

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROSE-MARIE HERVÉ

MICHEL HERVÉ

Les fonctions surharmoniques associées à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients discontinus

Annales de l'institut Fourier, tome 19, n° 1 (1969), p. 305-359

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_305_0

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES FONCTIONS SURHARMONIQUES ASSOCIÉES A UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS DISCONTINUS

par Rose-Marie et Michel HERVÉ

Le point de départ de cet article est un important travail de G. Stampacchia [14], où l'auteur étend aux opérateurs elliptiques du 2^{ème} ordre, à coefficients discontinus.

$$Lu = - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} + d_j u \right) + \left(\sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u \right), \quad (1)$$

des résultats connus pour les opérateurs elliptiques de la forme

$$Lu = - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad (2)$$

en particulier le caractère hõlderien des solutions et une propriété du type de Harnack pour les solutions locales > 0 .

Mais une différence essentielle entre ces deux types d'opérateurs est que la forme bilinéaire $a(u, v)$ associée à l'opérateur (1) n'est pas en général coercive, sauf si les normes des coefficients b_i , d_i et c dans leurs espaces respectifs sont assez petites, ce qui est vérifié en particulier dans un ouvert assez petit.

Il en résulte l'existence et l'unicité de la solution du problème de Dirichlet, au sens variationnel, dans les ouverts assez petits, l'extension à un ouvert quelconque, du moins pour l'unicité, exigeant l'hypothèse supplémentaire $c - \sum_i \frac{\partial d_i}{\partial x_i} \geq c_0 > 0$.

Le premier objectif de cet article est de remplacer cette hypothèse par $c - \sum_i \frac{\partial d_i}{\partial x_i} \geq 0$ (qui entraîne en particulier que les constantes ≥ 0 sont sursolutions), et l'hypothèse analogue pour l'opérateur adjoint $c - \sum_i \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0$. On y parvient par des méthodes de théorie

du potentiel, qui sont applicables dès qu'on a montré que les solutions locales de $Lu = 0$ forment un système de fonctions harmoniques satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot (théorème 1), les sur-solutions locales coïncidant avec les fonctions surharmoniques $\in W_{loc}^{1,2}$ (théorème 2).

Le principe du maximum que l'on démontre ici, et d'où résulte l'unicité du problème de Dirichlet, est le suivant :

Toute fonction sousharmonique dans Ω , majorée au voisinage de la frontière par une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ (adhérence de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$), est ≤ 0 dans Ω (théorème 4).

Il étend un principe du maximum satisfait par les fonctions sousharmoniques relatives à l'opérateur (2) ([9] et [10]) ; sa démonstration ne repose plus sur la coercivité de $a(u, v)$, mais sur les propriétés "fines" des fonctions de Beppo-Levi quasi-continues [7] et sur le principe du maximum "fin", valable pour les fonctions sousharmoniques bornées supérieurement, de M. Brelot ([1] et [3]).

On résout alors le problème de Dirichlet au sens variationnel dans un ouvert Ω quelconque pour une donnée $\in W^{1,2}(\tilde{\Omega})$, $\tilde{\Omega}$ ouvert $\supset \bar{\Omega}$, et l'on montre que la solution ainsi obtenue coïncide avec la solution au sens de Perron-Wiener-Brelot (théorème 5).

Ce résultat permet de montrer que la balayée sur un compact d'une fonction surharmonique ≥ 0 appartenant à $W_{loc}^{1,2}$ est dans $W_0^{1,2}$, et plus généralement, qu'une fonction v surharmonique ≥ 0 , majorée p.p. par une fonction $\varphi \in W_0^{1,2}$ (resp. $W_{loc}^{1,2}$), est elle-même dans $W_0^{1,2}$ (resp. $W_{loc}^{1,2}$), et $\|v\|_{W_0^{1,2}} \leq C^{ste} \|\varphi\|_{W_0^{1,2}}$ (théorèmes 6, 7 et 8).

Enfin, on caractérise les potentiels $U^\mu \in W_0^{1,2}$: ce sont les potentiels d'énergie finie et, pour toute $\varphi \in W_0^{1,2}$,

$$a(U^\mu, \varphi) = \int \hat{\varphi} d\mu,$$

où $\hat{\varphi}$ est un représentant quasi-continu de la classe φ , égal à φ p.p. En particulier $a(U^\mu, U^\mu) = \int U^\mu d\mu$ (théorème 9).

Tous ces raisonnements utilisent abondamment des notions introduites par G. Stampacchia (solution faible de $Lu = \mu$ s'annulant à la frontière d'un ouvert assez régulier, fonction de Green, capacité, notions qui sont d'ailleurs reprises et généralisées), et des méthodes propres aux équations aux dérivées partielles dues au même auteur

(par exemple dans la construction d'une fonction harmonique > 0 et bornée au voisinage de chaque point). Mais ils sont surtout inspirés de la théorie du potentiel et permettent d'améliorer d'autres résultats de [14], en particulier : les points L -réguliers d'un ouvert quelconque ne dépendent pas de l'opérateur L , ainsi que les ensembles L -polaires et L -effilés (théorème 3).

Notons enfin qu'on raisonne uniquement sur les espaces de Sobolev $W^{1,2}$, et surtout $W_{loc}^{1,2}$ et $W_0^{1,2}$; ces espaces semblent être le cadre approprié à notre étude, bien qu'ils présentent l'inconvénient suivant : $W_{loc}^{1,2}$ ne contient pas toutes les fonctions surharmoniques, alors que toute fonction surharmonique est une sursolution appartenant à $W_{loc}^{1,p}$, $p < \frac{m}{m-1}$; mais la réciproque est fautive puisque, d'après un exemple de J. Serrin (Ann. di Pisa, 1964), même pour une équation de la forme (2), une solution appartenant à $W_{loc}^{1,p}$, $p < \frac{m}{m-1}$, n'est pas, en général, presque partout égale à une fonction harmonique.

Notations.

Ω est un ouvert connexe borné de \mathbb{R}^m , $m \geq 3$.

$W^{1,p}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, telles que $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, m$, muni de la norme

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\text{grad } f\|_{L^p(\Omega)}$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence, dans $W^{1,p}(\Omega)$, de $\mathcal{O}(\Omega)$; pour les fonctions $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la norme de $W^{1,p}(\Omega)$ est équivalente à $\|\text{grad } f\|_{L^p(\Omega)}$,

notée $\|f\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$. Si $p < m$ et $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{m}$, $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entraîne $f \in L^{p^*}(\Omega)$ et $f \in W^{1,p}(\Omega)$ entraîne $f \in L_{loc}^{p^*}(\Omega)$

$W^{-1,p'}(\Omega)$ est le dual de $W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; il est for-

mé des distributions sur Ω de la forme $T = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, avec $f_i \in L^{p'}(\Omega)$,

où les f_i peuvent être choisis de norme dans $L^{p'}(\Omega)$ inférieure à celle de T dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ est réflexif.

On considère l'opérateur

$$Lu = - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} + d_j u \right) + \left(\sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right),$$

et son adjoint

$$L^*u = - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_j u \right) + \left(\sum_i d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right);$$

on fait les hypothèses suivantes :

a_{ij} sont des fonctions à valeurs réelles, mesurables et $|a_{ij}(x)| \leq M$ dans Ω ;

les opérateurs L et L^* sont uniformément elliptiques, c'est-à-dire qu'il existe $\mathfrak{C} > 0$ tel que

$$\mathfrak{C} \sum_i \xi_i^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{et} \quad \xi_i \in \mathbb{R};$$

$b_i(x)$ et $d_i(x) \in L^r(\Omega)$, $c(x) \in L^{r/2}(\Omega)$, avec $r > m$, et les distributions $c - \sum_i \frac{\partial d_i}{\partial x_i}$ et $c - \sum_i \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ sont ≥ 0 dans $\Omega^{(1)}$.

On pose

$$a_\Omega(u, v) = \int_\Omega \left[\sum_j \left(\sum_i a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} + d_j u \right) \frac{\partial v}{\partial x_j} + \left(\sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right) v \right] dx.$$

Si $T = - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, avec $f_i \in L^2(\Omega)$, une solution (resp. une solution locale) de $Lu = T$ dans Ω est une fonction⁽²⁾ $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$) telle que

$$a_\Omega(u, \varphi) = \int_\Omega \sum_i f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega);$$

une sous-solution (resp. une sous-solution locale) dans Ω pour l'opérateur L est une fonction⁽²⁾ $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$) telle que

(1) Pour certaines questions, il suffit de supposer b_i et $d_i \in L^m(\Omega)$, $c \in L^{m/2}(\Omega)$, les deux distributions ci-dessus étant de signe quelconque (cf. [14]).

(2) En fait, une classe de fonctions 2 à 2 égales p.p.

$$a_{\Omega}(u, \varphi) \leq 0, \forall \varphi \geq 0, \varphi \in \mathcal{O}(\Omega).$$

Rappel de quelques résultats dus à G. Stampacchia [14]

1) La forme $a_{\Omega}(u, v)$ est bilinéaire continue sur

$$W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega)$$

(lemme 1.5). De plus, si $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{2^*}(\Omega)$, en particulier si $u \in W^{1,2}(\tilde{\Omega})$, où $\tilde{\Omega}$ est un ouvert $\supset \bar{\Omega}$, $v \mapsto a_{\Omega}(u, v)$ est une forme linéaire continue, notée Lu , sur $W_0^{1,2}(\Omega)$ (corollaire du lemme 1.5) ; si $u \in W^{1,2}(\tilde{\Omega})$ on a

$$|a_{\omega}(u, v)| \leq k \|u\|_{W^{1,2}(\tilde{\Omega})} \|v\|_{W_0^{1,2}(\omega)}$$

pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, avec k indépendant de u, v, ω , mais non de $\tilde{\Omega}$.

2) On dira qu'un ouvert $\omega \subset \Omega$ est L -adapté, ou que la forme $a_{\omega}(u, v)$ est $W_0^{1,2}(\omega)$ -coercive, s'il existe une constante (dite de coercivité) $\gamma > 0$ telle que

$$a_{\omega}(u, u) \geq \gamma \|u\|_{W_0^{1,2}(\omega)}^2 \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\omega),$$

ou $\forall u \in \mathcal{O}(\omega)$; alors cette propriété subsiste, avec la même const. γ , si l'on remplace ω par n'importe quel ouvert $\omega' \subset \omega$.

Si les normes des b_i et d_i dans $L^m(\omega)$, de c dans $L^{m/2}(\omega)$, sont assez petites, en particulier si la mesure de l'ouvert $\omega \subset \Omega$ est assez petite, la forme $a_{\omega}(u, v)$ est $W_0^{1,2}(\omega)$ -coercive (théorème 3.1). D'autre part, étant donné Ω quelconque, il existe un nombre $\bar{\lambda}$ tel que, pour chaque $\lambda > \bar{\lambda}$, la forme $a_{\Omega}(u, v) + \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)}$ est $W_0^{1,2}(\Omega)$ -coercive (théorème 3.2).

3) Si u et v sont deux sous-solutions dans Ω , $\sup(u, v)$ aussi (théorème 3.5).

4) Soit $\omega \subset \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $T = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \in W^{-1,2}(\omega)$. D'une part,

l'équation $Lu + \lambda u = T$ a une solution unique $u \in W_0^{1,2}(\omega)$ dans tous les cas où la forme $a_{\omega}(u, v) + \lambda(u, v)_{\omega}$ est coercive (cf. le rappel 2 ci-dessus), et alors

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\omega)} \leq \frac{1}{\gamma} \|T\|_{W^{-1,2}(\omega)},$$

où γ est la constante de coercivité (théorème 3.3). D'autre part, plus généralement, quels que soient ω et λ , l'équation $Lu + \lambda u = T$ admet une solution unique $\in W_0^{1,2}(\omega)$ si et seulement si l'équation $Lu + \lambda u = 0$ admet 0 comme seule solution $\in W_0^{1,2}(\omega)$ (théorème 3.4) : l'opérateur $L + \lambda$ est alors un isomorphisme de $W_0^{1,2}(\omega)$ sur $W^{-1,2}(\omega)$. Dans le cas particulier de la coercivité, l'opérateur inverse est de norme $\leq 1/\gamma$, et cette propriété subsiste si l'on remplace ω par n'importe quel ouvert $\omega' \subset \omega$.

Etant donné $g \in W^{1,2}(\omega) \cap L^{2^*}(\omega)$, $Lg \in W^{-1,2}(\omega)$; par suite, si $L + \lambda$ est un isomorphisme de $W_0^{1,2}(\omega)$ sur $W^{-1,2}(\omega)$, il existe une solution unique $u \in W^{1,2}(\omega)$ de $Lu + \lambda u = T$ telle que

$$u - g \in W_0^{1,2}(\omega)$$

(théorème 3.3). On désignera par L_g^ω la solution de $Lu = 0$ dans ω telle que $L_g^\omega - g \in W_0^{1,2}(\omega)$.

5) Une solution locale dans Ω de l'équation

$$Lu = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

où les $f_i \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ avec $p > m$, peut être choisie (dans sa classe) hölderienne sur toute partie compacte de Ω : il existe des constantes $k > 0$, $R_0 > 0$, $\lambda > 0$ et < 1 , telles que, pour $0 < 2\rho \leq R \leq R_0$ et $R < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, on ait

$$\omega(x, \rho) \leq k \left(\frac{\rho}{R} \right)^\lambda \left\{ \frac{1}{R^{m/2}} \|u\|_{L^2[\beta(x, R)]} + \sum_i \|f_i\|_{L^p[\beta(x, R)]} \right\},$$

où $\beta(x, R)$ est la boule ouverte de centre x , rayon R , et

$$\omega(x, \rho) = \sup_{\beta(x, \rho)} u - \inf_{\beta(x, \rho)} u$$

(théorème 7.2). On choisira en particulier L_g^ω continue.

Si Ω est assez régulier, en particulier si Ω est une boule, toute solution $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ de $Lu = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, où les $f_i \in L^p(\Omega)$ avec $p > m$, peut être choisie hölderienne dans Ω lui-même (théorème 7.3).

6) Etant donné un compact $K \subset \Omega$ connexe, il existe une constante $C(K) > 0$ telle que pour toute solution locale continue $u > 0$ de $Lu = 0$ dans Ω :

$$\sup_K u \leq C(K) \inf_K u ;$$

$C(K)$ ne dépend que de Ω , K , ν , M et de majorants de

$$\|b_i\|_{L^r(\Omega)}, \|d_i\|_{L^r(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|c\|_{L^{r/2}(\Omega)}$$

(théorème 8.1).

7) Toute solution $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ de l'équation $Lu = T$ dans Ω , où $T \in W^{-1,p}(\Omega)$ avec $p > m$, est essentiellement bornée dans Ω . Plus précisément, il existe deux constantes k et $N > 0$, valables pour tous les ouverts $\omega \subset \Omega$, telles que

$$|u(x)| \leq k \|T\|_{W^{-1,p}(\Omega)} (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{m} - \frac{1}{p}} + N [\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|T\|_{W^{-1,p}(\Omega)}]$$

pour presque tout $x \in \Omega$, et la constante N est nulle si la forme $a_\Omega(u, \nu)$ est $W_0^{1,2}(\Omega)$ -coercive (théorème 4.2). Plus généralement, puisque $\|T\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \leq C(\Omega) \|T\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$, on a

$$|u(x)| \leq k(\Omega) \|T\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

chaque fois que L est un isomorphisme de $W_0^{1,2}(\Omega)$ sur $W^{-1,2}(\Omega)$.

1. Un principe du maximum pour les sous-solutions dans un ouvert L -adapté.

LEMME 1⁽³⁾. — Soit ω un ouvert L -adapté (c'est-à-dire tel que la forme $a_\omega(u, \nu)$ soit $W_0^{1,2}(\omega)$ -coercive), u une sous-solution dans ω et $\varphi \in W_0^{1,2}(\omega)$.

a) Si u est majorée par φ p.p. au voisinage de $\partial\omega$ (c'est-à-dire sur $\omega - \text{un compact de } \omega$), alors $u \leq 0$ p.p. dans ω .

