

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

KHAN BUI DOAN

La théorie spectrale et les représentations d'algèbres de Dirichlet

Annales de l'institut Fourier, tome 19, n° 2 (1969), p. 115-128

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_2_115_0

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA THÉORIE SPECTRALE ET LES REPRÉSENTATIONS D'ALGÈBRES DE DIRICHLET

par BUI DOAN KHANH

Introduction.

Le but de ce travail est d'étendre et de compléter les résultats de C. Foias concernant les mesures harmoniques spectrales (Foias [1], [2]). La technique proposée ici est plus simple que celle de Foias, en particulier on donne une démonstration directe et très simple d'un certain nombre de principaux résultats de Foias dans un contexte général (la relation $B(S) \subset B_T(S)$ de Foias [2] p. 45 par exemple).

Les théorèmes 1.10 et 2.5 sont les principaux résultats de ce travail.

D'autre part, nous ajoutons quelques améliorations de nos résultats antérieurs [6], [7].

1. La mesure harmonique spectrale.

Notation et définition 1.1. — Soient X un espace compact, A une algèbre de fonctions sur X , S la frontière de Silov de l'algèbre A et $A|S$ l'ensemble des restrictions des fonctions de A sur S .

Supposons que $A|S$ soit une algèbre de Dirichlet ⁽¹⁾ sur S . Une *représentation de l'algèbre A dans un espace hilbertien* (complexe) H est par définition une famille d'opérateurs

⁽¹⁾ Une algèbre de fonctions sur un espace compact X est par définition une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$, uniformément fermée, qui contient les constantes et sépare les points de X . On appelle algèbre de Dirichlet sur X , toute algèbre de fonctions A sur X telle que $A + \bar{A}$ soit dense dans $\mathcal{C}(X)$.

$(T_f)_{f \in A}$ dans H telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\begin{aligned} T_1 &= I(1); & T_f T_g &= T_{fg}, & f, g &\in A; \\ \|T_f\| &\leq \|f\|, & \forall f &\in A; & T_{\bar{f}} &= T_f^* \end{aligned}$$

lorsque $f \in A$, $\bar{f} \in A$; $\|f\| = \sup |f(x)|$; T_f^* l'opérateur adjoint de T_f ⁽²⁾.

THÉORÈME 1.2 (Foias-Suciu [3]). — Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de l'algèbre A dans un espace hilbertien H . Alors :

a) Pour tout $x \in H$, il existe une mesure de Borel, positive, régulière μ_x (et une seule) sur S telle que : $\int_S f d\mu_x = (T_f x, x)$, pour tout $f \in A$.

b) Il existe un espace hilbertien $\mathcal{H}$ contenant H et une représentation $(U_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{C}(S)}$ de $\mathcal{C}(S)$ dans $\mathcal{H}$ tels que : $T_f x = P U_{f|_S} x$, pour tout $x \in H$ et pour tout $f \in A$, P étant la projection de $\mathcal{H}$ sur H .

c) Il existe une mesure spectrale $E(\beta)$ dans $\mathcal{H}$ définie sur S telle que :

$$U_\varphi = \int_S \varphi dE, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}(S);$$

$\mu_x(\beta) = (E(\beta)x, x)$, pour tout $x \in H$ et pour tout ensemble borélien β de S .

DÉFINITION 1.3. — Pour chaque ensemble borélien β de S , on pose $\omega(\beta) = P E(\beta)$. La famille des opérateurs $\{\omega(\beta), \beta \text{ ensemble borélien de } S\}$ s'appelle la mesure harmonique spectrale de la représentation $(T_f)_{f \in A}$. La représentation $(U_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{C}(S)}$ de $\mathcal{C}(S)$ dans $\mathcal{H}$ s'appelle dilatation de la représentation $(T_f)_{f \in A}$. Lorsque la mesure harmonique spectrale de $(T_f)_{f \in A}$ est une mesure spectrale, on dit que $(T_f)_{f \in A}$ est la restriction d'une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H .

Remarquons d'autre part qu'il existe une dilatation $(U_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{C}(S)}$ telle que l'ensemble $\{E(\beta)x; x \in H, \beta \text{ ensemble borélien de } S\}$ soit total dans $\mathcal{H}$.

⁽²⁾ Dire que $(T_f)_{f \in A}$ est une représentation de l'algèbre A dans l'espace hilbertien H revient à dire que l'application $f \rightarrow T_f$ est un homomorphisme auto-adjoint de A dans $\mathcal{L}(H)$, de norme ≤ 1 .

Toutes les notations précédentes sont toujours conservées dans ce travail.

