \text{ est inverse de } \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \end{aligned}$$

On a donc  $P_\Omega = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)_\Omega \circ Q_\Omega$ .

Remarquons que toute fonction  $\varphi \in \mathcal{E}(\bar{\Omega})$  s'écrit, d'une seule façon

$$\varphi = \varphi_0 + g + h$$

où  $\varphi_0 \in \mathcal{E}_1(\bar{\Omega})$  est de trace nulle sur  $\partial\Omega$ ,  $g \in \mathcal{E}(\bar{\Omega})$  est antiholomorphe dans  $\Omega$ , et  $h \in \mathcal{E}(\bar{\Omega})$  est holomorphe dans  $\Omega$ , nulle à l'origine.



Par ailleurs l'opérateur  $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_\Omega$  est surjectif, de sorte que toute  $f \in \mathcal{E}(\bar{\Omega})$  s'écrit au moins d'une façon

$$f = \frac{\partial}{\partial z} \varphi = \frac{\partial}{\partial z} \varphi_0 + \frac{\partial}{\partial z} h$$

(la deuxième décomposition  $f = \frac{\partial}{\partial z} \varphi_0 + \frac{\partial}{\partial z} h$  est unique).

Un calcul élémentaire montre qu'on a alors

$$Q_\Omega f = \varphi_0 + h.$$

$$\text{D'où } P_\Omega f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi_0.$$

On voit donc que le noyau de  $P_\Omega$ :  $\text{Ker } P_\Omega$  est exactement l'espace des fonctions holomorphes à l'intérieur de  $\Omega$ . (Si  $\varphi_0$  est de trace nulle, on a  $\varphi_0 = \bar{Q}'_\Omega \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi_0$ , donc  $P_\Omega f = 0$  équivaut à  $f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} h$  i.e.  $f$  est holomorphe.)

L'image de  $P_\Omega$  est exactement  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\mathcal{E}_1(\bar{\Omega})]$ . Si  $\varphi_0 \in \mathcal{E}_1(\bar{\Omega})$ , on a  $\varphi_0 = \bar{Q}'_\Omega \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi_0$ . Donc  $\text{Tr } Q'_\Omega f = 0$  si  $f$  est dans l'image de  $P_\Omega$ . Réciproquement, si  $\bar{Q}'_\Omega f$  est de trace nulle, comme  $f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{Q}_\Omega f$ ,  $f$  est dans l'image de  $P_\Omega$ .

Soit maintenant  $K$  (resp.  $\bar{K}$ ) l'opérateur de Poisson qui correspond à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes (resp. antiholomorphes):

$$K(u) = (2i\pi)^{-1} \int_{\partial\Omega} u(t)(t-z)^{-1} dt,$$

$$\left(\text{resp. } \bar{K}(u) = -(2i\pi)^{-1} \int_{\partial\Omega} u(t)(\bar{t}-\bar{z})^{-1} d\bar{t}\right).$$

On voit que  $K \circ \text{Tr}$  est un projecteur sur  $\text{Ker } P_\Omega$ .

Et  $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)_\Omega \circ \bar{K} \circ \text{Tr} \circ \bar{Q}_\Omega$  est le projecteur sur l'espace des fonctions antiholomorphes, parallèlement à l'image de  $P_\Omega$ .

Ainsi on peut décrire le noyau et la co-image (ou l'image)

au moyen d'opérateurs de Green singuliers qui sont des projecteurs de la forme  $K \circ T$  (composé d'un opérateur de Poisson et d'un opérateur trace).

Dans les deux cas,  $T \circ K$  est un projecteur pseudo-différentiel sur le bord :

$H = \text{Tr} \circ K$  est l'opérateur de Hilbert

$$H \left( \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n \right) = \sum_0^{\infty} a_n z^n.$$

c'est un projecteur sur l'espace des données de Cauchy des solutions de  $P_{\Omega} f = 0$ . Sa généralisation jouera un rôle important au § 4.

$$\left( \text{On a aussi } \text{Tr} \circ \overline{Q}_{\Omega} \circ \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)_{\Omega} \circ \overline{K} = 1 - H. \right)$$

En fait la situation n'est pas toujours aussi simple en général, et il est commode de commencer par prolonger  $P_{\Omega}$ , de façon à obtenir un opérateur surjectif.

Une façon simple de le faire est de remplacer  $P_{\Omega}$  par son extension canonique  $P_{\Omega, m}$  à  $\mathcal{E}_{-m}(\overline{\Omega})$  (c'est ce procédé que nous utilisons au § 3. Ici  $P_{\Omega, 1}$  est déjà une surjection  $\mathcal{E}_{-1}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{E}(\overline{\Omega})$ ). Plus généralement on peut remplacer  $P_{\Omega}$  par un opérateur de la forme  $P_{\Omega} \oplus K$ .

### 3. Étude du cas général.

Nous généralisons ici aux opérateurs pseudo-différentiels analytiques de type 0 la théorie de R. T. Seeley [14].

Nous reprenons les notations du chapitre 1.

Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel analytique, ou plus généralement, un système d'opérateurs pseudo-différentiels analytiques sur les sections de fibrés vectoriels analytiques, de type 0, défini au voisinage de  $\overline{\Omega}$ . Soit  $Q$  une parametrix de  $P$ . Nous nous proposons de prouver le résultat suivant :

**THÉOREME 3.1.** — *Pour  $m_0$  assez petit et  $m_1$  assez grand, il existe un noyau de Green singulier analytique généralisé  $G : \mathcal{E}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{E}_{m_0}(\overline{\Omega})$  et un noyau de Poisson analytique généralisé*

$K: \frac{\mathcal{E}_{m_0}}{\mathcal{E}_{m_1}} \simeq \mathcal{E}(\partial\Omega)^{m_1-m_0} \rightarrow \mathcal{E}_{m_0}$  tels qu'on ait les relations suivantes :  
avec  $Q' = Q_\Omega + G$

$$(3.1) \quad \sigma(P_{\Omega, m_0} \circ Q') = 1$$

$$(3.2) \quad \sigma(P_{\Omega, m_0} \circ K) = 0$$

$$(3.3) \quad \sigma(Q' \circ P_{\Omega, m_0} + K\gamma) = 1.$$

$\gamma$  désigne ici l'opérateur qui à  $f \in \mathcal{E}_{m_0}$  fait correspondre la suite de traces :  $(f_j)_{j=m_0, \dots, m_1-1}$ .  $K\gamma$  est donc un noyau de Green généralisé, dont le symbole est un projecteur (c'est virtuellement un projecteur sur le noyau de  $P_\Omega$  dans  $\mathcal{E}_{m_0}$ ).

Ces opérateurs permettent en outre de construire un opérateur qui symboliquement se comporte comme un projecteur sur un supplémentaire de  $P_\Omega(\mathcal{E}_{m_1})$  : si  $\pi$  est un noyau de Green singulier analytique, « projecteur sur un supplémentaire de  $\mathcal{E}_{m_1}$  dans  $\mathcal{E}_{m_0}$ , il suffit de prendre un noyau de Green singulier ayant même symbole que  $P\pi Q'$ .

Par contre, il n'est en général pas possible de décrire de cette façon (même symboliquement) le noyau et la co-image de  $P$  dans  $\mathcal{E}(\bar{\Omega}) = \mathcal{E}_0$ .

Pour démontrer le théorème, il sera commode de factoriser le symbole principal  $p_0(x, \xi)$  comme suit : rappelons d'abord que  $p_0(x, \xi)$  est de degré entier, et a même parité qu'une fraction rationnelle de ce degré d'homogénéité. On peut donc l'approximer par une fraction rationnelle en  $\xi$ . Exactement, il existe un polynôme de  $\xi$  :  $a(x', \xi)$  tel que

$$a(x, \xi)^{-1} |\xi|^{2m} p_0(x, \xi) \quad \text{et} \quad p_0(x, \xi) a(x, \xi)^{-1} |\xi|^{2m}$$

soient de degré 0 et aussi voisins qu'on veut de la matrice identité.

Pour les symboles voisins de l'identité, rappelons le résultat suivant :

LEMME 3.2. — Si  $p_0(x, \xi)$  est une matrice analytique pour  $\xi \neq 0$ , homogène de degré 0, assez voisine de l'identité, et de type 0 (i.e. fonction symétrique de  $\xi$ ), il existe des matrices  $p^+(x, \xi)$  et  $p^-(x, \xi)$  continues, homogènes de degré 0, analytiques pour  $\xi' \neq 0$ , holomorphes en  $\xi_n$  pour  $|\pm i m \xi_n| < 0$ , holomorphes et régulières à l'infini en  $\xi_n$ , telles que  $p_0 = p^+ p^-$ .

*Cette décomposition est unique si on impose en outre  $p^-(x', \xi', \infty) = 1$ .*

Il résulte du théorème des fonctions implicites, et du fait que l'application linéaire tangente, qui à une fonction  $p^+(\xi_n)$  (resp. et  $p^-(\xi_n)$ ), holomorphe y compris à l'infini pour  $\text{im } \xi_n \leq 0$  (resp. pour  $\text{im } \xi_n \geq 0$ , et nulle à l'infini) fait correspondre la somme  $p^+ + p^-$  est un isomorphisme sur l'espace des fonctions analytiques sur la droite réelle, holomorphes à l'infini.

Rappelons que le résultat du lemme est faux pour une matrice de rang  $\geq 2$  qui n'est pas voisine de l'identité, même si celle-ci est dans la composante connexe de l'identité (dans le groupe topologique des matrices analytiques, y compris à l'infini, de  $\xi_n$ ) comme le montre l'exemple de la matrice  $2 \times 2$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\xi_n + i}{\xi_n - i} & 0 \\ 0 & \frac{\xi_n - i}{\xi_n + i} \end{pmatrix}$$

$p_0(x, \xi)$  admet donc les factorisations suivantes :

$$(3.4) \quad p_0(x, \xi) = a(x, \xi) |\xi|^{-2m} p^-(x, \xi) p^+(x, \xi),$$

$$(3.5) \quad p_0(x, \xi) = p'^-(x, \xi) p'^+(x, \xi) |\xi|^{-2m} a(x, \xi).$$

A l'aide de ces factorisations, nous allons prouver les théorèmes de division qui suivent :

**PROPOSITION 3.3.** — *Soit  $g(x', \xi', \xi_n, \eta_n)$  un symbole principal de noyau de Green singulier analytique. Il existe un symbole principal de noyau de Green singulier généralisé  $g'(x', \xi', \xi_n, \eta_n)$  tel qu'on ait :*

$$(3.6) \quad p_0 \circ g' = g \quad (\text{le composé est pris au sens de la formule I(6.8) (iii)}).$$

*Il existe en outre un symbole de noyau de Green singulier  $g''$  et des symboles de noyaux de Poisson  $k_j$ ,  $j = 1 \dots q$  tels qu'on ait :*

$$(3.7) \quad g'' \circ p_0 + \sum_1^q k_j r_n^j = g.$$

*Preuve de (3.6).* — On a

$$p_0 \circ g' = h_{\xi_n}^+(p_0(\xi_n)g'(\xi_n, \eta_n)) = h_{\xi_n}^+(a(x, \xi)|\xi|^{-2m}p^-p^+g'(\xi_n, \eta_n)).$$