(³) Ce lemme sera finalement étendu aux sous-solutions locales dans un ouvert quelconque (théorème 4).

b) Si u est majorée par $\varphi + k$ p.p. au voisinage de $\partial\omega$, où k est une constante > 0 , alors $u \leq k$ p.p. dans ω .

a) $u \leq \varphi$ p.p. au voisinage de $\partial\omega$ entraîne $u^+ \leq \varphi^+$ p.p. au voisinage de $\partial\omega$; $\varphi^+ \in W_0^{1,2}(\omega)$ donc u^+ aussi (cf. par exemple les lemmes 2 et 3 de [9]). D'autre part, u^+ est une sous-solution dans ω (rappel 3) ; donc $a_\omega(u^+, u^+) \leq 0$, $\|\text{grad } u^+\|_{L^2(\omega)} = 0$, u^+ = une constante p.p. dans chaque composante connexe de ω , et cette constante est nulle car $u^+ \in W_0^{1,2}(\omega)$.

b) Grâce à l'hypothèse $c - \sum_i \frac{\partial d_i}{\partial x_i} \geq 0$, toute constante ≥ 0 est sursolution, d'où le résultat.

Remarque. — Le même raisonnement montre que, dans Ω quelconque, si λ est assez grand pour que la forme $a_\Omega(u, v) + \lambda(u, v)_\Omega$ soit $W_0^{1,2}(\Omega)$ -coercive, toute sous-solution pour l'opérateur $L + \lambda$ dans Ω , majorée p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ par une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est ≤ 0 p.p. dans Ω .

Conséquences du lemme 1 :

1) PROPOSITION 1. — Soit ω un ouvert L -adapté et u une sous-solution locale dans ω .

a) Si $\limsup_{\substack{x \in \omega \\ x \rightarrow y}} \text{ess } u(x) \leq 0$, $\forall y \in \partial\omega$, alors $u \leq 0$ p.p. dans ω .

b) Si $\limsup_{\substack{x \in \omega \\ x \rightarrow y}} \text{ess } u(x) \leq k$, $\forall y \in \partial\omega$, $k > 0$, alors $u \leq k$ p.p. dans ω .

a) Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de $\partial\omega$ tel que $u \leq \varepsilon$ p.p. dans $V \cap \omega$; le lemme 1 appliqué dans un ouvert ω' tel que $\bar{\omega}' \subset \omega$ et V soit voisinage de $\partial\omega'$, donne $u \leq \varepsilon$ p.p. dans ω' donc dans ω .

b) cf. le lemme 1, b).

2) Si ω est un ouvert L -adapté, et si

$$g \in W^{1,2}(\omega) \cap L^{2^*}(\omega), \quad g \leq 0 \text{ p.p. dans } \omega,$$

alors L_g^ω est ≤ 0 dans ω .

En effet, $L_g^\omega = g + \varphi \leq \varphi$ p.p. dans ω , où $\varphi \in W_0^{1,2}(\omega)$.

2. Vérification de l'axiomatique de M. Brelot.

On commence par montrer deux résultats préliminaires.

1) Majoration locale de la norme dans L^2 du gradient d'une sous-solution locale u positive en fonction de la norme de u dans L^2 .

PROPOSITION 2. — Il existe une constante $C > 0$ dépendant de ν , M et de majorants de $\|b_i\|_{L^r(\Omega)}$, $\|d_i\|_{L^r(\Omega)}$, $\|c\|_{L^{r/2}(\Omega)}$, telle que, pour toute solution locale dans Ω (resp. toute sous-solution locale ≥ 0 p.p. dans Ω), soit u , et tout compact $K \subset \Omega$:

$$\int_K |\text{grad } u|^2 dx \leq \frac{C}{\sigma^2} \int_{K_\sigma} u^2 dx ,$$

où σ est un nombre > 0 , ≤ 1 et $<$ la distance de K à $\partial\Omega$, et K_σ l'ensemble des points dont la distance à K est $\leq \sigma$.

On suppose d'abord que K est une réunion finie de boules B_i ; alors K_σ est une réunion de boules $(B_i)_\sigma$.

Soit

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } K \\ 1 - \frac{1}{\sigma} \text{dist}(x, K) & \text{sur } K_\sigma - K \\ 0 & \text{sur } \Omega - K_\sigma \end{cases} ;$$

$\alpha^2 u$ est une fonction $\in W^{1,2}(\Omega)$, ≥ 0 avec u et à support compact dans Ω , donc $a_\Omega(u, \alpha^2 u) \leq 0$, d'où l'on déduit (cf. démonstration du lemme 5.2 de [14]) :

$$\int_\Omega \alpha^2 |\text{grad } u|^2 dx \leq C_1 \int_\Omega (\alpha^2 + |\text{grad } \alpha|^2) u^2 dx ,$$

où C_1 possède la propriété de l'énoncé. Enfin, tenant compte de $|\text{grad } \alpha| \leq \frac{1}{\sigma}$:

$$\int_K |\text{grad } u|^2 dx \leq C_1 \left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\right) \int_{K_\sigma} u^2 dx \leq \frac{C}{\sigma^2} \int_{K_\sigma} u^2 dx .$$

Si K est quelconque, il existe, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un nombre fini de boules B_i , de rayon $\leq \frac{1}{n}$, couvrant K et centrées sur K ;

$$\begin{aligned} \int_K |\text{grad } u|^2 dx &\leq \int_{\cup B_i} |\text{grad } u|^2 dx \leq \frac{C}{\sigma^2} \int_{\cup (B_i)_\sigma} u^2 dx \leq \\ &\leq \frac{C}{\sigma^2} \int_{K_\sigma + \frac{1}{n}} u^2 dx, \end{aligned}$$

d'où la relation cherchée en faisant tendre n vers $+\infty$.

2) Construction d'une solution > 0 et bornée de $Lu = 0$ au voisinage d'un point.

PROPOSITION 3. — *Chaque point $x_0 \in \Omega$ possède un voisinage où il existe une solution h (qu'on peut choisir continue) de $Lu = 0$, $0 < h < 2$.*

Soit Δ un disque de centre x_0 , assez petit pour que $a_\Delta(u, v)$ soit $W_0^{1,2}(\Delta)$ -coercive, avec la constante γ . On va montrer que, si la mesure de $\omega \subset \Delta$ est assez petite, la solution $u \in W_0^{1,2}(\omega)$ de

$$Lu = L1 = c - \sum_i \frac{\partial d_i}{\partial x_i}$$

est en valeur absolue < 1 , de sorte que $1 - u$ est une solution de $Lu = 0$, à valeurs $\in]0, 2[$.

En s'inspirant d'un raisonnement dû à Stampacchia ([14], théorème 4.1), on considère, pour $k \geq 0$, la fonction

$$v = \frac{u}{|u|} (|u| - k)^+ ; \quad v \in W_0^{1,2}(\omega),$$

donc $a_\omega(u, v) = a_\omega(1, v)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_\omega \left(\sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \sum_i d_i u \frac{\partial v}{\partial x_i} + c uv \right) dx = \\ = \int_\omega \left(c v + \sum_i d_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx. \quad (1) \end{aligned}$$

Au 1^{er} membre, on peut remplacer

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{par} \quad \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \text{car}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \neq \frac{\partial v}{\partial x_i} \implies v = \frac{\partial v}{\partial x_j} = 0 ;$$

d'autre part

$$cuv + \sum_i d_i u \frac{\partial v}{\partial x_i} = cv^2 + \sum_i d_i v \frac{\partial v}{\partial x_i} + (u - v)$$

$$\left| \left[\left(cv^+ + \sum_i d_i \frac{\partial v^+}{\partial x_i} \right) - \left(cv^- + \sum_i d_i \frac{\partial v^-}{\partial x_i} \right) \right], \right.$$

$$u - v \neq k \implies v^+ = \frac{\partial v^+}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad u - v \neq -k \implies v^- = \frac{\partial v^-}{\partial x_i} = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\omega} (u - v) \left[\left(cv^+ + \sum_i d_i \frac{\partial v^+}{\partial x_i} \right) - \left(cv^- + \sum_i d_i \frac{\partial v^-}{\partial x_i} \right) \right] dx = \\ = k < c - \sum_i \frac{\partial d_i}{\partial x_i}, v^+ > + k < c - \sum_i \frac{\partial d_i}{\partial x_i}, v^- > \geq 0 . \end{aligned}$$

De (1) on tire donc

$$\begin{aligned} \gamma \|\text{grad } v\|_{L^2(\omega)}^2 &\leq a_{\omega}(v, v) \leq \int_{A(k)} \left(cv + \sum_i d_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \\ &\leq \left\{ S \|c\|_{L^{2*'}[A(k)]} + \|d\|_{L^2[A(k)]} \right\} \|\text{grad } v\|_{L^2(\omega)} , \end{aligned}$$

où S est la constante de Sobolev,

$$d^2 = \sum_i d_i^2 \quad , \quad A(k) = \{x \in \omega : |u(x)| \geq k\} ,$$

$$\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^{**}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$$

puis

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^{2^*}(\omega)} &\leq S \|\text{grad } v\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{S^2}{\gamma} \|c\|_{L^{2*'}[A(k)]} + \frac{S}{\gamma} \|d\|_{L^2[A(k)]} \\ &\leq \frac{S^2}{\gamma} \|c\|_{L^{r/2}(\omega)} [\text{mes } A(k)]^{\frac{1}{2^*} - \frac{2}{r}} + \frac{S}{\gamma} \|d\|_{L^r(\omega)} [\text{mes } A(k)]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} \end{aligned}$$

Pour $h > k \geq 0$:

$$(h - k) [\text{mes } A(h)]^{\frac{1}{2^*}} \leq \left[\int_{A(k)} (|u| - k)^{2^*} dx \right]^{\frac{1}{2^*}} = \|v\|_{L^{2^*}(\omega)},$$

donc

$$(h - k)^{2^*} \left[\frac{\text{mes } A(h)}{\text{mes } \omega} \right] \leq \left(\frac{S}{\gamma} \right)^{2^*} \left[S \|c\|_{L^{r/2}(\omega)} (\text{mes } \omega)^{2(\frac{1}{m} - \frac{1}{r})} + \right. \\ \left. + \|d\|_{L^r(\omega)} (\text{mes } \omega)^{\frac{1}{m} - \frac{1}{r}} \right]^{2^*} \left[\frac{\text{mes } A(k)}{\text{mes } \omega} \right]^{2^* (\frac{1}{2} - \frac{1}{r})}$$

parce que $\varphi(k) = \frac{\text{mes } A(k)}{\text{mes } \omega} \leq 1$ et $\frac{1}{2} - \frac{1}{r} < \frac{1}{2^*} - \frac{2}{r}$.

On se reporte alors au lemme 4.1 de [14], avec $\alpha = 2^*$, $k_0 = 0$,

$$\beta = 2^* \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{m}} > 1, \quad C = \left(\frac{S}{\gamma} \right)^{2^*} \left[S \|c\|_{L^{r/2}(\omega)} \right. \\ \left. (\text{mes } \omega)^{2(\frac{1}{m} - \frac{1}{r})} + \|d\|_{L^r(\omega)} (\text{mes } \omega)^{\frac{1}{m} - \frac{1}{r}} \right]^{2^*} :$$

ce lemme donne $\sup_{\omega} |u| \leq 2^{\frac{\beta}{\beta-1}} C^{\frac{1}{2^*}}$, et les exposants de $\text{mes } \omega$ sont > 0 .

Remarque. — Dans les hypothèses, $d_i \in L^m$ et $c \in L^{m/2}$ ne suffisent pas, bien que donnant des calculs beaucoup plus simples, parce que $r = m$ entraîne $\beta = 1$.

COROLLAIRE. — Les solutions locales continues de $Lu = 0$, ≥ 0 dans Ω connexe, sont soit > 0 , soit $= 0$ dans Ω .

En raisonnant par l'absurde, on suppose que l'ensemble fermé F des points $\in \Omega$ où $u = 0$ est non vide, ainsi que $\Omega - F$; soit x_0 un point $\in F$ adhérent à $\Omega - F$ et ω un voisinage ouvert connexe de x_0 assez petit pour qu'il existe dans ω une solution continue h de $Lu = 0$, $0 < h < 2$. Si K est un voisinage compact de x_0 , contenu

dans ω , l'inégalité de Harnack (rappel 6) appliquée à $u + \varepsilon h$, $\varepsilon > 0$, donne $\sup_K (u + \varepsilon h) \leq C(K) \cdot 2\varepsilon$; comme u est > 0 sur une partie non vide de K , $\sup_K u = M(K) > 0$, d'où $M(K) \leq C(K) \cdot 2\varepsilon \forall \varepsilon > 0$ et la contradiction.

THEOREME 1. — *Les solutions locales continues de $Lu = 0$ forment un système de fonctions harmoniques dans Ω satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot.*

Un système de fonctions harmoniques dans Ω est la donnée, sur chaque ouvert $\omega \subset \Omega$, d'un espace vectoriel de fonctions réelles continues sur ω , satisfaisant à trois axiomes : l'axiome 1 est un axiome de faisceau ; l'axiome 2 est l'existence d'une base des ouverts formée de domaines réguliers ; l'axiome 3 (équivalent à 3') est un axiome de compacité.

Vérification de l'axiome 2 : soit $\beta \subset \bar{\beta} \subset \Omega$ une boule assez petite pour que $a_\beta(u, v)$ soit $W_0^{1,2}(\beta)$ -coercive, et f une fonction continue sur $\partial\beta$; montrons que f est prolongeable de façon unique en une solution locale dans β , continue dans $\bar{\beta}$, soit H_f^β . L'unicité résulte de la proposition 1.

Existence de ce prolongement : si f est la trace sur $\partial\beta$ d'une fonction $F \in C^0(\bar{\beta}) \cap W^{1,p}(R^m)$ avec $p > m$, il existe une solution unique $u = H_F^\beta$ de $Lu = 0$ dans β telle que $u - F \in W_0^{1,2}(\beta)$ (rappel 4), et on peut choisir $u - F$ höldérienne dans β (rappel 5) car $\sum_i b_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + cF$, donc aussi LF , $\in W^{-1,q}(\beta)$ avec $q > m$, d'après la propriété classique que toute fonction $\in L^{r/2}(\beta)$ appartient aussi à $W^{-1,(r/2)^*}(\beta)$ (cf. par exemple Stampacchia, Ann. di Pisa, 1958, remarque sur la proposition 5.1).

Dans le cas général, on approche f , uniformément sur $\partial\beta$, par des fonctions $F_k \in C^0(\bar{\beta}) \cap W^{1,p}(R^m)$ avec $p > m$, par exemple des polynômes sur R^m . Les solutions $H_{F_k}^\beta$ convergent uniformément dans β (proposition 1) vers une fonction u , dont le prolongement par f est continu sur $\bar{\beta}$; la proposition 2 entraîne que cette limite a lieu dans $W_{loc}^{1,2}(\beta)$, et par suite u est solution locale dans β .

Enfin, si f est ≥ 0 , la proposition 1 entraîne $H_f^\beta \geq 0$ dans β .

Vérification de l'axiome 3' :

Les solutions locales continues ≥ 0 dans un ouvert connexe δ sont soit > 0 , soit $= 0$ (corollaire de la proposition 3).

Pour vérifier que les solutions locales continues $u > 0$ dans δ , égales à 1 en un point x_0 , sont également continues en x_0 , on utilise la continuité höldérienne des solutions locales (rappel 5) :

$$|u(x) - 1| \leq \frac{k}{R^{m/2}} \|u\|_{L^2[\beta(x_0, R)]} \frac{|x - x_0|^\lambda}{R^\lambda} \text{ pour } |x - x_0| \leq \frac{R}{2},$$

et l'inégalité de Harnack (rappel 6) :

$$\sup_{\beta(x_0, R)} u \leq C \inf_{\beta(x_0, R)} u,$$

d'où

$$\|u\|_{L^2[\beta(x_0, R)]} \leq C [\text{mes } \beta(x_0, R)]^{1/2}.$$

3. Les potentiels dans Ω .

1) Existence de potentiels continus > 0 dans Ω .

On remarque d'abord que toute sous-solution locale continue u dans un ouvert quelconque $\omega \subset \Omega$ est sous-harmonique, car dans toute boule assez petite $\beta \subset \bar{\beta} \subset \omega$, $u - H_u^\beta$, qui a une limite nulle en tout point $y \in \partial\beta$, est ≤ 0 (proposition 1) ; par suite, toute constante ≥ 0 est surharmonique dans Ω , et, si les constantes ne sont pas harmoniques, c'est-à-dire si $c - \sum_i \frac{\partial d_i}{\partial x_i} \neq 0$ dans Ω , on est assuré de l'existence d'un potentiel⁽⁴⁾ continu > 0 dans Ω .

