ANNALES
DE
L'INSTITUT FOURIER

Armand LACHAND

Fonctions arithmétiques et formes binaires irréductibles de degré 3

Tome 68, n° 3 (2018), p. 1297-1363.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2018__68_3_1297_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
68, 3 (2018) 1297-1363

FONCTIONS ARITHMÉTIQUES ET FORMES BINAIRES IRRÉDUCTIBLES DE DEGRÉ 3

par Armand LACHAND

Résumé. — Dans cet article, nous obtenons des estimations de l'ordre moyen, sur les valeurs de la forme cubique $X_1^3 + 2X_2^3$, de fonctions multiplicatives h soumises à certaines conditions. On donne en particulier une formule asymptotique du nombre d'entiers friables de la forme $n_1^3 + 2n_2^2$, valide pour un paramètre de friabilité non borné. La méthode utilisée s'applique également à des fonctions multiplicatives oscillantes comme la fonction μ de Mœbius : il s'ensuit une nouvelle preuve de la conjecture de Chowla pour la forme $X_1^3 + 2X_2^3$, récemment démontrée par Helfgott dans le cas plus général des formes binaires cubiques irréductibles.

Abstract. — In this article, we give some estimates for the average order, over the values of the cubic form $X_1^3 + 2X_2^3$, for some multiplicative functions h satisfying certain conditions. We provide an asymptotic formula for the number of y-friable values of $n_1^3 + 2n_2^3$, valid in an unbounded range. Our method also applies to some oscillating multiplicative functions like the Mœbius function μ : this gives another proof of the Chowla conjecture for the form $X_1^3 + 2X_2^3$ recently proved by Helfgott in the more general case of binary and irreducible cubic forms.

1. Introduction

Soient $F(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur $\mathbf{Z}$ de degré 3 et h une fonction arithmétique. L'objet de ce travail est l'obtention de formules asymptotiques de l'ordre moyen

$$M_h(x; F) := \sum_{1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant x} h(F(n_1, n_2))$$

pour diverses fonctions multiplicatives h, dont la fonction μ de Mœbius et l'indicatrice des entiers friables[(1)].

Mots-clés : Entiers friables, fonctions multiplicatives, cribles, formes binaires.
Classification Mathématique (2010) : 11E76, 11N25, 11N36, 11N37, 11Y05.

(1) Un entier $n \geqslant 1$ est dit y-friable si tous ses facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à y.

L'intérêt de considérer de telles sommes est multiple. La somme $M_h(x;F)$ apparaît dans de nombreux problèmes arithmétiques (conjecture de Manin dans [4] et [5], crible algébrique (NFS) exposé dans le chapitre 6 de [8], etc.). D'autre part, il s'agit d'un angle d'attaque efficace pour étudier l'indépendance entre une propriété arithmétique relative à h et la représentation d'un entier par la forme cubique F. Enfin, les valeurs de F forment un ensemble lacunaire d'entiers, dans la mesure où

$$\frac{\log \# \left\{(n_1,n_2) : |F(n_1,n_2)| \leqslant x\right\}}{\log \#\{|n| \leqslant x\}} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{2}{3}$$

et la persistance d'un phénomène arithmétique dans un ensemble de densité asymptotique nulle est un sujet important de la théorie des nombres, à l'origine de nombreuses conjectures.

Greaves [12] initie l'étude de telles sommes en considérant la fonction de compte des diviseurs τ. À partir de la convolution $\tau = 1 * 1$, il montre ainsi que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute forme cubique irréductible F, il existe des constantes réelles $c_0(F) > 0$ et $c_1(F)$ telles que l'on ait, uniformément en $x \geqslant 2$, l'estimation

$$M_\tau(x;F) = c_0(F)x^2 \log x + c_1(F)x^2 + O_{\varepsilon,F}\left(x^{27/14+\varepsilon}\right),$$

formule asymptotique précisée par Daniel [9] qui améliore sensiblement le terme d'erreur précédent en le remplaçant par $O_{\varepsilon,F}(x^{15/8+\varepsilon})$.

Dans cette direction, il convient de mentionner les travaux de La Bretèche et Browning [3] qui obtiennent une borne supérieure de $M_h(x;F)$ uniforme pour des fonctions h soumises à des conditions de croissance et de sous-multiplicativité, majoration dans laquelle intervient la fonction γ_F définie par la formule

$$\gamma_F(d) := \#\{1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant d : d|F(n_1,n_2)\}.$$

Théorème A ([3, Corollary 1]). — *Soient $A > 0$, $B : [0,1] \to \mathbf{R}$ et $F \in \mathbf{Z}[X_1,X_2]$ une forme binaire irréductible sur $\mathbf{Z}$ de degré $g \geqslant 1$. Pour toute fonction positive et sous-multiplicative h satisfaisant $h(p) \leqslant A$ pour tout premier p et $h(n) \leqslant B(\varepsilon)n^\varepsilon$ pour tout entier n et tout $\varepsilon \in]0,1]$, on a l'estimation, uniforme en $x \geqslant 2$,*

$$M_h(x;F) \ll_{A,B,F} x^2 \prod_{g<p\leqslant x}\left(1 + \frac{\gamma_F(p)}{p^2}(h(p)-1)\right).$$

Lorsque h est l'indicatrice $1_{\mathcal{E}}$ d'un ensemble d'entiers criblés $\mathcal{E}$, l'estimation précédente fournit une borne supérieure non triviale. La question de la détermination d'une minoration de $M_{1_{\mathcal{E}}}(x;F)$ est en général difficile et dépend fortement de l'ensemble $\mathcal{E}$ en question.

Dans [14], Greaves considère l'ensemble $\mathcal{E}_k$ des entiers qui ne sont divisibles par aucune puissance k-ième de nombres premiers. Il montre ainsi que, pour tout $k \geqslant 2$ et toute forme cubique irréductible F, on a la formule asymptotique, uniforme en $x \geqslant 2$,

$$M_{1_{\mathcal{E}_k}}(x;F) = x^2 \prod_p \left(1 - \frac{\gamma_F(p^k)}{p^{2k}}\right) + O_{F,k}\left(\frac{x^2}{\log x}\right).$$

On peut également considérer l'indicatrice $1_{S(y)}$ où $S(y)$ désigne l'ensemble des entiers y-friables. On retrouve dans ce cas la fonction de comptage des valeurs friables de F, dans la mesure où

$$M_{1_{S(y)}}(x;F) = \Psi_F\,(x,y) := \#\left\{1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant x : P^+(F(n_1,n_2)) \leqslant y\right\}.$$

Au cours de leur étude du cardinal $\Psi_F(x,y)$, Balog, Blomer, Dartyge et Tenenbaum [1, Theorem 1] montrent entre autres que, pour toute forme binaire irréductible F de degré $g \geqslant 1$, on dispose de l'estimation non triviale

$$\alpha_F := \inf\left\{\alpha : \Psi_F\,(x,x^\alpha) \gg_{\alpha,F} x^2 \text{ uniformément pour } x \geqslant x_0(\alpha,F)\right\} < g.$$

En particulier, quand F est de degré 3, leur résultat fournit la borne supérieure $\alpha_F \leqslant e^{-1/2}$. La motivation principale du présent travail est de préciser ce résultat, dans le cas des formes cubiques irréductibles, en montrant la formule asymptotique

$$M_{1_{S(y)}}(x;F) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\rho(3u) \tag{1.1}$$

où ρ désigne la fonction de Dickman et $u := \frac{\log x}{\log y}$, uniformément dans un domaine en (x,y) à préciser.

L'ensemble des résultats cités ci-dessus ont en commun l'emploi récurrent de sommes de Type I, c'est-à-dire des estimations des cardinaux

$$A_d\,(x) := \#\,\{1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant x : d|F(n_1,n_2)\}$$

en moyenne sur $d \leqslant x^{2-o(1)}$. Il est naturel d'approcher $A_d(x)$ par la quantité $\frac{\gamma_F(d)}{d^2}x^2$. Dans cette direction, le lemme 3.3 de [9] entraîne, dans le cas où F est une forme cubique irréductible, l'estimation de sommes de Type I suivante

$$\sum_{d\leqslant D}\left|A_d(x) - \frac{\gamma_F(d)}{d^2}x^2\right| \ll_F x\sqrt{D}(\log 2D)^{7203} + D(\log 2D)^8.$$

Lorsque $h(m)$ présente un caractère oscillant au regard du nombre de facteurs premiers de m comptés avec multiplicité, noté $\Omega(m)$, il n'est en général pas possible de déduire des résultats satisfaisants à partir des seules estimations de sommes de Type I. C'est là l'incidence du phénomène de parité, mis en lumière par Selberg [23] puis Bombieri [2]. On en trouvera un survol dans le chapitre 16 de [11]. En principe, il est possible de contourner ce problème si l'on dispose d'une estimation de sommes de Type II, c'est-à-dire d'une majoration non triviale de sommes bilinéaires de la forme

$$\sum_{U<r\leqslant 2U}\sum_{V<s\leqslant 2V} a_r b_s \#\{1\leqslant n_1,n_2\leqslant x : rs=F(n_1,n_2)\}$$

pour des choix convenables de U et V, où b_s satisfait une hypothèse de type Siegel–Walfisz.

Heath-Brown [18] estime une telle quantité pour la forme irréductible $F(X_1,X_2)=X_1^3+2X_2^3$ à l'aide entre autres d'une inégalité de grand crible et d'un comptage de points sur une hypersurface. Il en déduit l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $n_1^3+2n_2^3$ à travers la formule asymptotique de densité

$$\frac{\#\left\{x<n_1,n_2\leqslant x\left(1+(\log x)^{-c_0}\right) : \begin{array}{c} n_1^3+2n_2^3\\ \text{premier}\end{array}\right\}}{x^2(\log x)^{-2c_0}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\prod_p\left(1-\frac{\nu_p-1}{p}\right)}{3\log x}$$

pour une constante $c_0>0$ convenablement choisie, où ν_p désigne le nombre de racines de la congruence $X^3+2\equiv 0 \pmod p$. Une généralisation de ce travail aux valeurs des polynômes de la forme $F(a_1+X_1q,a_2+X_2q)$ où F est une forme cubique irréductible sur $\mathbf{Z}$ à coefficients entiers et $(a_1,a_2,q)=1$ a été effectuée par Heath-Brown et Moroz [19, 20].

Enfin, les estimations de Type II obtenues dans [19] ont été utilisées par Helfgott pour établir la validité de la conjecture de Chowla [7], bien que les identités combinatoires mises en œuvre soient différentes de celles intervenant dans les travaux de Heath-Brown et Moroz(2). Dans le théorème principal de [21], il montre en particulier la formule suivante, valide pour toute forme irréductible $F\in\mathbf{Z}[X_1,X_2]$ de degré 3 et tout $\varepsilon>0$, et uniforme en $x\geqslant 16$,

$$M_\mu(x;F)\ll_{F,\varepsilon}\frac{(\log\log x)^4(\log\log\log x)^\varepsilon}{\log x}x^2. \tag{1.2}$$

Étant donnés un compact $\mathcal{K}\subset[0,1]^2$, une forme binaire F et une fonction arithmétique h, on définit

$$M_h^{(1)}(\mathcal{K}\cdot x;F):=\sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathcal{K}\cdot x\cap\mathbf{Z}^2\\ \mathrm{pgcd}(n_1,n_2)=1}} h(F(n_1,n_2))$$

(2) Helfgott utilise des itérations de l'identité de Vaughan en lieu et place de l'identité de Buchstab.

où $\mathcal{K}\cdot x := \{(t_1x,t_2x) : (t_1,t_2)\in\mathcal{K}\}$. Dans le présent travail, nous étudions la somme $M_h^{(1)}(\mathcal{K}\cdot x;F)$ pour diverses fonctions multiplicatives h et pour la forme binaire $X_1^3+2X_2^3$. Traiter le cas d'une forme binaire cubique irréductible quelconque nécessite l'introduction de divers outils de théorie algébrique des nombres, à la manière de [19] et [20], que nous avons voulu éviter ici pour conserver une exposition claire. Le lecteur intéressé pourra consulter les travaux de thèse de l'auteur [22], où sont obtenus des résultats analogues aux théorèmes 1.1 et 1.3 *infra*, pour les polynômes de la forme $F(a_1+X_1q,a_2+X_2q)$ où F est une forme cubique irréductible et a_1, a_2 et q sont des entiers satisfaisant $(a_1,a_2,q)=1$.

En considérant le cas de l'indicatrice des friables $h=1_{S(y)}$, nous retrouvons le cardinal

$$\Psi^{(1)}_{X_1^3+2X_2^3}(\mathcal{K}\cdot x,y) := \#\left\{(n_1,n_2)\in\mathcal{K}\cdot x\cap\mathbf{Z}^2 : \begin{array}{c}(n_1,n_2)=1 \text{ et}\\ P^+(n_1^3+2n_2^3)\leqslant y\end{array}\right\},$$

quantité qui intervient directement dans l'algorithme de factorisation du crible algébrique (voir [8, chapitre 6.2]). Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1.1. — *Soient $\varepsilon>0$ et $\mathcal{K}\subset[0,1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Uniformément dans le domaine*

$$x\geqslant 3,\quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}}\right)\leqslant y, \tag{1.3}$$

on a

$$\Psi^{(1)}_{X_1^3+2X_2^3}(\mathcal{K}\cdot x,y)=\frac{6}{\pi^2}\operatorname{Vol}(\mathcal{K})x^2\rho(3u)+O\left(\frac{x^2}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}}\right) \tag{1.4}$$

où $\operatorname{Vol}(\mathcal{K})$ désigne l'aire de $\mathcal{K}$.

De plus, si (x,y) parcourt le domaine

$$x\geqslant 3,\qquad \exp\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1/2-\varepsilon}}\right)\leqslant y\leqslant x^{1/2-\varepsilon}, \tag{1.5}$$

alors le terme d'erreur impliqué dans la formule (1.4) peut être remplacé par $O(x^2\exp(-(\log\log x)^{1/2-\varepsilon}))$.

Compte tenu de l'estimation

$$\rho(u)=\exp\left(-u\log u(1+o(1))\right)\qquad (u\to+\infty),$$

on observe que le théorème 1.1 donne un équivalent de $\Psi^{(1)}_{X_1^3+2X_2^3}(\mathcal{K}\cdot x,y)$ dans le domaine $\exp\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1/2-\varepsilon}}\right)\leqslant y$. En utilisant une convolution pour enlever la condition de coprimalité, on montre le corollaire suivant, qui améliore les résultats de [1] dans le cas de la forme $X_1^3+2X_2^3$, en établissant la validité de (1.1) et en augmentant la région dans laquelle on dispose d'une estimation de $\Psi_{X_1^3+2X_2^3}(x,y)$.

Corollaire 1.2. — *Soient $\varepsilon>0$. Uniformément en $x,y\geqslant 3$, on a*

$$\Psi_{X_1^3+2X_2^3}(x,y)=x^2\rho(3u)+O\left(\frac{x^2}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}}\right). \tag{1.6}$$

De plus, si (x,y) parcourt le domaine (1.5), alors le terme d'erreur dans (1.6) peut être remplacé par $O(x^2\exp(-(\log\log x)^{1/2-\varepsilon}))$.

Dans le domaine $y\leqslant\exp\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, l'estimation (1.6) est une conséquence du corollaire 1 de [3] (voir le théorème A). On observe en effet que l'estimation

$$\Psi_F\left([1,x]^2,y\right)\ll x^2\prod_{y<p\leqslant x}\left(1-\frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right)+x\ll\frac{x^2}{u}+x,$$

valide pour toute forme cubique irréductible F, implique la validité de (1.6) dès que $u\geqslant(\log\log x)^{1-\varepsilon}$.

Considérons également l'ensemble $\mathcal{M}(w)$ des fonctions h multiplicatives, de module borné par 1 et satisfaisant $h(p)=w$ pour tout premier p, où $w\neq 1$ est un complexe de module 1. La méthode développée dans ce travail permet d'évaluer $M_h^{(1)}(\mathcal{K}\cdot x;X_1^3+2X_2^3)$ avec une certaine uniformité en w.

Théorème 1.3. — *Soient $\varepsilon>0$ et $\mathcal{K}\subset[0,1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Uniformément en w un complexe de module 1 satisfaisant $|\mathrm{Re}(w)-1|\geqslant\frac{1}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}}$, $h\in\mathcal{M}(w)$ et $x\geqslant 3$, on a*

$$M_h^{(1)}\left(\mathcal{K}\cdot x;X_1^3+2X_2^3\right)\ll\frac{x^2}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}}.$$

En effectuant le choix $h(n)=\mu(n)$, ce résultat permet de retrouver, avec un terme d'erreur plus faible, la formule (1.2) due à Helfgott [21].

On peut en déduire aussi la majoration de la somme d'exponentielles

$$\sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathcal{K}\cdot x\cap\mathbf{Z}^2\\ \mathrm{pgcd}(n_1,n_2)=1}}\mathrm{e}\left(i\theta\Omega\left(n_1^3+2n_2^3\right)\right)\ll\frac{x^2}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}}$$

où $\mathrm{e}(t):=\exp(2i\pi t)$, valide uniformément pour tout réel θ satisfaisant $\|\theta-1\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}\geqslant\frac{1}{(\log\log x)^{1/2-\varepsilon}}$ où $\|\cdot\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Pour toute fonction arithmétique g, définissons l'ordre moyen

$$M_g(x):=\sum_{n\leqslant x}g(n).$$

Reprenant les travaux de Heath-Brown et Moroz, le point clé des preuves des théorèmes 1.1 et 1.3 consiste à réduire l'estimation de l'ordre moyen $M_h^{(1)}(\mathcal{K}\cdot x; X_1^3+2X_2^3)$ à l'étude asymptotique de $M_{\sigma^{\mathbf{Z}}h}(x)$ où $\sigma^{\mathbf{Z}}$ est une fonction multiplicative satisfaisant $\sigma^{\mathbf{Z}}(p^k)=\nu_p+O(p^{-1})$ et ν_p désigne encore le nombre de solutions de la congruence $X^3+2\equiv 0 \pmod p$.

La série de Dirichlet associée $\sum_m \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(m)}{m^s}$ étant analytiquement proche de la fonction zêta de Dedekind $\zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})}(s)$, diverses méthodes d'analyse complexe (formule de Perron, méthode de Selberg–Delange, méthode du col, etc.) permettent d'estimer $M_{\sigma^{\mathbf{Z}}h}(x)$. Au paragraphe 4.2, nous utilisons ces outils pour étudier asymptotiquement $M_{\sigma^{\mathbf{Z}}h}(x)$ dans le cas où h désigne l'indicatrice des entiers friables et $h\in\mathcal{M}(w)$.

Enfin, définissons pour w un complexe de module 1, $y_1,y_2\geqslant 1$ des réels ou $y_2=+\infty$, l'ensemble $\mathcal{M}(w;y_1,y_2)$ comme l'ensemble des fonctions h multiplicatives, bornées par 1 et satisfaisant les conditions suivantes :

(1) h est à support sur les entiers m satisfaisant $P^-(m)>y_1$ et $P^+(m)\leqslant y_2$,
(2) pour tout premier p dans l'intervalle $]y_1,y_2]$, on a $h(p)=w$.

Avec ces notations, on vérifie que $1_{S(y)}\in\mathcal{M}(1;1,y)$ et que les fonctions h de $\mathcal{M}(w)$ considérées dans le théorème 1.3 sont des éléments de $\mathcal{M}(w;1,+\infty)$. La méthode développée dans le présent article permet de traiter le cadre plus large des fonctions arithmétiques appartenant à $\mathcal{M}(w;y_1,y_2)$ (voir la proposition 8.1 pour un énoncé général du résultat obtenu). Nous espérons que cette généralisation trouvera des applications supplémentaires dans d'autres circonstances.

Conventions. — Dans la suite de cet article, on emploie les notations en usage dans les travaux de Heath-Brown et Moroz, à savoir que la lettre c désignera une constante positive pouvant varier à chaque occurrence. De même, pour tout paramètre B, la lettre $c(B)$ désignera une fonction de B, éventuellement différente à chaque apparition. Il convient de souligner que, dans [18, 19, 20, 21] et dans le présent travail, les constantes ne sont pas effectives, en raison de l'incidence du zéro de Siegel dans les arguments utilisés pour établir les estimations de sommes de Type II (voir le paragraphe 7).