THÉOREME 1.4 (Cf. Foiaş [2]). — *Un opérateur B dans H commute à chaque opérateur T_φ , $\varphi \in \mathcal{C}(S)$ si et seulement si B commute à chaque opérateur $\omega(\beta)$, β ensemble borélien de S . (On pose $T_\varphi = PU_\varphi|H$, lorsque $\varphi \in \mathcal{C}(S)$ ⁽³⁾.)*

COROLLAIRE 1.5. — *Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de l'algèbre A dans l'espace hilbertien H . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) T_φ commute à $\omega(\beta)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(S)$ et pour tout ensemble borélien β de S .

b) $\omega(\beta_1) \cdot \omega(\beta_2) = \omega(\beta_2) \cdot \omega(\beta_1)$, pour tous les ensembles boréliens β_1, β_2 de S .

c) $T_f T_g = T_g T_f$, pour tout $f, g \in \mathcal{C}(S)$.

Démonstration.

$a \iff b$: En prenant $B = \omega(\beta_1)$, le théorème 1.4 donne l'équivalence de deux conditions a, b .

$a \iff c$: Il suffit de prendre $B = T_f$, $f \in \mathcal{C}(S)$.

Notation 1.6. — Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H . Désignons par $\mathcal{X}(S)$ la famille des ensembles boréliens β de S tels que $\omega(\beta)$ soit une projection.

PROPOSITION 1.7. — *Soit $\beta_0 \in \mathcal{X}(S)$. Alors on a :*

a) $\omega(\beta)\omega(\beta_0) = \omega(\beta_0)\omega(\beta) = \omega(\beta \cap \beta_0)$, pour tout ensemble borélien β de S .

b) $\omega(\beta_0)x = E(\beta_0)x$, pour tout $x \in H$.

⁽³⁾ *Démonstration du théorème 1.4.* — Soit β un ensemble ouvert de S , et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble filtrant des fonctions continues g sur S telles que $0 \leq g \leq \chi_\beta$. On a :

$$\lim_{\mathcal{F}} \|T_g x - \omega(\beta)x\|^2 \leq \lim_{\mathcal{F}} \int_S |g - \chi_\beta|^2 d\mu_x = 0; \quad \forall x \in H.$$

Par suite, $\lim_{\mathcal{F}} B T_g x = B \omega(\beta)x$; $\lim_{\mathcal{F}} T_g B x = \omega(\beta) B x$. Par hypothèse, $B T_g = T_g B$,

on a donc $B \omega(\beta)x = \omega(\beta) B x$ pour chaque $x \in H$, et par conséquent $B \omega(\beta) = \omega(\beta) B$. Et en vertu de la régularité de la mesure harmonique spectrale B commute à chaque opérateur $\omega(\beta)$, β étant un borélien de S . Réciproquement, soit $\varphi \in \mathcal{C}(S)$, il existe une suite de fonctions simples (φ_n) qui converge uniformément vers φ . Par hypothèse, B commute à chaque opérateur $\omega(\beta)$, donc B commute à T_{φ_n} , et par suite à T_φ .

Démonstration. — a) Soit β un ensemble borélien arbitraire de S . Soit $\beta_1 = \beta \cap \beta_0$, $\beta_2 = \beta \setminus \beta_0$. Alors $\omega(\beta) = \omega(\beta_1) + \omega(\beta_2)$. Il suffit de montrer que

$$\omega(\beta_1)\omega(\beta_0) = \omega(\beta_0)\omega(\beta_1) = \omega(\beta_1).$$

C'est une conséquence du lemme suivant, démontré par Foiaş ([2] p. 43) :

LEMME. — Si $0 \leq A \leq B$, où B est une projection, alors on a : $AB = BA = A$.

b) On a $\omega(\beta_0)x = PE(\beta_0)x$ pour tout $x \in H$. D'autre part, on a $\|E(\beta_0)x\|^2 = (E(\beta_0)x, x) = (\omega(\beta_0)x, x) = \|\omega(\beta_0)x\|^2$, car $\omega(\beta_0)$ est une projection. Donc $\omega(\beta_0)x = E(\beta_0)x$.

PROPOSITION 1.8. — Soit $(T_f)_{f \in \mathcal{A}}$ une représentation de $\mathcal{A}$ dans H . Les conditions suivantes sont équivalentes

a) $T_f T_g = T_{fg}$, pour tout $f, g \in \mathcal{C}(S)$, (ce qui équivaut à dire que $(T_f)_{f \in \mathcal{C}(S)}$ est une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H).

b) $\omega^2(\beta) = \omega(\beta)$, pour tout ensemble borélien β de S .

c) $\omega(\beta_1)\omega(\beta_2) = \omega(\beta_1 \cap \beta_2)$, pour tous les ensembles boréliens β_1, β_2 de S .