Pour montrer qu'il en existe même si $c - \sum_i \frac{\partial d_i}{\partial x_i} \equiv 0$ dans Ω , on considère la solution u de $Lu + \lambda u = 0$ dans Ω , telle que

$$u - 1 \in W_0^{1,2}(\Omega) :$$

si $\lambda > 0$ est assez grand pour que $a_\Omega(u, v) + \lambda(u, v)_\Omega$ soit coercive,

⁽⁴⁾ Un potentiel est une fonction surharmonique ≥ 0 dont la p.g.m.h. est 0.

u existe, est continue dans Ω et n'est pas constante ; u est ≥ 0 dans Ω car elle est minorée par une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ (remarque qui suit le lemme 1), et par suite c'est une sous-solution pour l'opérateur L ; enfin, $u - 1$ est une sous-solution pour l'opérateur $L + \lambda$, $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ donc ≤ 0 dans Ω . Alors $1 - u$ est une fonction surharmonique continue dans Ω , ≥ 0 et non constante, d'où l'existence d'un potentiel continu > 0 dans Ω .

2) Proportionnalité des potentiels de support ponctuel donné dans Ω . On sait déjà qu'il existe des potentiels de support ponctuel, ainsi que des fonctions harmoniques > 0 dans Ω ([8] théorème 16.1).

LEMME 2. — *Pour toute solution locale continue $u \geq 0$ dans $\beta(y, R) - \{y\}$ et tout nombre ρ tel que $0 < \rho \leq \frac{R}{2}$, on a*

$$\sup_{\partial\beta(y,\rho)} u \leq C \inf_{\partial\beta(y,\rho)} u ,$$

où C est une constante > 0 indépendante de ρ , R et du point y pourvu que $\beta(y, R) \subset \Omega$.

La fonction $v(x) = u(y + \rho x)$, définie sur $\beta\left(0, \frac{R}{\rho}\right) - \{0\}$, est solution locale de l'équation

$$\begin{aligned} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i a_{ij}(y + \rho x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} + \rho d_j(y + \rho x) v(x) \right) + \\ + \sum_i \rho b_i(y + \rho x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} + \rho^2 c(y + \rho x) v(x) = 0 . \end{aligned}$$

Les normes des coefficients de cette équation dans $\beta(0,2)$ sont bornées indépendamment de ρ , R et y car

$$\|\rho b_i(y + \rho x)\|_{L^r(\beta(0,2))} \leq \rho^{1 - \frac{m}{r}} \|b_i\|_{L^r(\beta(y, R))} ,$$

$$\|\rho d_j(y + \rho x)\|_{L^r(\beta(0,2))} \leq \rho^{1 - \frac{m}{r}} \|d_j\|_{L^r(\beta(y, R))} ,$$

$$\|\rho^2 c(y + \rho x)\|_{L^{r/2}(\beta(0,2))} \leq \rho^{2(1 - \frac{m}{r})} \|c\|_{L^{r/2}(\beta(y, R))} .$$

On a donc (rappel 6)

$$\sup_{\partial\beta(0,1)} v \leq C \inf_{\partial\beta(0,1)} v, \quad \text{soit} \quad \sup_{\partial\beta(y,\rho)} u \leq C \inf_{\partial\beta(y,\rho)} u,$$

où la constante C ne dépend pas de ρ, R et y .

PROPOSITION 4. — *Les potentiels dans Ω , de support ponctuel donné y , sont proportionnels, et toute fonction harmonique > 0 sur $\Omega - \{y\}$, majorée hors d'un voisinage compact de y par un potentiel dans Ω , se prolonge en un potentiel de support y .*

Considérons l'ensemble convexe A formé des fonctions harmoniques > 0 sur $\Omega - \{y\}$, égales à 1 en un point donné $x_0 \in \Omega - \{y\}$ et majorées sur $C\omega$ par des potentiels dans Ω , pour un (ou tout) ouvert $\omega \ni y$ et relativement compact dans Ω . Pour voir que A est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact $\subset \Omega - \{y\}$, il suffit de montrer que h limite uniforme de la suite $(h_n) \subset A$ sur tout compact $\subset \Omega - \{y\}$ entraîne h majoré sur $C\omega$ par un potentiel dans Ω : il existe en effet un potentiel P dans Ω tel que $P \geq h_n \forall n$ sur $\partial\omega$, d'où (principe du minimum dans $\Omega - \bar{\omega}$) $P \geq h_n \forall n$ sur $C\omega$ et $P \geq h$ sur $C\omega$.

Cette compacité étant établie, d'après le théorème de Krein et Milman, A sera réduit à une fonction si A n'a qu'une fonction extrémale : soient donc h et h' extrémales distinctes dans A . S'il existait $\alpha > 0$ tel que $h \geq \alpha h'$ sur un voisinage de y diminué de y , le même principe du minimum étendrait l'inégalité $h \geq \alpha h'$ à $\Omega - \{y\}$, d'où $\frac{h - \alpha h'}{1 - \alpha} \in A$ et h non extrémale.

Je dis maintenant que $\inf_{\partial\beta(y,r)} h = o \left(\sup_{\partial\beta(y,r)} h' \right)$ quand $r \rightarrow 0$: s'il n'en était pas ainsi, il existerait $\alpha > 0$ et une suite $r_n \rightarrow 0$, strictement décroissante, telle que $\inf_{\partial\beta(y,r_n)} h \geq \alpha \sup_{\partial\beta(y,r_n)} h', \forall n$; d'après le principe classique du minimum appliqué dans chaque couronne $\beta(y, r_n) - \beta(y, r_{n+1})$, on aurait $h \geq \alpha h'$ sur $\beta(y, r_0) - \{y\}$, ce qui est impossible.

Le lemme 2 prouve alors que l'on a même

$$\sup_{\partial\beta(y,r)} h = o \left(\inf_{\partial\beta(y,r)} h' \right)$$

quand $r \longrightarrow 0$, en particulier $h \leq h'$ sur $\partial\beta(y, r)$ pour r assez petit, d'où la même contradiction.

Ainsi A est réduit à une fonction h_0 , qui se prolonge en un potentiel de support y .

4. Un principe du maximum pour les sous-solutions locales dans un ouvert L -adapté.

LEMME 3. — Soit ω un ouvert L -adapté (c'est-à-dire tel que la forme $a_\omega(u, v)$ soit $W_0^{1,2}(\omega)$ -coercive), et $f \in W^{1,2}(\tilde{\omega})$ où $\tilde{\omega}$ est un ouvert $\supset \bar{\omega}$.

a) Pour tout ouvert $\omega' \subset \omega$, la solution continue $L_f^{\omega'}$ de $Lu = 0$ dans ω' telle que $L_f^{\omega'} - f \in W_0^{1,2}(\omega')$, satisfait à

$$\|L_f^{\omega'}\|_{W^{1,2}(\omega')} \leq k \|f\|_{W^{1,2}(\tilde{\omega})},$$

où k ne dépend pas de ω' ni de f .

b) Pour toute suite croissante d'ouverts ω_n dont la réunion est ω , la suite $f_{\omega_n} = \begin{cases} L_f^{\omega_n} & \text{dans } \omega_n \\ f & \text{dans } \omega - \omega_n \end{cases}$ converge faiblement dans $W^{1,2}(\omega)$ vers L_f^ω , et uniformément sur tout compact $\subset \omega$.

a) D'après le rappel 4, il existe une constante C , indépendante de ω' , majorant la norme de L^{-1} comme opérateur de $W^{-1,2}(\omega')$ sur $W_0^{1,2}(\omega')$; d étant le diamètre de ω , on a donc, $\forall u \in W_0^{1,2}(\omega')$, les inégalités

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\omega')} &\leq d \|u\|_{W_0^{1,2}(\omega')} \quad \text{et} \quad \|u\|_{W_0^{1,2}(\omega')} \leq C \|Lu\|_{W^{-1,2}(\omega')} = \\ &= C \cdot \sup_{v \in W_0^{1,2}(\omega')} \frac{|a_{\omega'}(u, v)|}{\|v\|_{W_0^{1,2}(\omega')}}. \end{aligned}$$

Si $u = L_f^{\omega'} - f$, on a $a_{\omega'}(u, v) = -a_{\omega'}(f, v)$, de valeur absolue

$$\leq k_0 \|f\|_{W^{1,2}(\tilde{\omega})} \|v\|_{W_0^{1,2}(\omega')},$$

où k_0 ne dépend pas de ω' (Rappel 1). Ainsi

$$\|L_f^{\omega'} - f\|_{W^{1,2}(\omega')} \leq C(1+d)k_0 \|f\|_{W^{1,2}(\tilde{\omega})},$$

d'où le résultat avec $k = C(1+d)k_0 + 1$.

b) $f_{\omega_n} \in W^{1,2}(\omega)$ (car toute fonction $\in W_0^{1,2}(\omega')$, prolongée par 0 dans $\omega - \omega', \in W_0^{1,2}(\omega)$), et

$$\|f_{\omega_n}\|_{W^{1,2}(\omega)} \leq (k+1) \|f\|_{W^{1,2}(\tilde{\omega})}.$$

On peut donc extraire une suite partielle f_{ω_n} , faiblement convergente dans $W^{1,2}(\omega)$; la limite faible est solution de $Lu = 0$ dans ω , car tout compact $\subset \omega$ est $\subset \omega_n$ pour n' assez grand, et

$$f_{\omega_n} - f \in W_0^{1,2}(\omega)$$

est valable à la limite car $W_0^{1,2}(\omega)$ est fortement, donc aussi faiblement, fermé dans $W^{1,2}(\omega)$. Donc toute la suite f_{ω_n} converge faiblement dans $W^{1,2}(\omega)$ vers L_f^ω .

L'application identique de $W_0^{1,2}(\omega)$ dans $L^2(\omega)$ étant complètement continue, f_{ω_n} converge fortement dans $L^2(\omega)$ vers L_f^ω , et de la suite f_{ω_n} on peut extraire une suite partielle $f_{\omega_{n'}}$ tendant vers L_f^ω p.p. dans ω . Pour montrer que cette convergence est uniforme sur tout compact $\subset \omega$, on peut supposer $f \geq 0$ p.p. dans $\tilde{\omega}$, d'où $f_{\omega_{n'}} \geq 0$ p.p. dans ω , et alors (axiome 3') une nouvelle suite partielle converge, uniformément sur tout compact $\subset \omega$, vers une fonction harmonique égale à L_f^ω p.p., donc partout, dans ω .

PROPOSITION 5. — Soit ω un ouvert L -adapté. Si u est une sous-solution locale dans ω , majorée p.p. au voisinage de $\partial\omega$ par une fonction $\varphi \in W_0^{1,2}(\omega)$, u est ≤ 0 p.p. dans ω .

On applique le lemme précédent en prenant $f = \varphi$ prolongée par 0 hors de ω , et ω_n relativement compact dans ω : la suite $\varphi_{\omega_n} = \begin{cases} L_\varphi^{\omega_n} & \text{dans } \omega_n \\ \varphi & \text{dans } \omega - \omega_n \end{cases}$ tend vers 0 en tout point $\in \omega$.

Pour n assez grand, on a $u \leq \varphi$ p.p. sur $\omega - \omega_n$ et au voisinage de $\partial\omega_n$, donc $u - L_\varphi^{\omega_n}$, majoré p.p. au voisinage de $\partial\omega_n$ par $\varphi - L_\varphi^{\omega_n}$, est ≤ 0 p.p. dans ω_n (lemme 1). D'où $u \leq \varphi_{\omega_n}$ p.p. dans ω , et à la limite $u \leq 0$ p.p. dans ω .

COROLLAIRE. — Une fonction surharmonique ≥ 0 dans un ouvert ω L-adapté, $\in W_0^{1,2}(\omega)$, est un potentiel dans ω .

Car ses minorantes harmoniques dans ω sont ≤ 0 .

Remarque. — Un peu plus loin, on supprimera " ≥ 0 " en rapprochant le lemme 1 et le théorème 2 ; plus loin encore, on supprimera "L-adapté".

5. La solution faible de $Lu = \mu$ dans un ouvert L-adapté.

PROPOSITION 6. — Soit ω un ouvert L-adapté et μ une mesure bornée sur ω . Il existe une classe unique de fonctions $u \in L^1(\omega)$, appelée "solution faible de $Lu = \mu$ s'annulant sur $\partial\omega$ " telle que

$$\int u \psi \, dx = \int \varphi \, d\mu \quad \text{pour toute } \psi \in L^\infty(\omega),$$

où φ est la solution continue⁽⁵⁾ $\in W_0^{1,2}(\omega)$ de $L^*\varphi = \psi$. En outre,

$$u \in W_0^{1,p}(\omega) \quad \forall p < \frac{m}{m-1} \quad \text{et} \quad \|u\|_{W_0^{1,p}(\omega)} \leq k \|\mu\|,$$

où k dépend de L, p, ω .

Enfin u est ≥ 0 p.p. dans ω si μ est ≥ 0 .

Pour démontrer l'existence de u , on considère la forme linéaire $\psi \longmapsto \int \varphi \, d\mu$, définie sur $L^\infty(\omega)$, et continue pour la topologie de $W^{-1,p'}(\omega)$, $p' > m$, car $|\varphi(x)| \leq k(L, p, \omega) \|\psi\|_{W^{-1,p'}(\omega)}$ (rappel 7).

Comme $L^\infty(\omega)$ est dense dans $W^{-1,p'}(\omega)$, elle se prolonge en un élément $u \in W_0^{1,p}(\omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et $\|u\|_{W_0^{1,p}(\omega)} \leq k \|\mu\|$.

Si ψ est ≥ 0 p.p. dans ω , φ est une sursolution pour L^* , $\in W_0^{1,2}(\omega)$,

donc est ≥ 0 (lemme 1) ; si μ est ≥ 0 , u est donc ≥ 0 p.p. dans ω .

⁽⁵⁾ $L^\infty(\omega) \subset W^{-1,p}(\omega) \quad \forall p \geq 1$, donc la solution $\in W_0^{1,2}(\omega)$ de $L^*\varphi = \psi$ peut être choisie continue dans ω (rappel 5), et elle est bornée (rappel 7).

Calcul de $a_\omega(u, v)$ où u est une solution faible.

LEMME 4. — Soit ω un ouvert L -adapté, μ et μ_n des mesures bornées sur ω , u et u_n les solutions faibles s'annulant sur $\partial\omega$, de $Lu = \mu$ et $Lu_n = \mu_n$. Si $\int \varphi d\mu_n \longrightarrow \int \varphi d\mu$ pour toute φ continue et bornée dans ω , et $\|\mu_n\| \leq M \forall n$, alors :

a) $u_n \longrightarrow u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\omega)$ $p < \frac{m}{m-1}$, donc fortement dans $L^p(\omega)$; par suite il existe une suite partielle

$$u_{n'} \longrightarrow u \text{ p.p. dans } \omega.$$

b) Si les mesures μ_n sont ≥ 0 et les u_n harmoniques dans un ouvert $\omega' \subset \omega$, alors u_n tend uniformément sur tout compact $\subset \omega'$ vers une fonction égale à u p.p. sur ω' , de sorte que u peut être choisie harmonique sur ω' .

a) D'après la 1^{ère} hypothèse,

$$\langle u - u_n, \psi \rangle \longrightarrow 0 \quad \forall \psi \in L^\infty(\omega) ;$$

d'après la 2^{ème} hypothèse et l'inégalité de la proposition 6,

$$\|u - u_n\|_{W_0^{1,p}(\omega)}$$

est majoré. Comme $L^\infty(\omega)$ est dense dans $W^{-1,p'}(\omega)$, on a aussi

$$\langle u - u_n, T \rangle \longrightarrow 0, \quad \forall T \in W^{-1,p'}(\omega) .$$

b) Les fonctions u_n sont ≥ 0 dans ω' ; b) résulte alors de l'axiome 3' (même raisonnement qu'au lemme 3, fin de la partie b)).

PROPOSITION 7. — Soit un ouvert ω L -adapté et u la solution faible s'annulant sur $\partial\omega$ de $Lu = \mu$, où μ est une mesure bornée sur ω .

a) Pour que $u \in W_0^{1,2}(\omega)$, il faut et il suffit que la distribution $\mu \in W^{-1,2}(\omega)$; alors u est aussi la solution $\in W_0^{1,2}(\omega)$ de $Lu = \mu$, et $a_\omega(u, \varphi) = \int \varphi d\mu$, $\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\omega)$ continue et bornée.

b) Pour toute μ , $a_\omega(u, \varphi) = \int \varphi d\mu$, $\forall \varphi \in \mathcal{O}(\omega)$; la correspondance entre u et μ est donc biunivoque.

a) Si $\mu = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, avec $f_i \in L^2(\omega)$, la solution $u \in W_0^{1,2}(\omega)$

de $Lu = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ satisfait à $a_\omega(u, \varphi) = \int \varphi d\mu, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$.