Il suffit de prendre alors

$$g'(\xi_n, \eta_n) = (p^+)^{-1}(\xi_n - i|\xi'|)^m h_{\xi_n}^+((p^-)^{-1}a^{-1}(\xi_n + i|\xi'|)^m g(\xi_n, \eta_n)).$$

*Preuve de (3.7) :* le symbole de  $g'' \circ p_0$  est égal à

$$H_{\eta_n}^-(g''(\xi_n, \eta_n)p'^{-1}(\xi', \eta_n)p'^+(\xi', \eta_n)a(\xi', \eta_n)|\xi'^2 + \eta_n^2|^m).$$

Comme ci-dessus, l'égalité

$$h_{\eta_n}^-(g''(\xi_n, \eta_n)p'^{-1}(\xi', \eta_n)p'^+(\xi', \eta_n)a(\xi', \eta_n)|\xi'^2 + \eta_n^2|^m) = h_{\eta_n}^-[g]$$

a une solution, par exemple la fonction

$$g_1'' = (\eta_n + i|\xi'|)^m (p^-)^{-1} h_{\eta_n}^-((p^+)^{-1}(\eta_n - i|\xi'|)^m a^{-1}g).$$

La différence  $H^-(g_1'' \circ p_0) - g$  est alors un polynôme de  $\eta_n$ , dont les coefficients sont des symboles de noyaux de Poisson analytiques.

La proposition est démontrée. Nous achevons de prouver le théorème. Pour abrégé, les lettres latines capitales désignent maintenant des symboles complets, et la loi de composition est donnée par les formules de I § 6.3. Soit  $Q$  une parametrix de  $P$ . Alors  $PQ - 1 = G_1$  où  $G_1$  est symbole complet d'un noyau de Green singulier.

D'après la proposition 3.3, il existe un noyau de Green singulier analytique de symbole complet  $G_1'$  tel que

$$\sigma_0(P_{\Omega}G_1') = \sigma_0(G_1)$$

de sorte qu'avec  $Q_1' = Q + G_1'$ , on a

$$(P_{\Omega}Q_1') = 1 - G_2$$

où  $G_2$  est symbole d'un noyau de Green singulier de degré  $-1$ .

D'après la proposition I.6.2, il existe un noyau de Green singulier de symbole  $G_2'$  tel que  $(1 + G_2')(1 - G_2) = 1$ .

Posant alors  $Q_1' = (Q_{\Omega} + G_1')(1 + G_2')$ , on a finalement

$$(3.8) \quad P_{\Omega}Q_1' = 1.$$

De même on a  $Q_\Omega P_\Omega - 1 = G_3$ , et en appliquant la deuxième partie de la proposition 3.3, on voit qu'il existe un noyau de Green singulier analytique de symbole complet  $G_3''$  et un noyau de Poisson analytique de symbole complet  $K_3$  tels que

$$\sigma_0((Q_\Omega + G_3'') + K_3) = 1.$$

Il est alors aisé de compléter  $K_3$  en un symbole de noyau de Poisson généralisé  $K_4$ , de sorte qu'on ait (sur  $\mathcal{E}_{m_0}$  pour  $m_0$  assez petit)

$$\sigma_0((Q_\Omega + G_3'') + K_4) = 1.$$

Puis, par le même procédé que ci-dessus, on construit des symboles complets  $G_5''$ ,  $K_5$  (ayant même symbole principal que  $G_3''$  et  $K_4$ ) tels qu'on ait

$$(3.9) \quad (Q_\Omega + G_5'')P + K_5 = 1.$$

Posons alors

$$(3.10) \quad K\gamma = (1 - Q_1'P)K_5\gamma.$$

On a alors

$$(3.11) \quad P_\Omega K\gamma = 0,$$

$$(3.12) \quad K\gamma(1 - Q_1'P_\Omega) = (1 - Q_1'P_\Omega)K\gamma,$$

$$(3.13) \quad (1 - Q_1'P_\Omega)K\gamma = K\gamma$$

puisque d'après (3.8) on a  $P_\Omega(1 - Q_1'P_\Omega) = 0$ .

Il en résulte

$$(3.14) \quad K\gamma K\gamma = K\gamma.$$

Posons enfin

$$(3.15) \quad Q' = Q_1' - K\gamma K$$

on a alors

$$Q'P_\Omega + K\gamma = Q_1'P_\Omega + K(1 - Q_1'P_\Omega) = Q_1'P_\Omega + 1 - Q_1'P_\Omega = 1.$$

Le théorème est démontré.

Sur  $\frac{\mathcal{D}_{m_0}}{\mathcal{D}_{m_1}} \simeq \mathcal{D}(\partial\Omega)^{m_1-m_0}$ , l'opérateur  $\gamma K$  a pour symbole

complet un projecteur:  $\gamma K \gamma K = \gamma K$ . Intuitivement, un opérateur ayant pour symbole complet  $\gamma K$  généralise, pour l'opérateur  $P_\Omega$ , l'opérateur de Hilbert du § 2.

#### 4. Problèmes aux limites elliptiques.

Nous nous servons maintenant des résultats du § 3 pour étudier le problème aux limites plus général suivant: soient  $E, E'; F, F'$  des fibrés vectoriels analytiques sur  $\bar{\Omega}$  et  $\partial\Omega$  respectivement.