Démonstration. — $a \Rightarrow b$: Si $(T_f)_{f \in \mathcal{C}(S)}$ est une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H , alors la mesure harmonique spectrale de $(T_f)_{f \in \mathcal{C}(S)}$ est une mesure spectrale. Par suite $\omega^2(\beta) = \omega(\beta)$, pour tout ensemble borélien β de S .

$b \Rightarrow c$: C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.7 a).

$c \Rightarrow a$: Il est clair que l'on a $\omega^2(\beta) = \omega(\beta)$, pour tout ensemble borélien β de S . D'après la prop. 1.7 a), on a $E(\beta)x \in H$ pour tout $x \in H$ et pour tout ensemble borélien β de S . On a donc $\mathcal{H} = H$ et par suite $(T_f)_{f \in \mathcal{C}(S)}$ est une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H .

PROPOSITION 1.9. — Soit $(T_f)_{f \in \mathcal{A}}$ une représentation de $\mathcal{A}$ dans H . Soit $\beta_0 \in \mathcal{F}(S)$, alors on a :

a) $T_f \omega(\beta_0) = \omega(\beta_0) T_f$, pour tout $f \in \mathcal{C}(S)$.

b) $(T_f \omega(\beta_0)x, y) = \int_{\beta_0} f d\mu_{x,y}$, pour tout $f \in \mathcal{C}(S)$, $x \in H$, $y \in H$.

Démonstration. — a) C'est une conséquence du théorème 1.4 et de la prop. 1.7 b).

b) D'après la prop. 1.7 b), on a $\omega(\beta_0)x = E(\beta_0)x$ et par suite

$$\begin{aligned} (T_f \omega(\beta_0)x, y) &= (T_f E(\beta_0)x, y) = (E(\beta_0)x, T_f^* y) \\ &= (E(\beta_0)x, U_f^* y) = (U_f E(\beta_0)x, y) \\ &= \int_S x_{\beta_0} f d\mu_{x,y} = \int_{\beta_0} f d\mu_{x,y}. \end{aligned}$$

Les énoncés précédents étendent les résultats de Foiaş [2]. Le théorème suivant est l'un des principaux résultats de ce travail :

THÉORÈME 1.10. — Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de l'algèbre A dans l'espace hilbertien H . Pour chaque $x \in H$, soit $H^2(\mu_x)$ l'adhérence de $A|S$ dans $L^2(\mu_x)$.

Soit β_0 un ensemble borélien de S tel que $x_{\beta_0} \in H^2(\mu_x)$ pour tout $x \in H$. Alors on a $\beta_0 \in \mathcal{F}(S)$.

Démonstration. — Les notations précédentes sont toujours maintenues. On a $x_{\beta_0} \in H^2(\mu_x)$; il existe $f_n \in A|S$ tel que : $f_n \rightarrow x_{\beta_0}$ dans $L^2(\mu_x)$, ce qui entraîne que $\bar{f}_n \rightarrow x_{\beta_0}$ dans $L^2(\mu_x)$; et par conséquent :

$$\begin{aligned} U_{f_n} x &\rightarrow E(\beta_0)x, & U_{\bar{f}_n} x &\rightarrow E(\beta_0)x & \text{dans } \mathcal{H}; \\ T_{f_n} x &\rightarrow \omega(\beta_0)x, & T_{\bar{f}_n} x &\rightarrow \omega(\beta_0)x & \text{dans } H. \end{aligned}$$

Or $T_{f_n^2} x = P U_{f_n^2} x$, on a $(U_{f_n^2} x, x) = (T_{f_n^2} x, x)$ et

$$\begin{aligned} (U_{f_n^2} x, x) &= (U_{f_n} x, U_{\bar{f}_n} x) \rightarrow \|E(\beta_0)x\|^2, \\ (T_{f_n^2} x, x) &= (T_{f_n} x, T_{\bar{f}_n} x) \rightarrow \|B(\beta_0)x\|^2. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\|E(\beta_0)x\|^2 = \|\omega(\beta_0)x\|^2 \quad \text{et} \quad E(\beta_0)x = \omega(\beta_0)x \in H,$$

pour tout $x \in H$. Par conséquent,

$$\omega^2(\beta_0)x = E(\beta_0)\omega(\beta_0)x = E^2(\beta_0)x = \omega(\beta_0)x,$$

pour tout $x \in H$, par suite $\omega^2(\beta_0) = \omega(\beta_0)$.

D'autre part, on a évidemment $\omega(\beta_0) = \omega^*(\beta_0)$. Donc $\omega(\beta_0)$ est une projection.