Cette égalité s'étend à toute $\varphi \in W_0^{1,2}(\omega)$ continue et bornée, car une telle φ est limite, dans $W_0^{1,2}(\omega)$ et uniformément sur tout compact $\subset \omega$, d'une suite de fonctions

$$\varphi_n \in \mathcal{D}(\omega), |\varphi_n| \leq 1 + \sup |\varphi| \quad ([11] \text{ lemme } 1).$$

On en déduit

$$\int \varphi_n d\mu \longrightarrow \int \varphi d\mu, \text{ et } a_\omega(u, \varphi_n) \longrightarrow a_\omega(u, \varphi)$$

car $u \in W_0^{1,2}(\omega)$.

Alors, si en outre $L^*\varphi \in L^\infty(\omega)$:

$$\int u L^*\varphi dx = a_\omega^*(\varphi, u) = a_\omega(u, \varphi) = \int \varphi d\mu.$$

Réciproquement, supposons que la solution faible $u \in W_0^{1,2}(\omega)$. Pour toute $\varphi \in W_0^{1,2}(\omega)$, continue et telle que $L^*\varphi \in L^\infty(\omega)$:

$$a_\omega(u, \varphi) = a_\omega^*(\varphi, u) = \int u L^*\varphi dx = \int \varphi d\mu.$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$;

$$L^*\varphi = - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + b_j \varphi \right) + \sum_i d_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c\varphi \in W^{-1,p}(\omega),$$

pour un choix convenable de $p > m$, car

$$\sum_i d_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c\varphi \in L^{\frac{r}{2}}(\omega) \subset W^{-1,(r/2)*}(\omega).$$

Soit $\psi_n \in L^\infty(\omega)$, tendant vers $L^*\varphi$ dans $W^{-1,p}(\omega)$, donc aussi dans $W^{-1,2}(\omega)$, et φ_n la solution continue $\in W_0^{1,2}(\omega)$ de

$$L^*\varphi_n = \psi_n \cdot \varphi_n \longrightarrow \varphi$$

dans $W_0^{1,2}(\omega)$, puisque L^* est un isomorphisme de $W_0^{1,2}(\omega)$ sur $W^{-1,2}(\omega)$, et uniformément dans ω (rappel 7), donc

$$a_{\omega}(u, \varphi) = \int \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}(\omega),$$

et μ est la forme linéaire $\varphi \mapsto a_{\omega}(u, \varphi)$ continue sur $\mathcal{O}(\omega)$ pour la norme de $W_0^{1,2}(\omega)$ (rappel 1).

b) D'après a) on a

$$a_{\omega}(u, \varphi) = \int \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}(\omega), \quad \text{si } \mu \in W^{-1,2}(\omega),$$

en particulier si $d\mu(x) = \frac{\chi_{\beta} dx}{\int \chi_{\beta} dx}$, où χ_{β} est la fonction caractéristique d'une boule ouverte $\beta \subset \omega$. En utilisant le lemme 4 et le fait que $L^*\varphi = [u \mapsto a_{\omega}(u, \varphi)]$ est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\omega)$ pour un choix convenable de $p < \frac{m}{m-1}$, on étend cette égalité de proche en proche, d'abord aux mesures discrètes, puis aux mesures à support compact, enfin aux mesures bornées quelconques.

COROLLAIRE. — *Inversement, si u est une sursolution $\in W_0^{1,2}(\omega)$, et si la mesure positive $\mu = Lu$ est de masse finie, alors u est la solution faible s'annulant sur $\partial\omega$ de $Lu = \mu$.*

6. La fonction de Green dans un ouvert connexe L-adapté.

PROPOSITION 8. — *Dans un ouvert ω connexe et L-adapté, la solution faible de $Lu = \varepsilon_y$ s'annulant sur $\partial\omega$ est représentable par un potentiel de support y , noté g_y^{ω} ou g_y , et appelé fonction de Green de ω de pôle y . $g_y^{\omega} \notin W_0^{1,2}(\omega)$.*

En outre, si $\omega \cap \omega' \ni y$, $g_y^{\omega} - g_y^{\omega'}$ est harmonique dans $\omega \cap \omega'$.

On considère les mesures μ_n définies par $d\mu_n(x) = \frac{\chi_{\beta_n} dx}{\int \chi_{\beta_n} dx}$

où $\beta_n = \beta(y, \frac{1}{n})$. La solution faible u_n de $Lu = \mu_n$ est une sursolution ≥ 0 et $\in W_0^{1,2}(\omega)$; on peut la choisir continue dans ω (rappel 5), donc (§ 3,1) elle est surharmonique dans ω , harmo-

nique hors de $\bar{\beta}_n$, et c'est un potentiel dans ω (corollaire de la proposition 5).

D'autre part, le lemme 4 appliqué aux mesures μ_n et $\mu = \varepsilon_y$, prouve que la suite u_n converge, uniformément sur tout compact de $\omega - \{y\}$, vers une fonction égale p.p. à la solution faible de $Lu = \varepsilon_y$; celle-ci est donc harmonique ≥ 0 dans $\omega - \{y\}$, > 0 d'après la proposition 7.b), et prolongeable en un potentiel dans ω , de support y (proposition 4), noté g_y^ω : en effet, hors d'un voisinage compact de y , les u_n , donc aussi leur limite, sont majorés par un même potentiel dans ω .

$g_y \notin W_0^{1,2}(\omega)$ parce que $\varepsilon_y \notin W^{-1,2}(\omega)$ (proposition 7), c'est-à-dire que $\varphi \mapsto \varphi(y)$ n'est pas continue pour la norme de $W_0^{1,2}(\omega)$.

Si ω' est un autre ouvert $\ni y$ et si u'_n est la solution continue $\in W_0^{1,2}(\omega')$ de $Lu = \mu_n$, $g_y^\omega - g_y^{\omega'}$ est limite uniforme sur tout compact $\subset \omega \cap \omega' - \{y\}$ de $u_n - u'_n$, en particulier sur la frontière $\partial\beta$ d'une boule β de centre y , $\bar{\beta} \subset \omega \cap \omega'$. $u_n - u'_n$ est harmonique dans $\omega \cap \omega'$, donc (principe du maximum) la suite converge uniformément dans β et sa limite $g_y^\omega - g_y^{\omega'}$ est harmonique dans β .

Propriétés de la fonction de Green.

1) PROPOSITION 9. — $g_y^\omega(x)$ est fonction s.c.i. de (x, y) dans $\omega \times \omega$, continue hors de la diagonale.

$g_y^\omega(x) - g_y^{\omega'}(x)$ est fonction continue de (x, y) dans

$$(\omega \cap \omega') \times (\omega \cap \omega').$$

La continuité de l'application $y \mapsto g_y^\omega(x)$ sur $\omega - \{x\}$ résulte du lemme 4, où l'on prend $\mu_n = \varepsilon_{y_n}$ et $\mu = \varepsilon_y$, $y_n \rightarrow y$:

$$g_{y_n}^\omega(x) \rightarrow g_y^\omega(x) \quad \forall x \in \omega - \{y\}.$$

Un résultat général démontré dans [8] (proposition 18.1) prouve alors la continuité de l'application $(x, y) \mapsto g_y^\omega(x)$ hors de la diagonale et la s.c.i. de cette application dans $\omega \times \omega$.

Il reste à montrer la continuité de l'application

$$(x, y) \mapsto g_y^\omega(x) - g_y^{\omega'}(x)$$

pour $x = y = x_0 \in \omega \cap \omega'$: ρ^β étant la mesure harmonique dans un ouvert régulier $\beta \ni x_0$, $\bar{\beta} \subset \omega \cap \omega'$, pour x et $y \in \beta$ on a

$$g_y^\omega(x) - g_y^{\omega'}(x) = \int [\varphi(y, z) - \varphi'(y, z)] d\rho_x^\beta(z),$$

où φ et φ' sont deux fonctions continues ≥ 0 de (y, z) dont la différence est $g_y^\omega(z) - g_y^{\omega'}(z)$; alors

$$\int \varphi(y, z) d\rho_x^\beta(z) \quad \text{et} \quad \int \varphi'(y, z) d\rho_x^\beta(z)$$

sont fonctions continues de (x, y) d'après l'axiome 3'.

Conséquence. — Tout potentiel P dans un ouvert connexe et L -adapté ω , admet une représentation intégrale unique de la forme

$$P(x) = \int g_y^\omega(x) d\lambda(y),$$

où λ est une mesure ≥ 0 sur ω ([8], théorème 18.2).

Réciproquement, si λ est une mesure ≥ 0 sur ω ,

$$x \longmapsto \int g_y^\omega(x) d\lambda(y)$$

est hyperharmonique dans ω et, si elle est surharmonique, c'est un potentiel dans ω ([8], théorème 18.3) : on dira que c'est le potentiel dans ω de la mesure λ .

2) Représentation intégrale de la solution faible.

PROPOSITION 10. — Soit ω un ouvert connexe et L -adapté. Si μ est une mesure bornée sur ω , $\hat{u}(x) = \int g_y^\omega(x) d\mu(y)$ existe pour presque tout $x \in \omega$ et \hat{u} est un représentant de la solution faible dans ω s'annulant sur $\partial\omega$, de $Lu = \mu$; si μ est ≥ 0 , \hat{u} est le potentiel dans ω de la mesure μ .

On suppose $\mu \geq 0$. Pour toute $\psi \in L^\infty(\omega)$:

$$\int g_y(x) \psi(x) dx = \varphi(y),$$

où φ est la solution continue $\in W_0^{1,2}(\omega)$ de $L^*\varphi = \psi$; d'où

$$\iint g_y(x) \psi(x) dx d\mu(y) = \int \varphi(y) d\mu(y).$$

Par suite $\hat{u}(x) = \int g_y(x) d\mu(y)$ existe pour presque tout x , $\hat{u} \in L^1(\omega)$ et $\int \hat{u} \psi dx = \int \varphi d\mu$.

COROLLAIRE.

a) Toute fonction surharmonique dans Ω appartient à

$$W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega), \forall p < \frac{m}{m-1}.$$

b) Deux fonctions surharmoniques dans Ω , égales p.p. dans Ω , coïncident. Enoncés équivalents : 1) Une même classe de fonctions a au plus un représentant surharmonique. 2) Une inégalité entre fonctions surharmoniques dans Ω , vérifiée p.p., est vérifiée partout.

a) Soit un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ et u surharmonique dans Ω : u est borné inférieurement sur ω , donc, si ω est connexe et L -adapté, $u|_{\omega} =$ une fonction harmonique dans ω + le potentiel dans ω d'une mesure $\lambda \geq 0$. Si $\bar{\omega}' \subset \omega$: $u|_{\omega'}$ = une fonction harmonique dans ω' + le potentiel dans ω de la restriction de λ à ω' , qui est de masse finie ; ce dernier potentiel est une solution faible dans ω (proposition 10), donc $\in W_0^{1,p}(\omega)$ (proposition 6).

b) Soient u_1 et u_2 deux fonctions surharmoniques dans Ω , égales p.p. ω' étant choisi comme dans la démonstration de a), pour $i = 1, 2$: $u_i|_{\omega'} = p_i + h_i$, $p_i = \int g_y^{\omega} \chi_{\omega'}(y) d\lambda_i(y)$ solution faible dans ω de $Lu = \lambda_i|_{\omega'}$, h_i harmonique sur ω' . Pour toute $\varphi \in \mathcal{O}(\omega')$:

$$\int \varphi d\lambda_i = a_{\omega}(p_i, \varphi) \text{ (proposition 7)} = a_{\omega}(u_i, \varphi).$$

Alors $u_1 = u_2$ p.p. entraîne $\lambda_1 = \lambda_2$, $p_1 = p_2$, $h_1 = h_2$ p.p., $h_1 = h_2$ partout, enfin $u_1 = u_2$ sur ω' .

3) Comparaison des fonctions de Green relatives aux opérateurs L et L^* .

PROPOSITION 11. — Si g_y et g_x^* sont les fonctions de Green relatives aux opérateurs L et L^* dans un même ouvert ω connexe et L -adapté, on a

$$g_y(x) = g_x^*(y) \quad \forall x \quad \text{et} \quad y \in \omega.$$

Pour toute $\psi \in L^\infty(\omega)$, la solution φ continue et $\in W_0^{1,2}(\omega)$ de $L\varphi = \psi$ est $\varphi(x) = \int g_x^*(y) \psi(y) dy$ d'après la définition de g_x^* , et d'autre part égale p.p. à $\int g_y(x) \psi(y) dy$ (propositions 7 et 10).
Donc

$$\iint g_y(x) h(x) k(y) dx dy = \iint g_x^*(y) h(x) k(y) dx dy$$

$$\forall h \quad \text{et} \quad k \in L^\infty(\omega), \quad \text{et} \quad g_y(x) = g_x^*(y) \quad \forall x \quad \text{et} \quad y \in \omega.$$

7. Comparaison des fonctions surharmoniques $\in W^{1,2}(\Omega)$ et des sursolutions dans Ω .

THEOREME 2. — *Les sursolutions (resp. sursolutions locales) dans Ω coïncident p.p. avec les fonctions surharmoniques $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$) et, si μ est la mesure $Lu \geq 0$, dans tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, connexe et L-adapté :*

$$u = \int g_y^\omega \chi_\omega(y) d\mu(y) + L_u^\omega.$$

1) Soit u surharmonique dans Ω : on vient de voir que, dans tout ouvert connexe et L-adapté $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, u admet une représentation intégrale unique $u = \int g_y^\omega d\lambda(y) +$ une fonction harmonique dans ω , $\lambda \geq 0$. Dans $\tilde{\omega}$ L-adapté, $\tilde{\omega} \supset \bar{\omega}$, on a de même

$$u = \int g_y^{\tilde{\omega}} d\tilde{\lambda}(y) + \text{une fonction harmonique dans } \tilde{\omega};$$

$g_y^\omega - g_y^{\tilde{\omega}}$ étant harmonique ≤ 0 dans $\omega \forall y \in \omega$, on a encore dans ω :

$$u = \int g_y^\omega \chi_\omega(y) d\tilde{\lambda}(y) + \text{une fonction harmonique dans } \omega,$$

et l'unicité de la représentation intégrale prouve que la mesure λ , restriction de la mesure $\tilde{\lambda}$ à ω , est de masse finie. Alors

$$\int g_y^\omega d\lambda(y)$$

est la solution faible dans ω , s'annulant sur $\partial\omega$, de $Lu = \lambda$ (proposition 10), et

$$a_{\omega}(u, \varphi) = \int \varphi d\lambda \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}(\omega) \quad (\text{proposition 7}).$$

On en déduit $a_{\omega}(u, \varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \geq 0$ et $\varphi \in \mathcal{O}(\omega)$, et par partition de l'unité $a_{\Omega}(u, \varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \geq 0$ et $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$.

2) Soit u une sursolution locale dans Ω et $\mu = Lu \geq 0$. Dans tout ouvert connexe et L -adapté $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, $u - L_u^{\omega} = u_{\omega}$ est une sursolution $\in W_0^{1,2}(\omega)$. La mesure $Lu_{\omega} = \mu\chi_{\omega}$ étant de masse finie, u_{ω} est la solution faible dans ω , s'annulant sur $\partial\omega$, de $Lu = \mu\chi_{\omega}$ (corollaire de la proposition 7) et

$$u = \int g_y^{\omega} \chi_{\omega}(y) d\mu(y) + L_u^{\omega} \quad \text{p.p. dans } \omega \quad (\text{proposition 10}).$$

Si ω' est un ouvert possédant les mêmes propriétés que ω , les deux représentants de u dans $\omega \cap \omega'$:

$$\int g_y^{\omega} \chi_{\omega}(y) d\mu(y) + L_u^{\omega} \quad \text{et} \quad \int g_y^{\omega'} \chi_{\omega'}(y) d\mu(y) + L_u^{\omega'},$$

diffèrent d'une fonction harmonique dans $\omega \cap \omega'$ (proposition 8), qui est nulle p.p., donc $\equiv 0$. Comme ces représentants sont surharmoniques, u est égal p.p. dans Ω à une fonction surharmonique dans Ω .

