

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MITSUO MORIMOTO

Sur les ultradistributions cohomologiques

Annales de l'institut Fourier, tome 19, n° 2 (1969), p. 129-153

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_2_129_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_2_129_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ULTRADISTRIBUTIONS COHOMOLOGIQUES

par Mitsuo MORIMOTO ⁽¹⁾

Dans ce travail on considère l'espace de cohomologie de l'espace \mathbf{C}^n à coefficients dans le faisceau \mathcal{O} et à support dans un tube $T(G)$ à base G convexe et fermée, $H_{T(G)}^j(\mathbf{C}^n; \mathcal{O})$, où \mathcal{O} est le faisceau des germes de fonctions holomorphes. Si le convexe G ne contient aucune ligne droite tout entière, on peut constater que

$$H_{T(G)}^j(\mathbf{C}^n; \mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq n \quad (\text{théorème 1}).$$

Nous considérons l'espace $H_{T(G)}^n(\mathbf{C}^n; \mathcal{O})$ comme espace des « ultradistributions cohomologiques à diagramme G » sur \mathbf{R}^n . Soit \mathcal{T} la famille des tubes $T(G)$ à base convexe compacte :

$$\mathcal{T} = \{T(G) = \mathbf{R}^n \times \sqrt{-1} G; \ G \text{ convexe compact de } \mathbf{R}^n\}.$$

Comme on peut démontrer que, si G_1 et G_2 sont deux convexes compacts de \mathbf{R}^n tels que $G_1 \subset G_2$, l'application naturelle de l'espace $H_{T(G_1)}^n(\mathbf{C}^n; \mathcal{O})$ dans l'espace $H_{T(G_2)}^n(\mathbf{C}^n; \mathcal{O})$ est injective (théorème 2), on a :

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{T}}^n(\mathbf{C}^n; \mathcal{O}) &\cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ G}} \text{ind } H_{T(G)}^n(\mathbf{C}^n; \mathcal{O}) \\ &\cong \bigcup_{\substack{\longrightarrow \\ G}} H_{T(G)}^n(\mathbf{C}^n; \mathcal{O}), \end{aligned}$$

où G parcourt la famille des convexes compacts de \mathbf{R}^n .

⁽¹⁾ Ce présent papier a été écrit en 1968 pendant mon séjour à l'Université de Nice comme chercheur du CNRS. Je voudrais exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. A. Martineau qui a bien voulu diriger mes recherches.

Cet espace $H_{\mathcal{D}}^j(\mathbf{C}^n; \mathcal{O})$ des « ultradistributions cohomologiques à diagramme compact » est assez vaste : en effet, il contient, comme sous-espace vectoriel, l'espace des ultradistributions de S. Silva [5, 6], celui des hyperfonctions de Sato [1, 4] et celui des fonctionnelles analytiques (théorème 3).

Notations. — Pour un ensemble A de \mathbf{R}^n ou de \mathbf{C}^n , \bar{A} désigne l'adhérence de A , ∂A la frontière de A . $A - B$ est l'ensemble des points de A qui ne sont pas contenus dans B .

Pour un ensemble A de \mathbf{R}^n , on désigne par $T(A)$ le tube à base A : $T(A) = \mathbf{R}^n \times \sqrt{-1} A \subset \mathbf{C}^n$.

Pour un ensemble localement fermé F de \mathbf{C}^n , on note par $H^j[F]$ le j -ième espace de cohomologie locale à coefficients dans \mathcal{O} et à support dans F :

$$H^j[F] \cong H_F^j(D; \mathcal{O}),$$

où D est un ouvert de \mathbf{C}^n qui contient F comme sous-ensemble fermé.

1. Théorèmes.

DÉFINITION. — *On dira qu'un convexe G de \mathbf{R}^n est propre si G ne contient aucune ligne droite toute entière.*

Nous notons quelques propriétés faciles à montrer :

LEMME 1. — *Soit G un convexe fermé et propre de \mathbf{R}^n . Alors*

i) *il existe n formes linéaires sur \mathbf{R}^n , l_1, l_2, \dots, l_n , linéairement indépendantes telles que G soit contenu dans l'ensemble*

$$\{x \in \mathbf{R}^n; \quad l_i(x) \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

ii) $\mathbf{R}^n - G \neq \emptyset$ (vide) si $n \geq 1$.

iii) $\mathbf{R}^n - G$ est connexe et son enveloppe convexe est égale à \mathbf{R}^n si $n \geq 2$.

Voici les théorèmes que nous proposons :

THÉORÈME 1. — *Soient G un convexe fermé et propre de \mathbf{R}^n et V un ouvert de Stein de \mathbf{C}^n .*

Alors on a :

$$H^j[T(G) \times V] = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq n.$$

THÉORÈME 2. — Soient G_1 et G_2 deux convexes fermés et propres de \mathbf{R}^n tels que $G_1 \subset G_2$. Supposons que, pour chaque demi-espace fermé D de \mathbf{R}^n tel que $G_1 \subset D$, G_2 soit contenu dans un translaté de D . Soit V un ouvert de Stein de \mathbf{C}^m .

Alors l'application naturelle de $H^n[T(G_1) \times V]$ dans $H^n[T(G_2) \times V]$ est injective.

THÉORÈME 3. — Soient K un convexe compact de \mathbf{C}^n et G un convexe compact de \mathbf{R}^n tels que $K \subset T(G)$.

Alors l'application naturelle de $H^n[K]$ dans $H^n[T(G)]$ est injective.

2. Quelques lemmes préparatifs.

La démonstration de ces trois théorèmes repose sur le lemme suivant dû à Martineau [2] :

LEMME 2. — Soit $n \geq 3$. Posons

$$u_j = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n; |z_j| < r_j, |z_k| < R_k \text{ pour } k \neq j\},$$

où r_j est un nombre positif, R_1 est un positif ou $+\infty$ tel que $r_1 \leq R_1$ et $R_2 = R_3 = \dots = R_n = +\infty$. Soit V un ouvert de Stein d'un espace numérique \mathbf{C}^m .

Alors le $(n-2)$ -ième espace de cohomologie à coefficients dans \mathcal{O} du recouvrement

$$\mathcal{U}_n \times V = (u_1 \times V, u_2 \times V, \dots, u_n \times V),$$

$H^{n-2}(\mathcal{U}_n \times V; \mathcal{O})$ est zéro.

Démonstration. — Soit $f = \{f_{\hat{j}} = f_{1,2,\dots,\hat{j},\dots,n}\}$ un $(n-2)$ -cocycle : $f_{\hat{j}}$ est une fonction holomorphe dans

$$u_{\hat{j}} \times V = (u_1 \cap u_2 \cap \dots \cap \hat{u}_j \cap \dots \cap u_n) \times V$$

telles que

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j = 0 \quad \text{dans} \quad (u_1 \cap u_2 \cap \dots \cap u_n) \times V.$$

Posons

$$\begin{aligned} (2) \quad & F'_n(\zeta, z) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \frac{\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_{n-2} - z_{n-2})(\zeta_{n-1}\zeta_n - z_{n-1}z_n)(\zeta_n - z_n)} \\ & \quad F''_n(\zeta, z) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \frac{z_{n-1}}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_{n-2} - z_{n-1})(\zeta_{n-1}\zeta_n - z_{n-1}z_n)(\zeta_{n-1} - z_{n-1})}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$(3) \quad F'_n(\zeta, z) + F''_n(\zeta, z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \dots (\zeta_n - z_n)}.$$

Définissons deux fonctions f'_j et f''_j holomorphes dans $u_j \times V$ par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} f'_j(z, \xi) &= \int_{\substack{|\zeta_j| = R'_j \\ |\zeta'_k| = r'_k \text{ pour } k \neq j}} \dots \int f_j(\zeta, \xi) F'_n(\zeta, z) d\zeta_1 \dots d\zeta_n \\ f''_j(z, \xi) &= \int_{\substack{|\zeta_j| = R'_j \\ |\zeta'_k| = r'_k \text{ pour } k \neq j}} \dots \int f_j(\zeta, \xi) F''_n(\zeta, z) d\zeta_1 \dots d\zeta_n \end{aligned}$$

pour $z \in \{z \in \mathbf{C}^n; |z_j| < R'_j, |z_k| < r'_k \text{ pour } k \neq j\}$ et $\xi \in V$, où r'_k et R'_k sont des nombres positifs tels que $r'_k < r_k$ et $R'_k < R_k$ pour $k = 1, 2, \dots, n$. Il résulte, du théorème de l'intégrale de Cauchy, que les fonctions f'_j et f''_j , ne dépendant pas de r'_k et R'_k , sont bien définies et holomorphes sur le domaine $u_j \times V$.