COROLLAIRE 1.11. — Soit β_0 un ensemble fermé de S . On a les implications suivantes $a \Rightarrow b \Rightarrow c$:

a) Il existe $f \in A|S$ tel que :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, & \text{pour tout } x \in \beta_0; \\ |f(x)| &< 1, & \text{pour tout } x \in S \setminus \beta_0. \end{aligned}$$

b) Il existe $f_n \in A|S$ tel que :

$$\sup_{x \in S} |f_n(x)| \leq 1; \quad f_n(x) \rightarrow 1, \quad \text{pour tout } x \in \beta_0;$$

$|f_n(x)| \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de $S \setminus \beta_0$.

c) $\beta_0 \in \mathcal{F}(S)$.

Démonstration. — $a \Rightarrow b$: Il suffit de prendre $f_n = f^n$.

$b \Rightarrow c$: (f_n) est une suite bornée qui converge simplement vers la fonction caractéristique de β_0 . Donc d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, f_n converge vers χ_{β_0} dans $L^2(\mu_x)$, pour chaque $x \in H$.

Remarque 1.12. — L'implication $a \Rightarrow c$ est l'un des principaux résultats de Foiaş [2] qui en a donné une démonstration moins directe. L'implication $b \Rightarrow c$ a été établie (dans un cas particulier) par Sz. Nagy et Foiaş [10] lorsque l'ensemble β_0 se réduit à un point par une méthode différente.

2. Les vecteurs singuliers.

Le but de ce paragraphe est de compléter nos résultats antérieurs [6], [7].

DÉFINITION 2.1 (Khanh [6]). — Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H . Un point $x \in H$ est dit vecteur singulier de $(T_f)_{f \in A}$ si $A|S$ est dense dans $L^2(\mu_x)$. On désigne par ε l'ensemble des vecteurs singuliers de $(T_f)_{f \in A}$.

PROPOSITION 2.2. — Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H . Supposons qu'il existe un ouvert β_1 de S tel que $\omega(\beta_1) = 0$ et que $A|\beta_2$ soit dense dans $\mathcal{C}(\beta_2)$, (avec $\beta_2 = S \setminus \beta_1$). Alors $(T_f)_{f \in A}$ est la restriction d'une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H .

Démonstration. — On a $\omega(\beta_2) = I. A|\beta_2$ étant dense dans $\mathcal{C}(\beta_2)$, alors tout point $x \in H$ est un vecteur singulier de $(T_f)_{f \in A}$. D'après le th. 1 de Khanh [6], $(T_f)_{f \in A}$ est la restriction d'une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H .

DÉFINITION 2.3. (Foiaş-Suciu [3]). — Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H . Un sous-espace (vectoriel fermé) H_0 de H est dit sous-espace X -réduisant si $T_\varphi(H_0) \subset H_0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}(S)$, et si $(T_\varphi|H_0)_{\varphi \in \mathcal{C}(S)}$ est une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H_0 . La représentation $(T_f)_{f \in A}$ est dite X -pure si $\{0\}$ est le seul sous-espace X -réduisant.

THÉORÈME 2.4 (Foiaş-Suciu [3]). — Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H . Alors il existe une décomposition unique de H en somme directe $H = H_0 \oplus H_1$ telle que :

- a) $T_f(H_0) \subset H_0$, $T_f(H_1) \subset H_1$, pour tout $f \in A$.
- b) $(T_f|H_0)_{f \in A}$ est la restriction d'une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H_0 .
- c) La représentation $(T_f|H_1)_{f \in A}$ est X -pure.

Le théorème suivant est avec le théorème 1.10 l'essentiel de ce travail.

THÉORÈME 2.5. — Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H . Il existe une décomposition de H en somme directe $H = H_0 \oplus H_1$ telle que :

- a) $T_f(H_0) \subset H_0$, $T_f(H_1) \subset H_1$, pour tout $f \in A$.
- b) La représentation $(T_f|H_0)_{f \in A}$ est la restriction d'une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H_0 .
- c) La représentation $(T_f|H_1)_{f \in A}$ n'a pas de vecteur singulier non nul.

Démonstration. — Soit H_0 le sous-espace de H engendré par l'ensemble ε des vecteurs singuliers de $(T_f)_{f \in A}$, et soit $x_0 \in \varepsilon$.

- 1) On a $T_f x_0 = U_f x_0$, pour tout $f \in A$.

En effet, dire que x_0 est un vecteur singulier de $(T_f)_{f \in A}$ équivaut à dire que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(S)$, il existe $f_n \in A$ tel que $U_{f_n} x_0 \rightarrow U_\varphi x_0$ dans $\mathcal{H}$.