8. Capacité d'un compact K contenu dans un ouvert ω L -adapté.

On reprend, avec quelques modifications, la notion de capacité introduite par Stampacchia [14]. On utilise de façon essentielle un théorème démontré par cet auteur [12] :

Etant donné un ensemble fermé convexe $U \subset W_0^{1,2}(\omega)$, où ω est un ouvert L -adapté $\subset \Omega$, il existe u unique $\in U$ tel que

$$a_{\omega}(u, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in U.$$

LEMME 5⁽⁶⁾. — *Etant donné un ouvert ω L -adapté, un compact $K \subset \omega$ et une fonction $h \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\omega)$, soit U (resp. : V) l'adhérence (faible ou forte) dans $W_0^{1,2}(\omega)$ de l'ensemble convexe formé des*

⁽⁶⁾ Ce lemme est voisin du théorème 3.9 de [14], mais on évite ici de considérer les fonctions nulles au sens de $H^{1,2}$.

fonctions $\in W_0^{1,2}(\omega)$, à support compact dans ω , et $\geq h$ (resp. $= h$) p.p. sur un voisinage de K .

a) Il existe une classe de fonction u unique $\in U$ telle que

$$a_\omega(u, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in U ;$$

on peut choisir pour u un potentiel P_h^K dans ω , harmonique dans $\omega - K$.

b) Si de plus h est surharmonique ≥ 0 dans ω : P_h^K est $\leq h$ dans ω , $P_h^K = h$ p.p. sur K et partout sur \bar{K} , enfin $P_h^K \in V$.

a) U n'est pas vide car il contient le produit par h d'une fonction $\delta \in \mathcal{O}(\omega)$, égale à 1 sur un voisinage de K .

L'existence et l'unicité de u résultent du théorème rappelé ci-dessus ;

$$a_\omega(u, \varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi \in \mathcal{O}(\omega) ,$$

et

$$a_\omega(u, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}(\omega - K) ,$$

donc u est une sursolution dans ω et une solution dans $\omega - K$. Comme $u \in W_0^{1,2}(\omega)$, u est ≥ 0 p.p. dans ω (lemme 1) ; u est égale p.p. à une fonction surharmonique ≥ 0 dans ω (théorème 2 et corollaire b) de la proposition 10), et celle-ci est un potentiel P dans ω (corollaire de la proposition 5), harmonique dans $\omega - K$.

b) Si h est surharmonique ≥ 0 sur ω , il suffit de montrer que $P \in V$ et que $P \leq h$ p.p. dans ω ; il en résulte $P = h$ p.p. sur K et, d'après le corollaire b) de la proposition 10, $P \leq h$ dans ω et $P = h$ sur \bar{K} .

α) On suppose d'abord $h \in W^{1,2}(\omega)$. Alors $\xi = \inf(u, h) \in V$ et $a_\omega(u, \xi - u) \geq 0$. D'autre part $a_\omega(\xi, \xi - u) \leq 0$ car ξ est une sursolution dans ω et $\xi - u$ est une fonction ≤ 0 et $\in W_0^{1,2}(\omega)$.

On en déduit $a_\omega(\xi - u, \xi - u) \leq 0$ donc $= 0$ et $\xi = u$ p.p. dans ω , soit $u \leq h$ p.p. dans ω .

β) Dans le cas général, on considère une suite croissante d'ouverts $\omega_n \subset \bar{\omega}_n \subset \omega$, tels que $\omega_1 \supset K$ et $\omega = \bigcup_n \omega_n$. Si l'on désigne par U_n l'ensemble obtenu en remplaçant ω par ω_n dans la définition de U , par u_n la fonction unique $\in U_n$ telle que

$$a_{\omega_n}(u_n, v_n - u_n) \geq 0 \quad \forall v_n \in U_n ,$$

et par $\tilde{\varphi}_n$ le prolongement par 0 dans $\omega - \omega_n$ d'une fonction

$$\varphi_n \in W_0^{1,2}(\omega_n), \quad \text{on a } \tilde{u}_n \in V \text{ et}$$

$$a_\omega(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) \leq a_\omega(\tilde{u}_n, \tilde{v}) \quad \forall v \in U_p \text{ avec } p \leq n.$$

Pour montrer que \tilde{u}_n converge faiblement dans $W_0^{1,2}(\omega)$ vers u , on remarque d'abord que $\|\tilde{u}_n\|_{W_0^{1,2}(\omega)}$ est borné car

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_n\|_{W_0^{1,2}(\omega)}^2 &\leq \frac{1}{\gamma} a_\omega(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) \leq \frac{1}{\gamma} a_\omega(\tilde{u}_n, \tilde{u}_1) \leq \\ &\leq \frac{k}{\gamma} \|\tilde{u}_n\|_{W_0^{1,2}(\omega)} \|\tilde{u}_1\|_{W_0^{1,2}(\omega)}. \end{aligned}$$

Donc une suite partielle (encore notée \tilde{u}_n) converge faiblement dans $W_0^{1,2}(\omega)$ vers $\tilde{u} \in V$.

Soit $\alpha_\omega(u, v)$ la partie symétrique de la forme $a_\omega(u, v)$:

$$\alpha_\omega(u, v) \leq \sqrt{\alpha_\omega(u, u) \alpha_\omega(v, v)} \quad \forall u \text{ et } v \in W_0^{1,2}(\omega),$$

et

$$\alpha_\omega(\tilde{u}_n, w) \longrightarrow \alpha_\omega(\tilde{u}, w) \quad \forall w \in W_0^{1,2}(\omega).$$

Donc

$$\alpha_\omega(\tilde{u}, \tilde{u}) = \lim \alpha_\omega(\tilde{u}_n, \tilde{u}) \leq \sqrt{\alpha_\omega(\tilde{u}, \tilde{u})} \liminf \sqrt{\alpha_\omega(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n)},$$

et

$$\begin{aligned} a_\omega(\tilde{u}, \tilde{u}) = \alpha_\omega(\tilde{u}, \tilde{u}) &\leq \liminf a_\omega(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) \leq \liminf a_\omega(\tilde{u}_n, \tilde{v}) \\ &\quad \forall v \in \bigcup_p U_p. \end{aligned}$$

On en déduit

$$a_\omega(\tilde{u}, \tilde{u}) \leq \liminf a_\omega(\tilde{u}_n, \tilde{v}) = a_\omega(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall v \in \bigcup_p U_p,$$

en particulier $a_\omega(\tilde{u}, \tilde{u}) \leq a_\omega(\tilde{u}, w) \quad \forall w \in W_0^{1,2}(\omega)$, à support compact dans ω et $\geq h$ p.p. sur un voisinage de K , donc aussi $\forall w \in U$.

Il en résulte que $\tilde{u} = u$ et la suite \tilde{u}_n converge vers u faiblement dans $W_0^{1,2}(\omega)$, donc aussi fortement dans $L^2(\omega)$ ou encore p.p. pour une suite partielle. Alors $u_n \leq h$ p.p. dans ω_n entraîne $u \leq h$ p.p. dans ω .

COROLLAIRE. — La mesure positive $\mu = \text{LP}_h^K$ est portée par K , et même par ∂K si h est harmonique ≥ 0 dans ω .

Définition de la h -capacité d'un compact $K \subset \omega$.

Soient ω un ouvert relativement compact dans Ω et L -adapté, et h une fonction harmonique > 0 dans Ω . Par définition, la h -capacité d'un compact $K \subset \omega$ est $a_\omega(P_h^K, P_h^K)$.

C'est aussi $\int h \, d\mu$ où μ est la mesure positive LP_h^K : en effet, pour toute $\delta \in \mathcal{O}(\omega)$, $a_\omega(P_h^K, \delta) = \int \delta \, d\mu$. Soit maintenant

$$\varphi \in W_0^{1,2}(\omega),$$

à support compact dans ω , $\varphi = h$ p.p. sur un voisinage de K : les régularisées de φ appartiennent à $\mathcal{O}(\omega)$, tendent vers φ dans $W_0^{1,2}(\omega)$ et tendent vers h uniformément sur K ; comme μ est portée par K (et même par ∂K), on a $a_\omega(P_h^K, \varphi) = \int h \, d\mu$. Enfin, P_h^K étant limite dans $W_0^{1,2}(\omega)$ de telles φ , on a encore $a_\omega(P_h^K, P_h^K) = \int h \, d\mu$.

La notion de capacité va d'abord permettre de préciser la valeur de la fonction de Green en son pôle.

LEMME A ([14], théorème 3.10). — Soient K_1 et K_2 deux compacts $\subset \omega$, $K_1 \subset K_2$. On a

$$h\text{-cap}(K_1) \leq \left(1 + \frac{M}{\gamma}\right)^2 h\text{-cap}(K_2),$$

où

$$M = \sup \frac{\beta_\omega(u, v)}{\|u\|_{W_0^{1,2}(\omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\omega)}}, \quad \gamma = \inf \frac{\alpha_\omega(u, u)}{\|u\|_{W_0^{1,2}(\omega)}^2},$$

$\alpha_\omega(u, v)$ est la partie symétrique de $a_\omega(u, v)$ et

$$\beta_\omega(u, v) = a_\omega(u, v) - \alpha_\omega(u, v).$$

LEMME 6. — Soit K_n une suite décroissante de compacts $\subset \omega$: s'ils forment un système fondamental de voisinages d'un point $y \in \omega$, on a $\lim h\text{-cap.}(K_n) = 0$.

D'après le lemme A, leurs h -capacités sont majorées ; alors les normes des $P_h^{K_n}$ dans $W_0^{1,2}(\omega)$ le sont aussi ; par des extractions successives de suites partielles, on se ramène au cas où $P_h^{K_n}$ a une limite faible u dans $W_0^{1,2}(\omega)$, a pour limite forte u dans $L^2(\omega)$, a pour limite simple u p.p. dans ω , enfin (puisque $P_h^{K_n}$ est harmonique ≥ 0 sur $\omega - K_n$) a pour limite uniforme u sur tout compact $C \subset \omega - \{y\}$. De tout cela résulte : $u \in W_0^{1,2}(\omega)$, u harmonique ≥ 0 sur $\omega - \{y\}$; si le compact $Y \subset \omega$ est voisinage de y , on peut trouver un potentiel majorant, pour n assez grand, tous les $P_h^{K_n}$ sur ∂Y , donc sur $\omega - Y$, donc majorant u sur $\omega - Y$; si u était > 0 sur $\omega - \{y\}$, u serait prolongeable à ω en un potentiel de support y (proposition 4), en contradiction avec $u \in W_0^{1,2}(\omega)$ (proposition 8).

Ainsi la suite $P_h^{K_n}$ a pour limite faible 0 dans $W_0^{1,2}(\omega)$; en posant $\mu_n = LP_h^{K_n}$, on a,

$$\forall \delta \in \mathcal{O}(\omega), \int \delta d\mu_n = a_\omega(P_h^{K_n}, \delta) \longrightarrow 0 ;$$

μ_n étant une mesure positive portée par K_n , on a aussi

$$\int h d\mu_n \longrightarrow 0 .$$

COROLLAIRE. — Dans ω relativement compact dans Ω , connexe et L -adapté (donc aussi L^* -adapté), les fonctions de Green g_y et g_y^* valent $+\infty$ en leur pôle.

Avec les mêmes notations, on a (lemme 5, corollaire de la proposition 7 et propositions 10 et 11)

$$h(y) = P_h^{K_n}(y) = \int g_y^* d\mu_n \leq \left(\sup_{\partial K_n} g_y^* \right) \int d\mu_n ;$$

$$\int d\mu_n \longrightarrow 0 \text{ entraîne } \sup_{\partial K_n} g_y^* \longrightarrow +\infty, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\sup_{\partial \beta(y, \rho)} g_y^* \longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad \rho \longrightarrow 0 ;$$

alors l'inégalité $\sup_{\partial \beta(y, \rho)} g_y^* \leq C \inf_{\partial \beta(y, \rho)} g_y^*$ (lemme 2) entraîne

$$\lim_{x \rightarrow y} g_y^*(x) = +\infty .$$

9. Comparaison des fonctions de Green relatives à deux opérateurs L et \bar{L} . Applications.

On utilise deux lemmes dont le 1^{er} est dû à G. Stampacchia.

LEMME B ([14], th. 3.11)⁽⁷⁾. — Soient L et \bar{L} deux opérateurs dans Ω satisfaisant aux hypothèses énoncées au début, ω un ouvert relativement compact dans Ω , L -adapté et \bar{L} -adapté, h et \bar{h} deux fonctions > 0 respectivement L -harmonique et \bar{L} -harmonique dans Ω . Alors il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout compact $K \subset \omega$:

$$\frac{1}{k} \bar{h} - \text{cap.}(K) \leq h - \text{cap.}(K) \leq k \bar{h} - \text{cap.}(K) .$$

LEMME 7. — Soient h une fonction L -harmonique > 0 sur Ω et ω un ouvert relativement compact dans Ω et L -adapté. Si la composante connexe $\ni y$ de l'ensemble $\{x \in \omega, g_y^*(x) \geq \lambda h(x)\}$ est compacte (ce qui a lieu pour λ assez grand), sa h -capacité est $\frac{h(y)}{\lambda}$.

La composante connexe considérée, soit K , est fermée dans ω , donc compacte dès que $\lambda >$ la borne supérieure de $\frac{g_y^*}{h}$ sur la frontière d'une boule fermée de centre y , $\subset \omega$; $y \in \overset{\circ}{K}$ donc (lemme 5) en posant $\mu = LP_h^K$:

$$h(y) = P_h^K(y) = \int g_x(y) d\mu(x) = \int g_y^*(x) d\mu(x) = \lambda h - \text{cap.}(K) .$$

PROPOSITION 12. — Soient L et \bar{L} deux opérateurs dans Ω satisfaisant aux hypothèses énoncées au début, ω un ouvert relativement compact dans Ω , connexe, L -adapté et \bar{L} -adapté.

Etant donné un compact $K \subset \omega$, il existe deux constantes k_1 et $k_2 > 0$ telles que

$$k_1 \bar{g}_y^\omega(x) \leq g_y^\omega(x) \leq k_2 \bar{g}_y^\omega(x) \quad \forall x \quad \text{et} \quad y \in K . \quad (1)$$

⁽⁷⁾ A ceci près que la const. 1 est remplacée par les fonctions h et \bar{h} , avec h/\bar{h} compris, dans ω , entre 2 nombres > 0 .

Soient \bar{h}, h^* et \bar{h}^* des fonctions > 0 dans Ω , respectivement L, \bar{L}, L^* et \bar{L}^* -harmoniques. Pour chaque $y \in K$ et $\bar{\beta}(y, r) \subset \omega$, soient $M(r) = \sup_{\partial\beta(y, r)} g_y$ et $m(r) = \inf_{\partial\beta(y, r)} g_y$. On a

$$g_y(x) \geq m(r) \frac{h(x)}{\sup_{\omega} h} \quad \forall x \in \partial\beta(y, r),$$

donc aussi $\forall x \in \bar{\beta}(y, r)$, et a fortiori

$$g_y(x) \geq \lambda(r) h^*(x) \quad \forall x \in \bar{\beta}(y, r),$$

avec

$$\lambda(r) = m(r) \frac{\inf_{\omega} h}{\sup_{\omega} h} \frac{1}{\sup_{\omega} h^*}.$$

Donc, si Y est la composante connexe $\ni y$ de l'ensemble

$$\{x \in \omega, g_y(x) \geq \lambda(r) h^*(x)\},$$

on a, pour $r \leq r_0$ ne dépendant que de K (lemmes A et 7) :

$$\frac{1}{k} h^* - \text{cap. } \bar{\beta}(y, r) \leq h^* - \text{cap. } (Y) = \frac{h^*(y)}{\lambda(r)}, \quad k = \left(1 + \frac{M}{\gamma}\right)^2.$$

De même

$$g_y(x) \leq M(r) \leq M(r) \frac{h^*(x)}{\inf_{\omega} h^*} \quad \forall x \in \partial\beta(y, r);$$

donc pour $r \leq r_0$:

$$k h^* - \text{cap. } \bar{\beta}(y, r) \geq h^*(y) \frac{\inf_{\omega} h^*}{M(r)}.$$

Comme il existe une constante C , indépendante de r et de y , telle que $M(r) \leq C m(r)$ (lemme 2), on a finalement

$$\frac{C^{\text{ste}}}{h^* - \text{cap. } \bar{\beta}(y, r)} \leq g_y(x) \leq \frac{C^{\text{ste}}}{h^* - \text{cap. } \bar{\beta}(y, r)} \quad \text{pour } |x - y| = r \leq r_0$$

et $\forall y \in K$.

Une double inégalité analogue pour \bar{g}_y et le lemme B entraînent bien

$$k_1 \leq \frac{g_y(x)}{\bar{g}_y(x)} \leq k_2 \quad \forall y \in K \quad \text{et} \quad x \text{ voisin de } y,$$

donc aussi $\forall x$ et $y \in K$.

COROLLAIRE. — Soit ω un ouvert relativement compact dans Ω , connexe et L -adapté, et K un compact $\subset \omega$. Alors

$$\frac{k_1}{|x - y|^{m-2}} \leq g_y^\omega(x) \leq \frac{k_2}{|x - y|^{m-2}} \quad \forall x \quad \text{et} \quad y \in K. \quad (2)$$

Conséquences de la double inégalité (2).