Grâce aux formules (1) et (3), on a

$$(4) \quad \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f'_j = 0.$$

$$(5) \quad \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f''_j = 0.$$

$$(6) \quad f_j = f'_j + f''_j \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n.$$

Considérons la fonction f'_n :

$$f'_n(z, \xi) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\substack{|\zeta_j|=r'_j, j=1, 2, \dots, n-1 \\ |\zeta_n|=R'_n}} \dots \int \frac{f_n(\zeta, \xi) \zeta_n d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_{n-2} - z_{n-2})(\zeta_{n-1}\zeta_n - z_{n-1}z_n)(\zeta_n - z_n)}$$

pour

$$(z, \xi) \in \{z \in \mathbb{C}^n; |z_j| < r'_j, j = 1, 2, \dots, n-1, |z_n| < R'_n\} \times V.$$

On voit par cette formule que la fonction $f'_n(z, \xi)$ est aussi holomorphe dans l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}^n; |z_j| < r'_j, j = 1, 2, \dots, n-2, |z_{n-1}z_n| < r'_{n-1}R'_n, |z_n| < R'_n\} \times V$$

en particulier dans l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}^n; |z_j| < r'_j, j = 1, 2, \dots, n-2, |z_{n-1}| < R'_n, |z_n| < r'_{n-1}\} \times V.$$

Comme on peut mettre $r'_j \uparrow r_j$ et $R'_n \uparrow +\infty$, la fonction $f'_n(z, \xi)$ est holomorphe dans l'union de

$$u_j \times V = \{z \in \mathbb{C}^n; |z_j| < r_j, j = 1, 2, \dots, n-1, z_n \in \mathbb{C}\} \times V$$

et

$$\{z \in \mathbb{C}^n; |z_j| < r_j, j = 1, 2, \dots, n-2, z_{n-1} \in \mathbb{C}, |z_n| < r_{n-1}\} \times V.$$

Donc, par le théorème du disque, la fonction f'_n est holomorphe dans

$$(u_1 \cap u_2 \cap \dots \cap u_{n-2}) \times V = \{z; |z_j| < r_j, j = 1, 2, \dots, n-2\} \times V.$$

De même on peut montrer que la fonction $\widehat{f''_{n-1}}$ est holomorphe dans $(u_1 \cap u_2 \cap \dots \cap u_{n-2}) \times V$.

Supposons d'abord $n = 3$. (Dans ce qui suit on supprime la notation de V pour la simplicité.) Comme on a, par (4), la formule

$$f'_{23}(z) = -(f'_{12}(z) + f'_{31}(z)),$$

la fonction $f'_{23}(z)$ est holomorphe dans l'union de

$$\{z \in \mathbf{C}^3; |z_1| < R_1, |z_2| < r_2, |z_3| < r_3\}$$

et

$$\{z \in \mathbf{C}^3; |z_1| < r_1, z_2 \in \mathbf{C}, |z_3| < r_3\},$$

car la fonction $f'_{12}(z) = f'_3(z)$ est holomorphe dans

$$u_1 = \{z \in \mathbf{C}^3; |z_1| < r_1, z_2 \in \mathbf{C}, z_3 \in \mathbf{C}\}.$$

Donc, par le théorème du disque, la fonction $f'_{23}(z)$ est holomorphe dans $u_3 = \{z \in \mathbf{C}^3; |z_1| < R_1, z_2 \in \mathbf{C}, |z_3| < r_3\}$. De même, la formule

$$f''_{23}(z) = -(f''_{12}(z) + f''_{31}(z))$$

implique que la fonction $f''_{23}(z)$ est holomorphe dans

$$u_2 = \{z \in \mathbf{C}^3; |z_1| < R_1, |z_2| < r_2, z_3 \in \mathbf{C}\}.$$

Si on pose

$$\begin{cases} \varphi_1 = -f'_{12} + f''_{31}, \\ \varphi_2 = -f''_{23}, \\ \varphi_3 = f'_{23}, \end{cases}$$

le cobord de la 0-cochaîne $\varphi = \{\varphi_i\}$, $\delta\varphi$ est égal à f . Le cas $n = 3$ est démontré.

Supposons que le lemme est démontré jusqu'à $n - 1$. Posons

$$u'_j = \{z \in \mathbf{C}^{n-1}; |z_j| < R_j, |z_k| < r_k \text{ pour } k \neq j\}$$

pour $j = 1, 2, \dots, n - 1$, et considérons le recouvrement

$$\mathcal{U}'_{n-1} \times \{|z_n| < r_n\} = \{u'_j \times \{|z_n| < r_n\}\}_{j=1,2,\dots,n-1}.$$

Les $n - 1$ fonctions $f'_1, f'_2, \dots, f'_{\widehat{n-2}}, (f'_{\widehat{n-1}} - f'_n)$ forment un $(n-3)$ -cocycle f' de ce recouvrement. Donc par l'hypothèse de récurrence il existe une $(n-4)$ -cochaîne

$$g' = \{g'_{j_1, \dots, j_{n-3}}; 1 \leq j_1 < \dots < j_{n-1} \leq n - 1\}$$

par rapport au recouvrement $\mathcal{U}'_{n-1} \times \{|z_n| < r_n\}$ telle que

$\delta g' = f'$, c'est-à-dire :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_{\hat{k}} = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} g'_{j\hat{k}} + \sum_{j=k+1}^{n-1} (-1)^j g'_{k\hat{j}}, \\ \text{pour } k = 1, 2, \dots, n-2, \\ f'_{\widehat{n-1}} - f'_{\hat{n}} = \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{j-1} g'_{j\widehat{n-1}}. \end{array} \right.$$

Définissons alors une $(n-3)$ -cochaîne φ' de \mathcal{U}_n par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'_{j_1, \dots, j_{n-3}, n} = g'_{j_1, \dots, j_{n-3}} \\ \varphi'_{j\hat{n}} = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n-2 \\ \varphi'_{\widehat{n-1}\hat{n}} = (-1)^n f'_{\hat{n}}. \end{array} \right.$$

Par la formule (7), le cobord de φ' , $\delta\varphi'$ est égal à f' .

De même, il existe une $(n-3)$ -cochaîne φ'' de \mathcal{U}_n telle que $\delta\varphi'' = f''$. Donc par la formule (6),

$$\delta(\varphi' + \varphi'') = f' + f'' = f,$$

ce qui achève la démonstration par récurrence sur n (c.q.f.d.).

LEMME 3. — Avec la même notation que dans le lemme 2, on a

$$H^j[\{z \in \mathbf{C}^n; r_1 \leq |z_1| < R_1, r_2 \leq |z_2|, \dots, r_n \leq |z_n|\} \times V] = 0$$

pour $j \neq n$.