On considère le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} (1) \quad & P_\Omega f + K^1 u = g, \\ (2) \quad & T^1 f + Q^1 u = \nu \end{aligned}$$

où  $P$  est un opérateur pseudo-différentiel analytique de type 0, elliptique, et opère des sections de  $E$  dans celles de  $E'$ ;  $K$  est un noyau de Poisson analytique qui opère des sections de  $F$  dans celles de  $E'$ ;  $T$  est un opérateur trace analytique qui opère des sections de  $E$  dans celles de  $F'$ ;  $Q$  est un opérateur pseudo-différentiel sur le bord, qui opère des sections de  $F$  dans celles de  $F'$ .

Nous dirons que le problème est elliptique à droite (ou sous déterminé), resp. elliptique à gauche (ou sur déterminé), resp. elliptique, s'il possède une parametrix à droite, resp. à gauche, resp. bilatère. Il est aisé de vérifier que c'est une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait des inégalités à priori du type habituel (pour l'opérateur lui-même dans le cas sous déterminé, ou son adjoint dans le cas sur déterminé).

Si le système (1), (2) est elliptique sous déterminé, on a le théorème suivant, qui résulte immédiatement de l'existence d'une parametrix à gauche, des propriétés de continuité et d'analyticité décrites au chapitre 1, et des théorèmes de composition de I, § 6.

**THÉORÈME 4.1.** — *On suppose que le système d'équations (1), (2) possède une parametrix à gauche. Alors, si  $g$  et  $\nu$  sont analytiques jusqu'au bord (resp.  $C^\infty$ ), au voisinage d'un point  $x_0$  du bord, il en est de même de  $f$  et  $u$ .*

Nous donnons maintenant des critères pour que le système (1), (2) ait une parametrix à droite ou à gauche. Nous nous restreindrons au cas où l'équation (1) possède une parametrix à droite, ce qui apporte quelques simplifications pour l'étude de la parametrix à gauche.

Nous gardons les notations du § 3, en outre, nous supposons  $m_0 \leq 0$  et  $m_1 \geq 0$ , ce qu'on peut toujours faire.

$\gamma$  désigne l'isomorphisme qui à  $f = \sum_{m_0}^{-1} f_j(\delta)_{\partial\Omega}^{(-j-1)} + f' \in \mathcal{D}_{m_0}(\bar{\Omega})$  où  $f' \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  et  $f_j \mathcal{D}(\partial\Omega)$  fait correspondre la suite  $(f_j)_{j=m_0 \dots m_1}$  (pour  $j \geq 0$ ,  $f_j$  désigne la restriction au bord de la  $j$ -ième dérivée normale de  $f$ ).

$\gamma^0$  désignera sa restriction à  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$ .

Tous deux sont des opérateurs trace.

Les questions que nous traitons ici concernent uniquement les symboles, aussi, comme au paragraphe précédent, les lettres latines capitales désignent des symboles complets.

Nous noterons  $H$  le symbole  $\gamma K$ .

Enfin nous introduisons un symbole de noyau de Poisson généralisé  $L = L^0 + L^-$  (où  $L^0$  prend ses valeurs dans  $\mathcal{E}_0(\bar{\Omega})$ ,  $L^-$  dans l'espace de distributions portées par le bord  $\sum_{j=m_0-1}^0 \mathcal{E}(\partial\Omega) (\delta)_{\partial\Omega}^{(j)}$ ) tel qu'on ait

$$\gamma L = 1; \quad \gamma^0 L^0 = 1.$$

1. Nous cherchons d'abord sous quelles conditions l'équation (1) possède une parametrix à droite.

**PROPOSITION 4.2.** — *L'équation (1) possède une parametrix à droite si et seulement si le symbole principal*

$$\sigma_0(\gamma Q'(PL + K^1))$$

*est une surjection de  $E^{m_1-m_0} \oplus F$  sur le fibré image de  $\sigma_0(1 - H)$ .*

*Preuve.* — Supposons d'abord que l'équation (1) possède une parametrix à droite:  $P_\Omega P^2 + K^1 T^2 = 1$  on a alors  $\gamma Q'(PP^2 + K^1 T^2) P_\Omega L^0 = (1 - H)L = 1 - H$  ce qui prouve que l'assertion de la proposition est nécessaire.

Réciproquement, si l'assertion de la proposition est vraie, il existe un symbole d'opérateur pseudo-différentiel analytique



sur  $\partial\Omega$ ,  $Q^2$ , opérant des sections de  $E^{m_1-m_0}$  dans celles de  $E^{m_1} \oplus F$ , tel qu'on ait

$$(4.1) \quad \gamma Q'(P_\Omega L + K^1)Q^2 = 1 - H$$

(en effet, on peut toujours trouver un opérateur dont le symbole principal convienne, c'est-à-dire un symbole complet  $Q'^2$  tel que  $Q'(P_\Omega P^2 + K^1 T^2)Q'^2 = 1 - H - Q''$ , où  $Q''$  est de degré  $-1$ : cela revient à construire une section d'un homomorphisme surjectif de fibrés vectoriels analytiques. Quitte à remplacer  $Q'^2$  par  $Q'^2(1 - H)$ , on peut supposer  $Q'' = Q''(1 - H)$ , donc  $1 - H - Q'' = (1 - H)(1 - Q'')$ . Or, d'après [3], § 1.1, il existe un symbole analytique  $Q'''$  tel que  $(1 - Q'')(1 + Q''') = 1$ . Il suffit alors de remplacer  $Q'^2$  par  $Q^2 = Q'^2(1 + Q''')$ ).