1) Vérification de l'axiome D. Existence d'une base des ouverts formée de domaines complètement déterminants (c.d.)

L'axiome D (de domination) est le suivant : si P est un potentiel localement borné dans Ω , toute fonction surharmonique ≥ 0 dans Ω , $\geq P$ sur son support⁽⁸⁾, est $\geq P$ dans Ω .

Il est équivalent à l'axiome de régularité D' ([8], th. 25.1) : pour tout potentiel P localement borné dans Ω , si la restriction de P à son support est finie continue, alors P est fini continu dans Ω . Pour vérifier cet axiome, il suffit de le vérifier localement.

Enfin, l'axiome D' est vérifié si les potentiels satisfont au principe du maximum λ -dilaté sur tout compact ([5], corollaire des propositions 1 et 2) : à tout compact K , on peut associer $\lambda(K) \geq 1$ tel que $\sup_{x \in K} P(x) \leq \lambda(K) \sup_{x \in S} P(x)$ pour tout potentiel P dans Ω dont le support S est $\subset K$. La vérification de ce dernier principe résulte de la double inégalité (2).

D'autre part, une boule ouverte β en c.d. si $\bar{\beta}$ est contenu dans un ouvert L -adapté (même raisonnement que dans [8], prop. 35.2).

2) Comparaison des notions relatives à L d'ensemble polaire, d'ensemble effilé, de point-frontière régulier d'un ouvert, avec les mêmes notions relatives à Δ .

THEOREME 3. — Les ensembles L -polaires, L -effilés et les points L -réguliers pour $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ ne dépendent pas de L et par suite coïncident respectivement avec les ensembles polaires, effilés et les

⁽⁸⁾ Le support de P est le plus fermé hors duquel P est harmonique.

points réguliers pour ω au sens classique, c'est-à-dire pour l'opérateur Δ ⁽⁹⁾.

Pour la démonstration, il suffit de rapprocher la double inégalité (2) des rappels suivants :

Un ensemble $E \subset \Omega$ est polaire s'il existe un potentiel dans Ω , valant $+\infty$ sur E . Un ensemble est polaire s'il est localement polaire ([2], th. 25), ou encore si son intersection avec chaque compact est polaire (car une réunion dénombrable d'ensembles polaires est polaire).

Un ensemble $E \subset \Omega$ est effilé : 1) au point $x_0 \in \Omega - E$ si $x_0 \notin \bar{E}$ ou s'il existe une fonction v surharmonique dans un voisinage de x_0 telle que $\liminf_{\substack{x \in E \\ x \rightarrow x_0}} v(x) > v(x_0)$; 2) au point $x_0 \in E$ si $E - \{x_0\}$

est effilé en x_0 . Pour que E soit effilé en $x_0 \in \bar{E} - E$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction v surharmonique > 0 dans un voisinage de x_0 , finie en x_0 , et telle que $\lim_{\substack{x \in E \\ x \rightarrow x_0}} v(x) = +\infty$ ([8], th. 14.1).

Un point-frontière x_0 d'un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ est régulier pour ω si, pour toute fonction θ finie continue sur $\partial\omega$:

$$H_\theta^\omega(x) \longrightarrow \theta(x_0)$$

quand $x \in \omega$ tend vers x_0 . L'axiome D étant vérifié, les points $\in \partial\omega$ réguliers pour ω sont exactement les points $\in \partial\omega$ où $\Omega - \omega$ n'est pas effilé ([2], th. 32).

3) Quelques propriétés des fonctions surharmoniques.

LEMME 8. — Soit (ρ_n) une suite régularisante formée de fonctions $\rho_n(x) \geq 0$, indéfiniment différentiables, dépendant seulement de $|x|$, nulles pour $|x| \geq \frac{1}{n}$ et telles que $\int \rho_n(x) dx = 1$.

1) Pour toute fonction u surharmonique dans $\Omega : u * \rho_n \longrightarrow u$ en tout point $\in \Omega$.

⁽⁹⁾ Le résultat concernant les points L-réguliers a déjà été obtenu par Stampacchia

[14], mais en supposant $c - \sum_i \frac{\partial d_i}{\partial x_i} \geq C_1 > 0$ et $c - \sum_i \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq C_2 > 0$.

2) Si u est une fonction surharmonique > 0 dans Ω , pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante k telle que $u * \rho_n \leq k \cdot u$ sur K , pour n assez grand.

Cf. la démonstration du théorème 5 de [11] : on se ramène au potentiel d'une mesure à support compact dans un ouvert L -adapté.

PROPOSITION 13. — *Toute fonction surharmonique dans Ω est s.c.i. essentielle, c'est-à-dire égale à sa $\lim \inf$ essentielle en tout point $\in \Omega$.*

Cf. la démonstration du théorème 6 de [11].

LEMME 9. — *Soit ω un ouvert relativement compact dans Ω , connexe et L -adapté.*

a) *Le potentiel dans ω d'une mesure définie par une densité continue ≥ 0 , à support compact $\subset \omega$, est une fonction continue bornée $\in W_0^{1,2}(\omega)$.*

b) *Soit v le potentiel dans ω d'une mesure $\mu \geq 0$ à support compact $\subset \omega$: la suite régularisante (ρ_n) étant choisie comme dans le lemme 8, si v_n est le potentiel dans ω de la mesure $u * \rho_n$, il existe une constante k telle que $v_n \leq k v$ pour n assez grand.*

c) *Le potentiel dans ω d'une mesure ≥ 0 non nulle, à support compact polaire $\subset \omega$, est d'énergie infinie.*

a) Soit $u = \int g_y^\omega \rho(y) dy$, $\rho \in \mathcal{K}^+(\omega)$: la continuité de u résulte d'une partition classique de $K = \text{support de } \rho$; si $M = \sup_K u$, $M - u$ est surharmonique sur $\omega - K$, $\geq -$ un potentiel dans ω , a une limite ≥ 0 en tout point frontière de K , donc $u \leq M$ sur ω ; enfin, la mesure $\rho(y) dy \in W^{-1,2}(\omega)$, donc (propositions 7 et 10) $u \in W_0^{1,2}(\omega)$.

b) Cf. le lemme 8 de [11].

c) Cf. [4, p. 93] pour le cas classique.

10. Propriétés des fonctions surharmoniques localement bornées.

On procède comme dans l'article [11], chapitre II.

La proposition 2 ci-dessus s'étend immédiatement aux sur-solutions localement bornées :

LEMME 10. — *Etant donné h harmonique > 0 sur Ω , il existe une constante $C > 0$ dépendant de τ , M et de majorants de*

$$\|b_i\|_{L^r(\Omega)}, \|d_i\|_{L^r(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|c\|_{L^{r/2}(\Omega)},$$

telle que, pour toute sursolution locale u dans Ω , localement essentiellement bornée supérieurement dans Ω :

$$\int_K |\text{grad}(u - \lambda h)|^2 dx \leq \frac{C}{\sigma^2} \int_{K_\sigma} (u - \lambda h)^2 dx,$$

où K est un compact $\subset \Omega$, σ un nombre > 0 et $<$ la distance de K à $\partial\Omega$, K_σ l'ensemble des points $\in \Omega$ dont la distance à K est $\leq \sigma$, et $u \leq \lambda h$ p.p. sur un voisinage de K_σ .

COROLLAIRES.

1) *La limite d'une suite de fonctions surharmoniques $\in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ et localement bornées dans leur ensemble est dans $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$.*

2) *Si \mathfrak{F} est une famille de fonctions surharmoniques $\in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ et localement bornées dans leur ensemble,*

$$\inf_{u \in \mathfrak{F}} u \quad \text{et} \quad \widehat{\inf_{u \in \mathfrak{F}} u} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega).$$

3) *La T-limite d'une suite de fonctions $\in S^+(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ et localement bornées dans leur ensemble est dans $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega) \cap S^+(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions surharmoniques ≥ 0 sur Ω ; la topologie T est définie dans [8]).*

Pour la démonstration, cf. le lemme 7 et la proposition 6 de [11].

PROPOSITION 14. — *Toute fonction surharmonique localement bornée dans Ω appartient à $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$.*

On se ramène au cas où la fonction ν est le potentiel, localement borné, dans un ouvert ω connexe et L -adapté, d'une mesure μ à support compact dans ω .

μ est limite vague de ses régularisées μ_n , à l'aide d'une suite régularisante satisfaisant aux hypothèses du lemme 8 ; comme les mesures μ_n sont portées par un même compact $C \subset \omega$ pour n assez grand, ν est T -limite des potentiels ν_n dans ω des mesures μ_n ([8], proposition 19.3). $\nu_n \in W_0^{1,2}(\omega)$ et $\nu_n \leq k\nu$ pour n assez grand (lemme 9) ; il suffit alors d'appliquer le corollaire 3 ci-dessus.

11. Principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques et les sous-solutions locales dans Ω .

Ce principe du maximum est d'abord démontré pour une fonction sous-harmonique bornée supérieurement, en utilisant des résultats de Deny-Lions [7], puis pour une sous-solution locale à l'aide du lemme 11 ci-dessous, enfin pour une fonction sous-harmonique grâce à la proposition 14.

Rappels sur les fonctions quasi-continues.

Une fonction f , définie q.p. dans Ω (c'est-à-dire sauf sur un ensemble polaire), est quasi-continue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert ω de capacité newtonienne $< \varepsilon$, tel que la restriction de f à $\Omega - \omega$ soit finie continue.

On utilise dans la suite les résultats suivants ([6] et [7]) :

1) Toute fonction $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ est p.p. égale à une fonction \hat{f} quasi-continue dans Ω , déterminée à un ensemble polaire près ; si $f \leq M$ p.p. dans Ω , \hat{f} peut être choisie $\leq M$ partout dans Ω .

2) Si en outre $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$, le prolongement de \hat{f} par 0 hors de Ω donne une fonction quasi-continue dans \mathbb{R}^m ([7], chap. II, th. 3.1).

3) Toute fonction quasi-continue est q.p. finement continue ([6], chap. IV, lemme 2). Par suite, si $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ est q.p. finement continue, $f = \hat{f}$ q.p. (car un voisinage fin d'un point ne peut être

de mesure nulle), donc f est quasi-continue ; en particulier, toute fonction L-surharmonique $\in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ est L-finement continue, donc aussi (théorème 3) finement continue, enfin quasi-continue.

4) Conséquence de 2) et 3) : une fonction quasi-continue $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ a pour limite fine 0 en quasi tout point $\in \partial\Omega$ (mis à part les points où Ω est effilé).

LEMME 11. — Soit K_0 un compact $\subset \Omega$ tel que $\omega = \Omega - K_0$ soit L-adapté, $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\omega)$ et φ une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ majorant u p.p. sur ω , $\varphi \geq 0$.

Alors, étant donné un compact $K \subset \Omega$, voisinage de K_0 , il existe une suite croissante X_n de compacts $\subset \Omega - K$ dont la réunion est $\Omega - K$ et telle que la suite $P_u^{X_n}$, définie dans ω par le lemme 5, ait à la fois une limite faible dans $W_0^{1,2}(\omega)$ et une limite p.p. dans ω .

Si en outre $u \in S^+(\omega)$, cette limite faible est u sur $\Omega - K$, et $u|_{\Omega - K} \in W^{1,2}(\Omega - K) \cap L^{2^*}(\Omega - K)$.

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 0$ sur un voisinage de K_0 et $\chi = 1$ sur $\Omega - K$; $\varphi\chi|_\omega \in W_0^{1,2}(\omega)$ car si φ est limite dans $W^{1,2}(\Omega)$ d'une suite $\varphi_n \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\varphi\chi$ est limite dans $W^{1,2}(\omega)$ de $\varphi_n\chi \in \mathcal{O}(\omega)$.

Soit maintenant X compact $\subset \Omega - K$: parmi les fonctions $\in W_0^{1,2}(\omega)$, à support compact dans ω et $\geq u$ p.p. sur un voisinage de X , figurent les $\sup(\varphi_n\chi, \delta\varphi\chi)$, où $\delta \in \mathcal{O}(\Omega)$, $0 \leq \delta \leq 1$, $\delta = 1$ sur un voisinage de X ; $\sup(\varphi_n\chi, \delta\varphi\chi) \longrightarrow \varphi\chi$ dans $W_0^{1,2}(\omega)$, donc $\varphi\chi \in$ l'ensemble U du lemme 5, en prenant $h = u$.

Par suite (lemme 5) : $a_\omega(P_u^X \cdot P_u^X) \leq a_\omega(P_u^X, \varphi\chi)$ d'où, en minuant le 1^{er} membre et majorant le 2^{ème} :

$$\|P_u^X\|_{W_0^{1,2}(\omega)} \leq C^{\text{ste}} \|\varphi\chi\|_{W_0^{1,2}(\omega)} = C^{\text{ste}}.$$

Alors il existe une suite croissante de compacts X_n , de réunion $\Omega - K$, telle que la suite $P_u^{X_n}$ ait, d'une part une limite faible dans $W_0^{1,2}(\omega)$, d'autre part une limite p.p. dans ω .

Supposons en outre $u \in S^+(\omega)$. $P_u^{X_n} = u$ p.p. sur X_n (lemme 5) ; donc la limite faible est u sur $\Omega - K$ et $u|_{\Omega - K} \in W^{1,2}(\Omega - K)$. Enfin la limite faible dans $W_0^{1,2}(\omega)$ appartient à $L^{2^*}(\omega)$, et

$$u|_{\Omega - K} \in L^{2^*}(\Omega - K).$$

THEOREME 4. — Une fonction sousharmonique (ou une sous-solution locale) u dans Ω , majorée p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ par une fonction $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, est ≤ 0 dans Ω (ou p.p. dans Ω).

1) u est sousharmonique bornée supérieurement dans Ω .

$\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ est égal p.p. dans Ω à une fonction quasi-continue $\hat{\varphi} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, et $u \leq \hat{\varphi}$ p.p. sur un voisinage de $\partial\Omega$.

u est L-finement continue dans Ω , donc aussi finement continue (théorème 3) ; on en déduit $u \leq \hat{\varphi}$ en tout point de ce voisinage où $\hat{\varphi}$ est finement continue car le complémentaire d'un ensemble E effilé en x_0 n'est jamais de mesure nulle (cela résulte de $\int_E d\sigma \longrightarrow 0$ avec r, σ moyenne sur $\partial\beta(x_0, r)$).

On a donc $u \leq \hat{\varphi}$ q - p au voisinage de $\partial\Omega$, d'où

$$\limsup \text{ fine } u \leq \limsup \text{ fine } \hat{\varphi} \text{ en tout point } \in \partial\Omega$$

où Ω n'est pas effilé. Comme $\hat{\varphi}$ a pour $\lim \text{ fine } 0 \text{ q} - \text{p}$ sur $\partial\Omega$ (mis à part les points où Ω est effilé), $\limsup \text{ fine } u \leq 0 \text{ q} - \text{p}$ sur $\partial\Omega$ (dans les mêmes conditions). Un théorème de M. Brelot ([3], th. 5) montre alors que u est ≤ 0 dans Ω .

2) u est une sous-solution locale dans Ω .

On applique le lemme 11 à la fonction $u|_{\omega}$, les compacts K_0 et K satisfaisant aux hypothèses de ce lemme : il existe une suite de compacts $X_n \subset \Omega - K$, de réunion $\Omega - K$, telle que $P_u^{X_n}$, définie dans $\omega = \Omega - K_0$, ait à la fois une limite faible dans $W_0^{1,2}(\omega)$ et une limite p.p. dans ω . Cette limite est une sursolution ≥ 0 dans ω , donc égale p.p. à un potentiel p dans ω (théorème 2 et corollaire de la proposition 5). En outre, $P_u^{X_n} \geq u$ p.p. sur X_n entraîne $p \geq u$ p.p. dans $\Omega - K$.

Soit d'autre part $M \geq 0$ et $\geq \sup_K u$: $u - M$ est encore une sous-solution locale dans Ω , et $p \geq u - M$ p.p. dans ω . Si u est choisie sousharmonique dans ω , la fonction surharmonique $p + M - u$ est ≥ 0 p.p., donc partout, dans ω .

Mais, p étant un potentiel dans ω et $u - M$ sousharmonique, $u - M \leq p$ dans ω entraîne $u \leq M$ dans cet ouvert ; u est donc borné supérieurement dans Ω et la partie 1) donne $u \leq 0$.