Démonstration. — Posons

$$\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n; |z_1| < R_1, (z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^{n-1}\}$$

et

$$A_n = \{z \in \mathbf{C}^n; r_1 \leq |z_1| < R_1, r_2 \leq |z_2|, \dots, r_n \leq |z_n|\}.$$

On a une suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{A_n}^0(\Omega; \mathcal{O}) &\rightarrow H^0(\Omega; \mathcal{O}) \rightarrow H^0(\Omega - A_n; \mathcal{O}) \\ &\rightarrow H_{A_n}^1(\Omega; \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\Omega; \mathcal{O}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

On a clairement $H_{A_n}^0(\Omega; \mathcal{O}) = 0$. Ω étant un ouvert de

Stein, $H^j(\Omega; \mathcal{O}) = 0$ pour $j \geq 1$. Donc on a

$$(1) \quad H^1_{\Lambda_n}(\Omega; \mathcal{O}) = H^0(\Omega; \mathcal{O})/H^0(\Omega - \Lambda_n; \mathcal{O}).$$

$$(2) \quad H^j_{\Lambda_n}(\Omega; \mathcal{O}) = H^{j-1}(\Omega - \Lambda_n; \mathcal{O}) \quad \text{pour } j = 2, 3, \dots$$

Or par le théorème du disque on a $H^1_{\Lambda_n}(\Omega; \mathcal{O}) = 0$ si $n \geq 2$.
Donc on peut supposer $n \geq 3$.

Supposons que le lemme est démontré jusqu'à $n - 1$.
Posons

$$A_{n-1} = \{z \in \mathbf{C}^{n-1}; r_1 \leq |z_1| < R_1, r_2 \leq |z_2|, \dots, r_{n-1} \leq |z_{n-1}|\}.$$

On a une suite exacte de cohomologie

$$H^{j-1}[A_{n-1} \times \{|z_n| < r_n\}] \rightarrow H^j[A_n] \rightarrow H^j[A_{n-1} \times \mathbf{C}].$$

Par l'hypothèse de récurrence les premier et dernier termes sont zéro pour $j = 0, 1, \dots, n - 2$. Donc $H^j[A_n] = 0$ pour $j \neq n - 1, n$. D'autre part, un théorème de Leray implique que

$$H^{n-2}(\Omega - \Lambda_n; \mathcal{O}) \cong H^{n-2}(\mathcal{U}_n, \mathcal{O}).$$

La formule (2) et le lemme précédent impliquent

$$H^{n-1}[A_n] = 0 \quad (\text{c.q.f.d.})$$

LEMME 4. — *Toujours avec la notation du lemme 2, on a*

$$H^j[A_{n-p} \times B_p \times V] = 0 \quad \text{pour } j \neq n,$$

où

$$A_{n-p} = \{z \in \mathbf{C}^{n-p}; r_1 \leq |z_1| < R_1, r_2 \leq |z_2|, \dots, r_{n-p} \leq |z_{n-p}|\} \\ B_p = \{z \in \mathbf{C}^p; \operatorname{Im} z_1 \leq 0, \dots, \operatorname{Im} z_p \leq 0\}.$$

En particulier nous avons les formules

$$(i) \quad H^j[B_n \times V] = 0 \quad \text{pour } j \neq n$$

$$(ii) \quad H^j[\{z_1 \in \mathbf{C}; r_1 \leq |z_1| < R_1\} \times B_{n-1} \times V] = 0 \\ \text{pour } j \neq n.$$

Démonstration. — Le cas $p = 0$ est exactement le lemme 3.
Le lemme est supposé démontré jusqu'à $p - 1$ ($p \geq 1$).

Soient u et U deux domaines de \mathbf{C} tels que $u \subset U$. Alors on a une suite exacte de cohomologie :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{j-1}[A_{n-p} \times u \times B_{p-1}] &\rightarrow H^j[A_{n-p} \times (U - u) \\ &\times B_{p-1}] \rightarrow H^j[A_{n-p} \times U \times B_{p-1}] \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence les premier et dernier termes sont zéro pour $j = 0, 1, \dots, n - 2$. Donc on a

$$(1) \quad H^j[A_{n-p} \times (U - u) \times B_{p-1}] = 0 \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, n - 2,$$

et une suite exacte :

$$(2) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow H^{n-1}[A_{n-p} \times (U - u) \times B_{p-1}] &\rightarrow H^{n-1}[A_{n-p} \times U \times B_{p-1}] \\ &\rightarrow H^{n-1}[A_{n-p} \times u \times B_{p-1}]. \end{aligned}$$

Or par l'hypothèse de récurrence on sait que

$$H^{n-1}[A_{n-p+1} \times B_{p-1}] \cong H^{n-1}[A_{n-p} \times (\mathbf{C} - u_1) \times B_{p-1}] = 0,$$

où

$$u_1 = \{z \in \mathbf{C}; |z - i| < 1\};$$

c'est-à-dire que l'application

$$\alpha : H^{n-1}[A_{n-p} \times \mathbf{C} \times B_{p-1}] \rightarrow H^{n-1}[A_{n-p} \times u_1 \times B_{p-1}]$$

est injective. Si on pose

$$U_1 = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im} z > 0\},$$

l'application α se décompose : $\alpha = \gamma \cdot \beta$

$$\begin{aligned} H^{n-1}[A_{n-p} \times \mathbf{C} \times B_{p-1}] &\xrightarrow{\beta} H^{n-1}[A_{n-p} \times U_1 \times B_{p-1}] \\ &\xrightarrow{\gamma} H^{n-1}[A_{n-p} \times u_1 \times B_{p-1}]. \end{aligned}$$

Par conséquent l'application β est injective, ce qui veut dire, par la suite exacte (2), que $H^{n-1}[A_{n-p} \times B_p] = 0$. D'autre part grâce à (1) on a

$$H^j[A_{n-p} \times B_p] = 0 \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, n - 2 \quad (\text{c.q.f.d.})$$

Précisons un cas du fait que l'on a utilisé dans la démonstration ci-dessus :

LEMME 5. — (*L'unicité de prolongement analytique par rapport aux « paramètres holomorphes »*).

Soient

$$V_R = \{z \in \mathbb{C}^m; |z_j| < R_j, j = 1, 2, \dots, m\}$$

et

$$V_r = \{z \in \mathbb{C}^m; |z_j| < r_j, j = 1, 2, \dots, m\}$$

*où r_j et R_j sont des positifs ou $+\infty$ tels que $R_j \geq r_j$.
Et posons*

$$G_0 = \{y \in \mathbb{R}^n; y_j \leq 0, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Alors l'application de restriction de $H^n[T(G_0) \times V_R]$ dans $H^n[T(G_0) \times V_r]$ est injective.

Démonstration. — Posons

$$V^0 = V_R$$

$$V^j = \{z \in \mathbb{C}^m; |z_1| < r_1, \dots, |z_j| < r_j, |z_{j+1}| < R_{j+1}, \dots, |z_m| < R_m\}.$$

Alors on a

$$V_R = V^0 \supset V^1 \supset V^2 \supset \dots \supset V^m = V_r.$$

Donc il nous suffit de vérifier l'injectivité de l'application

$$H^n[T(G_0) \times V^j] \rightarrow H^n[T(G_0) \times V^{j+1}].$$

Or on a une suite exacte de cohomologie

$$H^n[T(G_0) \times (V^j - V^{j+1})] \rightarrow H^n[T(G_0) \times V^j] \rightarrow H^n[T(G_0) \times V^{j+1}].$$

Comme nous avons

$$V^j - V^{j+1} = \{z; |z_1| < r_1, \dots, |z_j| < r_j, r_{j+1} \leq |z_{j+1}| < R_{j+1}, |z_{j+2}| < R_{j+2}, \dots, |z_m| < R_m\}.$$

par le lemme 4 (ii) le premier terme de la suite est zéro.
(c.q.f.d.)

LEMME 6. — Quand ν_1 et ν_2 sont deux sous-ensembles ouverts de V tels que $\nu_1 \subset \nu_2$. On note par $\rho_{\nu_1}^{\nu_2}$ l'application de restriction de $H^n[T(G_0) \times \nu_2]$ dans $H^n[T(G_0) \times \nu_1]$.

Alors le préfaisceau $\{H^n[T(G_0) \times \nu]; \rho_{\nu_1}^{\nu_2}\}$ sur V est un faisceau sur V .