Ce travail présente l'organisation suivante. Au paragraphe 2, nous réduisons le problème à l'étude d'une fonction arithmétique sur les idéaux de $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}]$ ce qui nous conduit, au paragraphe 3, à l'étude de la distribution multiplicative de certains sous-ensembles d'idéaux. Le paragraphe 4 contient la définition et les premières propriétés de la fonction de densité

$\sigma^{\mathbf{Z}}$ déjà mentionnée dans cette introduction. Au paragraphe 5, nous donnons un argument combinatoire qui a pour but d'adapter les méthodes d'Heath-Brown à notre problème. Les paragraphes 6 et 7 sont essentiellement consacrés à l'estimation des termes d'erreur qui apparaissent dans la discussion du paragraphe 5. Enfin, on illustre l'utilisation de la méthode dans le paragraphe 8 en l'appliquant pour démontrer les théorèmes 1.1 et 1.3.

Remerciements. L'auteur tient à remercier très chaleureusement sa directrice de thèse Cécile Dartyge pour son accompagnement tout au long de ce travail. Il exprime aussi sa sincère reconnaissance à Régis de La Bretèche et au rapporteur anonyme pour leurs nombreuses remarques autour de la rédaction de cet article.

2. Formes cubiques et normes d'idéaux dans un corps cubique

Dans toute la suite, on considère le corps de nombres $\mathbf{K} := \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} := \mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}]$ son anneau d'entiers. La norme $N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}$ définie pour tout idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ permet d'expliciter le lien étroit entre la forme cubique $X_1^3 + 2X_2^3$ et le corps $\mathbf{K}$, à travers l'identité

$$N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}\left(n_1 + n_2\sqrt[3]{2}\right) = n_1^3 + 2n_2^3.$$

On note $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ le monoïde des idéaux entiers non nuls de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ et $\varepsilon_0 := 1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ l'unité fondamentale de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. La fonction zêta de Dedekind $\zeta_{\mathbf{K}}$ du corps $\mathbf{K}$, définie par $\zeta_{\mathbf{K}}(s) := \sum_{\mathfrak{i}} \frac{1}{N(\mathfrak{i})^s}$ lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$, a pour résidu $\lambda_{\mathbf{K}} := \frac{\pi \log \varepsilon_0}{\sqrt{27}}$ en $s = 1$. De plus, $\mathfrak{p}$ désignera un idéal premier au dessus de p et $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ des idéaux entiers de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$.

2.1. Fonctions arithmétiques sur les idéaux

Dans toute la suite, une fonction $g : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \to \mathbf{C}$ est dite multiplicative si $g(\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2) = g(\mathfrak{j}_1)g(\mathfrak{j}_2)$ dès que $(\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2) = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. Des exemples de fonctions multiplicatives sur les idéaux sont donnés par la fonction de Mœbius $\mu_{\mathbf{K}}$ et la fonction diviseur $\tau_{\mathbf{K}}$ sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, définies comme les fonctions multiplicatives satisfaisant, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ et $k \geqslant 1$, les formules

$$\mu_{\mathbf{K}}\left(\mathfrak{p}^k\right) := \begin{cases} -1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_{\mathbf{K}}\left(\mathfrak{p}^k\right) := k + 1.$$

On introduit également les fonctions $\Omega_{\mathbf{K}}$ et $\omega_{\mathbf{K}}$ qui comptent le nombre de facteurs premiers avec ou sans leur ordre de multiplicité, définies par

$$\Omega_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) := \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{j}} v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j}) \quad \text{et} \quad \omega_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) := \#\left\{\mathfrak{p}|\mathfrak{j}\right\}$$

où $v_{\mathfrak{p}}$ désigne la valuation $\mathfrak{p}$-adique. Étant donnée une fonction arithmétique g définie sur $\mathbf{Z}$, on lui associe naturellement une fonction définie sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ notée encore g par la formule $g(\mathfrak{j}) := g(N(\mathfrak{j}))$. Réciproquement, on associe à une fonction g définie sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ la fonction $g^{\mathbf{Z}}$ définie par

$$g^{\mathbf{Z}}(n) := \sum_{N(\mathfrak{j})=n} g(\mathfrak{j}).$$

Dans la preuve de [18, Lemma 4.2], Heath-Brown énonce les inégalités suivantes, conséquences de la décomposition des idéaux en idéaux premiers,

$$\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \leqslant \tau(N(\mathfrak{j}))^3 \quad \text{et} \quad \#\left\{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(\mathfrak{j}) = n\right\} \leqslant \tau(n)^2.$$

où $\tau := \tau_{\mathbf{Q}}$ désigne la fonction nombre de diviseurs standard.

Le lemme 4.6 de [18], reformulé ci-dessous dans un cas particulier, fournit une première estimation de l'ordre moyen de $\tau_{\mathbf{K}}$ sur les entiers de la forme $n_1 + n_2\sqrt[3]{2}$.

Lemme 2.1 ([18, Lemma 4.6]). — *Soient $x_1 \geqslant x_2 \geqslant 1$ des réels. Pour tout entier $B \geqslant 0$, il existe une constante $c(B) \geqslant 0$ telle que*

$$\sum_{\substack{|n_1|\leqslant x_1,\\ |n_2|\leqslant x_2\\ n_2\neq 0}} \left|\tau_{\mathbf{K}}\left(n_1 + n_2\sqrt[3]{2}\right)^B\right| \leqslant x_1x_2(\log(2x_1))^{c(B)}.$$

2.2. Notations et définition des idéaux admissibles

Comme observé dans le paragraphe 2 de [19], les nombres premiers ramifiés dans $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}]$, à savoir 2 et 3, présentent un comportement particulier et nécessiteront un traitement spécifique. En particulier, on a la décomposition en facteurs premiers

$$\sqrt[3]{2}^3\mathbf{Z}\left[\sqrt[3]{2}\right] = 2\mathbf{Z}\left[\sqrt[3]{2}\right] \quad \text{et} \quad (\sqrt[3]{2}+1)^3\mathbf{Z}\left[\sqrt[3]{2}\right] = 3\mathbf{Z}\left[\sqrt[3]{2}\right].$$

L'unicité de la décomposition en idéaux premiers dans les anneaux de Dedekind permet de définir, pour un idéal $\mathfrak{j}$ et un entier m, la composante y-friable et la composante y-criblée par

$$\mathfrak{j}^-(y) := \prod_{p\leqslant y}\prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})}, \qquad \mathfrak{j}^+(y) := \prod_{p>y}\prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})},$$

$$m^-(y) := \prod_{p \leqslant y} p^{v_p(m)} \quad \text{et} \quad m^+(y) := \prod_{p > y} p^{v_p(m)}$$

où v_p désigne la valuation p-adique rationnelle. On introduit enfin la composante p-adique d'un idéal $\mathfrak{j}$, notée $\mathfrak{j}_p$, comme l'unique diviseur de $\mathfrak{j}$ satisfaisant $N(\mathfrak{j}_p) = p^{v_p(N(\mathfrak{j}))}$, de sorte que $\mathfrak{j} = \prod_p \mathfrak{j}_p$.

Le comportement des idéaux premiers qui interviennent dans la décomposition des idéaux $(n_1 + n_2\sqrt[3]{2})$ est décrit par le lemme suivant, inspiré de [18].

Lemme 2.2. — *Soient n_1 et n_2 deux entiers premiers entre eux, $p \geqslant 5$ un nombre premier, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ deux idéaux premiers au-dessus de p tels que $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ divisent $n_1 + n_2\sqrt[3]{2}$. Alors $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ et $N(\mathfrak{p}_1) = p$.*

De plus, $\sqrt[3]{4} \nmid n_1 + n_2\sqrt[3]{2}$ et $(\sqrt[3]{2}+1)^2 \nmid n_1 + n_2\sqrt[3]{2}$.

Démonstration. — La première assertion fait l'objet de [18, Lemma 3.1]. Le second point se démontre en étudiant les solutions modulo 2 (resp. modulo 3) de la congruence $n_1^3 + 2n_2^3 \equiv 0 \pmod 4$ (resp. de la congruence $n_1^3 + 2n_2^3 \equiv 0 \pmod 9$) sous la contrainte $(n_1, n_2, 2) = 1$ (resp. $(n_1, n_2, 3) = 1$). □

Au regard de ce résultat, on dira qu'un idéal $\mathfrak{j}$ est admissible si

- les valuations $v_{\sqrt[3]{2}}(\mathfrak{j})$ et $v_{\sqrt[3]{2}+1}(\mathfrak{j})$ valent 0 ou 1.
- pour tout premier $p \geqslant 5$, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de norme p et un entier $k \geqslant 0$ tel que sa composante p-adique $\mathfrak{j}_p$ s'écrit $\mathfrak{j}_p = \mathfrak{p}^k$.

2.3. Transformation des sommes $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; X_1^3 + 2X_2^3)$ en sommes sur des idéaux admissibles

Soit $\mathcal{K} \subset [0,1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Recouvrons $\mathcal{K} \cdot x$ en carrés de la forme

$$C(N_1, N_2) := \{(n_1, n_2) : x\eta N_i < n_i \leqslant x\eta(N_i + 1) \text{ pour } i = 1, 2\}$$

où $\eta := (\log x)^{-c_0}$ pour une constante $c_0 > 0$ que l'on déterminera *a posteriori* et $0 \leqslant N_i \leqslant \eta^{-1}$ pour $i = 1, 2$. Les éléments de $\mathcal{K}$ mis à l'écart par cette approche contribuent de manière négligeable puisque l'on a

$$\#\left\{0 \leqslant N_1, N_2 \leqslant \eta^{-1} : \emptyset \subsetneq C(N_1, N_2) \cap \mathcal{K} \cdot x \subsetneq C(N_1, N_2)\right\} \ll \eta^{-1}.$$

Définissons

$$c(N_1, N_2) := \eta^3 \left(N_1^3 + 2N_2^3\right) \tag{2.1}$$

et

$$\mathcal{N}(\eta) := \Big\{\eta^{-3/4} < N_1, N_2 \leqslant \eta^{-1} : C(N_1,N_2) \subset \mathcal{K}\cdot x\Big\}$$

de sorte que $c(N_1,N_2) > 3\eta^{3/4}$ lorsque $(N_1,N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$.

Considérons l'ensemble d'idéaux

$$\mathcal{A}(N_1,N_2) := \Big\{\Big(n_1 + n_2\sqrt[3]{2}\Big)\,\mathcal{O}_{\mathbf{K}} : (n_1,n_2) \in C(N_1,N_2) \text{ et } (n_1,n_2)=1\Big\}.$$

Le lemme suivant affirme que $c(N_1,N_2)x^3$ correspond à la valeur moyenne de $n_1^3+2n_2^3$ sur $C(N_1,N_2)$.

Lemme 2.3. — *On a, uniformément en $x \geqslant 2$, $(N_1,N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $(n_1,n_2) \in C(N_1,N_2)$, l'estimation*

$$n_1^3 + 2n_2^3 = c(N_1,N_2)x^3\left(1 + O\left(\eta^{\frac{3}{4}}\right)\right). \tag{2.2}$$

Démonstration. — La relation (2.2) est une conséquence de la formule de Taylor et de la définition (2.1). □

Compte tenu des observations précédentes et du choix $\eta := (\log x)^{-c_0}$, on peut majorer trivialement la contribution des $(n_1,n_2) \in C(N_1,N_2)$ avec $(N_1,N_2) \notin \mathcal{N}(\eta)$ pour écrire, pour toute fonction arithmétique h bornée par 1, l'estimation

$$M_h^{(1)}\left(\mathcal{K}\cdot x; X_1^3+2X_2^3\right) = \sum_{(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)} M_h(\mathcal{A}(N_1,N_2)) + O\left(\eta x^2\right) \tag{2.3}$$

où

$$M_h(\mathcal{A}) := \sum_{\mathfrak{j}\in\mathcal{A}} h(\mathfrak{j}).$$

Comme souligné dans l'introduction, on verra au paragraphe 5 que la relation (2.2) permet de comparer $M_h(\mathcal{A}(N_1,N_2))$ à la quantité plus régulière $M_{\sigma h}(\mathcal{B}(N_1,N_2))$ où σ est une fonction de densité qui sera introduite au paragraphe 4,

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(N_1,N_2) := \big\{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : c(N_1,N_2)x^3 < N(\mathfrak{j}) \leqslant c(N_1,N_2)x^3(1+\eta)\big\}.$$

et

$$M_{\sigma h}(\mathcal{B}) := \sum_{\mathfrak{j}\in\mathcal{B}} \sigma(\mathfrak{j})h(\mathfrak{j}). \tag{2.4}$$

3. Sommes de Type I et niveau de répartition

Étant donnés des entiers g_1 et g_2 et un idéal admissible $\mathfrak{i}$, considérons la somme d'exponentielles

$$E\left(g_1, g_2; \mathfrak{i}\right) := \sum_{\substack{1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N(\mathfrak{i}) \\ \mathfrak{i} \mid n_1 + n_2 \sqrt[3]{2}}} \mathrm{e}\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{N(\mathfrak{i})}\right)$$

où $\mathrm{e}(t) := \exp(2i\pi t)$. L'estimation d'une telle quantité constitue un ingrédient de base dans de nombreux travaux relatifs aux formes cubiques (voir par exemple le paragraphe 2.4 de [13] ou le paragraphe 5 de [18]) et intervient fréquemment dans la majoration des sommes de Type I.

Une étude de $E(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ s'initie en observant la relation de multiplicativité

$$E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2) = E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_1) E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_2) \tag{3.1}$$

valable dès que $(N(\mathfrak{i}_1), N(\mathfrak{i}_2)) = 1$. Conséquence du théorème des restes chinois, l'identité (3.1) permet essentiellement de ramener l'étude des sommes $E(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ à la démonstration du lemme suivant.

Lemme 3.1. — *Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier non ramifié tel que $N(\mathfrak{p}) = p$ et $k \geqslant 1$. On a*

$$E\left(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k\right) = \begin{cases} p^k \mathrm{e}\left(-\frac{g_1+g_2}{p^k}\right) & \text{si } \mathfrak{p}^k \mid g_2 - g_1\sqrt[3]{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette formule reste vraie si $p \in \{2, 3\}$ et $k = 1$.

En vue d'établir ce résultat, nous étudions dans un premier temps la somme d'exponentielles

$$E^{(1)}\left(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k\right) := \sum_{\substack{1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N\left(\mathfrak{p}^k\right) \\ (n_1, n_2, N(\mathfrak{p}))=1 \\ \mathfrak{p}^k \mid n_1 + n_2 \sqrt[3]{2}}} \mathrm{e}\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{N(\mathfrak{p}^k)}\right).$$

Lemme 3.2. — *Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier non ramifié tel que $N(\mathfrak{p}) = p$ et $k \geqslant 1$. Si $(g_1, g_2, p) = 1$, alors on a*

$$E^{(1)}\left(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k\right) = \begin{cases} (p-1)\, p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^k \mid g_2 - g_1\sqrt[3]{2}, \\ -p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-1} \mid g_2 - g_1\sqrt[3]{2} \text{ et } \mathfrak{p}^k \nmid g_2 - g_1\sqrt[3]{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, si $(g_1,g_2,p^k)=p^{k_0}$ *avec* $k_0<k$, *alors on a*

$$E^{(1)}\left(g_1,g_2;\mathfrak{p}^k\right)=p^{k_0}E^{(1)}\left(\frac{g_1}{p^{k_0}},\frac{g_2}{p^{k_0}},\mathfrak{p}^{k-k_0}\right). \tag{3.2}$$

Ces formules restent valables lorsque $p\in\{2,3\}$ *et* $k=1$.

Démonstration. — La preuve s'articule essentiellement autour d'un argument
développé par Greaves [12]. On remarque tout d'abord que

$$E^{(1)}\left(g_1,g_2;\mathfrak{p}^k\right)=\sum_{1\leqslant m\leqslant p^k}N^{(1)}\left(\mathfrak{p}^k,m\right)\mathrm{e}\left(\frac{m}{p^k}\right)$$

où $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k,m)$ désigne le nombre de couples (n_1,n_2) modulo p^k tels que

$$(n_1,n_2,p)=1,\quad \mathfrak{p}^k\mid n_1+n_2\sqrt[3]{2}\quad\text{et}\quad g_1n_1+g_2n_2\equiv m\pmod{p^k}.$$

Pour tout couple (m,m') satisfaisant l'égalité de pgcd $(m,p^k)=(m',p^k)$, il existe un entier λ premier à p tel que $m'\equiv\lambda m\pmod{p^k}$. Ainsi, la relation

$$(n_1\pmod{p^k},n_2\pmod{p^k})\to(\lambda n_1\pmod{p^k},\lambda n_2\pmod{p^k})$$

définit une bijection, d'où $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k,m)=N^{(1)}(\mathfrak{p}^k,m')$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}E^{(1)}\left(g_1,g_2;\mathfrak{p}^k\right)&=\sum_{0\leqslant j\leqslant k}N^{(1)}\left(\mathfrak{p}^k,p^j\right)\sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant p^{k-j}\\ \left(\lambda,p^{k-j}\right)=1}}\mathrm{e}\left(\frac{\lambda}{p^{k-j}}\right)\\ &=N^{(1)}\left(\mathfrak{p}^k,p^k\right)-N^{(1)}\left(\mathfrak{p}^k,p^{k-1}\right).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Les rôles de g_1 et g_2 étant symétriques, l'hypothèse $(g_1,g_2,p)=1$ permet de supposer sans perte de généralité que $(g_1,p)=1$. Il s'ensuit que $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k,p^k)$ est égal au cardinal de l'ensemble

$$\left\{1\leqslant n_1,n_2\leqslant p^k:(n_2,p)=1,\mathfrak{p}^k\mid n_1+n_2\sqrt[3]{2},n_1\equiv-g_2n_2g_1^{-1}\,(\mathrm{mod}\;p^k)\right\}$$

où g_1^{-1} désigne la solution modulo p^k du système $g_1g_1^{-1}\equiv1\pmod{p^k}$, d'où l'on déduit que

$$N^{(1)}\left(\mathfrak{p}^k,p^k\right)=\begin{cases}(p-1)p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^k\mid g_2-g_1\sqrt[3]{2},\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{3.4}$$

De manière similaire, puisque p n'est pas ramifié, on a

$$N^{(1)}\left(\mathfrak{p}^k,p^{k-1}\right)=\#\left\{1\leqslant n_1,n_2\leqslant p^k:\ \begin{array}{l}(n_2,p)=1,\\ \mathfrak{p}^k\mid p^{k-1}-n_2(g_2-g_1\sqrt[3]{2}),\\ n_1g_1\equiv p^{k-1}-g_2n_2\pmod{p^k}\end{array}\right\}$$

$$=\begin{cases}p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-1}\mid g_2-g_1\sqrt[3]{2} \text{ et } \mathfrak{p}^k\nmid g_2-g_1\sqrt[3]{2},\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\tag{3.5}$$

La formule pour $E^{(1)}(g_1,g_2;\mathfrak{p}^k)$ dans le cas $(g_1,g_2,p)=1$ est une simple conséquence de (3.3), (3.4) et (3.5).