Soit $f \in A$, et prenons $\varphi = \bar{f}$. Alors il existe $f_n \in A$ tel que $U_{f_n}x_0 \rightarrow U_f^*x_0$, on en déduit $U_{f_n}^*x_0 \rightarrow U_fx_0$. Par suite :

$$\begin{aligned} T_{f_n}^*x_0 &\rightarrow T_fx_0, & (T_{f_n})^*x_0 &= T_f^*T_{f_n}^*x_0 \rightarrow T_f^*T_fx_0, \\ (T_{f_n}^*x_0, x_0) &\rightarrow (T_f^*T_fx_0, x_0) = \|T_fx_0\|^2. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$U_f^*U_{f_n}^*x_0 \rightarrow U_f^*U_fx_0, (U_{f_n}^*x_0, x_0) \rightarrow (U_f^*U_fx_0, x_0) = \|U_fx_0\|^2.$$

Or $(T_{f_n})^* = PU_{f_n}^*$, on a donc $\|T_fx_0\|^2 = \|U_fx_0\|^2$ et $T_fx_0 = U_fx_0$.

2) $y = T_fx_0$ appartient à ε , pour tout $f \in A$.

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(S)$, il existe $f_n \in A$ tel que $U_{f_n}x_0 \rightarrow U_\varphi x_0$ dans $\mathcal{H}$. Par conséquent, $U_f U_{f_n}x_0 \rightarrow U_f U_\varphi x_0$ et $U_{f_n} U_fx_0 \rightarrow U_\varphi U_fx_0$. D'après 1, on a $U_fx_0 = T_fx_0$, donc $U_{f_n} T_fx_0 \rightarrow U_\varphi T_fx_0$, ce qui montre que $y = T_fx_0$ est un vecteur singulier de $(T_f)_{f \in A}$.

3) Le vecteur $y = T_\varphi x_0$ appartient à H_0 pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(S)$. En effet, x_0 étant singulier, il existe $f_n \in A$ tel que $T_{f_n}x_0 \rightarrow T_\varphi x_0$ dans H . D'après 2, chaque vecteur $T_{f_n}x_0$ appartient à ε , donc $T_\varphi x_0 \in H_0$.

Cela étant, on en déduit que $T_\varphi(H_0) \subset H_0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(S)$, ce qui entraîne que $T_f(H_0) \subset H_0$, $T_f(H_1) \subset H_1$, pour tout $f \in A$ (avec $H_1 = H \ominus H_0$). D'autre part, d'après le th. 1 de Khanh [6], la représentation $(T_\varphi|_{H_0})_{\varphi \in \mathcal{C}(S)}$ est une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H_0 , (remarquons que $x \in H_0$ est un vecteur singulier de $(T_f)_{f \in A}$ si et seulement si x est un vecteur singulier de $(T_f|_{H_0})_{f \in A}$). D'autre part, supposons que $(T_f|_{H_1})_{f \in A}$ ait un vecteur singulier $x \neq 0$, alors x appartient à ε et par suite $x \in H_0$. C'est absurde.

COROLLAIRE 2.6. — Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H .

a) Si ε est total dans H , $(T_f)_{f \in A}$ est la restriction d'une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H .

b) Si la représentation $(T_f)_{f \in A}$ est X -pure, alors $\varepsilon = 0$.

Démonstration. — a) C'est une conséquence immédiate du th. 2.5.

b) Il est clair que le sous-espace H_0 construit dans le th. 2.5 est X -réduisant. Par conséquent, lorsque $(T_f)_{f \in A}$ est X -pure, l'ensemble ε se réduit à $\{0\}$. Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que l'énoncé réciproque soit valable.

THÉOREME 2.7. — *Lorsque l'algèbre A possède la propriété suivante: « P »: Pour tout fermé $\Delta \not\subseteq S$ et pour toute fonction φ numérique continue sur Δ , il existe une famille bornée (f_n) de fonctions de A telle que f_n converge simplement vers φ (sur Δ); alors les deux décompositions données par les théorèmes 2.4 et 2.5 sont identiques. En particulier, une représentation $(T_f)_{f \in A}$ de A dans H n'a pas de vecteur singulier non nul si et seulement si elle est X -pure.*

Démonstration. — Soient $H = H_0 \oplus H_1$, $H = H'_0 \oplus H'_1$ les décompositions données par les th. 2.4 et 2.5. On a remarqué que H'_0 est X -réduisant, donc $H'_0 \subset H_0$. Pour montrer que les deux décompositions sont identiques, il suffit de montrer que $H'_0 = H_0$, c'est-à-dire que l'ensemble ε est total dans H_0 . Pour cela, il suffit d'appliquer le th. 3 de Khanh [6].