Nous décomposons  $Q^2$  suivant ses composantes sur  $E^{m_0-m_1}$  et  $F$ :

$$Q^2 = Q^3 + Q^4.$$

Dans la construction que nous avons faite, on a en outre

$$Q^2(1 - H) = Q^2$$

donc aussi  $Q^3 = Q^3(1 - H)$ ,  $Q^4 = Q^4(1 - H)$ .

Comme  $H\gamma Q' = 0$ , on a alors

$$\gamma Q'(1 - (PL + K^1)Q^2\gamma Q' = 0$$

par suite, on a  $(1 - (P_\Omega L + K^1)Q^2\gamma Q' = P_\Omega P^3$  avec  $P^3 = (1 - L\circ\gamma)Q'(1 - (P_\Omega L + K^1)Q^2\gamma Q')$ .

De sorte qu'on a bien trouvé une parametrix à droite:

$$P_\Omega P^2 + K^1 T^2 = 1$$

avec

$$(4.2) \quad P^2 = L\circ Q^3\gamma Q' + P^3, \quad T^2 = Q^4\gamma Q'.$$

Nous supposons désormais la condition de la proposition 4.2 vérifiée, et nous gardons les notations introduites ci-dessus.

## 2. Recherche d'une parametrix à droite.

Nous examinons maintenant les conditions pour qu'il existe une parametrix à droite. Nous introduisons d'abord de

nouvelles notations :

(4.3)

$$\gamma' = (\gamma^0, \text{id.}) : \mathcal{D}(\overline{\Omega}, E) \oplus \mathcal{D}(\partial\Omega, F) \rightarrow \mathcal{D}(\partial\Omega, E^{m_1}) \oplus \mathcal{D}(\partial\Omega, F)$$

désigne l'opérateur trace qui à  $(f, u) \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}, E) \oplus \mathcal{D}(\partial\Omega, F)$  fait correspondre  $(\gamma^0 f, u) \in \mathcal{D}(\partial\Omega, E^{m_1}) \oplus \mathcal{D}(\partial\Omega, F)$ .

Avec les opérateurs introduits dans 2, on a :

$$T^2 P_{\Omega} = Q^4 \gamma' Q' P_{\Omega} = Q^4 (1 - H) \gamma$$

$$(\text{car } \gamma' Q' P_{\Omega} = \gamma(1 - K\gamma) = (1 - H)\gamma \text{ et } Q^4(1 - H) = Q^4).$$

On a aussi

$$\begin{aligned} P^2 P_{\Omega} &= L^0 Q^3 \gamma + P^3 P_{\Omega} \\ &= L^0 Q^3 \gamma + (1 - L^0 \gamma)(1 - K\gamma) - (1 - L^0 \gamma)Q'(P_{\Omega} L + K^1)Q^2. \end{aligned}$$

Par suite la matrice (symbole d'un opérateur sur  $\mathcal{E}(\overline{\Omega}, E) \oplus \mathcal{E}(\partial\Omega, F)$ )

$$\begin{pmatrix} P^2 P_{\Omega} & P^2 K^1 \\ T^2 P_{\Omega} & T^2 K^1 \end{pmatrix}$$

est un projecteur, de la forme  $1 - K^5 \gamma'$  où  $K^5$  est symbole d'un opérateur de la forme  $K + Q$ , où  $K$  est symbole d'un noyau de Poisson,  $Q$  est symbole d'un opérateur pseudo-différentiel sur le bord.

Posons enfin

$$(4.4) \quad H' = \gamma' K^5$$

c'est aussi un projecteur (c'est le symbole d'un opérateur sur  $\mathcal{E}(\partial\Omega, E^{m_1}) \oplus \mathcal{E}(\partial\Omega, F)$ , qui généralise pour l'équation (1) l'opérateur de Hilbert du § 2).

**PROPOSITION 4.3.** — *Pour qu'il existe une parametrix à droite pour le système (1) (2), il faut et il suffit que le symbole principal*

$$\sigma_0(T^1 + Q^1)K^5$$

*soit une surjection de  $E^{m_1} \oplus F$  sur  $F'$ .*

*Preuve.* — C'est nécessaire, car s'il existe une parametrix à droite, il existe un symbole de noyau de Poisson  $K^6$  et un

symbole d'opérateur pseudo-différentiel sur  $\partial\Omega$ ,  $Q^6$ , tels que

$$\begin{aligned} P_\Omega K^6 + K^1 Q^6 &= 0, \\ T^1 K^6 + Q^1 Q^6 &= 1. \end{aligned}$$

alors  $(K^6 + Q^6) = K^5 \gamma'(K^6 + Q^6)$ ; et on a donc

$$1 = (T^1 + Q^1) K^5 \gamma'(K^6 + Q^6).$$

Réciproquement, si c'est vérifié, on voit comme ci-dessus qu'il existe un symbole d'opérateur pseudo-différentiel analytique sur le bord  $Q^7$  tel que

$$(T^1 + Q^1) K^5 Q^7 = 1.$$

On obtient alors une parametrix à droite en prenant pour  $K^6$ ,  $Q^6$  les composantes le long de  $\mathcal{E}(\bar{\Omega}, E)$  et  $\mathcal{E}(\partial\Omega, F)$  de  $K^5 Q^7$ .

3. Nous examinons maintenant les conditions pour qu'il existe une parametrix à gauche, en supposant toujours vérifiées les conditions de la proposition 4.2.