Démonstration. — Soit en général $\mathcal{F}^j(\mathcal{L})$ le faisceau associé au préfaisceau $\{H_{T(G_0) \times \nu}^j(\mathbf{C}^n \times \nu; \mathcal{L}); \rho_{\nu_1}^{\nu_2}\}$ sur V , où \mathcal{L} est un faisceau sur $\mathbf{C}^n \times V$. Citons quelques propriétés faciles des $\mathcal{F}^j(\mathcal{L})$:

i) L'espace des sections $\Gamma(V, \mathcal{F}^0(\mathcal{L})) \cong \Gamma_{T(G_0) \times V}(\mathbf{C}^n \times V; \mathcal{L})$.

ii) Si $0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \dots$ est une résolution flasque du faisceau \mathcal{L} , alors la p -ième cohomologie $\mathcal{H}^p(\mathcal{F}^0(\mathcal{G}_*))$ du complexe

$$\mathcal{F}^0(\mathcal{G}_*) : 0 \rightarrow \mathcal{F}^0(\mathcal{G}_0) \rightarrow \mathcal{F}^0(\mathcal{G}_1) \rightarrow \mathcal{F}^0(\mathcal{G}_2) \rightarrow \dots$$

est le faisceau $\mathcal{F}^p(\mathcal{L})$.

iii) Si \mathcal{L} est flasque, alors $\mathcal{F}^0(\mathcal{L})$ est flasque.

Soit $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}^0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}^1 \xrightarrow{\delta} \dots \rightarrow \mathcal{B}^n \rightarrow 0$ la résolution flasque du faisceau \mathcal{O} par les faisceaux des $(0, j)$ -formes hyperfonctions $\mathcal{B}^j (j = 0, 1, \dots, n)$ (voir Sato [4] et Komatsu [1]). Soit $\mathcal{V} = \{\nu; \nu \text{ ouvert de } V\}$. Considérons le double complexe

$$\bigoplus_{p,q} \mathcal{C}^p(\mathcal{V}; \mathcal{F}^q(\mathcal{B}^q))$$

avec $d' = \delta$ (cobord de Čech) et $d'' = (-1)^j \delta$. Alors on a par i) et iii)

$$\begin{aligned} {}''E_1^{p,q} &= H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}^0(\mathcal{B}^p)) \\ &= \begin{cases} \Gamma_{T(G_0) \times V}(\mathbf{C}^n \times V; \mathcal{B}^p) & q = 0 \\ 0 & q > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on a

$${}''E_2^{p,q} = \begin{cases} H_{T(G_0) \times V}^p(\mathbf{C}^n \times V; \mathcal{O}) = H^p[T(G_0) \times V] & q = 0 \\ 0 & q > 0. \end{cases}$$

D'autre part, par ii) on a

$$\begin{aligned} {}'E_2^{p,q} &= H^p(\mathcal{V}, \mathcal{H}^q(\mathcal{F}^0(\mathcal{B}^*))) \\ &= H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}^q(\mathcal{O})). \end{aligned}$$

Mais par le lemme 4 (i) on a $\mathcal{F}^j(\mathcal{O}) = 0$ pour $j \neq n$. Donc

$${}^{\prime}E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}^n(\mathcal{O})) & q = n \\ 0 & q \neq n. \end{cases}$$

Par la théorie de la suite spectrale dégénérée, on a

$$H^j(\mathcal{V}, \mathcal{F}^n(\mathcal{O})) \cong H^{j+n}[T(G_0) \times V; \mathcal{O}].$$

En particulier l'espace des sections de $\mathcal{F}^n(\mathcal{O})$ sur V ,

$$\Gamma(V; \mathcal{F}^n(\mathcal{O})) \cong H^n[T(G_0) \times V]. \quad (\text{c.q.f.d.})$$

LEMME 7. — Posons

$$\begin{aligned} G_0 &= \{y \in \mathbf{R}^n; y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, \dots, y_n \leq 0\}, \\ E &= \{y \in \mathbf{R}^n; y_1 > -1\} \quad \text{et} \\ O &= \{x \in \mathbf{R}^n; x_1 > 0\}. \end{aligned}$$

Soit V un ouvert de Stein de \mathbf{C}^m .

Alors on a

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad H^j[T(G_0 \cap E) \times V] &= 0 & \text{pour } j \neq n, \\ \text{ii)} \quad H^j[(O \times \sqrt{-1}G_0) \times V] &= 0 & \text{pour } j \neq n. \end{aligned}$$

Démonstration. — Posons

$$\begin{aligned} u &= \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im} z > 0\} \quad (\text{resp. } \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}) \\ U &= \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im} z > -1\} \quad (\text{resp. } \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Re} z > 0\}) \\ \text{et} \quad T(G'_0) &= \{z \in \mathbf{C}^{n-1}; \operatorname{Im} z_1 \leq 0, \dots, \operatorname{Im} z_{n-1} \leq 0\}. \end{aligned}$$

On a une suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned} (1) \quad H^{j-1}[u \times T(G'_0)] &\rightarrow H^j[(U - u) \times T(G'_0)] \\ &\rightarrow H^j[U \times T(G'_0)]. \end{aligned}$$

Si on suppose que le lemme est démontré jusqu'à $n-1$, on a par (1) $H^j[(U - u) \times T(G'_0)] = 0$ pour $j \neq n-1, n$.

Posons ensuite pour $\rho > 1$.

$$\begin{aligned} u_\rho &= \{z \in \mathbf{C}; |z - i\rho| < \rho\} \quad (\text{resp. } \{z \in \mathbf{C}; |z - (\rho + i)| < 1\}) \\ U_\rho &= \{z \in \mathbf{C}; |z - i\rho| < \rho + 1\} \quad (\text{resp. } \{z \in \mathbf{C}; \\ &\quad |z - (\rho + i)| < \rho\}). \end{aligned}$$

Comme les u_ρ sont contenus dans u , le lemme 5 implique que chaque élément φ de $\ker \alpha$

$$\alpha: H^{n-1}[U \times T(G'_0)] \rightarrow H^{n-1}[u \times T(G'_0)]$$

est zéro dans $H^{n-1}[U_\rho \times T(G'_0)]$ pour $\rho > 1$. Comme $\bigcup_{\rho > 1} U_\rho = U$, $\varphi = 0$ dans $H^{n-1}[U \times T(G'_0)]$, grâce au lemme 6, c'est-à-dire l'application α est injective, ce qui équivaut à

$$H^{n-1}[(U - u) \times T(G'_0)] = 0$$

par la suite exacte (1). Comme le lemme est manifestement vrai pour $n = 1$, le lemme est démontré.

(c.q.f.d.)

3. Démonstration du théorème 1.

On démontre le théorème suivant qui contient le théorème 1 comme un cas spécial ($j = 0$) :

THÉORÈME 1 bis. — Soient G un convexe fermé et propre de \mathbf{R}^n , E_1, E_2, \dots, E_j des demi-espaces ouverts de \mathbf{R}^n et V un ouvert de Stein de \mathbf{C}^m . Alors on a

$$\begin{aligned} (Q_{j,k}) \quad & H^k[T(G \cap E_1 \cap \dots \cap E_j) \times V] = 0 \\ & \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots \\ & \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ & \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1-j. \end{aligned}$$

(On interprète si $j = 0$, $E_1 \cap \dots \cap E_j = \mathbf{R}^n$).

Démonstration (par récurrence sur k). — (Supprimons comme toujours la notation de V dans la démonstration.) Dans le cas $k = 0$ ($j \leq n-1$), grâce à l'unicité de prolongement analytique, il suffit de montrer que le fermé $G \cap E_{1\dots j}$ n'est pas égal à $E_{1,2,\dots,j}$. (On note pour la simplicité

$$E_{1,2,\dots,j} = E_{1\dots j} = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_j).$$

Comme $j \leq n-1$, il existe une droite d contenue dans

$E_{1\dots j}$. Mais, G étant propre, d ne peut pas être contenue dans G . Donc $G \cap E_{1,2,\dots,j} \neq E_{1\dots j}$.