Supposons à présent que $(g_1,g_2,p^k)=p^{k_0}$. Sous l'hypothèse $k_0<k$, on a

$$E^{(1)}\left(g_1,g_2;\mathfrak{p}^k\right)=\sum_{\substack{1\leqslant n_1',n_2'<p^{k-k_0}\\ (n_1',n_2',p)=1}}\mathrm{e}\left(\frac{\frac{g_1}{p^{k_0}}n_1'+\frac{g_2}{p^{k_0}}n_2'}{p^{k-k_0}}\right)N\left(n_1',n_2',\mathfrak{p}^k,p^{k_0}\right)$$

où $N(n_1',n_2',\mathfrak{p}^k,p^{k_0})$ désigne le nombre de couples (n_1,n_2) modulo p^k tels que

$$(n_1,n_2)\equiv(n_1',n_2')\pmod{p^{k-k_0}}\qquad\text{et}\qquad \mathfrak{p}^k\mid n_1+n_2\sqrt[3]{2}.$$

Puisque $\mathfrak{p}$ n'est pas ramifié, il s'agit de compter les couples (n_1^*,n_2^*) modulo p_0^k tels que $\mathfrak{p}^k\mid(n_1'+n_1^*p^{k-k_0})+(n_2'+n_2^*p^{k-k_0})\sqrt[3]{2}$, d'où l'égalité

$$N(n_1',n_2',\mathfrak{p}^k,p^{k_0})=\begin{cases}p^{k_0} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-k_0}\mid n_1'+n_2'\sqrt[3]{2}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

qui permet d'obtenir la relation (3.2). □

Démonstration du lemme 3.1. — Définissons les entiers k_0 et k_1 par les relations $(g_1,g_2,p^k)=p^{k_0}$, $\mathfrak{p}^{k_1}\mid(g_2-g_1\sqrt[3]{2})$ et $\mathfrak{p}^{k_1+1}\nmid(g_2-g_1\sqrt[3]{2})$, de sorte que $k_0\leqslant k_1$. Au vu des hypothèses sur $\mathfrak{p}$, il vient

$$E\left(g_1,g_2;\mathfrak{p}^k\right)=\sum_{0\leqslant j\leqslant k}\sum_{\substack{1\leqslant n_1,n_2\leqslant p^k\\ \left(n_1,n_2,p^k\right)=p^j\\ \mathfrak{p}^k\mid n_1+n_2\sqrt[3]{2}}}\mathrm{e}\left(\frac{g_1n_1+g_2n_2}{p^k}\right)$$

$$=1+\sum_{1\leqslant j\leqslant k}E^{(1)}\left(g_1,g_2;\mathfrak{p}^j\right).\tag{3.6}$$

Si $1\leqslant j\leqslant k_0$, on observe que

$$E^{(1)}\left(g_1,g_2;\mathfrak{p}^j\right)=\#\left\{1\leqslant n_1,n_2\leqslant p^j,(n_1,n_2,p)=1,\mathfrak{p}^j\mid n_1+n_2\sqrt[3]{2}\right\}$$

$$=(p-1)p^{j-1}.\tag{3.7}$$

Dans le cas où $k_0 < j \leqslant k$, on applique le lemme 3.2 pour obtenir que

$$E^{(1)}\left(g_1,g_2;\mathfrak{p}^j\right)=\begin{cases}(p-1)\,p^{j-1} & \text{si } j\leqslant k_1,\\ -p^{k_1} & \text{si } j=k_1+1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{3.8}$$

La combinaison des formules (3.6), (3.7) et (3.8) entraîne alors la relation

$$E\left(g_1,g_2;\mathfrak{p}^k\right)=\begin{cases}p^k & \text{si } k\leqslant k_1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{3.9}$$

□

3.1. Niveau de répartition de $\mathcal{A}$

Dans ce paragraphe, on cherche des estimations, en moyenne sur $\mathfrak{i}$, du cardinal de

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{i}} := \{\mathfrak{j}\in\mathcal{A} : \mathfrak{i}\mid\mathfrak{j}\}.$$

Dans le lemme 3.2 de [18], de tels résultats sont obtenus en moyenne sur les idéaux $\mathfrak{i}$ sans facteur carré. Nous généralisons ici (voir le lemme 3.4 *infra*) la démonstration de Heath-Brown [18, paragraphe 5] à des idéaux quelconques en utilisant les estimations de sommes d'exponentielles du paragraphe précédent.

Omettant dans un premier temps la condition $(n_1,n_2)=1$, étudions, pour tous réels x_1,x_2 et $t\geqslant 1$, le cardinal de l'ensemble $\mathcal{S}(t,x_1,x_2;\mathfrak{i})$, noté encore $\mathcal{S}(\mathfrak{i})$ et défini par

$$\mathcal{S}(\mathfrak{i}) := \left\{(n_1,n_2) : x_i < n_i \leqslant x_i+t \text{ pour } i=1,2 \text{ et } \mathfrak{i}\mid n_1+n_2\sqrt[3]{2}\right\}.$$

En partitionnant cet ensemble en classes de congruence modulo $N(\mathfrak{i})$, on peut écrire (voir [18, formule (5.2)]), pour tout idéal admissible $\mathfrak{i}$,

$$\begin{aligned}\#\mathcal{S}(\mathfrak{i}) &= \frac{E(0,0;\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})^2}\left(t^2+O(t)\right)\\ &\quad+O\left(\sum_{\substack{(g_1,g_2)\neq(0,0)\\ |g_1|,|g_2|\leqslant\frac{N(\mathfrak{i})}{2}}}\frac{|E(g_1,g_2;\mathfrak{i})|}{N(\mathfrak{i})^2}\min\left(t,\frac{N(\mathfrak{i})}{|g_1|}\right)\min\left(t,\frac{N(\mathfrak{i})}{|g_2|}\right)\right).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Le terme d'erreur, relatif aux fréquences non nulles de (3.10), est estimé dans le lemme suivant, analogue de [18, Lemma 5.1].

Lemme 3.3. — *Soient $B \geqslant 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $c(B) \geqslant 0$ tel que, uniformément en $x_1, x_2 \geqslant 0$, $t \geqslant 1$ et $D \geqslant 1$, on ait*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{i} \text{ admissible} \\ D < N(\mathfrak{i}) \leqslant 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^B \left| \#\mathcal{S}(\mathfrak{i}) - \frac{t^2}{N(\mathfrak{i})} \right| \ll (t+D)(\log(2D))^{c(B)}.$$

Démonstration. — La démonstration est calquée sur [18, Lemma 5.1], en utilisant cette fois-ci le lemme 3.1 pour estimer la contribution des sommes $E(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ lorsque $(g_1, g_2) \neq (0,0)$. □

Il est possible de relier le cardinal de $\mathcal{S}(\mathfrak{i})$ à celui de $\mathcal{A}_{\mathfrak{i}}$ par un argument de convolution, à l'image de la formule (5.3) de [18]. Remarquons pour cela que la formule d'inversion de Mœbius permet d'écrire la relation

$$\#\mathcal{A}_{\mathfrak{i}} = \sum_d \mu(d) \#\mathcal{S}\left(\frac{\eta x}{d}, \frac{N_1 \eta x}{d}, \frac{N_2 \eta x}{d}; \frac{\mathfrak{i}}{(\mathfrak{i}, d)}\right).$$

Au vu du lemme 3.3, on peut ainsi espérer approcher, pour tout idéal admissible $\mathfrak{i}$, le cardinal de $\mathcal{A}_{\mathfrak{i}}$ par

$$\sum_d \mu(d) \frac{\eta^2 x^2}{d^2 N\left(\frac{\mathfrak{i}}{(\mathfrak{i},d)}\right)} = \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \frac{\alpha(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}$$

où α est la fonction à support sur les idéaux admissibles définie par

$$\alpha(\mathfrak{i}) := \prod_{p \mid N(\mathfrak{i})} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}. \tag{3.11}$$

Ceci suggère d'écrire

$$\#\mathcal{A}_{\mathfrak{i}} = \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \frac{\alpha(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + r(\mathcal{A}, \mathfrak{i})$$

où

$$|r(\mathcal{A}, \mathfrak{i})| \leqslant \sum_d \mu^2(d) \left| \#\mathcal{S}\left(\frac{\eta x}{d}, \frac{N_1 \eta x}{d}, \frac{N_2 \eta x}{d}; \frac{\mathfrak{i}}{(\mathfrak{i}, d)}\right) - \frac{\eta^2 x^2}{d^2 N\left(\frac{\mathfrak{i}}{(\mathfrak{i},d)}\right)} \right|.$$

Le lemme suivant, extension de [18, Lemma 3.2], montre que l'on a effectivement le niveau de répartition attendu.

Lemme 3.4. — *Soient $B \geqslant 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $c(B) \geqslant 0$ tel que, uniformément en $x \geqslant 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $1 \leqslant D \leqslant x^2$, on ait*

$$\sum_{D < N(\mathfrak{i}) \leqslant 2D} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^B \left| \#\mathcal{A}_{\mathfrak{i}} - \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \frac{\alpha(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \right| \ll \left(x^{3/2} + x D^{1/2}\right) (\log x)^{c(B)}.$$

Démonstration. — Puisque α est à support sur les idéaux admissibles et compte tenu du lemme 2.2, il suffit de considérer les idéaux $\mathfrak{i}$ admissibles. Le résultat s'obtient en reproduisant la démonstration de [18, Lemma 3.2], la condition $N(\mathfrak{i})$ sans facteur carré étant remplacée par $\mathfrak{i}$ admissible et le lemme 3.3 fournissant l'analogue de [18, Lemma 5.1]. □

Considérons enfin le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{i},d} := \left\{\mathfrak{j} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{i}} : d \mid N\left(\mathfrak{j}\mathfrak{i}^{-1}\right)\right\}$$

où d est sans facteur carré. Suivant l'argument développé pour obtenir la formule (5.8) de [18], le principe d'inclusion-exclusion permet d'écrire la formule

$$\mu(d) \sum_{\substack{\mathfrak{j}_1 \mid (\mathfrak{j}_2, d) \\ d \mid N(\mathfrak{j}_1)}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \mid N(\mathfrak{j}_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.12}$$

Compte tenu du lemme 3.4, la relation (3.12) suggère d'écrire, pour tout idéal admissible $\mathfrak{i}$,

$$\#\mathcal{A}_{\mathfrak{i},d} = \mu(d) \sum_{\substack{\mathfrak{j} \mid d \\ d \mid N(\mathfrak{j})}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \#\mathcal{A}_{\mathfrak{i}\mathfrak{j}} = \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \frac{\alpha(\mathfrak{i})\xi(\mathfrak{i}, d)}{N(\mathfrak{i})} + r(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, d) \tag{3.13}$$

où

$$\xi(\mathfrak{i}, d) = \mu(d) \sum_{\substack{\mathfrak{j} \mid d \\ d \mid N(\mathfrak{j})}} \frac{\mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})\alpha(\mathfrak{i}\mathfrak{j})}{\alpha(\mathfrak{i})N(\mathfrak{j})} \tag{3.14}$$

et

$$|r(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, d)| \leqslant \sum_{\substack{\mathfrak{j} \mid d \\ d \mid N(\mathfrak{j})}} \mu^2(d) \left| \#\mathcal{A}_{\mathfrak{i}\mathfrak{j}} - \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \frac{\alpha(\mathfrak{i}\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{j})} \right|.$$

Il s'ensuit que, si $\mathfrak{i}$ est admissible, la fonction arithmétique $\xi(\mathfrak{i}, \cdot)$ est multiplicative et à support sur les entiers sans facteur carré. On a notamment par (3.11) la formule

$$\xi(\mathfrak{i}, p) = \begin{cases} \frac{\nu_p}{1+p} & \text{si } p \nmid N(\mathfrak{i}), \\ \frac{1}{p} & \text{si } p \mid N(\mathfrak{i}) \text{ et } p \geqslant 5, \\ 0 & \text{si } p \mid N(\mathfrak{i}) \text{ et } p \in \{2, 3\}. \end{cases} \tag{3.15}$$

Dans le cas où $\mathfrak{i} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, on pose $\xi(d) := \xi(\mathcal{O}_{\mathbf{K}}, d)$ pour tout entier $d \geqslant 1$. Les termes de reste $r(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, d)$ sont estimés directement à l'aide du lemme 3.4 dans le lemme suivant, analogue de [18, Lemma 2.1].

Lemme 3.5. — *Soit $B \geqslant 0$. Il existe $c(B) \geqslant 0$ tel que, uniformément pour $x \geqslant 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, et $1 \leqslant D \leqslant x^2$, on ait*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{i},d \\ D<N(\mathfrak{i})d\leqslant 2D}} \mu(d)^2\tau(N(\mathfrak{i})d)^B \left|r(\mathcal{A},\mathfrak{i},d)\right| \ll \left(x^{3/2}+xD^{1/2}\right)(\log x)^{c(B)}.$$

3.2. Niveau de répartition de $\mathcal{B}$

Par analogie à $\mathcal{A}_\mathfrak{i}$, on considère dans ce paragraphe le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{B}_\mathfrak{i} := \{\mathfrak{j} \in \mathcal{B} : \mathfrak{i} \mid \mathfrak{j}\}.$$

L'étude de la répartition des idéaux de $\mathcal{O}_\mathbf{K}$ se base sur le résultat suivant, dû à Weber.

Théorème 3.6 ([27]). — *Uniformément pour $x \geqslant 1$, on a*

$$\#\left\{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(\mathfrak{j}) \leqslant x\right\} = \lambda_\mathbf{K} x + O\left(x^{2/3}\right)$$

où $\lambda_\mathbf{K} := \frac{\pi \log \varepsilon_0}{\sqrt{27}}$.

On définit

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{i},d} := \left\{\mathfrak{j} \in \mathcal{B}_\mathfrak{i} : d \mid N(\mathfrak{j}\mathfrak{i}^{-1})\right\}.$$

L'estimation de Type I suivante, relative à $\mathcal{B}_{\mathfrak{i},d}$, est une généralisation du lemme 2.2 de [18] qui suggère décrire

$$\#\mathcal{B}_{\mathfrak{i},d} = \lambda_\mathbf{K}\frac{c(N_1,N_2)\eta x^3}{N(\mathfrak{i})}\beta(d) + r(\mathcal{B},\mathfrak{i},d) \tag{3.16}$$

où β est la fonction multiplicative à support sur les entiers sans facteur carré définie par

$$\beta(p) = 1 - \prod_{\mathfrak{p}\mid p}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right).$$

Lemme 3.7. — *Soit $B \geqslant 0$. Il existe $c(B) \geqslant 0$ tel que, uniformément pour $x \geqslant 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $D \geqslant 1$ et $\mathfrak{i}$ un idéal de $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, on ait*

$$\sum_{D<d\leqslant 2D} \tau(d)^B\mu(d)^2\left|r(\mathcal{B},\mathfrak{i},d)\right| \ll \frac{x^2D^{1/3}}{N(\mathfrak{i})^{2/3}}(\log(2D))^{c(B)}.$$

4. La fonction de densité σ

4.1. Définition et premières propriétés

Étant donnés un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathbf{N}$, un idéal $\mathfrak{i}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ et $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$, on considère le cardinal

$$S(\mathcal{D}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}) := \#\{\mathfrak{q} : \mathfrak{i}\mathfrak{q} \in \mathcal{D} \text{ et } N(\mathfrak{q}) \in \mathcal{C}\}. \tag{4.1}$$

En général, on ne peut pas espérer évaluer $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C})$ en utilisant uniquement les majorations de sommes de Type I obtenues dans la partie précédente en raison de l'incidence du phénomène de parité, mentionné en introduction.

À la suite des travaux de Heath-Brown, on cherche à montrer l'existence d'une constante $\sigma_0 > 0$ et d'une fonction de densité $\sigma : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \to \mathbf{R}$ telles que l'approximation

$$S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sigma_0 \eta}{c(N_1, N_2)x} \sigma(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}) \tag{4.2}$$

soit vraie, en moyenne sur les idéaux $\mathfrak{i}$ et pour une certaine classe d'ensembles d'entiers $\mathcal{C}$ inclus dans l'ensemble criblé $\mathcal{C}^-(x^\tau)$ où, pour tout paramètre réel $z \geqslant 1$,

$$\mathcal{C}^-(z) := \big\{d : P^-(d) > z\big\} \tag{4.3}$$

et $\tau := (\log\log x)^{-\varpi_0}$ avec ϖ_0 dans $]0,1[$ fixé.

Dans ce paragraphe, on obtient des valeurs heuristiques pour σ_0 et $\sigma(\mathfrak{i})$ en étudiant $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau))$ et $S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau))$. Au vu des estimations de sommes de Type I contenues dans les lemmes 3.5 et 3.7, l'application d'un lemme fondamental de crible (démarche effectuée en détail au paragraphe 6) suggère que l'on a

$$S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \frac{\alpha(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \prod_{p\leqslant x^\tau} (1 - \xi(\mathfrak{i}, p)) \tag{4.4}$$

et

$$S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_{\mathbf{K}} c(N_1, N_2) \frac{\eta x^3}{N(\mathfrak{i})} \prod_{p\leqslant x^\tau} (1 - \beta(p)). \tag{4.5}$$

L'étude de la singularité de $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ en $s = 1$ permet d'obtenir la formule (6.8) de [18], uniforme pour $t \geqslant 2$, à savoir

$$\prod_{p\leqslant t} (1 - \beta(p)) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \lambda_{\mathbf{K}}^{-1} \big(1 + O\big((\log t)^{-2}\big)\big). \tag{4.6}$$

La formule (3.15) et le théorème des idéaux premiers impliquent de même l'estimation suivante, valide uniformément pour $t \geqslant 2$,

$$\prod_{p \geqslant t} \left(1 - \frac{\nu_p}{1+p}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \left(1 + O\left((\log t)^{-2}\right)\right),$$

d'où l'on déduit la convergence du produit eulérien

$$\sigma_0 := \prod_{p} \left(1 - \frac{\nu_p}{1+p}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\right). \tag{4.7}$$

On observe également que la formule (3.15) implique les estimations uniformes pour $N(\mathfrak{i}) \leqslant 3x^3$ suivantes

$$\prod_{\substack{p > x^\tau \\ p \mid N(\mathfrak{i})}} (1 - \xi(\mathfrak{i}, p)) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{\substack{p > x^\tau \\ p \mid N(\mathfrak{i})}} (1 - \xi(p)) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right).$$

Sous réserve d'établir les formules (4.4) et (4.5), il s'ensuit alors la formule

$$S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \underset{x \to +\infty}{\sim} \eta^2 x^2 \sigma_0 \frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \prod_{p \leqslant x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

avec

$$\sigma(\mathfrak{i}) := \alpha(\mathfrak{i}) \prod_{p \mid N(\mathfrak{i})} (1 - \xi(\mathfrak{i}, p))\,(1 - \xi(p))^{-1}. \tag{4.8}$$

On observe en particulier, pour tout premier $p \geqslant 5$ et $k \geqslant 1$, la formule

$$\sigma^{\mathbf{Z}}\left(p^k\right) = \nu_p \left(\frac{p-1}{p+1}\right)\left(1 - \frac{\nu_p}{1+p}\right)^{-1} = \nu_p + O\left(\frac{1}{p}\right). \tag{4.9}$$

Finalement, au vu de la formule asymptotique (4.6), on a également

$$S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \underset{x \to +\infty}{\sim} c(N_1, N_2) \frac{\eta x^3}{N(\mathfrak{i})} \prod_{p \leqslant x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

ce qui justifie la pertinence de (4.2) lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{C}^-(x^\tau)$.

4.2. Ordres moyens de σh

Étudions l'ordre moyen $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$ défini par la formule (2.4) pour toute fonction arithmétique $h \in \mathcal{M}(w)$ où w est un complexe de module 1, c'est-à-dire h multiplicative, à valeur dans le disque unité et satisfaisant $h(p) = w$ pour tout premier p. D'une part, la preuve du théorème 1.3 repose en partie sur une estimation asymptotique de $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$. D'autre part, les majorations de $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$ que nous développons ici seront utilisées à de nombreuses reprises dans les parties 6 et 7 *infra*.

La formule (4.9) entraîne, uniformément pour p premier et dans la région $0 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant 1$, la formule

$$\frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(p)}{p^s} = \sum_{\mathfrak{p}|p} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} + O\left(\frac{1}{p^{2\mathrm{Re}(s)}}\right). \tag{4.10}$$

Il suit alors de (4.9) que la série $\mathcal{H}(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-w}$ où

$$\mathcal{H}(s) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(n)h(n)}{n^s}$$

peut-être prolongée en une fonction holomorphe dans le domaine complexe $\mathrm{Re}(s) > 1 - c(\log(|\mathrm{Im}(s)|+1))^{-1}$ pour une constante $c > 0$ convenable.

La méthode de Selberg–Delange (voir [26, Théorème 5.2] et [16, paragraphe 1.3]) permet d'établir le résultat central de ce paragraphe, à savoir la formule asymptotique de $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$ contenue dans la proposition suivante.

Proposition 4.1. — *On a, uniformément pour w un nombre complexe de module* 1, $h \in \mathcal{M}(w)$, $x \geqslant 2$ *et* $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,

$$M_{\sigma h}(\mathcal{B}) = c(N_1,N_2)\eta x^3 \,(3\log x)^{w-1} \left(\frac{\sigma(h)}{\Gamma(w)} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right) \tag{4.11}$$

où

$$\sigma(h) := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^w \times \left(1 + (1-\xi(p))^{-1}\left(\sum_{k \geqslant 1} \frac{h(p^k)}{p^k} \sum_{N(\mathfrak{i}) = p^k} \alpha(\mathfrak{i})\,(1-\xi(\mathfrak{i},p))\right)\right)$$

et $\alpha(\cdot)$ *et* $\xi(\,\cdot\,,\cdot\,)$ *sont définis respectivement par* (3.11) *et* (3.14).