DÉFINITION 2.8. — *Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H . Un sous-espace H_0 de H est dit invariant si l'on a $T_f(H_0) \subset H_0$, $\forall f \in A$; il est dit totalement invariant si $T_\varphi(H_0) \subset H_0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}(S)$.*

La représentation $(T_f)_{f \in A}$ est dite à propriété de Wermer si tout sous-espace invariant est totalement invariant (Cf. Wermer [12]).

PROPOSITION 2.9. — *Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H , qui est la restriction d'une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H . Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

- a) *La représentation $(T_f)_{f \in A}$ possède la propriété de Wermer.*
- b) *L'ensemble ε des vecteurs singuliers de $(T_f)_{f \in A}$ est égal à H .*

PROPOSITION 2.10. — *Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans $H \neq \{0\}$. Supposons que pour tout sous-espace invariant*

$H_0 \neq \{0\}$, la représentation $(T_f|_{H_0})_{f \in A}$ ait un vecteur singulier non nul.

Alors la représentation $(T_f)_{f \in A}$ possède la propriété de Wermer.

Démonstration. — Soit ε l'ensemble des vecteurs singuliers de $(T_f)_{f \in A}$.

1) Pour tout sous-espace invariant $H_0 \neq \{0\}$, $\varepsilon \cap H_0$ est total dans H_0 . En effet, il est clair que $\varepsilon \cap H_0$ est l'ensemble des vecteurs singuliers de la représentation $(T_f|_{H_0})_{f \in A}$. Donc d'après le th. 2.5, si $\varepsilon \cap H_0$ n'est pas total dans H_0 , il existe un sous-espace invariant H_1 , $\{0\} \neq H_1 \subset H_0$ tel que la représentation $(T_f|_{H_1})_{f \in A}$ n'ait pas de vecteur singulier non nul, ce qui contredit l'hypothèse.

2) H_0 est totalement invariant.

Soit $x \in \varepsilon \cap H_0$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(S)$, il existe $f_n \in A$ tel que $T_{f_n}x \rightarrow T_\varphi x$, ce qui montre que $T_\varphi x \in H_0$ (car $T_f x \in H_0$ pour tout $f \in A$). Donc $T_\varphi(H_0) \subset H_0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(S)$, car l'ensemble $\varepsilon \cap H_0$ est total dans H_0 .

Le théorème suivant étend un résultat de Wermer ([12], voir aussi [7]).

THÉORÈME 2.11. — *Supposons que A possède la propriété suivante: « Toute mesure (complexe) sur S orthogonale à A et qui est singulière par rapport à toute mesure multiplicative non-ponctuelle associée à A est nulle » (2). Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H qui est la restriction d'une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H .*

Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- a) *La représentation $(T_f)_{f \in A}$ possède la propriété de Wermer.*
- b) *Aucune mesure multiplicative non-ponctuelle associée à A n'est absolument continue par rapport à la mesure harmonique spectrale de la représentation $(T_f)_{f \in A}$.*

Démonstration. — $a \Rightarrow b$: Supposons qu'il existe une mesure multiplicative non-ponctuelle m qui est absolument continue par rapport à la mesure harmonique spectrale de $(T_f)_{f \in A}$; ($(T_f)_{f \in A}$ étant la restriction d'une représentation de $\mathcal{C}(S)$ dans H , sa mesure harmonique spectrale est spectrale). Donc il existe $x \in H$ tel que m soit identique à la mesure μ_x ,

(voir Halmos [5], th. 65.3). Or A n'est pas total dans $L^2(m)$, (en effet, dans le cas contraire, on a $m(fg) = m(f)m(g)$, $\forall f, g \in \mathcal{C}(S)$, ce qui entraîne que m est ponctuelle), donc x n'est pas un vecteur singulier de la représentation $(T_f)_{f \in A}$.

$b \Rightarrow a$: Soit H_0 un sous-espace invariant. Soit $x \in H_0$, $y \in H_1 = H \ominus H_0$. Alors la mesure $\mu_{x,y}$ est orthogonale à A . D'après un théorème de Glicksberg-Wermer [4], il existe une suite de mesures multiplicatives non-ponctuelles $(m_i)_{i \geq 1}$

telle que $\mu_{x,y} = \sum_{i=1}^{\infty} h_i m_i$, $h_i \in H^1(m_i)$, ($H^1(m_i)$ étant l'adhérence de A dans $L^1(m_i)$). Supposons que m_i n'est pas absolument continue par rapport à $\mu_{x,y}$. Alors il existe un ensemble borélien $\beta \subset S$ tel que $|\mu_{x,y}|(\beta) = 0$ et $m_i(\beta) > 0$;

on en déduit $\int_{\beta} |h_i| dm_i = 0$ et par suite $|h_i| = 0$ m_i -presque partout. Et ceci est vrai pour tout $i \geq 1$, on a donc $\mu_{x,y} = 0$. Cela étant, on a $0 = \int_S \varphi d\mu_{x,y} = (T_{\varphi}x, y) = 0$.