**PROPOSITION 4.4** — *On suppose vérifiée la condition de la proposition 4.2; avec les notations du n° 2, pour qu'il existe une parametrix à gauche, il faut et il suffit que le symbole principal d'opérateur pseudo-différentiel analytique sur*

$$\sigma_0((T^1 + Q^1) K^5)$$

*soit injectif sur le fibré image de  $\sigma_0(H') = \sigma_0(\gamma' K^5)$ .*

C'est nécessaire : supposons qu'il existe une parametrix

$$\begin{pmatrix} P^8 & K^8 \\ T^8 & Q^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & K^1 \\ T^1 & Q^1 \end{pmatrix} = 1$$

on a alors  $K^5 = (K^8 + Q^8)(T^1 + Q^1)K^5$ ,  
d'où  $H' = \gamma'(K^8 + Q^8)(T^1 + Q^1)K^5$ .

Réciproquement, si la condition de la proposition 4.4 est vérifiée, on voit, toujours par la même méthode que ci-dessus qu'il existe un symbole d'opérateur pseudo-différentiel sur le bord,  $Q^9$ , tel que

$$Q^9(T^1 + Q^1)K^5 = H'.$$

On obtient alors une parametrix à gauche en posant

$$(4.5) \quad \begin{aligned} (P^8 + Q^8) &= (P^2 + T^2) - K^5 Q^9 (T^1 + Q^1) (P^2 + T^2), \\ (K^8 + Q^8) &= K^5 Q^9 \end{aligned}$$

(le composé vaut en effet alors

$$\begin{aligned} &(P^2 + Q^2)(P_\Omega + K^1) - K^5 Q^9 (T^1 + Q^1)(P^2 + T^2)(P_\Omega + K^1) \\ &\quad + K^5 Q^9 (T^1 + Q^1) \\ &= (1 - K^5 \gamma') - K^5 Q^9 (T^1 + Q^1)(1 - K^5 \gamma') + K^5 Q^9 (T^1 + Q^1) \\ &= 1 - K^5 \gamma' + K^5 Q^9 (T^1 + Q^1) K^5 \\ &= 1 - K^5 \gamma' + K^5 H' \gamma' = 1). \end{aligned}$$

4. Nous étudions maintenant le cas où le système (1), (2) est elliptique. Pour éviter trop de confusion dans les notations, nous noterons  $P_{\Omega, m_0}$  l'extension de  $P_\Omega$  à  $\mathcal{E}_{m_0}(\bar{\Omega}, E)$ .

PROPOSITION 4.5. — *Pour qu'il existe un problème elliptique de la forme (1), (2), associé à  $P_\Omega$ , il faut et il suffit que le fibré image du symbole principal*

$$\sigma_0(H)$$

(ou aussi bien de  $\sigma_0(1 - H)$ ) soit stablement trivial sur la sphère cotangente à  $\partial\Omega$  en tout point du bord  $\partial\Omega$ .

Prouvons que c'est suffisant : en effet il existe alors un fibré  $F$  sur le bord  $\partial\Omega$  tel que  $\sigma(H)E^{m_1-m_0} \oplus F$  soit trivial sur toute sphère cotangente à  $\partial\Omega$  en un point de  $\partial\Omega$ . Autrement dit, il existe un fibré  $F'$  sur  $\partial\Omega$ , et un isomorphisme  $q(x', \xi')$  de  $\sigma_0(H)E^{m_1-m_0} \oplus F$  sur l'image réciproque de  $F'$  sur le fibré de sphères cotangentes.

Soit alors  $A$  un opérateur pseudo-différentiel :

$$\mathcal{D}(E^{m_0-m_1} \oplus F, \partial\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(F', \partial\Omega)$$

tel que  $\sigma_0(A) = q(x', \xi')$  sur la sphère cotangente unité.

Alors le problème

$$(1) \quad P_\Omega, m_0 f = g,$$

$$(2) \quad A(Hf, u) = v$$

est elliptique.

En effet l'hypothèse implique qu'il existe  $A' = A'_E \oplus A'_F$  tel que  $6(AA') = 1$ ,  $6(A'_E A) = 6(H)$ ,  $6(A'_F A) = 1_F$ .

Alors le système suivant est paramétrix à (1), (2) :

$$(1') \quad f = Q'g + KA'_E \varphi,$$

$$(2') \quad u = A'_F \varphi.$$

Prouvons que c'est nécessaire : on suppose donc que le problème (1), (2) du début du chapitre est elliptique. Avec les notations des nos 1, 2, 3,  $((P^1 + T^1)K^5)$  est donc un isomorphisme du fibré image de  $\sigma_0(H')$  sur  $F'$ . L'image de  $\sigma_0(H')$  est donc un fibré trivial sur toute sphère cotangente en un point de  $\partial\Omega$ .

Nous voulons maintenant comparer le problème (1), (2) à celui du § 3; pour cela, introduisons encore les opérateurs

$$(4.6) \quad L^5 = L^0 + \text{id. } F$$

(symbole d'un opérateur

$$\mathcal{D}(\partial\Omega, E^{m_1}) \oplus \mathcal{D}(\partial\Omega, F) \rightarrow \mathcal{E}(\bar{\Omega}, E) \oplus \mathcal{E}(\partial\Omega, F).$$