On a en particulier $\sigma(\mathbf{1}) = \frac{6}{\pi^2\sigma_0}$ *et, uniformément pour* $x \geqslant 3$,

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \leqslant x} \frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} = \frac{6}{\pi^2\sigma_0} \log x + O\left(\log\log x\right). \tag{4.12}$$

Démonstration. — Au vu de ce qui précède, on peut appliquer la méthode de Selberg–Delange à $\sigma^{\mathbf{Z}}h$. Les formules (1.17) et (1.18) de [16] entraînent alors que l'on a, pour tout entier $N \geqslant 0$ fixé et uniformément en $|w| = 1$, $h \in \mathcal{M}(w)$ et $x \geqslant 2$,

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma^{\mathbf{Z}}(n)h(n) = x(\log x)^{w-1}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_k(h)}{\Gamma(w-k)(\log x)^k} + O_N\left(\frac{1}{(\log x)^{N+1}}\right)\right)$$

où les $\lambda_k(h)$ sont définis à l'aide du développement de Taylor en $s=1$

$$\frac{(s-1)^w\mathcal{H}(s)}{s} := \sum_{k\geqslant 0}\lambda_k(h)(s-1)^k. \tag{4.13}$$

En particulier, on a

$$\lambda_0(h) = \lambda_{\mathbf{K}}^w\ \mathcal{H}(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-w}\big|_{s=1} = \sigma(h),$$

ce qui permet de déduire (4.11) en prenant N assez grand devant c_0, compte tenu de l'estimation

$$\log\left(c(N_1,N_2)x^3\right) = 3\log x\left(1+O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right).$$

Avec le choix $h(n)=1$ pour tout entier $n\geqslant 1$, une sommation par parties entraîne directement la formule uniforme en $x\geqslant 3$ suivante

$$\sum_{N(\mathfrak{i})\leqslant x}\frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} = \sigma(\mathbf{1})\log x + O\left(\log\log x\right).$$

En utilisant la définition (3.14) et la formule d'inclusion-exclusion (3.12), on observe que, pour tout premier p, on a

$$\sum_{k\geqslant 1}\sum_{N(\mathfrak{i})=p^k}\frac{\alpha(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}(1-\xi(\mathfrak{i},p)) = -\sum_{k\geqslant 1}\sum_{N(\mathfrak{i})=p^k}\mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})\frac{\alpha(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} = \xi(p).$$

Au vu de la définition de $\sigma(h)$ et de σ_0, il s'ensuit que $\sigma(\mathbf{1}) = \frac{6}{\pi^2\sigma_0}$. □

Considérons à présent le cas $h = 1_{S(y)}$, où $S(y)$ désigne l'ensemble des entiers y-friables. Dans la proposition suivante (application de la méthode de Selberg–Delange friable développée par Hanrot, Tenenbaum et Wu [16]) nous obtenons une estimation de $M_{\sigma 1_{S(y)}}(\mathcal{B})$, étape essentielle en vue de démontrer le théorème 1.1.

Proposition 4.2. — *Soit $\varepsilon>0$. Uniformément pour $(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)$, $x\geqslant 3$ et $\exp(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}})\leqslant y\leqslant 3x^3$, on a*

$$M_{\sigma 1_{S(y)}}(\mathcal{B}) = \frac{6}{\pi^2\sigma_0}c(N_1,N_2)\eta x^3\rho\left(3u\right)\left(1+O\left(\log\log x\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right)$$

où $u := \frac{\log x}{\log y}$.

Démonstration. — Observons tout d'abord que, d'après (4.10), la série de Dirichlet engendrée par $\sigma^{\mathbf{Z}}$ est de la forme

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(n)}{n^s} = \mathcal{G}(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)$$

où $\mathcal{G}(s) := \sum_n \frac{g(n)}{n^s}$ est développable en un produit eulérien absolument convergent pour $\mathrm{Re}(s) > 1/2$. On peut alors reproduire *mutatis mutandis* les arguments du paragraphe 2.3 de [16] en remplaçant $\varrho_F(n)$ par $\sigma^{\mathbf{Z}}(n)$ pour obtenir, pour tout $\varepsilon > 0$, l'estimation

$$\sum_{P^+(n)\leqslant y} \frac{g(n)}{n^s} = \mathcal{G}(s) + O\left(\frac{1}{y^{1/2-\varepsilon}}\right)$$

uniformément dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1/2 + \varepsilon$. La fonction arithmétique $\sigma^{\mathbf{Z}}$ satisfait donc les hypothèses (1.7) et (1.10) de [16], ce qui permet d'appliquer [16, Théorèmes 1.1 et 1.2]. On en déduit, pour tout N fixé, l'existence de $C_N > 0$ tel que l'on ait, uniformément en $x \geqslant 3$, $\exp((\log\log x)^{5/3+\varepsilon}) \leqslant y \leqslant x$ et sous la condition

$$\left(0 < u < N+1 \Rightarrow u - \lfloor u \rfloor > C_N \frac{\log\log y}{\log y}\right),$$

la formule suivante

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)\leqslant y}} \sigma^{\mathbf{Z}}(n) = x\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_k(\mathbf{1})\rho^{(k)}(u)}{(\log y)^k} + O_N\left(\rho(u)\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)^{N+1}\right)\right)$$

où les $\lambda_k(\mathbf{1})$ sont définis par (4.13).

Compte tenu de l'estimation, valide pour tout $j \geqslant 0$ et uniforme en $0 \leqslant v \leqslant u$ suivante

$$\rho^{(j)}(u-v) \ll \log(u+1)^j \rho(u) \exp\left(O(v\log(u+1))\right) \tag{4.14}$$

établie à la suite de [26, p. 507], le théorème des accroissements finis permet de montrer l'existence de N_0 (dépendant de c_0) et $C_{N_0} > 0$ tels que l'on ait, sous les conditions précédentes et uniformément pour les couples $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ satisfaisant

$$\left(0 < u_{N_1,N_2} < N_0 + 1 \Rightarrow u_{N_1,N_2} - \lfloor u_{N_1,N_2} \rfloor > C_{N_0} \frac{\log\log y}{\log y}\right), \tag{4.15}$$

où $u_{N_1,N_2} := \frac{\log(c(N_1,N_2)x^3)}{\log y}$, la relation

$$\begin{aligned} M_{\sigma 1_{S(y)}}(\mathcal{B}) &= \frac{6}{\pi^2\sigma_0} c(N_1,N_2)\eta x^3 \rho\left(3u_{N_1,N_2}\right)\left(1 + O\left(\frac{\log(u_{N_1,N_2}+1)}{\log y}\right)\right) \\ &= \frac{6}{\pi^2\sigma_0} c(N_1,N_2)\eta x^3 \rho\left(3u\right)\left(1 + O\left(\log\log x \frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Pour conclure la preuve de la proposition, il s'agit d'évaluer $M_{\sigma 1_{S(y)}}(\mathcal{B})$ pour les couples (N_1, N_2) ne vérifiant pas (4.15). Il suffit alors d'observer que

$$M_{\sigma 1_{S(y_1)}}(\mathcal{B}) \leqslant M_{\sigma 1_{S(y)}}(\mathcal{B}) \leqslant M_{\sigma 1_{S(y_2)}}(\mathcal{B})$$

dès que $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ et de remarquer que, pour $i \in \{1,2\}$, l'estimation (4.16) entraîne

$$M_{\sigma 1_{S(y_i)}}(\mathcal{B}) = \frac{6}{\pi^2\sigma_0} c(N_1,N_2)\eta x^3 \rho\,(3u)\left(1 + O\left(\log\log x \frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right)$$

avec le choix $y_i = y(\log x)^{-c_i}$ où c_i est une constante suffisamment grande.

□

5. Description de la méthode

Rappelons le choix de paramètre $\tau := (\log\log x)^{-\varpi_0}$ avec ϖ_0 fixé dans $]0,1[$ effectué précédemment. Dans [18, Section 3], Heath-Brown réalise le tour de force de montrer la validité de la formule

$$S\,(\mathcal{A},\mathcal{O}_{\mathbf{K}},\mathcal{C}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sigma_0\eta}{c(N_1,N_2)x} S\,(\mathcal{B},\mathcal{O}_{\mathbf{K}},\mathcal{C}), \tag{5.1}$$

pour certains ensembles $\mathcal{C}$ inclus dans

$$\mathcal{C}(m,n) := \left\{(r,s) : \begin{array}{c} \Omega(r) = \omega(r) = m \text{ et } \Omega(s) = \omega(s) = n, \\ P^-(rs) > x^\tau \text{ et } x^{1+\tau} < s \leqslant x^{\frac{3}{2}-\tau} \end{array}\right\}$$

où, pour $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ et $\mathfrak{i}$ un idéal, on étend la définition (4.1) par

$$S\,(\mathcal{D},\mathfrak{i},\mathcal{C}) = \#\left\{(\mathfrak{r},\mathfrak{s}) : \mathfrak{i}\mathfrak{r}\mathfrak{s} \in \mathcal{D} \text{ et } (N(\mathfrak{r}),N(\mathfrak{s})) \in \mathcal{C}\right\}.$$

En adaptant les arguments de Heath-Brown, on montrera dans le paragraphe 7 que la formule (5.1) se généralise sous la forme

$$S\,(\mathcal{A},\mathfrak{i},E\cap\mathcal{C}(m,n)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sigma_0\eta}{c(N_1,N_2)x}\sigma(\mathfrak{i}) S\,(\mathcal{B},\mathfrak{i},E\cap\mathcal{C}(m,n)) \tag{5.2}$$

uniformément pour les ensembles $E \in \mathcal{E}(m+n)$ définis de la manière suivante. Pour tout entier k, on désigne par $\mathcal{E}(k)$ l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ qui s'écrivent comme intersection d'ensembles de la forme

$$E(k;y,\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta},\prec) := \left\{(r,s) : \Omega(rs) = \omega(rs) = k, yP^{(\overrightarrow{\alpha})}(rs) \prec P^{(\overrightarrow{\beta})}(rs)\right\}$$

où $y > 0$, $\prec$ désigne $<$ ou $\leqslant$, $\overrightarrow{\alpha} := (\alpha_1,\ldots,\alpha_{l_1})$ avec $1 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_{l_1}$ et $\overrightarrow{\beta} := (\beta_1,\ldots,\beta_{l_2})$ avec $1 \leqslant \beta_1 < \cdots < \beta_{l_2}$ et, pour tout entier d, les termes $P^{(\overrightarrow{\alpha})}(d)$ et $P^{(\overrightarrow{\beta})}(d)$ sont les produits

$$P^{(\overrightarrow{\alpha})}(d) := P^{(\alpha_1)}(d)\cdots P^{(\alpha_{l_1})}(d) \tag{5.3}$$

et

$$P^{(\vec{\beta})}(d) := P^{(\beta_1)}(d) \cdots P^{(\beta_{l_2})}(d), \tag{5.4}$$

les $P^{(i)}(d)$ étant définis par la décomposition de d en facteurs premiers

$$d = P^{(1)}(d) \cdots P^{(\Omega(d))}(d) \quad \text{avec} \quad P^{(i)}(d) \leqslant P^{(i+1)}(d),$$

en utilisant la convention $P^{(\vec{\alpha})}(d) = 1$ (resp. $P^{(\vec{\beta})}(d) = 1$) si $l_1 = 0$ (resp. $l_2 = 0$)[(3)]. De tels ensembles apparaîtront naturellement au cours de l'argument qui conduit à la proposition 5.2 *infra*.

Soient w un complexe de module 1, y_1, y_2 deux nombres réels tels que $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$ et $y_2 > x^\tau$ et h un élément de l'ensemble $\mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ défini dans l'introduction. Dans la suite de ce paragraphe, on établit un raisonnement combinatoire qui ramène le problème de l'estimation de $M_h(\mathcal{A})$ (resp. $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$) à l'estimation des cardinaux $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, E \cap \mathcal{C}(m,n))$ (resp. $S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, E \cap \mathcal{C}(m,n))$) pour des ensembles $E \in \mathcal{E}(m+n)$ en vue d'utiliser (5.2).

Soit $\varpi_1 \in]0, \varpi_0[$. On rappelle que $\tau := (\log\log x)^{-\varpi_0}$ et on introduit un paramètre $\tau_1 \geqslant (\log\log x)^{-\varpi_1}$ suffisamment petit qui sera rendu explicite dans les applications du paragraphe 8, en vue de contrôler la contribution des idéaux $\mathfrak{j}$ satisfaisant $N(\mathfrak{j}^-(x^\tau)) \geqslant x^{\tau_1}$.

Considérons, pour un idéal admissible $\mathfrak{j}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ donné, la décomposition de sa partie x^τ-criblée en produits d'idéaux premiers

$$\mathfrak{j}^+(x^\tau) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k, \qquad N(\mathfrak{p}_i) \leqslant N(\mathfrak{p}_{i+1}), \quad i \in \{1, \ldots, k-1\}. \tag{5.5}$$

On effectue une partition de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ sous la forme $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$ où les $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}$ sont des ensembles d'idéaux définis par des conditions sur la norme de $\mathfrak{p}_k$ et $\mathfrak{p}_{k-1}$, à savoir

$$\begin{gathered}
\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} := \{\mathfrak{j} : x^2 < N(\mathfrak{p}_k)\}, \\
\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)} := \Big\{\mathfrak{j} : x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_k) \leqslant x^2\Big\}, \\
\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)} := \Big\{\mathfrak{j} : x < N(\mathfrak{p}_k) \leqslant x^{3/2}\Big\}, \\
\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)} := \Big\{\mathfrak{j} : N(\mathfrak{p}_k) \leqslant x \text{ et } x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k)\Big\}
\end{gathered}$$

et

$$\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)} := \Big\{\mathfrak{j} : N(\mathfrak{p}_k) \leqslant x \text{ et } N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leqslant x^{3/2}\Big\}.$$

(3) On peut ainsi considérer les inégalités du type $y \prec P^{(\vec{\alpha})}(d)$ et $P^{(\vec{\alpha})}(d) \prec y$.

Il s'ensuit que

$$M_h(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{5} M_h\left(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}\right) \text{ avec } M_h\left(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}\right) := \sum_{\mathfrak{j}\in\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}} h(\mathfrak{j}).$$

Pour $i \in \{2,\dots,5\}$, on peut remplacer le terme $M_h(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)})$ par une formule où interviennent des cardinaux de la forme $S(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(m,n))$ avec $\mathcal{C}^{(i)}(m,n)\subset\mathcal{C}(m,n)$.

Lemme 5.1. — *Pour tout $i\in\{2,\dots,5\}$ et uniformément en $x\geqslant 2$, w un complexe de module 1, y_1,y_2 deux réels tels que $y_1=1$ ou $y_1>x^\tau$ et $y_2>x^\tau$, $h\in\mathcal{M}(w;y_1,y_2)$ et $(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)$, on a*

$$\begin{aligned} M_h\left(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}\right) = &\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} h(\mathfrak{i})\sum_{m,n} w^{m+n} S\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(m,n)\right) \\ &+ O(\Theta(\mathcal{A};|h|,x^\tau,x^{\tau_1}) + \Delta_0(\mathcal{A};|h|) \\ &\qquad + \Delta_1(\mathcal{A};|h|) + \Delta_2(\mathcal{A};|h|)) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &:= \left\{1\leqslant m\leqslant x^{\tau_1} \text{ et } P^+(m)\leqslant x^\tau\right\}, \\ \mathcal{C}^{(i)}(m,n) &= \mathcal{C}(m,n)\cap\mathcal{C}^{(i)}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

avec

$$\mathcal{C}^{(2)} := \begin{cases} \left\{(r,s) : \begin{array}{l} y_1 < P^-(s), P^+(s)\leqslant P^-(r), \\ P^+(r)\leqslant y_2 \end{array}\right\} & \text{si } m=1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}^{(3)} := \begin{cases} \left\{(r,s) : \begin{array}{l} y_1 < P^-(r), P^+(r)\leqslant P^-(s), \\ P^+(s)\leqslant y_2 \end{array}\right\} & \text{si } n=1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}^{(4)} := \begin{cases} \left\{(r,s) : \begin{array}{l} y_1 < P^-(s), P^+(s)\leqslant P^-(r), \\ P^+(r)\leqslant \max(x^{1-\tau_1},y_2) \end{array}\right\} & \text{si } m=2, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}^{(5)} := \left\{(r,s) : \begin{array}{l} y_1 < P^-(r), P^+(r)\leqslant P^-(s), \\ P^+(s)\leqslant \max(x^{1-\tau_1},y_2), \frac{s}{P^-(s)}\leqslant x^{1+\tau} \end{array}\right\}$$

$$\Theta\left(\mathcal{A};|h|,x^{\tau},x^{\tau_1}\right) := \sum_{\substack{\mathfrak{j}\in\mathcal{A}\\ N(\mathfrak{j}^-(x^{\tau}))>x^{\tau_1}}} |h(\mathfrak{j})|,$$

(5.7) $$\Delta_0(\mathcal{A};|h|) := \sum_{\substack{\mathfrak{j}\in\mathcal{A}\\ N(\mathfrak{j})\in\Upsilon\left(x^{2\tau}\right)}} |h(\mathfrak{j})| \text{ avec } \Upsilon(z) := \bigcup_{p}\bigcup_{\substack{k\geqslant 2\\ p^k>z}} p^k\mathbf{Z}.$$

$$\Delta_1\left(\mathcal{A};|h|\right) := \max_{Y>x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})|\Delta_1\left(\mathcal{A},\mathfrak{i};Y\right)$$

avec

(5.8)
$$\Delta_1\left(\mathcal{A},\mathfrak{i};Y\right) := \sum_{Y<N(\mathfrak{p})\leqslant Yx^{\tau_1}} S\left(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{p},\mathcal{C}^-\left(\max(x^{\tau},\min(y_1,x^{1/2-\tau_1}))\right)\right).$$

et

$$\Delta_2\left(\mathcal{A};|h|\right) := \max_{Y>x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})|\Delta_2\left(\mathcal{A},\mathfrak{i};Y\right)$$

avec

(5.9)
$$\Delta_2\left(\mathcal{A},\mathfrak{i};Y\right) := \sum_{\substack{x^{1/2}<N(\mathfrak{p}_1)\leqslant N(\mathfrak{p}_2)\\ Y<N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)\leqslant Yx^{\tau_1}}} S\left(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2,\mathcal{C}^-\left(\max(x^{\tau},\min(y_1,x^{1/2}))\right)\right).$$

Démonstration. — En isolant les idéaux $\mathfrak{j}$ de $\mathcal{A}$ tels que $\mathfrak{j}^+(x^{\tau})$ possède au moins un facteur carré, on peut écrire, pour tout $i \in \{2,\ldots,5\}$,

$$M_h\left(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}\right) = \sum_{P^+(N(\mathfrak{i}))\leqslant x^{\tau}} h(\mathfrak{i}) \sum_{k\geqslant 0} w^k S\left(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)},\mathfrak{i},E_k\cap\mathcal{C}^-\left(x^{\tau}\right)\right) + O\left(\Delta_0(\mathcal{A};|h|)\right)$$

où

$$E_k := \left\{(r,s) : \Omega(rs) = \omega(rs) = k, y_1 < P^-(rs), P^+(rs) \leqslant y_2\right\}.$$

Soit $\mathfrak{j}$ un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}$. En utilisant la décomposition (5.5) et sous l'hypothèse supplémentaire que $N(\mathfrak{j}^-(x^{\tau})) \leqslant x^{\tau_1}$, l'encadrement

$$x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_k) \leqslant x^2$$

entraîne largement que

$$x^{1-2\tau_1} \ll N(\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{k-1}) \ll x^{3/2}.$$

On peut majorer par $\Delta_1(\mathcal{A};|h|)$ la contribution des idéaux qui vérifient

$$x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_k) \leqslant x^{3/2+\tau_1} \quad \text{ou} \quad x^{2-2\tau_1} < N(\mathfrak{p}_k) \leqslant x^2$$

et, en posant $r = N(\mathfrak{p}_k)$, $s = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1})$ et $n = k-1$, il suit

$$M_h\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}\right) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{n \geqslant 0} w^{1+n} S\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(2)}(1,n)\right) + O\left(\Theta\left(\mathcal{A}; |h|, x^{\tau}, x^{\tau_1}\right) + \Delta_0(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_1\left(\mathcal{A}; |h|\right)\right).$$

De même, on peut écrire, en posant maintenant $s = N(\mathfrak{p}_k)$, la formule

$$M_h\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)}\right) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{m \geqslant 0} w^{m+1} S\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(3)}(m,1)\right) + O\left(\Theta\left(\mathcal{A}; |h|, x^{\tau}, x^{\tau_1}\right) + \Delta_0(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_1\left(\mathcal{A}; |h|\right)\right)$$

où la contribution des idéaux satisfaisant les bornes

$$x < N(\mathfrak{p}_k) \leqslant x^{1+\tau} \quad \text{ou} \quad x^{3/2-\tau} < N(\mathfrak{p}_k) \leqslant x^{3/2}$$

est là encore majorée par $\Delta_1(\mathcal{A}; |h|)$.