Dans le cas $k = 1 (j \leq n - 2)$, grâce au théorème du tube, il suffit de montrer que $E_{1\dots j} - G$ est connexe et son enveloppe convexe est égale à $E_{1,2,\dots,j}$. En effet, si $n = 2$, alors $j = 0$, $E_{1\dots j} = \mathbb{R}^2$. Il est clair que $\mathbb{R}^2 - G$ est connexe et que son enveloppe convexe est \mathbb{R}^2 (lemme 1 (i)). Soit $n \geq 3$. Considérons des sous-variétés linéaires d de dimension maximale, parallèles à chaque $\partial E_i (i = 1, 2, \dots, j)$ et contenues dans $E_{1,2,\dots,j}$. Alors $\dim d \geq 2$ et l'union de telles d est égale à $E_{1,2,\dots,j}$. Comme $d \cap G$ est un convexe propre de d , $d - G$ est connexe et son enveloppe convexe est égale à d (lemme 1 (iii)). D'autre part, comme G est propre, il existe une sous-variété linéaire d' de \mathbb{R}^n disjointe de G telle que $d' \cap d \neq \emptyset$ pour chaque d , d'où résulte la connexité de $E_{1\dots j} - G$.

Supposons que $(Q_{j,k}^n)$ est vraie jusqu'à $k - 1 (k \geq 2)$. Soit

$$E_i = \{x \in \mathbb{R}^n; m_i(x) > b_i\} \quad i = 1, 2, \dots, j,$$

où m_i est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n et b_i est un réel. On peut supposer que $m_1, m_2, \dots, m_{j_0} (j_0 \leq j)$ sont linéairement indépendantes, où j_0 est la dimension du sous-espace engendré par $\{m_1, m_2, \dots, m_j\}$. Soit

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i,$$

où $D_i = \{x \in \mathbb{R}^n; l_i(x) \leq a_i\}$, l_i est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n et a_i est un réel. On peut supposer aussi, G étant propre, que les n formes linéaires $l_1, \dots, l_{n-j_0}, m_1, \dots, m_{j_0}$ sont linéairement indépendantes. Posons

$$G^{(m)} = \bigcap_{i=1}^m D_i,$$

$$F_i = \mathbb{R}^n - D_i = \{x \in \mathbb{R}^n; l_i(x) > a_i\}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a déjà

$$(1) \quad H^{k-1}[T(G^{(m)} \cap E_{1,2,\dots,j} \cap F_{m+1})] = 0 \quad \text{pour } m \geq n - j_0.$$

En effet, le convexe fermé $G^{(m)} \cap \bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_j$ étant propre

pour $m \geq n - j_0$, on a

$$H^{k-1}[T(G^{(m)} \cap E_{1,2}, \dots, j \cap F_{m+1})] = H^{k-1}[T(G^{(m)} \cap \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \dots \cap \bar{E}_j \cap E_{1,2}, \dots, j \cap F_{m+1})] = 0.$$

D'autre part, le lemme 4 (i) (avec paramètres) dit que

$$(2) \quad H^k[T(G^{(n-j_0)} \cap E_{1,2}, \dots, j)] = 0 \quad \text{pour} \quad k \leq n - 1 - j_0$$

en particulier pour $k \leq n - 1 - j$.

Or on a la suite exacte de cohomologie suivante :

$$(3) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow H^{k-1}[T(G^{(m)} \cap E_{1,2}, \dots, j \cap F_{m+1})] \\ &\rightarrow H^k[T(G^{(m+1)} \cap E_{1,2}, \dots, j)] \\ &\rightarrow H^k[T(G^{(m)} \cap E_{1,2}, \dots, j)] \end{aligned}$$

pour $m \geq n - j$. Donc on obtient, par récurrence sur m , en partant des formules (1) et (2),

$$(4) \quad H^k[T(G^{(m)} \cap E_{1,2}, \dots, j)] = 0$$

pour $m \geq n - j$.

Pour préciser ce processus et montrer que

$$H^k[T(G \cap E_{1,2}, \dots, j)] = 0,$$

posons maintenant :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{T(E_{1,2}, \dots, j), T(F_i); i = 1, 2, \dots\}, \\ \mathcal{U}' &= \{T(F_i); i = 1, 2, \dots\}, \\ \mathcal{U}_m &= \{T(E_{1,2}, \dots, j), T(F_i); i = 1, 2, \dots, m\}, \\ \mathcal{U}'_m &= \{T(F_i); i = 1, 2, \dots, m\}. \end{aligned}$$

On a, par le théorème de Leray et (4) :

$$(4') \quad \begin{aligned} H^k[T(G \cap E_{1,2}, \dots, j)] &\cong H^k(\mathcal{U}, \mathcal{U}'), \\ H^k[T(G^{(m)} \cap E_{1,2}, \dots, j)] &\cong H^k(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}'_m) = 0 \end{aligned}$$

où l'on a noté par $H^k(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ le k -ième espace de cohomologie du recouvrement relatif $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ à coefficients dans \mathcal{O} , etc.

Soit φ un k -cocycle du recouvrement relatif $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$. Alors la formule (4') assure l'existence d'une $(k-1)$ -cochaîne $f^{(m)}$ du recouvrement relatif $(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}'_m)$ telle que $\delta f^{(m)} = \varphi^{(m)}$,

où l'on note par δ l'opérateur du cobord et $\varphi^{(m)}$ désigne la restriction de φ à $(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}'_m)$. Étendons $f^{(m)}$ à une $(k-1)$ -cochaîne $\bar{f}^{(m)}$ du $(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}'_{m+1})$ par la formule suivante :

$$\bar{f}^{(m)}_\alpha = \begin{cases} f^{(m)}_\alpha & \text{si multi-indice } \alpha \in (\mathcal{U}_m)^k \\ 0 & \text{si multi-indice } \alpha \notin (\mathcal{U}_m)^k. \end{cases}$$

Alors $\varphi^{(m+1)} - \delta \bar{f}^{(m)}$ est un k -cocycle du $(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}'_{m+1})$ dont les coefficients à multi-indice $\alpha \in (\mathcal{U}_m)^{k+1}$ sont zéros. Si l'on pose

$$\mathcal{V}_m = \{T(E_{1,2,\dots,j} \cap F_{m+1}), T(F_i); i = 1, 2, \dots, m\},$$

on a, par l'isomorphisme de Leray et (1),

$$(1') \quad H^{k-1}[T(G^{(m)} \cap E_{1,2,\dots,j} \cap F_{m+1})] \cong H^{k-1}(\mathcal{V}_m, \mathcal{U}'_m) = 0.$$

Le k -cocycle $\varphi^{(m+1)} - \delta \bar{f}^{(m)}$ du $(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}'_{m+1})$ définit un $(k-1)$ -cocycle φ' du $(\mathcal{V}_m, \mathcal{U}'_m)$ et, grâce à (1'), il existe une $(k-2)$ -cochaîne $\pi^{(m)}$ du $(\mathcal{V}_m, \mathcal{U}'_m)$ telle que $\delta \pi^{(m)} = \varphi'$. Par la suite (3) on peut considérer canoniquement la $(k-2)$ -cochaîne $\pi^{(m)}$ du $(\mathcal{V}_m, \mathcal{U}_m)$ comme une $(k-1)$ -cochaîne $\bar{\pi}^{(m)}$ du $(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}'_{m+1})$ dont les coefficients à multi-indice $\alpha \in (\mathcal{U}_m)^k$ sont zéro. On a alors :

$$\delta \bar{\pi}^{(m)} = \varphi^{(m+1)} - \delta \bar{f}^{(m)}.$$

Si on définit une $(k-1)$ -cochaîne $f^{(m+1)}$ du $(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}'_{m+1})$ par la formule :

$$f^{(m+1)} = \bar{f}^{(m)} + \bar{\pi}^{(m)},$$

on a $\delta f^{(m+1)} = \varphi^{(m+1)}$ et la restriction de $f^{(m+1)}$ à $(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}'_m)$ est égale à $f^{(m)}$. Dans cette manière, on peut montrer, par récurrence sur m , qu'il existe, pour chaque $m \geq n - j_0$, une $(k-1)$ -cochaîne $f^{(m)}$ du recouvrement relatif $(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}'_m)$ telle que $\delta f^{(m)} = \varphi^{(m)}$ et que la restriction de $f^{(m+1)}$ à $(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}'_m)$ soit égale à $f^{(m)}$. En recollant les $f^{(m)}$ les unes aux autres, on peut construire une $(k-1)$ -cochaîne f du recouvrement relatif $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ telle que $\delta f = \varphi$, d'où résulte

$$H^k[T(G \cap E_{1,2,\dots,j})] \cong H^k(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = 0.$$

(c.q.f.d.)