On a

$$(4.7) \quad \begin{aligned} & \gamma' L^5 = 1, \\ B = (P_\Omega + K^1) L^5 (1 - H') \gamma' (P^2 + T^2), \end{aligned}$$

on a

$$(4.8) \quad \gamma' (P^2 + T^2) (1 - B) = 0$$

(en effet cela vaut

$$\begin{aligned} (P^2 + T^2) - (1 - K^5 \gamma') L^5 (1 - H') \gamma' (P^2 + T^2) \\ = (P^2 + T^2) - (1 - H') \gamma' L^5 (1 - H') \gamma' (P^2 + T^2) \\ = H' \gamma' (P^2 + T^2) = K^5 (1 - K^5 \gamma') (P^2 + T^2) = 0 \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} (P_\Omega + K^1) (P^2 + T^2) = 1, \quad (P^2 + T^2) (P_\Omega + K^1) = 1 - K^5 \gamma' \\ \text{et} \quad K^5 (1 - K^5 \gamma') = 0. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} (1 - B) &= P_\Omega (1 - L^5 \gamma') (P^2 + T^2) (1 - B) \\ &= P_{\Omega, m_0} (1 - L\gamma) (1 - L^5 \gamma') (P^2 + T^2) (1 - B) \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} (4.9) \quad & \gamma Q (1 - B) = 0 \\ (\text{car } \gamma Q P_{\Omega, m_0} (1 - L\gamma) &= (1 - K\gamma) (1 - L\gamma) \\ &= (1 - H) (1 - L\gamma) = (1 - H) (\gamma - \gamma) = 0). \end{aligned}$$

Si on pose alors

$$(4.10) \quad Q^{10} = \gamma Q(P_{\Omega} + K^1)L^5(1 - H'),$$

$$(4.11) \quad Q^{11} = \gamma'(P^2 + T^2)P_{\Omega, m_0}L(1 - H)$$

(ce sont des symboles d'opérateurs pseudo-différentiels sur  $\partial\Omega$ ) on déduit de (4.9) qu'on a

$$\begin{aligned} Q^{10}Q^{11} &= \gamma QBP_{\Omega, m_0}L(1 - H) \\ &= \gamma QP_{\Omega, m_0}L(1 - H) \\ &= \gamma(1 - K\gamma)L(1 - H) = (1 - H)\gamma L(1 - H) \\ (4.12) \quad Q^{10}Q^{11} &= 1 - H \end{aligned}$$

exactement de même, on trouve

$$(4.13) \quad Q^{11}Q^{10} = 1 - H'.$$

$\sigma_0(Q^{10})$  est donc un isomorphisme du fibré image de  $\sigma_0(1 - H)$  sur le fibré image de  $\sigma_0(1 - H)$ ;  $\sigma_0(Q^{11})$  est l'isomorphisme inverse. Comme  $E^{m_1-m_0}$ ,  $E^{m_1}$ , et  $F'$  qui est isomorphe au fibré image de  $\sigma_0(H')$  sont triviaux sur toute sphère cotangente à  $\partial\Omega$ , le fibré image de  $\sigma_0(1 - H')$ , donc aussi le fibré image de  $\sigma_0(1 - H)$  qui lui est isomorphe, et finalement le fibré image de  $\sigma_0(H)$  puisque

$$H + (1 - H) = \text{id. } E^{m_1-m_0},$$

sont stablement triviaux sur toute sphère cotangente en un point de  $\partial\Omega$ . La proposition est démontrée.

## 5. Cas où la variété $\bar{\Omega}$ est compacte.

On suppose  $\bar{\Omega}$  compacte, connexe. Les résultats de calcul des §§ 3, 4, sont encore valables. Mais cette fois, on peut composer sans restriction les opérateurs. Dans ce qui suit, les lettres capitales latines désignent à nouveau de vrais opérateurs (ayant pour symboles complets ceux qui ont été décrits aux §§ 2, 3).

**PROPOSITION 5.1.** — *On peut choisir  $m_0$  assez petit pour que  $P_{\Omega}(\mathcal{E}_{m_0-k}(\bar{\Omega}, E))$  soit constant pour  $k \geq 0$ .*

Si on choisit  $m_1$  assez grand, on peut trouver  $Q'$ ,  $K$  ayant pour symboles ceux du § 3, tels que

$$P_\Omega Q' \text{ soit un projecteur sur l'image } P_\Omega(\mathcal{E}_{m_0}(\bar{\Omega})) \\ Q'P_\Omega + K = 1.$$

Alors si  $L$  est un noyau de Poisson généralisé : tel que  $\gamma L = 1$ , (il en existe)

et si  $H$  est le projecteur  $\gamma K$ ,

$$P_\Omega(1 - L\gamma)Q' = P(1 - L\gamma)(1 - H)Q'$$

est un projecteur sur un supplémentaire de  $P_\Omega(\mathcal{E}_{m_1}(\bar{\Omega}, E))$  dans  $P_\Omega(\mathcal{E}_{m_0}(\bar{\Omega}, F))$ .

*Preuve.* —  $Q'$  et  $K$  désignent provisoirement n'importe quels opérateurs ayant pour symbole ceux du § 3. On a alors

$$P_\Omega Q' = 1 - R_1 \\ Q'P_\Omega + K = 1 - R_2$$

où  $R_1, R_2$  sont des opérateurs négligeables, analytiques.

On peut alors faire les améliorations suivantes :

L'image de  $(1 - R_1)$ , donc aussi celle de  $P_\Omega$  :  $P_\Omega(\mathcal{E}_{m_0}(\bar{\Omega}))$  est fermée, de codimension finie.  $P_\Omega(\mathcal{E}_{m_0}(\bar{\Omega}))$  est donc constant pour  $m_0 \rightarrow -\infty$ . Ceci prouve la première assertion du théorème.

Conformément à ce qui est indiqué dans I, § 1, il existe un opérateur négligeable analytique  $R'_1$  tel que

$$(1 - R_1)(1 + R'_1) = 1 - R_3$$

soit un projecteur de codimension finie. On peut alors remplacer  $Q'$  par  $Q'(1 + R'_1)$  de sorte qu'on ait  $P_\Omega Q' = 1 - R_3$ .