D'autre part, en écrivant $s = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-2})$, il vient

$$M_h\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)}\right) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{n \geqslant 0} w^{2+n} S\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(4)}(2,n)\right) + O(\Theta(\mathcal{A}; |h|, x^{\tau}, x^{\tau_1}) + \Delta_0(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|))$$

où l'on a majoré par $\Delta_1(\mathcal{A}; |h|)$ la contribution des idéaux vérifiant

$$x^{1-\tau_1} < N(\mathfrak{p}_k) \leqslant x$$

et par $\Delta_2(\mathcal{A}; |h|)$ celle des idéaux satisfaisant

$$x^{1/2} < N(\mathfrak{p}_{k-1}) < N(\mathfrak{p}_k) \quad \text{ou} \quad x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leqslant x^{3/2+\tau_1}.$$

Considérons enfin $\mathfrak{j} \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$. Si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) > x^{1+\tau}$, alors on a trivialement

$$x^{1+\tau} < N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leqslant x^{3/2}$$

et l'on majore la contribution des idéaux $x^{3/2-\tau} < N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leqslant x^{3/2}$ par $\Delta_2(\mathcal{A}; |h|)$. D'autre part, si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leqslant x^{1+\tau}$ et $N(\mathfrak{p}_{k-2}) \leqslant x^{1/2-2\tau}$, alors l'hypothèse de majoration $N(\mathfrak{j}^-(x^{\tau})) \leqslant x^{\tau_1}$ implique l'existence d'un indice $j \geqslant 2$ tel que

$$N(\mathfrak{p}_{k-j+1} \cdots \mathfrak{p}_k) \leqslant x^{1+\tau} < N(\mathfrak{p}_{k-j} \cdots \mathfrak{p}_k) \leqslant x^{3/2-\tau}.$$

Enfin, si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leqslant x^{1+\tau}$ et $N(\mathfrak{p}_{k-2}) > x^{1/2-2\tau}$, on a les inégalités

$$x^{1/2-2\tau} < N(\mathfrak{p}_{k-2}) \leqslant N(\mathfrak{p}_{k-1}) \leqslant N(\mathfrak{p}_k) \leqslant x^{1/2+3\tau}$$

ce qui permet de majorer la contribution de tels idéaux par $\Delta_1(\mathcal{A};|h|)$. En posant $s=N(\mathfrak{p}_{k-j}\cdots\mathfrak{p}_k)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}M_h\left(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}\right)=\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}h(\mathfrak{i})\sum_{m,n\geqslant 0}w^{m+n}S\left(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(5)}(m,n)\right)\\+O(\Theta(\mathcal{A};|h|,x^{\tau},x^{\tau_1})+\Delta_0(\mathcal{A};|h|)\\+\Delta_1(\mathcal{A};|h|)+\Delta_2(\mathcal{A};|h|)).\quad\square\end{aligned}$$

Le traitement de $M_h(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)})$ nécessite davantage de travail pour faire apparaître des sous-ensembles de $\mathcal{C}(m,n)$. Au vu du lemme 2.3, on a

$$N(\mathfrak{p}_k)=\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{j}^-(x^{\tau})\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{k-1})}\left(1+O\left(\eta^{1/4}\right)\right)$$

ce qui suggère de remplacer la condition $N(\mathfrak{p}_k)\leqslant y_2$ par l'inégalité

$$N(\mathfrak{j}^-(x^{\tau})\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{k-1})>\frac{c(N_1,N_2)x^3}{y_2}.$$

Dans la mesure où les éléments de $\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}$ satisfont $N(\mathfrak{p}_k)>x^2$, on peut écrire, en posant $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{k-1}$,

$$\begin{aligned}M_h\left(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}\right)=\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}h(\mathfrak{i})\sum_{k}w^k\sideset{}{^{\mathfrak{i},k}}\sum_{\mathfrak{q}}\pi(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{q})\\+O(\Theta\left(\mathcal{A};|h|,x^{\tau},x^{\tau_1}\right)+\Delta_0(\mathcal{A};|h|)\\+\Delta_1(\mathcal{A};|h|)+\Delta_2(\mathcal{A};|h|))\end{aligned}$$

où la sommation $\sum^{\mathfrak{i},k}$ porte sur les idéaux $\mathfrak{q}$ à $k-1$ facteurs premiers satisfaisant $\frac{c(N_1,N_2)x^3}{y_2N(\mathfrak{i})}<N(\mathfrak{q})\leqslant x^{1-4\tau_1}$ et $P^-(N(\mathfrak{q}))>\max(x^{\tau},y_1)$, et

$$\pi(\mathcal{A},\mathfrak{l}):=\#\left\{\mathfrak{p}\text{ premier}:\mathfrak{l}\mathfrak{p}\in\mathcal{A}\right\}.$$

Pour estimer $\pi(\mathcal{A},\mathfrak{l})$, on reproduit le raisonnement combinatoire à l'origine du lemme 3.4 de [18]. En utilisant la notation (4.3), on peut itérer l'identité de Buchstab

$$\begin{aligned}S\left(\mathcal{A},\mathfrak{l},\mathcal{C}^-(z_1)\right)=S\left(\mathcal{A},\mathfrak{l},\mathcal{C}^-(z_2)\right)+\sum_{z_1<N(\mathfrak{p})\leqslant z_2}S\left(\mathcal{A},\mathfrak{l}\mathfrak{p},\mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p})\right)\\+O\left(\sum_{z_1<N(\mathfrak{p})\leqslant z_2}\sum_{k\geqslant 2}S\left(\mathcal{A},\mathfrak{l}\mathfrak{p}^k,\mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))\right)\right)\end{aligned}\tag{5.10}$$

pour obtenir la formule suivante, analogue des formules (4.3) et (4.4) de [19],

$$\begin{aligned}\pi(\mathcal{A},\mathfrak{l}) &= S\left(\mathcal{A},\mathfrak{l},\mathcal{C}^-\left(3x^{3/2}\right)\right)\\ &= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n T^{(n)}\left(\mathcal{A},\mathfrak{l}\right) + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n U^{(n)}(\mathcal{A},\mathfrak{l})\\ &\qquad - S_1(\mathcal{A},\mathfrak{l}) - S_2(\mathcal{A},\mathfrak{l}) + O\left(\#\left\{\mathfrak{j}\in\mathcal{A}_{\mathfrak{l}} : N(\mathfrak{j})\in\Upsilon\left(x^{2\tau}\right)\right\}\right)\end{aligned}$$

où

$$S_1(\mathcal{A},\mathfrak{l}) := \sum_{x^{1-\tau}<N(\mathfrak{p})\leqslant x^{1+\tau}} S(\mathcal{A},\mathfrak{l}\mathfrak{p},\mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))),$$

$$S_2(\mathcal{A},\mathfrak{l}) := \sum_{x^{3/2-\tau}<N(\mathfrak{p})\leqslant x^{3/2+\tau}} S(\mathcal{A},\mathfrak{l}\mathfrak{p},\mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))),$$

$$T^{(0)}(\mathcal{A},\mathfrak{l}) := S(\mathcal{A},\mathfrak{l},\mathcal{C}^-(x^\tau)),$$

$$T^{(n)}(\mathcal{A},\mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau<N(\mathfrak{p}_1)<\cdots<N(\mathfrak{p}_n)\leqslant x^{1-\tau}\\ N(\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n)\leqslant x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A},\mathfrak{l}\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n,\mathcal{C}^-(x^\tau))\ (n\geqslant 1), \tag{5.11}$$

$$U^{(1)}(\mathcal{A},\mathfrak{l}) := \sum_{x^{1+\tau}<N(\mathfrak{p})\leqslant x^{\frac{3}{2}-\tau}} S(\mathcal{A},\mathfrak{l}\mathfrak{p},C^-(N(\mathfrak{p})))$$

et

$$U^{(n)}(\mathcal{A},\mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau<N(\mathfrak{p}_1)<\cdots<N(\mathfrak{p}_n)\leqslant x^{1-\tau}\\ N(\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_n)\leqslant x^{1+\tau}<N(\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n)}} S(\mathcal{A},\mathfrak{l}\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n,\mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1)))\ (n\geqslant 2).$$

Le niveau de crible x^τ impliqué dans la définition de $T^{(n)}(\mathcal{A},\mathfrak{l})$ étant suffisamment petit, on étudiera la contribution de ces termes, en moyenne sur les idéaux $\mathfrak{l}$ tels que $N(\mathfrak{l})\leqslant x^{1-3\tau_1}$, au lemme 6.7 en utilisant le crible de Selberg.

Si $n\geqslant 4$, les conditions

$$x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \cdots < N(\mathfrak{p}_n) \leqslant x^{1-\tau}$$

et

$$N(\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_n)\leqslant x^{1+\tau} < N(\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n)$$

entraînent que

$$N(\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n)\leqslant x^{\frac{3}{2}-\tau}.$$

On peut évaluer la contribution de $U^{(n)}(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{q})$ lorsque $n\geqslant 4$ ou $n=1$ avec $N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}$ à l'aide de (5.2) puisque l'on peut écrire, en posant $m_1=k$, $s=N(\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n)$ et $r_1=N(\mathfrak{q})$,

$$\sum_k w^k\sum_{\mathfrak{q}}{}^{\mathfrak{i},k}U^{(n)}(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{q})=\sum_{\boldsymbol{m}}w^{m_1}S\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},n,\mathfrak{i})\right)\\ +O\left(\#\left\{\mathfrak{j}\in\mathcal{A}_{\mathfrak{i}}:N(\mathfrak{j})\in\Upsilon\left(x^{2\tau}\right)\right\}\right)$$

où $\boldsymbol{m}:=(m_1,m_2)$,

$$\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},n,\mathfrak{i}):=\begin{cases}\mathcal{C}((m_1-1,m_2),n)\cap\mathcal{C}_1^{(1,1)}(\mathfrak{i}) & \text{si } m_2=1,\\ \mathcal{C}((m_1-1,m_2),n)\cap\mathcal{C}_2^{(1,1)}(\mathfrak{i}) & \text{si } m_2\geqslant 2,\end{cases}\tag{5.12}$$

avec

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{m},n):=\left\{(r_1,r_2,s):\begin{array}{l}\omega(r_i)=\Omega(r_i)=m_i \text{ pour } i\in\{1,2\},\\ (r_1r_2,s)\in\mathcal{C}(m_1+m_2,n)\end{array}\right\}$$

et

$$\mathcal{C}_1^{(1,1)}(\mathfrak{i}):=\left\{(r_1,r_2,s):\begin{array}{l}P^-(r_1)>y_1,P^-(r_2)>s,\\ \frac{c(N_1,N_2)x^3}{y_2N(\mathfrak{i})}<r_1\leqslant x^{1-4\tau_1}\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{C}_2^{(1,1)}(\mathfrak{i}):=\left\{(r_1,r_2,s):\begin{array}{l}P^-(r_1)>y_1,P^-(r_2)>P^-(s),P^+(s)\leqslant x^{1-\tau},\\ \frac{s}{P^-(s)}\leqslant x^{1+\tau},\frac{c(N_1,N_2)x^3}{y_2N(\mathfrak{i})}<r_1\leqslant x^{1-4\tau_1}\end{array}\right\},$$

avec, pour tout $\mathcal{C}\subset\mathcal{C}(\boldsymbol{m},n)$, la notation

$$S\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}\right)=\#\left\{(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathfrak{s}):\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}\in\mathcal{A}\text{ et }(N(\mathfrak{r}_1),N(\mathfrak{r}_2),N(\mathfrak{s}))\in\mathcal{C}\right\}.$$

Si $n=2$ ou 3, l'inégalité $N(\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n)\leqslant x^{3/2-\tau}$ peut faire défaut. On s'inspire alors des identités (4.5) et (4.6) de [19] en écrivant

$$U^{(2)}(\mathcal{A},\mathfrak{l}):=U^{(2,1)}(\mathcal{A},\mathfrak{l})+U^{(2,2)}(\mathcal{A},\mathfrak{l})$$

et

$$U^{(3)}(\mathcal{A},\mathfrak{l}):=U^{(3,1)}(\mathcal{A},\mathfrak{l})+S_3(\mathcal{A},\mathfrak{l})$$

où

$$U^{(2,1)}(\mathcal{A},\mathfrak{l}):=\sum_{\substack{x^\tau<N(\mathfrak{p}_1)<N(\mathfrak{p}_2)\leqslant x^{1-\tau}\\ x^{1+\tau}<N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)\leqslant x^{\frac32-\tau}}}S(\mathcal{A},\mathfrak{l}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2,\mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1))),$$

$$U^{(2,2)}(\mathcal{A},\mathfrak{l}):=\sum_{\substack{x^\tau<N(\mathfrak{p}_1)<N(\mathfrak{p}_2)\leqslant x^{1-\tau}\\ x^{\frac32-\tau}<N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)}}S(\mathcal{A},\mathfrak{l}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2,\mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1))),$$

$$U^{(3,1)}(\mathcal{A},\mathfrak{l}):=\sum_{\substack{x^\tau<N(\mathfrak{p}_1)<N(\mathfrak{p}_2)<N(\mathfrak{p}_3)\leqslant x^{1-\tau}\\ N(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3)\leqslant x^{1+\tau}<N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3)\leqslant x^{\frac32-\tau}}}S(\mathcal{A},\mathfrak{l}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3,\mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1)))$$

et

$$S_3(\mathcal{A},\mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < N(\mathfrak{p}_2) < N(\mathfrak{p}_3) \leqslant x^{1-\tau} \\ N(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3) \leqslant x^{1+\tau} \\ N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3) > x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1))).$$

En remarquant que les conditions de sommation définissant $S_3(\mathcal{A},\mathfrak{l})$ impliquent

$$x^{1/2-2\tau} < N(\mathfrak{p}_1) \leqslant x^{1/2+\tau/2},$$

on a, pour $i \in \{1,2,3\}$, l'estimation

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{\frac{c(N_1,N_2)x^3}{y_2} < N(\mathfrak{q}) \leqslant x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > \max(x^\tau, y_1)}} S_i(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \ll \Delta_1(\mathcal{A};|h|).$$

où $\Delta_1(\mathcal{A};|h|)$ est défini au lemme 5.1.

D'autre part, on peut observer que

$$\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}{}^{\mathfrak{i},k} U^{(2,1)}(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{q}) = \sum_{\boldsymbol{m}} w^{m_1} S\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},2,\mathfrak{i})\right) + O\left(\#\left\{\mathfrak{j} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{i}} : N(\mathfrak{j}) \in \Upsilon\left(x^{2\tau}\right)\right\}\right)$$

et

$$\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}{}^{\mathfrak{i},k} U^{(3,1)}(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{q}) = \sum_{\boldsymbol{m}} w^{m_1} S\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},3,\mathfrak{i})\right) + O\left(\#\left\{\mathfrak{j} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{i}} : N(\mathfrak{j}) \in \Upsilon\left(x^{2\tau}\right)\right\}\right)$$

où $\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},2,\mathfrak{i})$ et $\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},3,\mathfrak{i})$ sont définis par (5.12).

Enfin, remarquons que, si un idéal $\mathfrak{j}$ intervient dans $U^{(2,2)}(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{q})$, alors $\mathfrak{j}$ est de la forme $\mathfrak{j} = \mathfrak{i}\mathfrak{q}\mathfrak{l}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ avec

$$x^{3/2-\tau} < N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leqslant x^{2-2\tau} \text{ et } P^-(N(\mathfrak{l})) > N(\mathfrak{p}_1).$$

Il s'ensuit que

$$x^{1-\tau_1} < N(\mathfrak{q}\mathfrak{l}) \leqslant 3x^{3/2+\tau}$$

ce qui permet d'écrire, en posant $r = N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$, $s_1 = N(\mathfrak{q})$, $s_2 = N(\mathfrak{l})$ et $n_1 = k$,

$$\sum_k w^k \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathfrak{q}}{}^{\mathfrak{i},k} U^{(2,2)}(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{q}) = \sum_{\boldsymbol{n}} w^{n_1} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} S\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(1)}(2,\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) + O\left(\Delta_0(\mathcal{A};|h|) + \Delta_2(\mathcal{A},|h|)\right)$$

où

$$\mathcal{C}^{(1)}(m, \boldsymbol{n}, \mathfrak{i}) := \mathcal{C}(m, (n_1 - 1, n_2)) \cap \mathcal{C}^{(1,2)}(\mathfrak{i}) \tag{5.13}$$

avec

$$\mathcal{C}(m, \boldsymbol{n}) := \left\{ (r, s_1, s_2) : \begin{array}{l} \omega(s_i) = \Omega(s_i) = n_i \text{ pour } i \in \{1, 2\}, \\ (r, s_1 s_2) \in \mathcal{C}(m, n_1 + n_2) \end{array} \right\}$$

et

$$\mathcal{C}^{(1,2)}(\mathfrak{i}) := \left\{ (r, s_1, s_2) : \begin{array}{l} P^+(r) < x^{1-\tau}, P^-(r) < P^-(s_2), \\ \frac{c(N_1, N_2)x^3}{y_2 N(\mathfrak{i})} < s_1 \leqslant x^{1-4\tau_1}, P^-(s_1) > y_1 \end{array} \right\}.$$

On déduit finalement de ce qui précède la formule

$$\begin{aligned} M_h\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}\right) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \Bigg(& \sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{i},k} \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \\ & + \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \sum_{\boldsymbol{m}} w^{m_1} S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m}, n, \mathfrak{i})\right) \\ & + \sum_{\boldsymbol{n}} w^{n_1} S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(2, \boldsymbol{n}, \mathfrak{i})\right) \Bigg) \\ & + O(\Theta(\mathcal{A}; |h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(\mathcal{A}; |h|) \\ & \qquad + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|)). \end{aligned}$$

L'argument développé ci-dessus s'adapte *mutatis mutandis* pour réécrire $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$ à l'aide de cardinaux de la forme $S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$. En l'absence d'un analogue du lemme 2.2 adapté aux idéaux de $\mathcal{B}$, il convient toutefois de tenir compte des idéaux $\mathfrak{j}$ tels que $p^2 \mid N(\mathfrak{j})$ avec $p > x^{\tau/3}$ en utilisant l'analogue de (5.10) pour $\mathcal{B}$.

Avant d'énoncer la proposition qui résume la discussion de cette partie, nous pouvons harmoniser les notations précédentes en définissant, pour $\boldsymbol{m} := (m_1, m_2)$, $\boldsymbol{n} := (n_1, n_2)$ et $\mathfrak{i}$ un idéal, l'ensemble $\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \mathfrak{i})$ par

$$\begin{cases} \left\{(r, 1, s, 1) : (r, s) \in \mathcal{C}^{(i)}(m_1, n_1)\right\} & \begin{array}{l} \text{si } 2 \leqslant i \leqslant 5 \\ \text{et } m_2 = n_2 = 0, \end{array} \\ \left\{(r_1, r_2, s, 1) : (r_1, r_2, s) \in \mathcal{C}^{(1)}((m_1, m_2), n_1, \mathfrak{i})\right\} & \begin{array}{l} \text{si } i = 1 \\ \text{et } n_2 = 0, \end{array} \\ \left\{(r, 1, s_1, s_2) : (r, s_1, s_2) \in \mathcal{C}^{(1)}(m_1, (n_1, n_2), \mathfrak{i})\right\} & \begin{array}{l} \text{si } i = 1 \\ \text{et } m_2 = 0, \end{array} \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

et, à la suite de (4.1), $S(\mathcal{D},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\cdot))$ désigne, pour $\mathcal{D}=\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$, le cardinal

$$\#\left\{(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathfrak{s}_1,\mathfrak{s}_2) : \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 \in \mathcal{D}, (N(\mathfrak{r}_1),N(\mathfrak{r}_2),N(\mathfrak{s}_1),N(\mathfrak{s}_2)) \in \mathcal{C}^{(i)}(\cdot)\right\}.$$

En vue de ce qui précède et de l'estimation

$$\sigma(\mathfrak{j}) = \sigma(\mathfrak{j}^-(x^\tau))\left(1+O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right)\right) \tag{5.14}$$

valide dès que $N(\mathfrak{j}) \leqslant 3x^3$, on obtient la proposition suivante.