Donc $T_{\varphi}x$ est orthogonal à y , pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(S)$, par suite $T_{\varphi}x \in H_0$, ce qui montre que $T_{\varphi}(H_0) \subset H_0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(S)$, c'est-à-dire que H_0 est totalement invariant.

3. Un calcul fonctionnel.

La proposition suivante est due pour l'essentiel à Foiaş [2]; sa démonstration peut être déduite de celle de Foiaş.

PROPOSITION 3.1. — *Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H . Soit $\lambda \in S$ tel que $\omega(\lambda)$ soit une projection. Alors $\omega(\lambda) \neq 0$ si et seulement s'il existe $x \in H$, $x \neq 0$ tel que $T_fx = f(\lambda)x$, pour tout $f \in A$.*

PROPOSITION 3.2. — *Soit $(T_f)_{f \in A}$ une représentation de A dans H . Soit $(U_{\varphi})_{\varphi \in \mathcal{C}(S)}$ une dilatation de $(T_f)_{f \in A}$ telle que l'ensemble $\{E(\beta)x; x \in H, \beta \text{ ensemble borélien de } S\}$ soit total dans $\mathcal{H}$.*

Soit $\lambda \in S$ tel que $\omega(\lambda)$ soit une projection.

Alors $PE(\lambda) = E(\lambda)P = E(\lambda)$, P étant la projection de $\mathcal{H}$ sur H .

Démonstration. — a) $E(\lambda) = PE(\lambda)$. Soit $\hat{x} = \sum_i E(\beta_i)x_i$, $x_i \in H$, β_i ensemble borélien de S . Alors :

$E(\lambda)\hat{x} = \sum_i E(\lambda \cap \beta_i)x_i$. Or $\lambda \cap \beta_i$ est égal à λ ou bien vide, donc $\omega(\lambda \cap \beta_i)$ est une projection, on en déduit $E(\lambda \cap \beta_i)x_i = \omega(\lambda \cap \beta_i)x_i \in H$ et par suite $E(\lambda)\hat{x} \in H$, $E(\lambda)(\mathcal{H}) \subset H$, donc $E(\lambda) = PE(\lambda)$.

b) $E(\lambda) = E(\lambda)P$. Soit $\hat{x} = \sum_i E(\beta_i)x_i$. Alors $P\hat{x} = \sum_i \omega(\beta_i)x_i$ et par suite

$$E(\lambda)P\hat{x} = \sum_i \omega(\lambda \cap \beta_i)x_i = \sum_i E(\lambda \cap \beta_i)x_i = E(\lambda)\hat{x}.$$

Donc $E(\lambda)P = E(\lambda)$.

Les énoncés suivants étendent un résultat de Foias [1] :

PROPOSITION 3.3. — Soit $(T_f)_{f \in \Lambda}$ une représentation de A dans H . Soient $\varphi, \varphi_n, n \geq 1$ des fonctions boréliennes bornées définies sur S , σ_p l'ensemble des points $\lambda \in S$ tels que $\omega(\lambda)$ soit une projection non nulle, K un ensemble dénombrable de $S \setminus \sigma_p$. Supposons que :

- a) Pour tout $\lambda \in K$, $\omega(\lambda)$ est une projection.
- b) Il existe un nombre positif M tel que $|\varphi_n| \leq M$, pour tout $n \geq 1$.
- c) φ_n converge μ_x -presque partout sur $S \setminus K$ vers φ , pour tout $x \in H$. Alors $T_{\varphi_n}x$ converge vers $T_{\varphi}x$ pour tout $x \in H$.

Démonstration. — On a, pour chaque $x \in H$,

$$\|T_{\varphi_n}x - T_{\varphi}x\|^2 \leq \int_S |\varphi_n - \varphi|^2 d\mu_x \quad \text{et} \quad |\varphi_n - \varphi| \leq M + |\varphi|.$$

Par hypothèse, on a $\omega(\lambda) = 0$, pour tout $\lambda \in K$, donc $\omega(K) = 0$ et par suite $\mu_x(K) = 0$, pour chaque $x \in H$. D'autre part, φ_n converge vers φ sur $S \setminus K$ μ_x -presque partout, donc φ_n converge μ_x -presque partout sur S vers φ . Et d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, $\int_S |\varphi_n - \varphi|^2 d\mu_x$ tend vers 0 pour chaque $x \in H$, ce qui montre que $T_{\varphi_n}x$ converge vers $T_{\varphi}x$, pour tout $x \in H$.