En outre il existe un opérateur négligeable analytique  $R_4$  tel que  $P_\Omega R_4$  commute à  $P_\Omega Q'$ , et soit un projecteur sur un supplémentaire de  $(1 - R_3)(\mathcal{E}(\bar{\Omega}))$  dans  $P_\Omega(\mathcal{E}_{m_0}(\bar{\Omega}))$ . Quitte à remplacer  $Q'$  par  $Q' + R_4$ , on voit qu'on peut finalement supposer que  $P_\Omega Q'$  est un projecteur sur  $P_\Omega(\mathcal{E}_{m_0}(\bar{\Omega}))$ .

$1 - Q'P_\Omega$  est alors un projecteur sur le noyau de  $P$ .

Et  $(1 - Q'P_\Omega)K$  a même symbole complet que  $K$ , de sorte qu'on peut supposer  $P_\Omega K = 0$ .

Il existe alors un opérateur négligeable analytique  $R_5$  tel que  $P_\Omega R_5 = 0$ , et  $(1 + R_5)(1 - R_2) = 1 - R_6$  soit un projecteur de codimension finie.

On a alors  $P(1 + R_5)Q' = P_\Omega Q'$ .

Quitte à remplacer  $Q'$  par  $(1 + R_5)Q'$ , et  $K$  par  $(1 + R_5)K$ , on peut donc supposer que  $R_2 = R_6$  est un projecteur de rang fini.

Enfin on a supposé  $\bar{\Omega}$  connexe. Donc une fonction analytique jusqu'au bord sur  $\bar{\Omega}$ , qui s'annule avec toutes ses dérivées sur le bord  $\partial\Omega$  est identiquement nulle sur  $\bar{\Omega}$ . Il s'ensuit que, quitte à augmenter  $m_1$ , on peut trouver un opérateur négligeable analytique  $R_7$ :

$$\mathcal{D}(\partial\Omega, E^{m_1-m_0}) \rightarrow \mathcal{E}_{m_0}(\bar{\Omega})$$

tel que  $R_7\gamma$  soit un projecteur sur l'image de  $R_2 = R_6$ . On a alors  $R_7\gamma R_2 = R_2$ ,  $R_2 R_7\gamma = R_7\gamma$ , et  $P_\Omega R_7 = 0$ .

Quitte finalement à remplacer  $Q'$  par  $(R_2 - R_7\gamma)Q'$ , et  $K$  par  $K + (R_2 - R_7\gamma)K + R_7\gamma$ , on voit qu'on peut enfin supposer  $R_2 = 0$ .

Le théorème est démontré.

On peut procéder de même pour le problème aux limites étudié au § 4: quand il existe une parametrix à droite ou à gauche, il existe aussi un opérateur ayant même symbole complet, qui soit un inverse à droite ou à gauche modulo un projecteur de rang fini, négligeable analytique.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. BOUTET DE MONVEL, Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord I, *J. d'analyse Math.*, Jérusalem, XVII (1966), 241-253.
- [2] L. BOUTET DE MONVEL, Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord II, *J. d'analyse Math.*, Jérusalem, XVII (1966), 255-304 et *C.R. Acad. Sciences*, Paris, t. 261 (1965), 3927-3930 et 4587-4589.
- [3] L. BOUTET DE MONVEL et P. KRÉE, Pseudo-differential operators and Gevrey Classes, *Ann. Inst. Fourier* (1967) et *C.R. Acad. Sciences* Paris, t. 263 (1966), 245-248.
- [4] Ch. GOULAOUIC, *C.R. Acad. Sciences*, Paris, t. 262 (1966), 333-336.
- [5] L. HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag, Berlin (1963).
- [6] L. HÖRMANDER, Pseudo-differential Operators *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 (1965), 501-517.
- [7] L. HÖRMANDER, Pseudo-differential Operators and non elliptic boundary problems, *Ann. Math.*, 83 (1966), 129-209.



- [8] L. HÖRMANDER, Séminaire, Institute for Advanced Studies, Princeton (1965-1966).
- [9] J. J. KOHN and L. NIRENBERG, On the Algebra of Pseudo-differential Operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 (1965), 269-305.
- [10] W. MARGULIES, Thèse, Brandeis University (1966).
- [11] C. B. MORREY and L. NIRENBERG, On the Analyticity of the Solutions of Linear Elliptic Systems of Partial Differential Equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, X, n° 2 (1957), 271-290.
- [12] L. SCHWARTZ, Théorie des Distributions, Herman, Paris (1951).
- [13] L. SCHWARTZ, Théorie des Noyaux, *Int. Cong. Math.*, Cambridge (1950), 220-230.
- [14] R. T. SEELEY, Singular Integrals and boundary Problems, *Amer. J. Math.*, vol. 88, 781-809.
- [15] E. SHAMIR, Wiener Hopf Type Problems for Elliptic Systems of Singular Integrals Equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72, n° 3 (1966), 501-504.
- [16] M. I. VISIK et G. I. ESKIN, Équations en convolutions dans un domaine borné, *Uspekhi Math. Nauk*, XX, 3 (123), (1965), 89-152.
- [17] M. I. VISIK et G. I. ESKIN, Équations en convolutions dans un domaine borné, *Mat. Sbornik*, t. 89 (111), n° 1 (1966), 65-110.
- [18] J. L. LIONS et E. MAGENES, Cimmino, *Rend. Sem. Mat. Fis.*, Milano (1962).
- [19] J. L. LIONS et E. MAGENES, *Annali di Mat.*, LXIII (1963), 201-224.
- [20] A. MARTINEAU, Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki (1960-1961), n° 214.

Manuscrit reçu le 25 mars 1969.

Louis BOUTET de MONVEL,  
Département de Mathématiques,  
Faculté des Sciences,  
06-Nice.

---