Proposition 5.2. — *Uniformément en $x \geqslant 2$, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, $(N_1,N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w;y_1,y_2)$, on a l'estimation*

$$\begin{aligned} M_h(\mathcal{A}) = \frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x} M_{\sigma h} S(\mathcal{B})\left(1+O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right)\right) + O\,(T(|h|)+S(|h|) \\ +\Theta(|h|,x^\tau,x^{\tau_1}) + \Delta_0\,(|h|) + \Delta_1(|h|) + \Delta_2(|h|)) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} T(|h|) := \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{N(\mathfrak{q})\leqslant x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q}))>x^\tau}} \sum_{n\geqslant 0} \Bigg| T^{(n)}(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{q}) \\ - \frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x}\sigma(\mathfrak{i}) T^{(n)}(\mathcal{B},\mathfrak{i}\mathfrak{q}) \Bigg|, \end{aligned}$$

$T^{(n)}(\mathcal{A},\mathfrak{i})$ et $T^{(n)}(\mathcal{B},\mathfrak{i})$ étant définis par (5.11),

$$\begin{aligned} S(|h|) := \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{i=1}^{5} \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} \Bigg| S\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) \\ - \frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x}\sigma(\mathfrak{i}) S\left(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) \Bigg|, \end{aligned} \tag{5.15}$$

les $C^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})$ étant définis par (5.6), (5.12) *et* (5.13),

$$\Theta(|h|,x^\tau,x^{\tau_1}) := \sum_{\substack{\mathfrak{j}\in\mathcal{A} \\ N(\mathfrak{j}^-(x^\tau))>x^{\tau_1}}} |h(\mathfrak{j})| + \frac{\eta}{c(N_1,N_2)x} \sum_{\substack{\mathfrak{j}\in\mathcal{B} \\ N(\mathfrak{j}^-(x^\tau))>x^{\tau_1}}} \sigma(\mathfrak{j})|h(\mathfrak{j})|, \tag{5.16}$$

$$\Delta_0\,(|h|) := \sum_{\substack{\mathfrak{j}\in\mathcal{A} \\ N(\mathfrak{j})\in\Upsilon(x^{2\tau/3})}} |h(\mathfrak{j})| + \frac{\eta}{c(N_1,N_2)x} \sum_{\substack{\mathfrak{j}\in\mathcal{B} \\ N(\mathfrak{j})\in\Upsilon(x^{2\tau/3})}} \sigma(\mathfrak{j})|h(\mathfrak{j})|, \tag{5.17}$$

$$\Delta_1(|h|) := \max_{Y > x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \Big(\Delta_1(\mathcal{A}, \mathfrak{i}; Y) + \sigma(\mathfrak{i}) \frac{\eta}{c(N_1,N_2)x} \Delta_1(\mathcal{B}, \mathfrak{i}; Y) \Big) \tag{5.18}$$

où $\Delta_1(\mathcal{A}, \mathfrak{i}; Y)$ et $\Delta_1(\mathcal{B}, \mathfrak{i}; Y)$ sont définis par (5.8) *et*

$$\Delta_2(|h|) := \max_{Y > x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \Big(\Delta_2(\mathcal{A}, \mathfrak{i}; Y) + \sigma(\mathfrak{i}) \frac{\eta}{c(N_1,N_2)x} \Delta_2(\mathcal{B}, \mathfrak{i}; Y) \Big) \tag{5.19}$$

où $\Delta_2(\mathcal{A}, \mathfrak{i}; Y)$ et $\Delta_2(\mathcal{B}, \mathfrak{i}; Y)$ sont définis par (5.9).

Au cours des paragraphes 6 et 7, on établira des bornes supérieures des différents termes d'erreur impliqués dans la proposition 5.2.

6. Premières applications des estimations de sommes de Type I

Dans cette partie, on utilise les estimations de sommes de Type I du paragraphe 3 pour établir des bornes supérieures des différents termes d'erreur impliqués dans la proposition 5.2, à l'exception de $S(|h|)$ qui fera l'objet du paragraphe 7 concernant les estimations de sommes de Type II.

Le lemme ci-dessous donne une majoration de la contribution des idéaux dont la norme appartient à $\Upsilon((\log x)^c)$, c'est-à-dire est divisible par une puissance $p^k > (\log x)^c$ avec $k \geqslant 2$. Il en découle une majoration du terme $\Delta_0(|h|)$ défini par (5.17).

Lemme 6.1. — *Soit $B > 0$. Uniformément en $x \geqslant 2$, on a*

$$\#\left\{1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant x : (n_1, n_2) = 1, n_1^3 + 2n_2^3 \in \Upsilon\left((\log x)^{2B}\right)\right\} \ll x^2 (\log x)^{-B}$$

et

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \leqslant x \\ N(\mathfrak{j}) \in \Upsilon\left((\log x)^{2B+2}\right)}} \sigma(\mathfrak{j}) \ll x (\log x)^{-B}$$

où $\Upsilon(\,\cdot\,)$ est définie par (5.7).

En particulier, uniformément en $x \geqslant 2$, w un complexe de module 1*, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, $y_2 > x^\tau$ et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, on a*

$$\Delta_0(|h|) \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

Ce résultat, largement inspiré du lemme 2 de [14], peut être considéré comme une extension du lemme 5 de [10] aux formes binaires.

Démonstration. — Pour tout nombre premier $p \geqslant 5$[4], posons

$$k(p) := \max\left(2, \left\lfloor \frac{2B \log\log x}{\log p} \right\rfloor + 1\right).$$

Étant donnés des entiers n_1 et n_2 tels que $(p, n_1 n_2) = 1$ et $p^{k(p)} \mid n_1^3 + 2n_2^3$, il existe ω modulo $p^{k(p)}$ tel que

$$\omega^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}} \text{ et } n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^{k(p)}}.$$

Dans la mesure où l'ensemble $\{n_1, n_2 : n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{k(p)}\}$ est un réseau de déterminant $O(p^{k(p)})$, on peut écrire à l'aide du lemme 2 de [17] les inégalités

$$\begin{aligned}
&\#\left\{1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant x : (n_1, n_2) = 1, p^{k(p)} \mid n_1^3 + 2n_2^3\right\} \\
&\leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant \omega \leqslant p^{k(p)} \\ \omega^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \#\left\{0 \leqslant n_1, n_2 \leqslant x : \begin{array}{l} (n_1, n_2) = 1, \\ n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^{k(p)}} \end{array}\right\} \\
&\ll \sum_{\substack{1 \leqslant \omega \leqslant p^{k(p)} \\ \omega^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \left(\frac{x^2}{p^{k(p)}} + 1\right).
\end{aligned}$$

Le nombre de racines ω modulo p^k du polynôme $X^3 + 2$ étant inférieur à 3 pour tout premier $p \geqslant 5$ et tout entier $k \geqslant 1$, il suit de l'estimation précédente que l'on a

$$\sum_p \#\left\{1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant x : (n_1, n_2) = 1, p^{k(p)} \mid n_1^3 + 2n_2^3\right\} \ll \sum_{5 \leqslant p \leqslant 3x^{3/2}} \frac{x^2}{p^{k(p)}} + 1.$$

On conclut en observant que

$$\sum_p \frac{x^2}{p^{k(p)}} \ll \sum_{p \leqslant (\log x)^B} \frac{x^2}{(\log x)^{2B}} + \sum_{p > (\log x)^B} \frac{x^2}{p^2} \ll \frac{x^2}{(\log x)^B}.$$

Pour établir la seconde majoration, on utilise la méthode de Rankin pour écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \leqslant x \\ N(\mathfrak{j}) \in \Upsilon\left((\log x)^{2B+2}\right)}} \sigma(\mathfrak{j}) &\ll \sum_{p \geqslant 5} \sigma^{\mathbf{Z}}\left(p^{k(p)}\right) \sum_{N(\mathfrak{j}) \leqslant x / p^{k(p)}} \sigma(\mathfrak{j}) \\
&\ll x \sum_{p \geqslant 5} \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}\left(p^{k(p)}\right)}{p^{k(p)}} \sum_{N(\mathfrak{j}) \leqslant x} \frac{\sigma(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})}.
\end{aligned}$$

[4] D'après le lemme 2.2, les premiers 2 et 3 n'interviennent pas dans la définition de $\Upsilon((\log x)^c)$.

Au vu de (4.12) et (4.9), il suit

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{j})\leqslant x\\ N(\mathfrak{j})\in\Upsilon\left((\log x)^{2B+2}\right)}} \sigma(\mathfrak{j}) \ll x\log x \sum_{p\geqslant 5} \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}\left(p^{k(p)}\right)}{p^{k(p)}} \ll x(\log x)^B. \qquad \square$$

Les estimations de Type I établies dans le paragraphe 3 permettent, au moyen d'un lemme de crible, de donner des bornes supérieures du bon ordre de grandeur des cardinaux $S(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^-(z))$ et $S(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^-(z))$ définis au paragraphe 4.1. De telles estimations seront centrales dans les majorations de $\Theta(|h|,x^\tau,x^{\tau_1})$, $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$.

Lemme 6.2. — *Soient B_1 et $B_2\geqslant 0$. Il existe $c(B_1,B_2)>0$ tel que, uniformément pour $x\geqslant 2$, $(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)$, $z\geqslant \log x$ et $\mathfrak{i}$ admissible, on ait*

$$S(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{\eta^2x^2}{\log z}\frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i},z) \tag{6.1}$$

et

$$S(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{c(N_1,N_2)\eta x^3}{N(\mathfrak{i})\log z} + R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i},z) \tag{6.2}$$

où $R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i},z)$ et $R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i},z)$ sont définis par

$$R_{\mathcal{D}}(\mathfrak{i},z) := \sum_{d\leqslant z^2} \tau(d)^2\mu(d)^2|r(\mathcal{D},\mathfrak{i},d)|$$

avec $r(\mathcal{D},\mathfrak{i},d)$ défini par (3.13) *et* (3.16), *et satisfont*

$$\sum_{N(\mathfrak{i})\leqslant x^2(\log x)^{-c(B_1,B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^{B_1} R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i},z) \ll x^2(\log x)^{-B_2}$$

et

$$\sum_{N(\mathfrak{i})z^2\leqslant x^3(\log x)^{-c(B_1,B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^{B_1}\sigma(\mathfrak{i}) R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i},z) \ll x^3(\log x)^{-B_2}.$$

Démonstration. — Puisque la fonction de densité $\xi(\mathfrak{i},\cdot)$ définie par (3.14) vérifie (3.15), elle satisfait les hypothèses de crible (Ω_0) et (Ω_1) introduites dans [15, Chapter 1]. On peut donc appliquer le théorème 4.1 de [15] pour obtenir l'estimation

$$S(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^-(z)) \ll \eta^2x^2\frac{\alpha(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}\prod_{p\leqslant z}(1-\xi(\mathfrak{i},p)) + R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i},z).$$

En estimant le terme de reste à l'aide du lemme 3.5, on en déduit l'existence d'une constante $c(B_1,B_2)>0$ pour laquelle on ait

$$\sum_{N(\mathfrak{i})z^2\leqslant x^2(\log x)^{-c(B_1,B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^{B_1} R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i},z) \ll x^2(\log x)^{-B_2}. \tag{6.3}$$

La formule de crible (6.1) est alors une conséquence de (4.8), compte tenu de l'hypothèse $z \geqslant \log x$.

Pour établir (6.2), il suffit de reproduire le même argument en utilisant le lemme 3.7 (resp. (4.6)) en lieu et place du lemme 3.5 (resp. (4.8)). □

Une borne supérieure de la quantité $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$ peut être obtenue en s'inspirant de travaux antérieurs concernant les ordres moyens de fonctions arithmétiques sur les valeurs polynomiales. Par exemple, Tenenbaum [25, Lemme 3.7] montre que, pour tout polynôme $F \in \mathbf{Z}[X]$, il existe $c(F) > 0$ tel que, uniformément en $z \geqslant y \geqslant 2$ et $x \geqslant 2$, on ait

$$\#\left\{n \leqslant x : \prod_{p \leqslant y} p^{v_p(F(n))} > z\right\} \ll x \exp\left(-c(F)\frac{\log z}{\log y}\right).$$

En vue d'obtenir un analogue de ce résultat pour la forme binaire $X_1^3+2X_2^3$, on peut adapter la preuve du théorème 1 de [24], démarche à l'origine du résultat suivant.

Lemme 6.3. — *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c > 0$ tel que, uniformément pour $x \geqslant 2$, $z \geqslant y \geqslant \exp(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}})$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ avec $\eta := (\log x)^{-c_0}$, on ait*

$$\#\left\{\mathfrak{j} \in \mathcal{A} : N(\mathfrak{j}^-(y)) > z\right\} \ll \eta^2 x^2 \exp\left(-c\frac{\log z}{\log y}\log\left(\frac{\log z}{\log y}\right)\right) \tag{6.4}$$

et

$$\sum_{\substack{\mathfrak{j} \in \mathcal{B} \\ N(\mathfrak{j}^-(y)) > z}} \sigma(\mathfrak{j}) \ll c(N_1, N_2)\eta x^3 \exp\left(-c\frac{\log z}{\log y}\log\left(\frac{\log z}{\log y}\right)\right). \tag{6.5}$$

En particulier, on a, sous les conditions précédentes et uniformément en w un complexe de module 1, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$ et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$,

$$\Theta\left(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}\right) \ll \eta^2 x^2 \exp\left(-c_1\frac{\tau_1}{\tau}\log\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right)$$

où $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$ est défini par (5.16).

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on a $y \leqslant z^{1/2} \leqslant x^{1/4}$, le résultat étant trivial autrement. Étant donné un idéal $\mathfrak{j}$ et la décomposition de la norme de sa partie y-friable

$$N(\mathfrak{j}^-(y)) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad p_i < p_{i+1},$$

considérons $j \geqslant 0$ le plus grand entier tel que

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} \leqslant z$$

et définissons les diviseurs $\mathfrak{j}_1$ et $\mathfrak{j}_2$ de $\mathfrak{j}^-(y)$ par les conditions

$$N(\mathfrak{j}_1)=p_1^{\alpha_1}\cdots p_j^{\alpha_j}\quad\text{et}\quad N(\mathfrak{j}_2)=p_{j+1}^{\alpha_{j+1}}\cdots p_k^{\alpha_k}.$$

On scinde l'ensemble des idéaux $\mathfrak{j}$ tels que $N(\mathfrak{j}^-(y))>z$ en trois classes :

- classe I : $N(\mathfrak{j}_1)\leqslant z^{1/2}$,
- classe II : $p_j\leqslant \log x\log\log x$ et $N(\mathfrak{j}_1)>z^{1/2}$,
- classe III : $\log x\log\log x<p_j\leqslant y$ et $N(\mathfrak{j}_1)>z^{1/2}$,

et on estime la contribution de chacune de ces classes séparément.

Contribution de la classe I. — Sous l'hypothèse $y\leqslant z^{1/2}$, on observe que $p_{j+1}^{\alpha_{j+1}}>z^{1/2}$ avec $\alpha_{j+1}\geqslant 2$, ce qui signifie que les idéaux considérés ont leur norme dans $\Upsilon(z^{1/2})$. Le lemme 6.1 entraîne que l'on a, pour tout $B>0$,

$$\#\left\{\mathfrak{j}\in\mathcal{A}:\mathfrak{j}\text{ est dans la classe I}\right\}\ll x^2(\log x)^{-B}$$

et

$$\sum_{\substack{\mathfrak{j}\in\mathcal{B}\\ \mathfrak{j}\text{ dans la classe I}}}\sigma(\mathfrak{j})\ll x^3(\log x)^{-B}.$$

Contribution de la classe II. — En utilisant le lemme 3.4 et l'estimation $\alpha^{\mathbf{Z}}(m)\ll m^{1/2}$, on obtient par la méthode de Rankin l'estimation

$$\begin{aligned}\#&\left\{\mathfrak{j}\in\mathcal{A}:\mathfrak{j}\text{ est dans la classe II}\right\}\\ &\ll x^2\sum_{\substack{z^{1/2}<N(\mathfrak{j}_1)\leqslant z\\ P^+(N(\mathfrak{j}_1))\leqslant\log x\log\log x}}\frac{\alpha(\mathfrak{j}_1)}{N(\mathfrak{j}_1)}+x^{3/2}(\log x)^c\\ &\ll x^2\sum_{\substack{m\leqslant z\\ P^+(m)\leqslant\log x\log\log x}}\frac{1}{m^{1/2}}\left(\frac{m}{z^{1/2}}\right)^{1/2}+x^{3/2}(\log x)^c\\ &\ll x^2z^{-1/4}\Psi(z,\log x\log\log x)+x^{3/2}(\log x)^c.\end{aligned}$$

L'estimation de $\Psi(x,t)$ due à de Bruijn [6, Theorem 1] et uniforme en $x\geqslant t>2$, à savoir

$$\log\Psi(x,t)=\left(\frac{\log x}{\log t}\log\left(1+\frac{t}{\log x}\right)+\frac{t}{\log t}\log\left(1+\frac{\log x}{t}\right)\right)\times\left(1+O\left(\frac{1}{\log t}+\frac{1}{\log\log(x+2)}\right)\right),$$

entraîne la majoration $\Psi(x,\log x\log\log x)\ll\exp(O(\frac{\log x\log\log\log x}{\log\log x}))$. Par suite, il suit de l'hypothèse $z\geqslant\exp(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}})$, que l'on a, pour tout

$B>0$,

$$\#\{\mathfrak{j}\in\mathcal{A} : \mathfrak{j} \text{ est dans la classe II}\} \ll x^2(\log x)^{-B}.$$

De façon similaire, le théorème 3.6 et la formule (4.9) impliquent

$$\sum_{\substack{\mathfrak{j}\in\mathcal{B}\\ J \text{ dans la classe II}}} \sigma(\mathfrak{j}) \ll x^3(\log x)^{-B}.$$

Contribution de la classe III. — Commençons par découper l'ensemble des p_j en sous-intervalles du type $]z^{1/(s+1)}, z^{1/s}]$ avec $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ où

$$s_1 := \left\lfloor \frac{\log z}{\log y} \right\rfloor \text{ et } s_2 := \left\lfloor \frac{\log z}{\log(\log x \log\log x)} \right\rfloor.$$

On observe alors que

$$\begin{aligned}\#\{\mathfrak{j}\in\mathcal{A} &: \mathfrak{j} \text{ est dans la classe III}\}\\ &\ll \sum_{s_1\leqslant s\leqslant s_2} \sum_{\substack{z^{1/2}<N(\mathfrak{j}_1)\leqslant z\\ P^+(N(\mathfrak{j}_1))\leqslant z^{1/s}}} S\left(\mathcal{A},\mathfrak{j}_1,\mathcal{C}^-(z^{1/(s+1)})\right).\end{aligned}$$

La formule (6.1) du lemme 6.2 permet de majorer, pour tout $B>0$, la contribution des idéaux de la classe III par

$$\ll \frac{\eta^2x^2}{\log z}\sum_{s_1\leqslant s\leqslant s_2}(s+1)\sum_{\substack{z^{1/2}<m\leqslant z\\ P^+(m)\leqslant z^{1/s}}}\frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(m)}{m} + x^2(\log x)^{-B}.$$

Dans la mesure où la fonction $\sigma^{\mathbf{Z}}$ satisfait les hypothèses du lemme 4 de [24], on a l'estimation de la somme intérieure, uniforme en $s\leqslant \log z/\log\log z$, suivante

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{z^{1/2}<m\\ P^+(m)\leqslant z^{1/s}}}\frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(m)}{m} &\ll \exp\left(\sum_{p\leqslant z}\frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(p)}{p} - \frac{1}{10}s\log(s)\right)\\ &\ll \log z\exp\left(-\frac{1}{10}s\log(s)\right).\end{aligned}$$

Cela implique alors l'estimation

$$\begin{aligned}\#\{\mathfrak{j}\in\mathcal{A} : \mathfrak{j} \text{ est dans la classe III}\} \ll \eta^2x^2\exp\left(-c_1\frac{\log z}{\log y}\log\left(\frac{\log z}{\log y}\right)\right)\\ + x^2(\log x)^{-B}\end{aligned}$$

et, en utilisant (6.2) au lieu de (6.1),

$$\sum_{\substack{\mathfrak{j}\in\mathcal{B}\\ J \text{ dans la classe III}}} \sigma(\mathfrak{j}) \ll c(N_1,N_2)\eta x^3 \exp\left(-c_1\frac{\log z}{\log y}\log\left(\frac{\log z}{\log y}\right)\right) + x^2(\log x)^{-B}.$$

Au vu de l'hypothèse $y \geqslant \exp(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}})$ et de ce qui précède, on en déduit (6.4) et (6.5). □

À partir de maintenant, nous n'emploierons le lemme 6.2 qu'avec un niveau de crible $z \geqslant x^\tau$. Le lemme suivant, analogue de [18, Lemma 7.1] précise la borne supérieure disponible dans un tel cadre.