4. Démonstration du théorème 2.

Nous allons démontrer le théorème suivant qui implique le théorème 2.

THÉORÈME 2 bis. — Soient E_1, E_2, \dots, E_j des demi-espaces ouverts de \mathbf{R}^n et G un convexe fermé et propre tels que

$$G \cap E_{1,2,\dots,j}$$

soit contenu dans un translaté de $\mathbf{R}^n - E_{1,2,\dots,j}$. Et V désigne un ouvert de Stein de \mathbf{C}^m .

Alors on a

$$(Q_{j,k}^n) \quad H^k[T(G \cap E_{1,2,\dots,j}) \times V] = 0$$

pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $k = n - j$.

LEMME 8. — Considérons $\mathbf{R}^{n-1} \cong \{x \in \mathbf{R}^n; x_n = 0\}$. Soient $E'_1, E'_2, \dots, E'_{j-1}$ des demi-espaces ouverts de \mathbf{R}^{n-1} et G' un convexe fermé et propre de \mathbf{R}^{n-1} . Alors $(P_{j,k}^n)$ est vraie pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $k = n - j$.

$$(P_{j,k}^n) \quad H^k[T(G' \cap E'_{1,2,\dots,j-1}) \times T([a, b]) \times V] = 0.$$

(Nous notons $E'_{1,\dots,j-1} = E'_1 \cap E'_2 \cap \dots \cap E'_{j-1}$.)

Remarquons que $(P_{j,k}^n)$ est $(Q_{j,k}^n)$ pour les

$$\begin{aligned} G &= G' \times [a, b] \\ E_i &= E'_i \times \mathbf{R} \quad i = 1, 2, \dots, j-1 \\ E_j &= \mathbf{R}^{n-1} \times]a, \infty[. \end{aligned}$$

Démonstration (par récurrence sur k). — Le lemme est vrai pour $k = 0$ et 1 à cause de l'unicité de prolongement analytique et du théorème du tube. Supposons que l'énoncé soit démontré jusqu'à $k - 1$. Soit

$$E'_i = \{x \in \mathbf{R}^{n-1}; m'_i(x) > b_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, j-1,$$

m'_i une forme linéaire sur \mathbf{R}^{n-1} et b_i un réel. On peut supposer que $\{m'_i, \dots, m'_{j_0-1}\}$ ($j_0 \leq j$) sont linéairement indépendantes où $j_0 - 1$ est la dimension du sous-espace engendré

par m'_i, \dots, m'_{j-1} . Soit

$$G' = \bigcap_{i=1}^{\infty} D'_i$$

où $D'_i = \{x \in \mathbf{R}^{n-1}, l'_i(x) \leq a_i\}$, l'_i est une forme linéaire sur \mathbf{R}^{n-1} et a_i est un réel. On peut supposer, G' étant propre, que les $n-1$ formes linéaires $l'_1, \dots, l'_{n-j_0}, m'_1, \dots, m'_{j_0-1}$ sont linéairement indépendantes. Posons

$$G^{(m)} = \bigcap_{i=1}^m D'_i, \\ F'_i = \mathbf{R}^{n-1} - D'_i = \{x \in \mathbf{R}^{n-1}; l'_i(x) > a_i\}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, on sait déjà

$$(1) \quad H^{k-1}[T(G^{(m)} \cap E'_{1,2,\dots,j-1} \cap F'_{m+1}) \times T([a, b])] = 0$$

pour $m \geq n - j_0$. D'autre part le lemme 7 (i) (avec paramètres) implique que

$$(2) \quad H^k[T(G'^{(n-j_0)} \cap E'_{1,\dots,j-1}) \times T([a, b])] = 0.$$

Comme dans la démonstration du théorème 1 bis, en utilisant la cohomologie de recouvrement relatif, on peut conclure des formules (1) et (2) que

$$H^k[T(G' \cap E'_{1,2,\dots,j-1}) \cap T([a, b])] = 0. \quad (\text{c.q.f.d.})$$

LEMME 9. — Soient E un demi-espace ouvert de \mathbf{R}^n , p une projection orthogonale de \mathbf{R}^n sur ∂E et G un convexe fermé et propre de \mathbf{R}^n tels que

- i) $G \cap E \neq \emptyset$ (vide).
- ii) $p(G \cap E) = G \cap \partial E$.
- iii) $G \cap E$ est contenu dans un translaté D_t de D où $D = \mathbf{R}^n - E$.

Alors

$$H^{n-1}[T(G \cap E) \times V] = 0.$$

Démonstration. — Remarquons si G_1 et G_2 sont deux convexes fermés et propres de \mathbf{R}^n tels que $G_1 \subset G_2$, qu'il y a une suite exacte de cohomologie :

$$(1) \quad 0 \rightarrow H^{n-1}[T(G_2 - G_1)] \rightarrow H^n[T(G_1)] \rightarrow H^n[T(G_2)].$$

Posons

$$G_0 = G \cap \partial E, \quad G_1 = G \cap \bar{E}$$

et

$$G_2 = p^{-1}(G \cap \partial E) \cap D_t \cap \bar{E}.$$

Alors par le lemme 8 on a

$$H^{n-1}[T(G_2 - G_0)] = H^{n-1}[T(p^{-1}(G \cap \partial E) \cap D_t \cap E)] = 0,$$

c'est-à-dire que, par la suite exacte (1) où on remplace G_1 par G_0 , l'application

$$H^n[T(G_0)] \xrightarrow{\gamma} H^n[T(G_2)]$$

est injective. Comme l'application γ se décompose :

$$H^n[T(G_0)] \xrightarrow{\alpha} H^n[T(G_1)] \xrightarrow{\beta} H^n[T(G_2)],$$

l'injectivité de $\gamma = \beta \cdot \alpha$ implique l'injectivité de α . Donc par la suite exacte (1) où on remplace G_2 par G_1 et G_1 par G_0 , on a $H^{n-1}[T(G_1 - G_0)] = H^{n-1}[T(G \cap E)] = 0$.

(c.q.f.d.)