THÉORÈME 3.4. — Soit $(T_f)_{f \in \Lambda}$ une représentation de A dans H telle que, pour chaque $\lambda \in S$, $\omega(\lambda)$ soit une projection.

Soit B une famille de fonctions boréliennes bornées sur S qui possèdent la propriété suivante : « Pour tout $f \in B$, il existe une suite bornée (f_n) de fonctions de $A|S$ qui converge μ_x -presque partout vers f sur $S \setminus K_f$, où K_f est une partie dénombrable de S (dépendant de f) disjointe de σ_p , pour chaque $x \in H$. »

Alors pour tous $f, g \in B$, on a $fg \in B$ et $T_{fg} = T_f T_g$.

Démonstration. — Soient $f, g \in B$. Alors il existe deux parties dénombrables K_f, K_g disjointes de σ_p et deux suites bornées $(f_n), (g_n)$ de fonctions de $A|S$ telles que :

$$\begin{aligned} f_n &\rightarrow f \quad \mu_x\text{-presque partout sur } S \setminus K_f, \\ g_n &\rightarrow g \quad \mu_x\text{-presque partout sur } S \setminus K_g, \quad \text{pour tout } x \in H. \end{aligned}$$

Alors l'ensemble $K = K_f \cup K_g$ est une partie dénombrable de S disjointe de σ_p et $f_n g_n \rightarrow fg$ μ_x -presque partout sur $S \setminus K$, pour tout $x \in H$. On en déduit $fg \in B$. Et d'après la prop. 3.3, on a :

$$T_{f_n g_n} x \rightarrow T_{fg} x, \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Or $T_{f_n g_n} x = T_{f_n} T_{g_n} x \rightarrow T_f T_g x$, pour tout $x \in H$. Par suite :

$$T_{fg} = T_f T_g.$$

Ajouté pendant la correction des épreuves.

1. Dans la définition 1.1, ajouter la condition suivante : « $T = cT + cT$, pour toutes fonctions f, f de A et pour tous les nombres complexes c, c ».

2. Dans le théorème 2.11, ajouter l'hypothèse suivante : « Supposons que la partie de Gleason de chaque mesure représentative non-ponctuelle m associée à A contienne plus d'un point et que toute fonction non-nulle de $H(m)$ ne s'annule pas identiquement sur la partie de Gleason de m ».

Pour les détails, voir B. D. Khanh, La théorie spectrale et les représentations d'algèbres de Dirichlet II (à paraître).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. FOIAS, La mesure harmonique spectrale et la théorie spectrale des opérateurs généraux d'un espace de Hilbert, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 263-282.
- [2] C. FOIAS, Certaines applications des ensembles spectraux. I Mesure harmonique spectrale, *Studii si cercetari mat.* 14 (1959), 365-401 et *Amer. Math. Soc. Transl.*, ser. II, vol. 61, 25-62.
- [3] C. FOIAS et I. SUCIU, Szegő measures and spectral theory in Hilbert spaces, *Rev. roumaine Math. Pures Appl.*, t. 11 (1966), 147-159.

- [4] I. GLICKSBERG and J. WERMER, Measures orthogonal to a Dirichlet algebra, *Duke Math. J.*, 30 (1963), 661-666.
- [5] P. R. HALMOS, Introduction to Hilbert spaces and the theory of spectral multiplicity (1957), New-York.
- [6] B. D. KHANH, Sur les mesures de Szegö, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, (1969).
- [7] B. D. KHANH, Sur les sous-espaces invariants des opérateurs normaux, à paraître dans *Bull. Sc. Math.*
- [8] W. MLAK, Characterization of completely non-unitary contraction in Hilbert space, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, 11 (1963), 111-113.
- [9] W. MLAK, On semi-groups of contractions in Hilbert spaces, *Studia Math.*, 26 (1966), 263-272.
- [10] B. SZ. NAGY et C. FOIAŞ, Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint, *Acta Sc. Math. Szeged*, 20 (1959), 91-96.
- [11] B. SZ. NAGY et C. FOIAŞ, Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert (1967), Budapest.
- [12] WERMER, On invariant subspaces of normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 (1952), 270-277.

Manuscrit reçu le 20 avril 1969.

BUI DOAN KHANH,
8, rue des Tanneries,
Paris, 13^e.