Lemme 6.4. — *Soit $B \geqslant 0$. Il existe $c(B) > 0$ tel que, uniformément en $x \geqslant 2$, $(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)$, $z \geqslant x^\tau$ et $\mathcal{C}\subset(\mathcal{C}^-(x^\tau))^2$ où $\mathcal{C}^-(\cdot)$ est défini par (4.3), et pour tout idéal $\mathfrak{i}$ tel que $N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}$, on ait*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2\in\mathcal{J}(\mathbf{K})\\ (N(\mathfrak{q}_1),N(\mathfrak{q}_2))\in\mathcal{C}\\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2\leqslant x^2(\log x)^{-c(B)}}} S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2,\mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{\eta^2x^2}{\log z}\frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}\sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{C}}\mu^2(d_1d_2)\frac{\nu_{d_1d_2}}{d_1d_2} + R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}). \tag{6.6}$$

et

$$\sum_{\substack{\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2\in\mathcal{J}(\mathbf{K})\\ (N(\mathfrak{q}_1),N(\mathfrak{q}_2))\in\mathcal{C}\\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2\leqslant x^2(\log x)^{-c(B)}}} S(\mathcal{B},\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2,\mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{c(N_1,N_2)\eta x^3}{N(\mathfrak{i})\log z}\sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{C}}\mu^2(d_1d_2)\frac{\nu_{d_1d_2}}{d_1d_2} + R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i}) \tag{6.7}$$

où ν_d est le nombre d'idéaux $\mathfrak{j}$ tels que $N(\mathfrak{j})=d$ et

$$\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}|R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i})| \ll x^2(\log x)^{-B} \quad \textit{et} \quad \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\sigma(\mathfrak{i})\,|R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i})| \ll x^3(\log x)^{-B}.$$

Démonstration. — Une application directe du lemme 6.2 et de (5.14) donne

$$S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2,\mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{\eta^2x^2}{\log z}\frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)} + R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2,z)$$

avec

$$\sum_{\substack{\mathfrak{i},\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2\in\mathcal{J}(\mathbf{K})\\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2\leqslant x^2(\log x)^{-c(B)}}} R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2,z)\ll x^2(\log x)^{-B}.$$

On peut alors majorer la contribution des $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ avec facteur carré à l'aide de l'estimation

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{P^-(N(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2))>x^\tau\\ \mu(N(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2))=0\\ N(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)\leqslant x^2}}\frac{1}{N(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)} &\ll \sum_{N(\mathfrak{j})\leqslant x^2}\frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})}\left(\sum_{p>x^{\tau/2}}\frac{1}{p^2}+\sum_{p>x^{\tau/3}}\frac{1}{p^3}\right)\\ &\ll x^{-\tau/2}(\log x)^c,\end{aligned} \tag{6.8}$$

ce qui achève la preuve de (6.6), compte tenu de (6.3). Un raisonnement similaire permet d'établir (6.7). □

Le lemme suivant, qui rappelle les estimations (7.1) et (7.2) de [18], sera utilisé pour estimer les membres de droite de (6.6) et (6.7).

Lemme 6.5. — *On a, uniformément en $t\geqslant z\geqslant 2$, les majorations*

$$\sum_{t<p\leqslant tz}\frac{\nu_p}{p}\ll\frac{\log z}{\log t}$$

et

$$\sum_{z<p_1<\cdots<p_k\leqslant t}\frac{\nu_{p_1\cdots p_k}}{p_1\cdots p_k}\ll\frac{\left(\log\left(\frac{\log t}{\log z}\right)+O(1)\right)^k}{k!}.$$

Démonstration. — La première majoration est une conséquence du théorème des idéaux premiers. Au vu de la multiplicativité de ν_d, la seconde estimation provient de l'inégalité

$$\sum_{z<p_1<\cdots<p_k\leqslant t}\frac{\nu_{p_1}}{p_1}\cdots\frac{\nu_{p_k}}{p_k}\leqslant\frac{1}{k!}\left(\sum_{z<p\leqslant t}\frac{\nu_p}{p}\right)^k\ll\frac{\left(\log\left(\frac{\log t}{\log z}\right)+O(1)\right)^k}{k!}.\ \square$$

On établit dans le lemme suivant, analogue de [18, Lemma 3.6], des estimations de $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$ définies par les formules (5.18) et (5.19).

Lemme 6.6. — *Uniformément en $x\geqslant 2$, $(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)$, w un complexe de module 1, $y_2>x^\tau$ et $h\in\mathcal{M}(w;1,y_2)$, on a*

$$\Delta_1(|h|),\Delta_2(|h|)\ll\tau_1\eta^2x^2. \tag{6.9}$$

D'autre part, uniformément en $x \geqslant 2$, $(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)$, $y_2>y_1>x^\tau$, w *un complexe de module* 1 *et* $h\in\mathcal{M}(w;y_1,y_2)$, *on a*

$$\Delta_1(|h|),\Delta_2(|h|)\ll \eta^2x^2\frac{\tau_1\log x}{(\log y_1)^2}. \tag{6.10}$$

Démonstration. — Pour majorer $\Delta_1(|h|)$, on peut faire appel aux lemmes 6.4 et 6.5. Nous nous concentrons ici sur la majoration des termes faisant intervenir $\mathcal{A}$, le raisonnement étant analogue pour $\mathcal{B}$. Dans l'intervalle $x^{\frac12-\tau_1}\leqslant Y\leqslant x^{\frac32-\tau_1}$, on a la majoration suivante, valide pour tout $B>0$,

$$\begin{aligned}\sum_{Y<N(\mathfrak{p})\leqslant Yx^{\tau_1}}\ \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} & S\left(\mathcal{A},\mathfrak{ip},\mathcal{C}^-(x^\tau)\right)\\ &\ll\frac{\eta^2x^2}{\tau\log x}\sum_{Y<p\leqslant Yx^{\tau_1}}\frac{\nu_p}{p}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}+x^2(\log x)^{-B}\\ &\ll\tau_1\eta^2x^2,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la majoration

$$\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}\leqslant\prod_{p\leqslant x^\tau}\sum_k\frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k}\ll\tau\log x. \tag{6.11}$$

En utilisant (4.12), on peut considérer le cas $Y>x^{\frac32-\tau_1}$ en écrivant les idéaux sous la forme $\mathfrak{jp}$ avec $N(\mathfrak{j})=\frac{c(N_1,N_2)x^{3+O(\tau_1)}}{Y}$ pour obtenir la majoration

$$\begin{aligned}\sum_{N(\mathfrak{j})=\frac{c(N_1,N_2)x^{3+O(\tau_1)}}{Y}} & S\Big(\mathcal{A},\mathfrak{j},\mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})\Big)\\ &\ll\frac{\eta^2x^2}{\log x}\sum_{N(\mathfrak{j})=\frac{c(N_1,N_2)x^{3+O(\tau_1)}}{Y}}\frac{\sigma(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})}+x^2(\log x)^{-B}\\ &\ll\tau_1\eta^2x^2.\end{aligned}$$

Supposons désormais que h soit à support sur les entiers y_1-criblés où $y_1\leqslant x^{\frac12-\tau_1}$ sans perte de généralité. En procédant comme précédemment, on peut majorer la contribution de l'intervalle $x^{\frac12-\tau_1}\leqslant Y\leqslant x^{\frac32-\tau_1}$ en observant que

$$\sum_{Y<N(\mathfrak{p})\leqslant Yx^{\tau_1}}S\left(\mathcal{A},\mathfrak{p},\mathcal{C}^-(y_1)\right)\ll\tau_1\frac{\eta^2x^2}{\log y_1}.$$

Lorsque $y > x^{\frac{3}{2}-\tau_1}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{N(\mathfrak{j})=\frac{c(N_1,N_2)x^{3+O(\tau_1)}}{Y}} & S\left(\mathcal{A},\mathfrak{j},\mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})\right) \\ & \ll \frac{\eta^2x^2}{\log x}\sum_k \sum_{y_1<p_2<\cdots<p_k\leqslant 3x^{3/2+O(\tau_1)}} \frac{\nu_{p_2\cdots p_k}}{p_2\cdots p_k}\max_{y_1<Y}\sum_{Y<p_1\leqslant Yx^{\tau_1}}\frac{\nu_{p_1}}{p_1} \\ & \qquad + x^2(\log x)^{-B} \\ & \ll \frac{\tau_1\log x}{\log y}\frac{\eta^2x^2}{\log y_1}.\end{aligned}$$

Un raisonnement similaire permet d'obtenir les estimations relatives à $\Delta_2(|h|)$. □

Avec le choix de paramètre de crible $z = x^\tau$, on peut reproduire l'argument du paragraphe 6 de [18], basé sur le crible de Selberg, pour obtenir un équivalent asymptotique de $S(\mathcal{D},\mathfrak{i},\mathcal{C}^-(x^\tau))$, conduisant ainsi à une borne supérieure de

$$\begin{aligned}T(|h|) := \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}|h(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{N(\mathfrak{q})\leqslant x^{1-4\tau_1}\\ P^-(N(\mathfrak{q}))>x^\tau}}\sum_{n\geqslant 0}\Big| & T^{(n)}(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{q}) \\ & - \frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x}\sigma(\mathfrak{i})T^{(n)}(\mathcal{B},\mathfrak{i}\mathfrak{q})\Big|\end{aligned}$$

où $T^{(n)}(\mathcal{A},\cdot\,)$ et $T^{(n)}(\mathcal{B},\cdot\,)$ sont définis par (5.11).

Lemme 6.7. — *Soit $B > 0$. Uniformément en $x \geqslant 2$, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1, $h \in \mathcal{M}(w;y_1,y_2)$ et $(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)$, on a*

$$T(|h|) \ll \frac{\eta^2x^2}{\tau^3\log x}\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}.$$

Démonstration. — À la suite de [18], on applique le théorème 7.1 de [15] et (5.14) pour en déduire les formules suivantes, valides pour tout idéal $\mathfrak{j}$ tel que $N(\mathfrak{j})\in\mathcal{C}^-(x^\tau)$,

$$\begin{aligned}S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{j},\mathcal{C}^-(x^\tau)) = \eta^2x^2\sigma_0\frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{j})}\prod_{p\leqslant x^\tau}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+O\left(\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right)\right) \\ + O\left(\sum_{d\leqslant x^{2\tau_1}}\mu(d)^2\tau(d)^2|r(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{j},d)|\right)\end{aligned}$$

et

$$S(\mathcal{B},\mathfrak{ij},\mathcal{C}^-(x^\tau))=\frac{c(N_1,N_2)\eta x^3}{N(\mathfrak{ij})}\prod_{p\leqslant x^\tau}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+O\left(\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right)\right)$$
$$+O\left(\sum_{d\leqslant x^{2\tau_1}}\mu(d)^2\tau(d)^2|r(\mathcal{B},\mathfrak{ij},d)|\right).$$

En estimant la contribution des idéaux $\mathfrak{j}=\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n$ dont la norme possède des facteurs carrés par (6.8), on observe qu'on peut se restreindre aux idéaux admissibles. Par suite, dans la mesure où $N(\mathfrak{iq}\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n)\leqslant x^{2-3\tau_1+\tau}$ pour les idéaux intervenant dans la définition de $T(|h|)$, la contribution des termes de restes $|r(\mathcal{D},\mathfrak{iq}\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n,d)|$ pour $\mathcal{D}=\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est négligeable au vu des lemmes 3.5 et 3.7. On en déduit alors, pour tout $B>0$, l'estimation

$$T(|h|)\ll\frac{\eta^2x^2}{\tau\log x}\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}\sum_{\substack{N(\mathfrak{j})\leqslant x^2\\ P^-(N(\mathfrak{j}))>x^\tau}}\mu^2(N(\mathfrak{j}))\frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})}$$
$$+x^2(\log x)^{-B}.$$

On utilise alors le lemme 6.5 pour estimer la somme en $\mathfrak{j}$:

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{j})\leqslant x^2\\ P^-(N(\mathfrak{j}))>x^\tau}}\mu^2(N(\mathfrak{j}))\frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})}\ll\sum_n 2^n\sum_{x^\tau<p_1<\cdots<p_n\leqslant x^2}\frac{\nu_{p_1\cdots p_n}}{p_1\cdots p_n}$$
$$\ll\sum_n\frac{2^n}{n!}\left(-\log\tau+O(1)\right)^n\ll\tau^{-2}.\qquad\square$$

7. Estimations de sommes de Type II

Dans cette partie, on établit (cf. proposition 7.7 *infra*) une majoration de

$$S(|h|):=\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}|h(\mathfrak{i})|\sum_{i=1}^{5}\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}\Big|S\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right)$$
$$-\frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x}\sigma(\mathfrak{i})S\left(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right)\Big|$$

où les différents $\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})$ sont définis dans la discussion de la partie 5, ce qui permet de valider la formule heuristique (5.2). On étend pour ce faire l'approche développée dans les travaux de Heath-Brown [18], à travers l'introduction de sommes de Type II adéquates.

Réécrivons les différents ensembles $\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})$ sous la forme

$$\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}) = \bigcup_{(s_1,s_2)\in\mathcal{S}^{(i)}(\boldsymbol{n},\mathfrak{i})} \mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},(s_1,s_2),\mathfrak{i}) \times \{(s_1,s_2)\}$$

avec

$$\mathcal{S}^{(i)}(\boldsymbol{n},\mathfrak{i}) := \left\{ (s_1,s_2) : \begin{array}{l} \Omega(s_i)=\omega(s_i)=n_i, \\ (s_1,s_2) \text{ satisfait } (E_j^{(i)}(\boldsymbol{n},\mathfrak{i})) \text{ pour } j \ll 1 \end{array} \right\}$$

où $(E_j^{(i)}(\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ désigne une inégalité du type

$$YN(\mathfrak{i})^{\varepsilon} \prec P^{(\overrightarrow{\alpha}^{(1)})}(s_1)P^{(\overrightarrow{\alpha}^{(2)})}(s_2)$$

avec $Y>0$, $\varepsilon\in\{0,1\}$, $\prec$ désigne l'ordre $\leqslant$, $<$, $\geqslant$ ou $>$ et les $P^{(\overrightarrow{\alpha})}$ sont définis dans (5.3), et

$$\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},(s_1,s_2),\mathfrak{i}) := \left\{ (r_1,r_2) : \begin{array}{r} \Omega(r_i)=\omega(r_i)=m_i \text{ et } (r_1,r_2) \text{ satisfait} \\ (F_j^{(i)}(\boldsymbol{m},(s_1,s_2),\mathfrak{i})) \text{ pour } j \ll 1 \end{array} \right\}$$

où $(F_j^{(i)}(\boldsymbol{m},(s_1,s_2),\mathfrak{i}))$ désigne une inégalité du type

$$YN(\mathfrak{i})^{\varepsilon}P^{(\overrightarrow{\beta}^{(1)})}(r_1)P^{(\overrightarrow{\beta}^{(2)})}(r_2) \prec P^{(\overrightarrow{\gamma}^{(1)})}(s_1)P^{(\overrightarrow{\gamma}^{(2)})}(s_2).$$

Les inégalités $(E_j^{(i)}(\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ et $(F_j^{(i)}(\boldsymbol{m},(s_1,s_2),\mathfrak{i}))$ introduites ci-dessus correspondent non seulement aux hypothèses sur le support de h mais aussi aux contraintes relatives à la définition des $\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})$, en particulier aux conditions

$$x^{1+\tau} \leqslant s_1s_2 \leqslant x^{3/2-\tau} \quad \text{et} \quad P^-(s_1s_2) > x^{\tau}.$$

À la suite de Heath-Brown, on introduit un paramètre $\xi=o(\tau)$ que l'on explicitera dans les applications du paragraphe 8[5]. Une étape importante dans l'estimation de $S(\mathcal{D},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ consiste à trier les facteurs de s_1s_2 dans des intervalles du type $[x^{v\xi},x^{(v+1)\xi}[$ puis à remplacer les occurrences de ces facteurs par $x^{v\xi}$ dans les inégalités $(E_j^{(i)}(\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ et $(F_j^{(i)}(\boldsymbol{m},(s_1,s_2),\mathfrak{i}))$, procédure que l'on détaille ci-dessous. Définissant $v_0 := \lfloor \frac{\log N(\mathfrak{i})}{\xi \log x} \rfloor$, introduisons les ensembles d'exposants

$$\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\boldsymbol{n},v_0)) := \left\{ \overrightarrow{v} \in \mathbf{Z}^{n_1+n_2} : \begin{array}{l} \overrightarrow{v} \text{ satisfait } (\widehat{E_j}^{(i)}(\boldsymbol{n},v_0)) \text{ pour } j \ll 1 \\ \text{et } v_k \neq v_l \text{ si } k \neq l \end{array} \right\}$$

[5] Dans [18], Heath-Brown effectue le choix $\xi=(\log\log x)^{-\varpi_2}$ où $\varpi_0<\varpi_2<1$. À la lecture de son travail, il apparaît en fait que ses arguments demeurent valables pour des ξ satisfaisant $(\log x)^{-\varpi_2} \leqslant \xi$ où $0<\varpi_2<1$, hypothèse que l'on supposera dans la suite.

où, en écrivant $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}:=(\overrightarrow{v}^{(1)},\overrightarrow{v}^{(2)})$, $(\widehat{E_j}^{(i)}(\boldsymbol{n},v_0))$ désigne l'inégalité, associée à $(E_j^{(i)}(\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$, définie par

$$\frac{\log Y}{\xi\log x}+(\varepsilon v_0+1)<\sum_{k=1}^{k_1}v^{(1)}_{\alpha_k^{(1)}}+\sum_{k=1}^{k_2}v^{(2)}_{\alpha_k^{(2)}}$$

si $\prec$ désigne $<$ ou $\leqslant$ et

$$\frac{\log Y}{\xi\log x}+\varepsilon v_0>\sum_{k=1}^{k_1}\left(v^{(1)}_{\alpha_k^{(1)}}+1\right)+\sum_{k=1}^{k_2}\left(v^{(2)}_{\alpha_k^{(2)}}+1\right)$$

si $\prec$ désigne $>$ ou $\geqslant$, ainsi que

$$\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0):=\left\{(r_1,r_2):\begin{array}{r}\Omega(r_i)=\omega(r_i)=m_i,\ (r_1,r_2)\text{ satisfait}\\ (\widehat{F_j}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0))\text{ pour }j\ll 1\end{array}\right\}$$

où, de manière similaire, $(\widehat{F_j}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0))$ désigne l'inégalité, correspondant à la condition $(F_j^{(i)}(\boldsymbol{m},(s_1,s_2),\mathfrak{i}))$, définie par

$$\frac{\log\left(YP^{(\overrightarrow{\beta}^{(1)})}(r_1)P^{(\overrightarrow{\beta}^{(2)})}(r_2)\right)}{\xi\log x}+(\varepsilon v_0+1)<\sum_{l=1}^{l_1}v^{(1)}_{\gamma_l^{(1)}}+\sum_{l=1}^{l_2}v^{(2)}_{\gamma_l^{(2)}}.$$

si $\prec$ désigne $\leqslant$ ou $<$ et

$$\frac{\log\left(YP^{(\overrightarrow{\beta}^{(1)})}(r_1)P^{(\overrightarrow{\beta}^{(2)})}(r_2)\right)}{\xi\log x}+\varepsilon v_0>\sum_{l=1}^{l_1}\left(v^{(1)}_{\gamma_l^{(1)}}+1\right)+\sum_{l=1}^{l_2}\left(v^{(2)}_{\gamma_l^{(2)}}+1\right).$$

si $\prec$ désigne $>$ ou $\geqslant$.