Démonstration du théorème 2 bis. — 1^o Supposons d'abord $j = 1$. Par l'hypothèse du théorème 2 bis, on peut construire une suite de convexes fermés et propres

$$G \cap \partial E \subset \dots \subset G^{(m)} \subset G^{(m-1)} \subset \dots \subset G^{(1)} \subset G^{(0)} = G \cap \bar{E}$$

telle que $G \cap \partial E = G^{(0)} \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$, $G^{(m)} = G^{(0)} \cap \bigcap_{i=1}^m D_i$, où D_i est un demi-espace fermé de \mathbf{R}^n , et que l'hypothèse du lemme 9 soit remplie pour les $G^{(m)}$ et E_{m+1} ($m = 0, 1, 2, \dots$). Alors par le lemme 9, on a

$$(1) \quad H^{n-1}[T(G^{(m)} - G^{(m+1)})] = H^{n-1}[T(G^{(m)} \cap E_{m+1})] = 0.$$

D'autre part on a une suite exacte de cohomologie

$$(2) \quad 0 \rightarrow H^{n-1}[T(G^{(m)} \cap E_{m+1})] \rightarrow H^{n-1}[T(G^{(0)} \cap (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{m+1}))] \rightarrow H^{n-1}[T(G^{(0)} \cap (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m))].$$

On obtient des (1) et (2) par récurrence sur m

$$(3) \quad H^{n-1}[T(G^{(0)} - G^{(m)})] = H^{n-1}[T(G^{(0)} \cap (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m))] = 0.$$

Soit $\mathbf{R}^n - G^{(0)} = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, où F_j est un demi-espace ouvert de \mathbf{R}^n . Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{T(E_i), T(F_j); i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots\}, \\ \mathcal{U}_m &= \{T(E_i), T(F_j); i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots\}, \\ \mathcal{U}' &= \{T(F_j); j = 1, 2, \dots\}.\end{aligned}$$

On a, par l'isomorphisme de Leray, (1) et (3),

$$\begin{aligned}H^{n-1}[T(G \cap E)] &\cong H^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \\ (1') \quad H^{n-1}[T(G^{(m)} \cap E_{m+1})] &\cong H^{n-1}(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}_m) = 0 \\ (3') \quad H^{n-1}[T(G^{(0)} \cap (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m))] &\cong H^{n-1}(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}) = 0.\end{aligned}$$

On va montrer en partant des (1') et (3') que $H^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = 0$. Soit φ un $(n-1)$ -cocycle du recouvrement relatif $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$. Par (3') il existe une $(n-2)$ -cochaîne $f^{(m)}$ du $(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}')$ telle que $\delta f^{(m)} = \varphi^{(m)}$, où l'on a désigné par $\varphi^{(m)}$ la restriction de φ à $(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}')$. On définit une $(n-2)$ -cochaîne $\bar{f}^{(m)}$ de $(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}')$ par la formule

$$\bar{f}_\alpha^{(m)} = \begin{cases} f_\alpha^{(m)} & \text{si multi-indice } \alpha \in (\mathcal{U}_m)^{n-1} \\ 0 & \text{si multi-indice } \alpha \notin (\mathcal{U}_m)^{n-1}. \end{cases}$$

Alors les coefficients du $(n-1)$ -cocycle $\varphi^{(m+1)} - \delta \bar{f}^{(m)}$ du $(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}')$ à multi-indice $\alpha \in (\mathcal{U}_m)^n$ sont zéros et par conséquent $\varphi^{(m+1)} - \delta \bar{f}^{(m)}$ définit un $(n-1)$ -cocycle φ' du $(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}_m)$. Par (1') il existe une $(n-2)$ -cochaîne $\pi^{(m)}$ du $(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}_m)$ telle que $\delta \pi^{(m)} = \varphi'$. Si on considère $\pi^{(m)}$ comme une $(n-2)$ -cochaîne $\bar{\pi}^{(m)}$ du $(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}')$, on a

$$\delta \bar{\pi}^{(m)} = \varphi^{(m+1)} - \delta \bar{f}^{(m)}.$$

En définissant une $(n-2)$ -cochaîne $f^{(m+1)}$ du $(\mathcal{U}_{m+1}, \mathcal{U}')$ par la formule :

$$f^{(m+1)} = \bar{f}^{(m)} + \bar{\pi}^{(m)},$$

on a $\delta f^{(m+1)} = \varphi^{(m+1)}$. Comme la restriction de la cochaîne $f^{(m+1)}$ à $(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}')$ est égale à $f^{(m)}$, on peut construire, par récurrence sur m , une $(n-1)$ -cochaîne f du $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ telle que $\delta f = \varphi$, d'où résulte

$$H^{n-1}[T(G \cap E)] \cong H^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = 0.$$

2° Par l'hypothèse du théorème sur $E_{1,2,\dots,j}$ et G , pour un des E_i ($1 \leq i \leq j$), soit pour E_1 , $G \cap E_1$ est contenu dans un translaté $(D_1)_i$ de $D_1 = \mathbf{R}^n - E_1$. Or on a une suite exacte de cohomologie :

$$H^{n-2}[T(G \cap E_1)] \rightarrow H^{n-2}[T(G \cap E_2 \cap E_1)] \rightarrow H^{n-1}[T(G \cap D_2 \cap E_1)]$$

où $D_2 = \mathbf{R}^n - E_2$. Par 1° et le théorème 1 *bis* ($Q_{1,n-2}^n$), les premier et dernier termes de cette suite sont zéro. Donc on a

$$H^{n-2}[T(G \cap E_2 \cap E_1)] = 0.$$

En utilisant une suite exacte de cohomologie

$$H^{n-i}[T(G \cap E_{i-1} \cap \dots \cap E_1)] \rightarrow H^{n-i}[T(G \cap E_i \cap E_{i-1} \cap \dots \cap E_1)] \rightarrow H^{n-i+1}[T(G \cap D_i \cap E_{i-1} \cap \dots \cap E_1)]$$

où $D_i = \mathbf{R}^n - E_i$, on peut achever la démonstration par récurrence sur j .

(c.q.f.d.)

Démonstration du théorème 2. — Soit comme toujours

$$G_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i, \quad D_i = \{x \in \mathbf{R}^n; \quad l_i(x) \leq a_i\}.$$

Posons

$$G_2^{(m)} = G_2 \cap \left(\bigcap_{i=1}^m D_i \right).$$

Alors on a $G_1 \subset \dots \subset G_2^{(m)} \subset G_2^{(m-1)} \subset \dots \subset G_2^{(1)} \subset G_2^{(0)} = G_2$. L'hypothèse du théorème 2 permet d'appliquer le théorème 2 *bis* aux $G_2^{(m-1)}$ et $F_m = \mathbf{R}^n - D_m$. Donc on a

$$H^{n-1}[T(G_2^{(m-1)} - G_2^{(m)})] = H^{n-1}[T(G_2^{(m-1)} \cap F_m)] = 0,$$

d'où résulte, comme dans la démonstration du théorème 2 *bis*,

$$H^{n-1}[T(G_2 - G_1)] = 0;$$

c'est-à-dire l'application $H^n[T(G_1)] \rightarrow H^n[T(G_2)]$ est injective.

(c.q.f.d.)

5. Démonstration du théorème 3.

Préparons quelques lemmes :

LEMME 10. — Soient

$$\begin{array}{ll} J_i =]-\infty, a_i] & \text{ou} \quad [a_i, +\infty[\\ O_i =]-\infty, c_i[& \text{ou} \quad]c_i, +\infty[\end{array}$$

et V un ouvert de Stein de \mathbf{C}^n . Alors on a

$$H^k \left[\left\{ \prod_{i=1}^j O_i \times \mathbf{R}^{n-j} \times \sqrt{-1} \left(\prod_{i=1}^n J_i \right) \right\} \times V \right] = 0$$

pour $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, 2, \dots, n-j$.

Démonstration. — Le cas $j = 1$ est déjà démontré dans le lemme 7 (ii). Supposons que le lemme soit vrai jusqu'à $j-1$. Or on a une suite exacte de cohomologie :

$$\begin{aligned} H^{k-1} \left[\prod_{i=1}^j O_i \times \mathbf{R}^{n-j} \times \sqrt{-1} \left\{ J_1^c \times \prod_{i=2}^n J_i \right\} \right] \\ \rightarrow H^k \left[\prod_{i=1}^j O_i \times \mathbf{R}^{n-j} \times \sqrt{-1} \left\{ J_1 \times \prod_{i=2}^n J_i \right\} \right] \\ \rightarrow H^k \left[\prod_{i=1}^j O_i \times \mathbf{R}^{n-j} \times \sqrt{-1} \left\{ \mathbf{R} \times \prod_{i=2}^n J_i \right\} \right] \end{aligned}$$

où $J_1^c = \mathbf{R} - J_1$. Par l'hypothèse de récurrence le premier terme est zéro pour $k-1 \leq n-1-(j-1)$ et le troisième terme est zéro pour $k \leq (n-1)-(j-1)$. Donc le second terme est zéro pour $k \leq n-j$.