3) u est sousharmonique dans Ω .

u^+ est sousharmonique et localement bornée ; d'après la proposition 14, elle appartient à $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$. C'est donc une sous-solution locale ; comme $u^+ \leq \varphi^+$ p.p. au voisinage de $\partial\Omega$, la partie 2) donne $u^+ \leq 0$ dans Ω .

COROLLAIRE 1. — Une fonction sousharmonique (resp. une sous-solution locale) dans Ω , majorée p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ par [une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$] + une C^{ste} $k \geq 0$, est $\leq k$ (p.p.) dans Ω .

COROLLAIRE 2. — Une sursolution $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ est égale p.p. à un potentiel dans Ω .

Elle est égale p.p. à une fonction surharmonique (théorème 2), ≥ 0 (théorème 4), dont toute minorante harmonique est ≤ 0 (théorème 4).

Pour les solutions $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, les conséquences sont très nombreuses :

COROLLAIRE 3. — a) Une solution $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ est 0 p.p. dans Ω ; l'opérateur L est donc un isomorphisme de $W_0^{1,2}(\Omega)$ sur $W^{-1,2}(\Omega)$ quel que soit Ω (cf. rappel 4), avec la conséquence suivante : si $T \in W^{-1,p}(\Omega)$ avec $p > m$, la solution $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ de l'équation $Lu = T$ dans Ω satisfait à

$$|u(x)| \leq k(\Omega) \|T\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$$

pour presque tout $x \in \Omega$ (rappel 7).

b) En particulier, $\forall g \in W^{1,2}(\tilde{\Omega})$, $\tilde{\Omega}$ ouvert $\supset \bar{\Omega}^{(10)}$, l'équation $Lu = 0$ admet une solution unique $u \in W^{1,2}(\Omega)$ telle que

$$u - g \in W_0^{1,2}(\Omega) :$$

on notera L_g^Ω cette solution choisie continue.

D'après le corollaire 1 ci-dessus : $g \leq$ une constante ≥ 0 p.p. dans Ω entraîne $L_g^\Omega \leq$ la même constante. L'application $g \mapsto L_g^\Omega$ est donc linéaire et croissante ; en outre, elle est continue de $W^{1,2}(\tilde{\Omega})$ dans $W^{1,2}(\Omega)$ d'après la démonstration du lemme 3, a) où l'on

(¹⁰) Plus généralement, $\forall g \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{2^*}(\Omega)$.

prend pour C la norme de L^{-1} comme opérateur de $W^{-1,2}(\Omega)$ sur $W_0^{1,2}(\Omega)$. Enfin, si $g_n \longrightarrow g$ dans $W^{1,2}(\tilde{\Omega})$, $L_{g_n}^\Omega \longrightarrow L_g^{\Omega'} \longrightarrow L_g^{\Omega'}$ dans $W^{1,2}(\Omega)$, et uniformément sur tout compact $\subset \Omega$.

Pour ce dernier résultat, on se ramène au cas g_n et $g \geq 0$ p.p.

c) *L'existence et les propriétés de la solution faible dans Ω de $Lu = \mu$ s'annulant sur $\partial\Omega$ (proposition 6, lemme 4 et proposition 7) subsistent dans un ouvert Ω quelconque, μ étant toujours une mesure bornée sur Ω .*

Seul changement à signaler : à la fin de la preuve de la proposition 6, $\varphi \geq 0$ pour μ et $\psi \geq 0$ résulte, non plus du lemme 1, mais du théorème 4.

d) *En particulier, la solution faible dans Ω de $Lu = \varepsilon_y$ s'annulant sur $\partial\Omega$, est encore, dans tout ouvert Ω connexe, la fonction de Green de pôle y , dont toutes les propriétés subsistent (propositions 8 à 11).*

Seul changement à signaler : dans la preuve de la proposition 8, u_n est un potentiel dans Ω d'après le corollaire 2 ci-dessus, au lieu du corollaire de la proposition 5.

e) Le théorème 2 se complète comme suit (avec les mêmes notations) : *Ω étant connexe, dans tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, on a $u =$ une fonction harmonique dans ω + le potentiel dans Ω de la mesure $\mu\chi_\omega$; $\mu = Lu$ est donc la mesure de F. Riesz associée à u (cf. [11], proposition 4).*

COROLLAIRE 4. — *Si u est surharmonique dans Ω et*

$$\in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{2^*}(\Omega),$$

alors u admet une p.g.m.h. dans Ω égale à L_u^Ω . En particulier, un potentiel dans Ω , $\in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{2^}(\Omega)$, est dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

L_u^Ω est une minorante harmonique de u car $u - L_u^\Omega = \varphi$, surharmonique dans Ω et $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est ≥ 0 ; en outre, si h est une minorante harmonique de u dans Ω , $h - L_u^\Omega = h - u + \varphi \leq \varphi$, est ≤ 0 dans Ω .

12. Comparaison des solutions du problème de Dirichlet au sens variationnel et au sens de Perron-Wiener-Brelot.

Soit $g \in W^{1,2}(\tilde{\Omega})$, avec $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$. Afin de définir H_g^Ω , on utilise de nouveau les résultats de Deny-Lions, et le lemme suivant.

LEMME 12. — *Toute fonction g quasi continue dans Ω est égale $q - p$ à une fonction borélienne dans Ω .*

Par hypothèse, pour chaque entier $n > 0$, il existe un ouvert $\omega_n \subset \Omega$, de capacité $< \frac{1}{n}$, tel que la restriction de g à $\Omega - \omega_n$ soit continue ; on peut supposer les ω_n décroissants car, si les restrictions de g aux $\Omega - \omega_n$ sont continues, il en est de même de la restriction de g à $\Omega - (\omega_1 \cap \omega_2 \cap \dots \cap \omega_n)$.

Supposons $g \geq 0$ et soit $g_n = g \chi_{\omega_n}$. (g_n) est une suite croissante de fonctions s.c.s., et $g = \lim g_n$ $q - p$ dans Ω .

Définition de H_g^Ω pour $g \in W^{1,2}(\tilde{\Omega})$.

Toute fonction $g \in W^{1,2}(\tilde{\Omega})$ est p.p. égale à une fonction quasi-continue dans $\tilde{\Omega}$, déterminée à un ensemble polaire près, et celle-ci est $q - p$ égale à une fonction \tilde{g} borélienne dans $\tilde{\Omega}$.

Rappelons que, pour f donnée sur $\partial\Omega$, \bar{H}_f^Ω est l'enveloppe inférieure des surfonctions, c'est-à-dire des fonctions u surharmoniques bornées inférieurement dans Ω telles que $\liminf_{\substack{x \in \Omega \\ x \rightarrow y}} u(x) \geq f(y) \forall y \in \partial\Omega$,

cette dernière condition pouvant être remplacée par

$$\liminf_{\substack{x \in \Omega \\ x \rightarrow y}} u(x) \geq f(y) \quad \forall y \in \partial\Omega$$

où Ω n'est pas effilé ([1] et [3]), et même $\forall y \in \partial\Omega$ - un ensemble négligeable pour la mesure harmonique de Ω , donc en particulier pour quasi tout $y \in \partial\Omega$ où Ω n'est pas effilé. \bar{H}_f^Ω ne change pas si l'on modifie f sur une partie polaire de $\partial\Omega$; enfin $\underline{H}_f^\Omega = -\bar{H}_{-f}^\Omega$.

Ainsi \bar{H}_g^Ω et \underline{H}_g^Ω sont parfaitement déterminées par la donnée de g et peuvent être notées \bar{H}_g^Ω et \underline{H}_g^Ω ; si elles sont égales, c'est-

à-dire $\tilde{g}|_{\partial\Omega}$ résolutive, on dira que g est résolutive dans Ω et on emploiera la notation H_g^Ω . Il en est ainsi en particulier si g est essentiellement bornée, car alors \tilde{g} peut être choisie bornée.

Remarque. — Si $g \in W^{1,2}(\tilde{\Omega})$ est quasi-continue dans $\tilde{\Omega}$ pour un ouvert $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$, H_g^Ω est le même au sens ci-dessus et au sens de Perron-Wiener-Brelot.

THEOREME 5. — *Toute fonction $g \in W^{1,2}(\tilde{\Omega})$ est résolutive dans tout ouvert connexe $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$, et la solution H_g^Ω au sens ci-dessus est égale à la solution L_g^Ω de $Lu = 0$ dans Ω telle que*

$$g - L_g^\Omega \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

On suppose d'abord g essentiellement bornée inférieurement dans Ω . $\tilde{g} - L_g^\Omega$ est quasi-continue dans Ω et $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ donc tend finement vers 0 $q-p$ sur $\partial\Omega$. Comme \tilde{g} est finement continue $q-p$ dans $\tilde{\Omega}$, $\lim_{\substack{x \in \Omega \\ x \rightarrow y}} L_g^\Omega(x) = \tilde{g}(y) \quad \forall y \in \partial\Omega$ où Ω n'est pas

effilé, sauf sur un ensemble polaire. Grâce à l'hypothèse sur g , L_g^Ω est bornée inférieurement dans Ω (corollaire 3,b) du théorème 4) ; c'est donc une surfonction pour la donnée \tilde{g} et $L_g^\Omega \geq \bar{H}_g^\Omega$ dans Ω .

Dans le cas général, soit $g \geq 0$ et $g_n = \inf(g, n)$; g_n est essentiellement bornée, donc $H_{g_n}^\Omega = L_{g_n}^\Omega$. La suite g_n étant croissante, $H_{g_n}^\Omega$ tend vers H_g^Ω si g est résolutive, $+\infty$ sinon ; il suffit alors de montrer que $L_{g_n}^\Omega$ tend vers L_g^Ω dans $W^{1,2}(\Omega)$, ou encore que g_n tend vers g dans $W^{1,2}(\tilde{\Omega})$ (corollaire 3,b) du théorème 4) ; cela résulte de $\text{grad } g_n \longrightarrow \text{grad } g$ en tout point où g est fini, c'est-à-dire p.p., joint à $|\text{grad } g_n| \leq |\text{grad } g|$.

COROLLAIRE. — *Soit $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et φ_* son prolongement par 0 hors de Ω . Pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$: $L_\varphi^\omega = H_\varphi^\omega$.*

En effet, $\varphi_* \in W_0^{1,2}(R^m)$.

13. Les fonctions $\in S^+$ majorées par une fonction
 $\in W_0^{1,2}$ ou $W_{loc}^{1,2}$.

Balayée d'une fonction $\in S^+ \cap W_{loc}^{1,2}$ sur un compact.

Rappelons que pour toute $v \in S^+(\Omega)$ et tout ensemble $E \subset \Omega$, R_v^E est par définition l'enveloppe inférieure des fonctions $\in S^+(\Omega)$ majorant v sur E ; la balayée de v sur E , \hat{R}_v^E , est la régularisée s.c.i. de R_v^E . L'axiome D étant vérifié, $\hat{R}_v^E = R_v^E q - p$ dans Ω . Enfin, si K est un compact $\subset \Omega$, \hat{R}_v^K est, dans $\omega = \Omega - K$, la solution H_v^ω du problème de Dirichlet au sens de Brelot, pour la donnée v prolongement de v par 0 hors de Ω .

THEOREME 6. — *La balayée dans Ω d'une fonction*

$$v \in S^+(\Omega) \cap W_{loc}^{1,2}(\Omega)$$

sur un compact $K \subset \Omega$ appartient à $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Soit $\delta \in \mathcal{O}(\Omega)$ et égal à 1 sur un voisinage de K , et soit $\varphi = v\delta$. $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$; d'autre part, v est quasi-continue dans Ω , donc aussi φ , et φ est quasi-continue dans R^m . Par suite, la solution H_φ^ω du problème de Dirichlet au sens de Brelot est égale à L_φ^ω dans $\omega = \Omega - K$ (cf. la remarque qui suit la définition de H_g^Ω et le corollaire du théorème 5), et \hat{R}_v^K est égal $q - p$ à la fonction valant φ sur K et L_φ^ω sur ω . Comme $W_0^{1,2}(\Omega)$ contient φ et la fonction valant 0 sur K et $L_\varphi^\omega - \varphi$ sur ω , il contient aussi \hat{R}_v^K .

Remarque. — Soit ω L-adapté, K un compact $\subset \omega$ et

$$v \in S^+(\omega) \cap W_{loc}^{1,2}(\omega);$$

le potentiel P_v^K défini au lemme 5 est la balayée de v sur K .

En effet, P_v^K est limite dans $W_0^{1,2}(\omega)$ d'une suite de fonctions $\in W_0^{1,2}(\omega)$, à support compact, égales à v sur un voisinage de K , donc (φ étant choisie comme dans la démonstration précédente)

$P_v^K - \varphi$ est limite dans $W_0^{1,2}(\omega)$ d'une suite de fonctions $\in \mathcal{O}(\omega - K)$,
 et $P_v^K = \begin{cases} v \text{ p.p. sur } K \\ L_{\varphi}^{\omega-K} \text{ sur } \omega - K \end{cases}$ coïncide avec $(\hat{R}_v^K)_\omega$ p.p. dans ω donc partout. *

COROLLAIRE 1. — *Le potentiel dans Ω d'une mesure ≥ 0 à support compact, s'il appartient à $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, appartient à $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

En effet, il vaut sa balayée sur un voisinage compact de son support.

COROLLAIRE 2. — *Le lemme 9 subsiste dans un ouvert Ω connexe quelconque.*

Preuve. — a) Soit $u = \int g_y^\Omega \rho(y) dy$, $\rho \in \mathcal{H}^+(\Omega)$: il suffit de traiter le cas où le support de ρ est contenu dans un ouvert ω connexe et L-adapté, relativement compact dans Ω . Alors, dans ω : $u =$ une fonction harmonique $+ \int g_y^\omega \rho(y) dy$, qui est continu et $\in W_0^{1,2}(\omega)$ (lemme 9,a) ; ainsi u est continu et $\in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, donc $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ (corollaire 1). Pour montrer que u est borné, même raisonnement que dans le lemme 9,a.

b) Soit $v = \int g_y^\Omega d\mu(y)$, $\mu \geq 0$ à support compact $\subset \Omega$, $\mu_n = \mu * \rho_n$

$$\text{et } v_n = \int g_y^\Omega d\mu_n(y) :$$

il suffit encore de traiter le cas où le support de μ est contenu dans un ouvert ω connexe et L-adapté, relativement compact dans Ω . Alors, dans ω :

$$v = \int g_y^\omega d\mu(y) + \int (g_y^\Omega - g_y^\omega) d\mu(y) ,$$

et de même pour v_n ; pour n assez grand :

$$\int g_y^\omega d\mu_n(y) \leq k \int g_y^\omega d\mu(y)$$

sur ω (lemme 9,b) et

$$\int (g_y^\Omega - g_y^\omega) d\mu_n(y) \leq k' \int (g_y^\Omega - g_y^\omega) d\mu(y)$$

sur un voisinage compact du support de μ (où l'intégrale du 1^{er} membre a pour limite uniforme celle du 2^{ème} membre). L'inégalité

$$\nu_n \leq \sup(k, k') \nu,$$

ainsi établie sur un voisinage compact du support de μ , s'étend à tout Ω .

Les fonctions $\in S^+$ majorées par une fonction $\in W_0^{1,2}$

THEOREME 7. — *Toute fonction $\nu \in S^+(\Omega)$, majorée p.p. dans Ω par $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, appartient à $W_0^{1,2}(\Omega)$, et*

$$\|\nu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C^{\text{ste}} \|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

la constante ne dépendant que de L et Ω .

On suppose d'abord $\nu \in S^+(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$.

Pour montrer que $\nu \in W_0^{1,2}(\Omega)$, il suffit ([9], lemme 3) de montrer qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\nu|_{\Omega-K} \in W^{1,2}(\Omega-K)$, ce qui résulte du lemme 11 appliqué à ν .

Démonstration de l'inégalité : ν est une sursolution $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varphi - \nu$ est ≥ 0 et $\in W_0^{1,2}(\Omega)$; on a donc $a_\Omega(\nu, \varphi - \nu) \geq 0$ ou

$$a_\Omega(\nu, \nu) \leq a_\Omega(\nu, \varphi) \leq \sigma \|\nu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

σ ne dépendant que de L et Ω .

D'autre part (cf. [14], bas de la page 200) :

$$\begin{aligned} a_\Omega(\nu, \nu) &\geq \tau \|\nu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - \sum_i \left[\|b_i\|_{L^m(\Omega)} + \right. \\ &\quad \left. + \|d_i\|_{L^m(\Omega)} \right] \|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega)} \|\nu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \|c\|_{L^{m/2}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 \\ &\geq \tau \|\nu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - \sigma_1 \|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|\nu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \sigma_2 \|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Finalement $x = \frac{\|\nu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}}{\|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}}$ vérifie $\tau x^2 - (\sigma + \sigma_1)x - \sigma_2 \leq 0$ d'où

$x \leq$ un nombre ne dépendant que de L et Ω .