(c.q.f.d.)

LEMME 11. — Soient

$$\begin{array}{ll} I_i = [a_i, b_i], & J_i = [a_i, +\infty[\quad \text{ou} \quad]-\infty, b_i], \\ O_i = [-\infty, c_i[& \text{ou} \quad]c_i, +\infty[\end{array}$$

et V un ouvert de Stein de \mathbf{C}^n . Alors on a

$$H^k \left[\left\{ \prod_{i=1}^j O_i \times \mathbf{R}^{n-j} \times \sqrt{-1} \left(\prod_{i=1}^p I_i \times \prod_{i=p+1}^n J_i \right) \right\} \times V \right] = 0$$

pour $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n - j$ et $p = 0, 1, 2, \dots, n$.

Démonstration. — Le lemme 10 n'est autre que le lemme 11 lorsque $p = 0$. Supposons que le lemme soit démontré jusqu'à $p - 1$. On a une suite exacte de cohomologie :

$$\begin{aligned} H^{k-1} \left[\prod_{i=1}^j O_i \times \mathbf{R}^{n-j} \times \sqrt{-1} \left\{ (J_1 - I_1) \times \prod_{i=2}^p I_i \times \prod_{i=p+1}^n J_i \right\} \right] \\ \rightarrow H^k \left[\prod_{i=1}^j O_i \times \mathbf{R}^{n-j} \times \sqrt{-1} \left\{ I_1 \times \prod_{i=2}^p I_i \times \prod_{i=p+1}^n J_i \right\} \right] \\ \rightarrow H^k \left[\prod_{i=1}^j O_i \times \mathbf{R}^{n-j} \times \sqrt{-1} \left\{ J_1 \times \prod_{i=2}^p I_i \times \prod_{i=p+1}^n J_i \right\} \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme est zéro pour $k - 1 \leq (n - 1) - (j - 1)$ et le troisième est zéro pour $k \leq n - j$ par l'hypothèse de récurrence. Donc le second terme est aussi zéro pour $k \leq n - j$.
(c.q.f.d.)

LEMME 12. — Soit P un polyintervalle fermé et propre de \mathbf{R}^n ,

$$\begin{aligned} O_i =]-\infty, c_i[\quad \text{ou} \quad]c_i, \infty[\\ L_i = [d_i, e_i], \quad]-\infty, e_i] \quad \text{ou} \quad [d_i, +\infty[\end{aligned}$$

et V un ouvert de Stein de \mathbf{C}^n . Alors on a

$$H^k \left[\left\{ \prod_{i=1}^j O_i \times \prod_{i=j+1}^{j+q} L_i \times \mathbf{R}^{n-j-q} \times \sqrt{-1} P \right\} \times V \right] = 0$$

pour $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n - j$ et $q = 0, 1, 2, \dots, n - j$.

Démonstration. — Le lemme 11 n'est autre que le cas $q = 0$. Supposons que le lemme soit vrai jusqu'à $q - 1$. On a une suite exacte de cohomologie :

$$\begin{aligned} H^{k-1} \left[\prod_{i=1}^j O_i \times \prod_{i=j+1}^{j+q-1} L_i \times (\mathbf{R} - L_{j+q}) \times \mathbf{R}^{n-j-q} \times \sqrt{-1} P \right] \\ \rightarrow H^k \left[\prod_{i=1}^j O_i \times \prod_{i=j+1}^{j+q-1} L_i \times L_{j+q} \times \mathbf{R}^{n-j-q} \times \sqrt{-1} P \right] \\ \rightarrow H^k \left[\prod_{i=1}^j O_i \times \prod_{i=j+1}^{j+q-1} L_i \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-j-q} \times \sqrt{-1} P \right]. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, le premier terme est zéro pour $k - 1 \leq n - (j + 1)$ et le troisième terme est zéro pour $k \leq n - j$. Donc le second terme est aussi zéro pour $k \leq n - j$.

(c.q.f.d.)

Nous avons un théorème qui généralise le théorème 1 dans le cas spécial :

THÉOREME 3 bis. — Soient P un polyintervalle fermé et propre de \mathbf{R}^n , L un polyintervalle fermé de \mathbf{R}^n et V un ouvert de Stein de \mathbf{C}^m . Alors

i) $H^k[\{L \times \sqrt{-1}P\} \times V] = 0$ pour $k \neq n$.

ii) L'application naturelle de $H^n[\{L \times \sqrt{-1}P\} \times V]$ dans $H^n[T(P) \times V]$ est injective.

Démonstration. — Soit $L = \prod_{i=1}^n L_i$ où

$$L_i = [d_i, e_i],]-\infty, e_i], [d_i, +\infty[\text{ ou } \mathbf{R}.$$

Comme on a une suite exacte de cohomologie :

$$\begin{aligned} H^{k-1} \left[\prod_{i=1}^{p-1} L_i \times (\mathbf{R} - L_p) \times \mathbf{R}^{n-p} \times \sqrt{-1}P \right] \\ \rightarrow H^k \left[\prod_{i=1}^{p-1} L_i \times L_p \times \mathbf{R}^{n-p} \times \sqrt{-1}P \right] \\ \xrightarrow{\alpha_p^k} H^k \left[\prod_{i=1}^{p-1} L_i \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-p} \times \sqrt{-1}P \right], \end{aligned}$$

le lemme précédent implique que l'application α_p^k est injective pour $k = 1, 2, \dots, n$. Comme l'application

$$\alpha^k: H^k[\{L \times \sqrt{-1}P\}] \rightarrow H^k[T(P)]$$

se décompose $\alpha^k = \alpha_1^k \cdot \alpha_2^k \dots \alpha_n^k$, α^k est aussi injective. D'autre part on sait par le théorème 1 que $H^k[T(P) \times V] = 0$ pour $k \neq n$. Donc $H^k[(L \times \sqrt{-1}P) \times V] = 0$ pour $k \neq n$.
(c.q.f.d.)

Démonstration du théorème 3. — Soit P un polyintervalle compact de \mathbf{R}^n tel que $G \subset P$ et soit L un polyintervalle

compact de \mathbf{R}^n tel que $K \subset L \times \sqrt{-1}P$. Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n[K] & \xrightarrow{\alpha} & H^n[T(G)] \\ \downarrow \beta & & \downarrow \delta \\ H^n[L \times \sqrt{-1}P] & \xrightarrow{\gamma} & H^n[T(P)] \end{array}$$

Nous avons démontré l'injectivité des applications δ et γ (théorème 2 et théorème 3 *bis*) et on sait, par la dualité de Serre (dont je ne sais pas la version avec paramètres), l'injectivité de β . Donc l'application α est injective.

(c.q.f.d.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. KOMATSU, Resolution by hyperfunctions of sheaves of solutions of differential equations with constant coefficients, *Math. Ann.*, 176 (1968), 77-86.
- [2] A. MARTINEAU, Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Instituto Gulbenkian De Sciencia, Lisbonne (1964).
- [3] A. MARTINEAU, Théorème sur le prolongement analytique du type « Edge of the Wedge theorem », *Séminaire Bourbaki* (1967-1968). 20^e année p. 340,1-340,17.
- [4] M. SATO, Theory of Hyperfunctions I, II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 8 (1959-1960), 139-193 et 398-437.
- [5] J. SEBASTIÃO E SILVA, Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel, *Math. Ann.*, 136 (1958), 58-96.
- [6] M. HASUMI, note on the n -dimensional tempered ultra-distributions, *Tôhoku Math. J.*, 13 (1961), 94-104.

Manuscrit reçu le 3 mars 1969.

Mitsuo MORIMOTO,

Department of Mathematics,
Faculty of Science, University of Tokyo,
Tokyo, Japan.