Dans le cas général, $\nu_n = \inf(\nu, n) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ (proposition 14),

$v_n \leq \varphi$ p.p. dans Ω , donc $v_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $\|v_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ est majoré quand n varie. v est donc limite faible dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ de la suite v_n .

COROLLAIRE. — $W_0^{1,2}(\Omega)$ contient la balayée d'une fonction

$$\in S^+(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$$

sur un ensemble quelconque, ou d'une fonction

$$\in S^+(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$$

sur un ensemble relativement compact dans Ω (cf. th. 6).

Les fonctions $\in S^+$ majorées par une fonction $\in W_{\text{loc}}^{1,2}$.

THEOREME 8. — Toute fonction $v \in S^+(\Omega)$, majorée p.p. dans Ω par $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$, appartient à $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$.

Il suffit de montrer que $v \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\omega)$ pour tout ouvert ω L-adapté. Soit ω' un ouvert d'adhérence $\subset \omega$; il existe un potentiel P dans ω , $\in W_0^{1,2}(\omega)$ et $\geq f$ p.p. sur $\bar{\omega}'$ (lemme 5). On en déduit $P \geq v$ p.p. sur ω' donc partout sur ω' , et $P \geq (\hat{R}_v^{\omega'})_{\omega}$ dans ω . $(\hat{R}_v^{\omega'})_{\omega} \in W_0^{1,2}(\omega)$ (théorème 7); comme $v = (\hat{R}_v^{\omega'})_{\omega}$ dans ω' ,

$$v \in W^{1,2}(\omega').$$

COROLLAIRE. — La balayée d'une fonction $\in S^+(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ sur un ensemble quelconque appartient à $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$.

La classe des fonctions $\in S^+ \cap W_0^{1,2}$ (resp : $S^+ \cap W_{\text{loc}}^{1,2}$) est donc stable par balayage sur un ensemble quelconque. Un exemple indiqué dans [11] prouve que ce n'est plus vrai pour la classe des fonctions $\in S^+ \cap W^{1,2}$.

14. Caractérisation des potentiels $\in W_0^{1,2}$.

LEMME 13. — Soit U le potentiel dans Ω de la mesure $\mu \geq 0$ et $U \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Alors :

a) Toute $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, continue et bornée sur Ω , est μ -intégrable et $\int \varphi d\mu = a_{\Omega}(U, \varphi)$.

b) $\int V d\mu \leq a_\Omega(U, V)$ pour tout potentiel $V \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et engendré par une mesure ≥ 0 à support compact $\subset \Omega$.

c) Si μ ne charge pas les ensembles polaires, pour toute

$$\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

tout représentant quasi-continu de la classe φ est μ -intégrable et sa μ -intégrale $= a_\Omega(U, \varphi)$.

a) Soit K_n une suite croissante de compacts, de réunion Ω , et U_n le potentiel dans Ω de $\mu \chi_{K_n}$: $U \in W_0^{1,2}(\Omega)$ entraîne $U_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (théorème 7), et $a_\Omega(U_n, \varphi) = \int \varphi \chi_{K_n} d\mu \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, continue et bornée sur Ω (proposition 7 et corollaire 3, c du théorème 4). Mais (théorème 7) U_n tend faiblement vers U dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, donc

$$\int \varphi \chi_{K_n} d\mu \longrightarrow a_\Omega(U, \varphi)$$

d'où φ^+ et $\varphi^- \in L_\mu^1$ et $\int \varphi d\mu = a_\Omega(U, \varphi)$.

b) Soit V le potentiel de la mesure ν , V_n le potentiel de la mesure régularisée $V_* \rho_n$: d'après le corollaire 2 du théorème 6, d'une part V_n est une fonction continue bornée $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, de sorte que $a_\Omega(U, V_n) = \int V_n d\mu$, d'autre part $V_n \leq k V$ pour n assez grand. D'après cette inégalité et le théorème 7, $\|V_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ est majoré quand n varie ; de la suite V_n on peut donc extraire une suite partielle faiblement convergente dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. Mais d'autre part $V_* \rho_n \longrightarrow V$ vaguement, donc (lemme 4 et corollaire 3, c du théorème 4) $V_n \longrightarrow V$ dans $L^p(\Omega) \forall p < \frac{m}{m-1}$; alors V est limite faible de la suite V_n dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et l'on a à la limite $a_\Omega(U, V) = \lim \int V_n d\mu \geq \int (\liminf V_n) d\mu \geq \int V d\mu$ car ([8], proposition 19.3) $V = T - \lim V_n$, donc ([8], corollaire 1 de la proposition 21.2) $V = \widehat{\liminf V_n}$.

c) D'abord, l'énoncé a un sens parce que les ensembles polaires sont μ -négligeables ; d'après le a)

$$\int |\varphi| d\mu = a_\Omega(U, |\varphi|) \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}(\Omega).$$

Etant donné $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, reprenons un raisonnement de Deny-Lions ([7], chapitre II, preuve du théorème 3.1) : φ est limite dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ d'une suite de $\varphi_k \in \mathcal{O}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, telle que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} 4^k \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 < +\infty,$$

l'ouvert e_k où $|\varphi_{k+1} - \varphi_k| > \frac{1}{2^k}$ est de capacité

$$\leq \frac{4^k}{a_m} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2$$

(a_m est une constante dépendant de m), donc l'ouvert $\omega_j = \bigcup_{k \geq j} e_k$ a une capacité tendant vers 0 ; hors de cet ouvert, la série de terme général $|\varphi_{k+1} - \varphi_k|$ converge normalement, donc

$$w = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) \quad \text{et} \quad w' = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\varphi_{k+1} - \varphi_k|$$

sont finies continues ; w et w' sont définies sauf sur $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \omega_j$, donc $q - p$, w est quasi-continue et $= \varphi - \varphi_0$ p.p. Continuons ce raisonnement :

$$\begin{aligned} \int |\varphi_{k+1} - \varphi_k| d\mu &= a_\Omega(U, |\varphi_{k+1} - \varphi_k|) \\ &\leq C^{\text{ste}} \|U\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \end{aligned}$$

est le terme général d'une série convergente, donc (théorème de Lebesgue pour les suites croissantes) $w' \in L_\mu^1$, puis (théorème de Lebesgue pour les suites dominées) $w \in L_\mu^1$ et

$$\int (w + \varphi_0) d\mu = \lim \int \varphi_k d\mu = \lim a_\Omega(U, \varphi_k) = a_\Omega(U, \varphi).$$

THEOREME 9. — Soit U le potentiel dans Ω de la mesure $\mu \geq 0$.

$U \in W_0^{1,2}(\Omega)$ si et seulement s'il est d'énergie finie, et alors, $\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, tout représentant quasi-continu de la classe φ est μ -intégrable et sa μ -intégrale $= a_\Omega(U, \varphi)$.

En particulier,

$$\int V \, d\mu = a_{\Omega}(U, V)$$

pour tout potentiel $V \in W_0^{1,2}(\Omega)$,

et

$$\int U \, d\mu = a_{\Omega}(U, U)$$

1) Supposons $U \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Soit K_n une suite croissante de compacts, de réunion Ω , et U_n le potentiel dans Ω de $\mu \chi_{K_n}$. $U_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$, donc (lemme 13,b)

$$\int U_n \, d\mu \leq a_{\Omega}(U, U_n) \quad \forall n ;$$

comme U_n est une suite croissante, et que U_n converge faiblement vers U dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, on a à la limite $\int U \, d\mu < +\infty$.

Par suite (corollaire 2 du théorème 6), μ ne charge pas les ensembles polaires, et le lemme 13,c) achève la preuve.

2) Réciproquement, soit U d'énergie finie.

Supposons d'abord μ à support compact $\subset \Omega$: pour que $U \in W_0^{1,2}(\Omega)$, il suffit que $U \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ (corollaire 1 du théorème 6) ; pour le prouver, il suffit de traiter le cas où le support de μ est contenu dans un ouvert ω connexe, L -adapté et relativement compact dans Ω , et de montrer que $W_0^{1,2}(\omega) \ni \int g_y^{\omega} \, d\mu(y)$.

Il revient au même (proposition 7) de montrer que

$$\mu \in W^{-1,2}(\omega) ,$$

ce qui ne dépend pas de L ; or le résultat est connu ([11], th. 10) pour les opérateurs L considérés dans [11] (par exemple pour $L = \Delta$), et, d'après la double inégalité (2) du § 8, le potentiel newtonien de μ est d'énergie finie.

Dans le cas général, on commence par déterminer un compact K_0 tel que $\omega = \Omega - K_0$ soit L -adapté. $\int g_y^{\Omega} \chi_{K_0}(y) \, d\mu(y)$ est d'énergie finie et à support compact, donc $\in W_0^{1,2}(\Omega)$; il suffit donc de montrer que

$$U_{\omega} = \int g_y^{\Omega} \chi_{\omega}(y) \, d\mu(y) \in W_0^{1,2}(\Omega) ,$$

ou encore, comme c'est un potentiel dans Ω , qu'il appartient à $W^{1,2}(\Omega) \cap L^{2*}(\Omega)$ (corollaire 4 du théorème 4).

Pour tout compact $X \subset \omega$, soit u_X le potentiel dans ω de μ_X défini de la façon suivante : dans une composante connexe de ω ne rencontrant pas X , $u_X = 0$; dans une composante connexe ω' de ω rencontrant X , u_X est le potentiel dans ω' de $\mu_{X \cap \omega'}$. $u_X \in W_0^{1,2}(\omega)$, donc (partie 1)

$$\int U \, d\mu \geq \int u_X \, \chi_X \, d\mu = a_\omega(u_X, u_X) \geq \gamma \|u_X\|_{W_0^{1,2}(\omega)}^2.$$

$\|u_X\|_{W_0^{1,2}(\omega)}$ étant majorée quand X varie, il existe une suite croissante de compacts X_n , de réunion ω , telle que la suite u_{X_n} ait, dans $W_0^{1,2}(\omega)$, une limite faible qui est le potentiel u_ω dans ω de μ_ω .

Ainsi $u_\omega \in W_0^{1,2}(\omega)$; $U_\omega = u_\omega + h$, où h est la p.g.m.h. de U_ω dans ω , donc la restriction à ω de U_ω appartient à $W_{loc}^{1,2}(\omega)$. D'autre part, si K est un autre compact $\subset \Omega$, voisinage de K_0 , U_ω est la somme des potentiels dans Ω de $\mu_{X_{\Omega-K}}$ et de $\mu_{X_{K-K_0}}$; le 1^{er} est harmonique sur $\overset{\circ}{K}$ et le 2^{ème} $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, donc la restriction de U_ω à $\overset{\circ}{K}$ appartient à $W_{loc}^{1,2}(\overset{\circ}{K})$ et $U_\omega \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$.

Par suite, $\hat{R}_{U_\omega}^K \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (théorème 6). Mais $\hat{R}_{U_\omega}^K - h$ est surharmonique sur ω , $\geq -$ un potentiel dans Ω et ≥ 0 au voisinage de tout point $\in \partial\omega \cap \Omega$; on a donc $h \leq \hat{R}_{U_\omega}^K$ dans ω et l'on peut appliquer le lemme 11 : la restriction de h à $\Omega - K$ appartient à $W^{1,2}(\Omega - K) \cap L^{2*}(\Omega - K)$. Comme U_ω appartient à $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, donc aussi à $L_{loc}^{2*}(\Omega)$, on a bien $U_\omega \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{2*}(\Omega)$.

COROLLAIRE 1. — *Tout potentiel inférieur à un potentiel d'énergie finie est lui-même d'énergie finie.*

COROLLAIRE 2. — *Soit ω_n une suite croissante d'ouverts relativement compacts dans Ω , de réunion Ω . Pour toute $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $L_\varphi^{\omega_n}$ a pour limite uniforme 0 sur tout compact $\subset \Omega$.*

Soit K compact $\subset \Omega$, n assez grand ($n \geq n_0$) pour que $K \subset \omega_n$, $a \in K$; si φ est choisie quasi-continue dans sa classe, d'après le

théorème 5 : $L_{\varphi}^{\omega_n}(a) = \int \varphi d\rho_a^{\omega_n}$, et de même

$$L_{\varphi}^{*\omega_n}(a) = \int \varphi d\rho_a^{*\omega_n}.$$

On va montrer que $L_{\varphi}^{*\omega_n}(a) \longrightarrow 0$.

Soit $\mu_{n,a} = \rho_a^{*\omega_n}$: cette mesure ≥ 0 , portée par $\partial\omega_n$, engendre le potentiel

$$u_{n,a}(x) = \int g_y(x) d\rho_a^{*\omega_n}(y) = \int g_x^* d\rho_a^{*\omega_n} \leq g_x^*(a) = g_a(x),$$

borné supérieurement sur $\partial\omega_n$, donc d'énergie finie. D'après le théorème 9

$$L_{\varphi}^{*\omega_n}(a) = a_{\Omega}(u_{n,a}, \varphi);$$

on va donc étudier la suite $u_{n,a}$.

Les fonctions L*-harmoniques étant adjointes aux fonctions L-harmoniques ([8], théorèmes 22.5 et 33.1), on peut écrire ([8], proposition 31.3)

$$u_{n,a}(x) = \hat{R}_{g_a}^{*\mathcal{C}\omega_n}(a) = \hat{R}_{g_a}^{\mathcal{C}\omega_n}(x), \text{ d'où } u_{n,a} \leq \hat{R}_{g_a}^{\mathcal{C}\omega_{n_0}};$$

or $\hat{R}_{g_a}^{\mathcal{C}\omega_{n_0}}$ est le potentiel localement borné d'une mesure portée par $\partial\omega_{n_0}$, donc (proposition 14 et corollaire 1 du théorème 6) $\hat{R}_{g_a}^{\mathcal{C}\omega_{n_0}} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Alors (théorème 7) $u_{n,a} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $\|u_{n,a}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ est majoré quand n varie ; mais d'autre part, g_a étant un potentiel,

$$u_{n,a} \longrightarrow 0$$

en tout point $\in \Omega$, donc la suite $u_{n,a}$ a pour limite faible 0 dans $W_0^{1,2}(\Omega)$, et $L_{\varphi}^{*\omega_n}(a) = a_{\Omega}(u_{n,a}, \varphi) \longrightarrow 0$.

Ainsi $L_{\varphi^+}^{*\omega_n}$ et $L_{\varphi^-}^{*\omega_n}$ ont pour limite 0, donc uniformément sur tout compact $\subset \Omega$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BRELOT, Sur l'allure des fonctions harmoniques et sous-harmoniques à la frontière, *Math. Nachr.*, 4, (1950-51), 298-307.
- [2] M. BRELOT, Lectures on Potential theory, Tata Institute of Fundamental Research, (1960).
- [3] M. BRELOT, Quelques propriétés et applications nouvelles de l'effilement, *Séminaire Brelot-Choquet-Deny*, Institut H. Poincaré, (1961-62), n° 1c.
- [4] H. CARTAN, Théorie du potentiel newtonien, *Bull. Soc. Math. France*, 73, (1945), 74-106.
- [5] G. CHOQUET, Les noyaux réguliers en théorie du potentiel, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 243, (1956), 635.
- [6] J. DENY, Les potentiels d'énergie finie (thèse), *Acta Math.*, 82, (1950), 103-183.
- [7] J. DENY et J.L. LIONS, Les espaces du type de Beppo Levi, *Ann. Inst. Fourier*, 5, (1953-54), 305-370.
- [8] R.M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel (thèse), *Ann. Inst. Fourier* 12, (1962), 415-571).
- [9] R.M. HERVÉ, Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme
$$Lu = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0,$$
 Ann. Inst. Fourier, 14, fasc. 2, (1964), 493-508.
- [10] R.M. HERVÉ, Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associées à une équation uniformément elliptique de la forme
$$Lu = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0,$$
 Ann. Inst. Fourier, 15, fasc. 2, (1965), 214-224.
- [11] R.M. HERVÉ, Quelques propriétés des sursolutions et sur-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme
$$Lu = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0,$$
 Ann. Inst. Fourier, 16, fasc. 2, (1966), 241-267.

- [12] G. STAMPACCHIA, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 258, (1964), p. 4413.
- [13] G. STAMPACCHIA, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, Novembre 1963 - Mai 1964.
- [14] G. STAMPACCHIA, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier*, 15, fasc. 1, (1965), p. 189-258.

Manuscrit reçu le 17 février 1969

Rose-Marie et Michel HERVÉ
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre Curie
Paris 5e