Dans ce qui suit, nous adaptons la méthode détaillée au paragraphe 3 de [18]. Introduisons, pour $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\mathbf{N}^{n_1}\times\mathbf{N}^{n_2}$, le poids $d_{\boldsymbol{n}}(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ en posant

$$d_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right)=\frac{\log N\left(\mathfrak{p}_1^{(1)}\right)\cdots\log N\left(\mathfrak{p}_{n_1}^{(1)}\right)\log N\left(\mathfrak{p}_1^{(2)}\right)\cdots\log N\left(\mathfrak{p}_{n_2}^{(2)}\right)}{v_1^{(1)}\cdots v_{n_1}^{(1)}v_1^{(2)}\cdots v_{n_2}^{(2)}(\xi\log x)^{n_1+n_2}}$$

lorsque $\mathfrak{s}$ se décompose sous la forme $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2$ où $\Omega(N(\mathfrak{s}_i))=\Omega_{\mathbf{K}}(\mathfrak{s}_i)=n_i$, $\mathfrak{s}_i=\mathfrak{p}_1^{(i)}\cdots\mathfrak{p}_{n_i}^{(i)}$ avec $x^{v_k^{(i)}\xi}\leqslant N(\mathfrak{p}_k^{(i)})<x^{(v_k^{(i)}+1)\xi}$ pour tout $i\in\{1,2\}$ et $k\in\{1,\dots,n_i\}$, et $d_{\boldsymbol{n}}(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}})=0$ sinon. Posons également, pour tout sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $\mathbf{N}^2$ et toute paire d'idéaux $(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2)$ la quantité,

$$b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathcal{R})=\begin{cases}1 & \text{si }(N(\mathfrak{r}_1),N(\mathfrak{r}_2))\in\mathcal{R},\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Dans l'esprit du lemme 3.7 de [18], il est naturel d'approcher la quantité $S(\mathcal{D},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ par

$$\widehat{S}\left(\mathcal{D},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) := \sum_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\boldsymbol{n},v_0))} \widehat{S}\left(\mathcal{D},\mathfrak{i},\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0)\right)$$

où

$$\widehat{S}\left(\mathcal{D},\mathfrak{i},\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0)\right) := \sum_{\substack{\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathfrak{s}\in\mathcal{J}(\mathbf{K})\\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}\in\mathcal{D}}} b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0))d_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right).$$

Il en résulte l'apparition de termes d'erreur

$$\begin{aligned}(7.1)\quad R^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) := \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \Bigg(R\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) \\ + \frac{\eta}{c(N_1,N_2)x}\sigma(\mathfrak{i})R\left(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right)\Bigg)\end{aligned}$$

où, pour $\mathcal{D}=\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$,

$$R\left(\mathcal{D},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) = \left|S\left(\mathcal{D},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) - \widehat{S}\left(\mathcal{D},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}),\mathfrak{i}\right)\right|.$$

On peut obtenir une borne supérieure de telles quantités en reproduisant les différentes étapes de la démonstration du lemme 3.7 de [18].

Lemme 7.1. — *Soit $B>0$. Uniformément en $x\geqslant 2$, $(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)$, $y_1=1$ ou $y_1>x^\tau$, $y_2>x^\tau$, w un complexe de module 1, $h\in\mathcal{M}(w;y_1,y_2)$ et $\xi\leqslant\tau^2$, on a pour tout $i\in\{1,\dots,5\}$,*

$$\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} R^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) \ll \xi\tau^{-6}\frac{\eta^2x^2}{\log x}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\sigma(\mathfrak{i})\frac{|h(\mathfrak{i})|}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}.$$

Démonstration. — On ne décrit ci-dessous que la contribution des termes $R(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$, le traitement de $R(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ étant en tout point similaire. Soient $\mathfrak{i}$ un idéal tel que $N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}$ et $v_0=\lfloor\frac{\log N(\mathfrak{i})}{\xi\log x}\rfloor$. Observons l'inégalité triviale

$$\begin{aligned}R\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) \leqslant R_1\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) + R_2\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) \\ + R_3\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right)\end{aligned}$$

où le terme $R_1(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ est défini comme la différence entre $S(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ et

$$\sum_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\boldsymbol{n},v_0))}\ \sum_{\substack{\mathfrak{s}_1,\mathfrak{s}_2,\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2\\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\in\mathcal{A}\\ d_{\boldsymbol{n}}(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2,\overrightarrow{\boldsymbol{v}})\neq 0}} b\left(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},(N(\mathfrak{s}_1),N(\mathfrak{s}_2)),\mathfrak{i}\right),$$

résultant de l'introduction de $\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\boldsymbol{n},v_0))$, le terme $R_2(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ provient du remplacement de 1 par $d_{\boldsymbol{n}}(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2,\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ et $R_3(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ apparaît en remplaçant $\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},(N(\mathfrak{s}_1),N(\mathfrak{s}_2)),\mathfrak{i})$ par $\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0)$ dans $b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\dots)$.

Dans la mesure où

$$d_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{p}_1^{(1)}\cdots\mathfrak{p}_{n_1}^{(1)}\mathfrak{p}_1^{(2)}\cdots\mathfrak{p}_{n_2}^{(2)},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right)=1+O\left(\xi\tau^{-2}\right) \tag{7.2}$$

dès que $x^{v_k^{(\mathfrak{i})}\xi}\leqslant N(\mathfrak{p}_k^{(\mathfrak{i})})<x^{(v_k^{(\mathfrak{i})}+1)\xi}$ (cf. [18, p. 44]), il vient l'inégalité

$$R_2\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right))\ll\xi\tau^{-2}S\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right). \tag{7.3}$$

On sépare la suite de la démonstration en deux parties selon les valeurs de i.

Cas $i\in\{2,\dots,5\}$. — Au vu de la définition (5.6) de $\mathcal{C}^{(i)}(m,n)$, il existe au plus un couple (m,n) tel que $N(\mathfrak{r}\mathfrak{s})$ appartienne à $\mathcal{C}^{(i)}(m,n)$. Par suite, on peut observer, en suivant l'argument de la preuve du lemme 3.7 de [18] que l'on a, pour tout $N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}$, l'estimation

$$\begin{aligned}&\sum_{\boldsymbol{m}}R_1\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},(n,0),\mathfrak{i})\right)\\&\qquad\ll\sum_{j\ll\tau^{-1}}\sum_{(N(\mathfrak{p}_1),\dots,N(\mathfrak{p}_n))\in\Delta_j^{(i)}(n)}S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\dots\mathfrak{p}_n,\mathcal{C}^-(x^\tau))\end{aligned}$$

où

$$\Delta_j^{(i)}(n):=\left\{(p_1,\dots,p_n):\ \begin{array}{l}x^\tau<p_1\leqslant\cdots\leqslant p_n,\\ x^{1+\tau}<p_1\cdots p_n\leqslant x^{3/2-\tau},\\ (p_1,\dots,p_n)\text{ satisfait }(E_j^{(i)}(n))\end{array}\right\}$$

et $(E_j^{(i)}(n))$ désigne une inégalité de la forme

$$\begin{gathered}y_1\leqslant p_1\leqslant y_1x^\xi,\quad y_2x^{-\xi}\leqslant p_n\leqslant y_2,\quad x^{1-\tau_1-\xi}\leqslant p_n\leqslant x^{1-\tau_1},\\ p_2\cdots p_n=x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})},\quad p_1\cdots p_n=x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})},\\ p_1\cdots p_n=x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})}\text{ ou }p_j\leqslant p_{j+1}\leqslant x^\xi p_j.\end{gathered}$$

En utilisant les lemmes 6.4 et 6.5, il suit ainsi, pour tout $B\geqslant 0$, l'estimation

$$\begin{aligned}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}|h(\mathfrak{i})|\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}R_1(\mathcal{A},\mathfrak{i},C^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))\ll\xi\tau^{-4}\frac{\eta^2x^2}{\log x}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}&\\+x^2(\log x)^{-B}&\end{aligned}$$

Compte tenu de la borne $\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} S(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})) \leqslant S(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{-}(x^{\tau}))$, la majoration

$$\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} R_2(\mathcal{A},\mathfrak{i},C^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})) \ll \xi\tau^{-3}\frac{\eta^2x^2}{\log x}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}$$

est aussi une conséquence immédiate du lemme 6.4 combiné à (7.3).

Considérons à présent $R_3(\mathcal{A},\mathfrak{i},C^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$. On remarque que les termes d'erreur qui apparaissent proviennent des idéaux $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ qui satisfont les conditions

$$P^{-}(N(\mathfrak{s}))x^{-\xi} \leqslant P^{+}(N(\mathfrak{r})) \leqslant P^{-}(N(\mathfrak{s}))$$

ou

$$P^{+}(N(\mathfrak{s})) \leqslant P^{-}(N(\mathfrak{r})) \leqslant P^{+}(N(\mathfrak{s}))x^{\xi}.$$

Lorsque $i\in\{4,5\}$, on a

$$\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} R_3\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) \ll \sum_{\substack{x^{\tau}<N(\mathfrak{p}_1)\leqslant x^{1-\tau_1}\\ N(\mathfrak{p}_2)=x^{O(\xi)}N(\mathfrak{p}_1)}} S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2,\mathcal{C}^{-}(x^{\tau})).$$

dès que $N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}$. En utilisant les lemmes 6.4 et 6.5, il vient alors l'estimation suivante, valide pour tout $B>0$,

$$\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} R_3\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) \ll \xi\tau^{-3}\frac{\eta^2x^2}{\log x}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}.$$

D'autre part, si $i\in\{2,3\}$, en posant $\mathfrak{j}=\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{l}$, on observe que

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} R_3\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) &\ll \sum_{\substack{x^{1+\tau}<N(\mathfrak{p}_1)\\ N(\mathfrak{p}_2)=x^{O(\xi)}N(\mathfrak{p}_1)}} S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2,\mathcal{C}^{-}(x^{\tau}))\\ &\ll \sum_{\substack{x^{1+\tau}<N(\mathfrak{p}_1)\\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{l})\ll x^{2-\tau}\\ N(\mathfrak{p}_1)=\frac{x^{3+O(\xi)}}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{l})}\\ P^{-}(N(\mathfrak{l}))>x^{\tau}}} S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{l},\mathcal{C}^{-}(x^{\tau}))\end{aligned}$$

lorsque $N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}$. Là encore, les lemmes 6.4 et 6.5 conduisent à la majoration

$$\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} R_3\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right) \ll \xi\tau^{-2}\frac{\eta^2x^2}{\log x}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}$$

valide pour tout $B>0$. Ceci achève l'estimation de $R^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ lorsque $i\in\{2,\dots,5\}$.

Cas $i=1$. — Dans un premier temps, considérons la contribution issue des ensembles $\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},(1,0),\mathfrak{i})$ et $\mathcal{C}^{(1)}((2,0),\boldsymbol{n},\mathfrak{i})$. En observant que le nombre de couples $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ dans lequel intervient chaque idéal $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2$ est borné si $N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2)\leqslant 3x^3$, les arguments précédents s'adaptent sans difficulté nouvelle, conduisant aux bornes supérieures

$$\sum_{\boldsymbol{m}} R^{(1)}(\boldsymbol{m},(1,0)) \ll \xi\tau^{-3}\frac{\eta^2x^2}{\log x}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}+x^2(\log x)^{-B}$$

et

$$\sum_{\boldsymbol{n}} R^{(1)}((2,0),\boldsymbol{n}) \ll \xi\tau^{-4}\frac{\eta^2x^2}{\log x}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}+x^2(\log x)^{-B}$$

pour tout $B>0$.

Considérons à présent les ensembles $\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},(n,0),\mathfrak{i})$ lorsque $n\geqslant 2$, définis par (5.12). La somme $\sum_{\boldsymbol{m}} R_1(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},(n,0),\mathfrak{i})$ peut être bornée par

$$\sum_{j\ll\tau^{-1}}\ \sum_{\substack{N(\mathfrak{r}_1)\leqslant x^{1-4\tau_1}\\ P^-(N(\mathfrak{r}_1))>x^\tau}}\ \sum_{(N(\mathfrak{p}_1),\dots,N(\mathfrak{p}_n))\in\Delta_j^{(1)}(n)} S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n,\mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1)))$$

où $\Delta_j^{(1)}(n)$ désigne l'ensemble

$$\left\{(p_1,\dots,p_n):\ \begin{array}{l} x^\tau<p_1\leqslant\cdots\leqslant p_n<x^{1-\tau},\\ (p_1,\dots,p_n)\text{ satisfait }(E_j^{(1)}(n)),\\ p_2\cdots p_n\leqslant x^{1+\tau}<p_1\cdots p_n\leqslant x^{3/2-\tau}\end{array}\right\}$$

et $(E_j^{(1)}(n))$ désigne une inégalité de la forme :

$$x^\tau\leqslant p_1\leqslant x^{\tau+\xi},\quad p_2\cdots p_n=x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})},$$
$$p_1\cdots p_n=x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})},\quad p_1\cdots p_n=x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})}$$

ou

$$p_j\leqslant p_{j+1}\leqslant x^\xi p_j.$$

On traite la contribution des inégalités

$$p_1 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})} \quad \text{et} \quad p_1 \cdots p_n = x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})}$$

en utilisant les lemmes 6.4 et 6.5. En effet, en estimant la contribution des idéaux $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_2$ satisfaisant

$$N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = Yx^{O\left(\xi\tau^{-1}\right)} \text{ avec } Y = x^{3/2+\tau} \text{ ou } x^{2-\tau},$$

on observe que

$$\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{P^-(N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2))>x^\tau \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)=Yx^{O\left(\xi\tau^{-1}\right)}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ \ll \xi\tau^{-5}\frac{\eta^2x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} \frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}.$$

Supposons que $n \geqslant 3$. Pour les ensembles $\Delta_j^{(1)}(n)$ restants, au moins l'un des p_i n'apparaît pas dans la définition de $E_j^{(1)}(n)$, disons p_n. Observant que, si $P^-(N(\mathfrak{r}_1)) > x^\tau$, on a

$$\sum_{(N(\mathfrak{p}_1),\ldots,N(\mathfrak{p}_n))\in\Delta_j^{(1)}(n)} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1))) \\ \ll \tau^{-1} \sum_{\substack{x^\tau<N(\mathfrak{p}_1)\leqslant\cdots\leqslant N(\mathfrak{p}_{n-1}) \\ (N(\mathfrak{p}_1),\ldots,N(\mathfrak{p}_{n-1}),1) \text{ satisfait } \left(E_j^{(1)}(n)\right) \\ N(\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{n-1})\leqslant x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{n-1}, \mathcal{C}^-(x^\tau)),$$

on déduit, en utilisant les lemmes 6.4 et 6.5, l'estimation

$$\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\boldsymbol{m}} \sum_{n\geqslant 3} R_1\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m}, (n,0), \mathfrak{i})\right) \\ \ll \xi\tau^{-6}\frac{\eta^2x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} \frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}.$$

Si $n = 2$, l'argument précédent échoue uniquement en considérant l'inégalité $p_1 < p_2 \leqslant p_1x^\xi$. Le cas échéant, il apparaît que $x^{1/2} < p_1 < x^{3/4-\tau/2}$ ce qui permet de majorer cette contribution par

$$\ll \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{x^{1/2}<N(\mathfrak{p}_1)\leqslant N(\mathfrak{p}_2)\leqslant N(\mathfrak{p}_1)x^\xi\leqslant x^{\frac{3}{4}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ \ll \xi\tau^{-1}\frac{\eta^2x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} \frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}.$$

En utilisant des arguments similaires, on peut majorer les termes d'erreur $\sum_{\boldsymbol{m}} R_2(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},(n,0),\mathfrak{i})$ par

$$\ll \xi\tau^{-3} \sum_{\substack{N(\mathfrak{r}_1)\leqslant x^{1-4\tau_1}\\ P^-(N(\mathfrak{r}_1))>x^\tau}} \sum_{n\geqslant 2} \sum_{\substack{x^\tau<N(\mathfrak{p}_2)\leqslant\cdots\leqslant N(\mathfrak{p}_n)\\ N(\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_n)\leqslant x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_n,\mathcal{C}^-(x^\tau))$$

puis déduire que leur contribution totale est

$$\ll \xi\tau^{-6}\frac{\eta^2x^2}{\log x}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\sigma(\mathfrak{i})\frac{|h(\mathfrak{i})|}{N(\mathfrak{i})}+x^2(\log x)^{-B}.$$

Achevons la démonstration du lemme en étudiant la contribution des termes $R_3(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},(n,0),\mathfrak{i})$ issue de l'inégalité

$$P^-(s)\leqslant P^-(r_2)\leqslant P^-(s)x^\xi.$$

Si $n\geqslant 3$, on observe que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{m}} R_3\Big(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},(n,0),\mathfrak{i})\Big)\\
&\quad\ll \sum_{\substack{N(\mathfrak{r}_1)\leqslant x^{1-4\tau_1}\\ P^-(N(\mathfrak{r}_1))>x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau<N(\mathfrak{p}_1)\leqslant\cdots\leqslant N(\mathfrak{p}_n)\\ N(\mathfrak{p}_1)<N(\mathfrak{p})\leqslant N(\mathfrak{p}_1)x^\xi\\ N(\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{n-1})\leqslant x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n,\mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p})))\\
&\quad\ll \tau^{-2} \sum_{\substack{N(\mathfrak{r}_1)\leqslant x^{1-4\tau_1}\\ P^-(N(\mathfrak{r}_1))>x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau<N(\mathfrak{p}_1)\leqslant\cdots\leqslant N(\mathfrak{p}_{n-2})\\ N(\mathfrak{p}_1)<N(\mathfrak{p})\leqslant N(\mathfrak{p}_1)x^\xi\\ N(\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{n-2})\leqslant x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{n-2},\mathcal{C}^-(x^\tau))
\end{aligned}$$

Lorsque $n=2$, on a $P^-(s)\leqslant x^{3/4}$, d'où l'estimation

$$\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{m}} R_3\Big(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},(2,0),\mathfrak{i})\Big)\\
&\quad\ll \sum_{\substack{N(\mathfrak{r}_1)\leqslant x^{1-4\tau_1}\\ P^-(N(\mathfrak{r}_1))>x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau<N(\mathfrak{p}_1)\leqslant x^{1/2}\\ N(\mathfrak{p}_1)\leqslant N(\mathfrak{p})\leqslant N(\mathfrak{p}_1)x^\xi}} S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1,\mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1)))\\
&\qquad\qquad + \sum_{\substack{x^{1/2}<N(\mathfrak{p}_1)\leqslant x^{3/4}\\ N(\mathfrak{p}_1)\leqslant N(\mathfrak{p})\leqslant N(\mathfrak{p}_1)x^\xi}} S(\mathcal{A},\mathfrak{i}\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1,\mathcal{C}^-(x^\tau)).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit finalement que

$$\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\boldsymbol{m},n} \sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}} R_3\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(1)}(\boldsymbol{m},(n,0),\mathfrak{i}\right)$$
$$\ll \xi\tau^{-6}\frac{\eta^2x^2}{\log x}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\frac{|h(\mathfrak{i})|\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2(\log x)^{-B}. \quad \square$$

Au vu du lemme précédent, il convient de montrer que la quantité

$$\frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x^3}\sigma(\mathfrak{i})\widehat{S}\left(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right)$$

constitue une bonne approximation de $\widehat{S}(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$. Estimer le terme $\widehat{S}(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ se ramène à étudier les idéaux $\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{n_1+n_2}$ tels que le n_1+n_2-uplet $(N(\mathfrak{p}_1),\dots,N(\mathfrak{p}_{n_1+n_2}))$ appartienne à l'ensemble

$$G(\overrightarrow{v},t) := \left\{\overrightarrow{x}\in\mathbf{R}^{n_1+n_2} : \begin{array}{l} x_i\in[x^{v_i\xi},x^{(v_i+1)\xi}[\text{ pour } 1\leqslant i\leqslant n_1+n_2 \\ \text{et } \prod_{i=1}^{n_1+n_2} x_i\leqslant t\end{array}\right\}$$

Pour considérer de tels idéaux, Heath-Brown obtient dans [18] la généralisation suivante du théorème des idéaux premiers.

Lemme 7.2 ([18, Lemma 4.10]). — *Il existe $c>0$ tel que, uniformément en $t\geqslant 1$, $x\geqslant 2$, $1\leqslant n\ll\tau^{-1}$ et $\overrightarrow{v}\in\mathbf{N}^n$ satisfaisant $\tau\leqslant v_j\xi$ pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$, on ait*

$$\sum_{(N(\mathfrak{p}_1),\dots,N(\mathfrak{p}_n))\in G(\overrightarrow{v},t)}\prod_{i=1}^{n}\log N(\mathfrak{p}_i) = w(t) + O\left(t\exp\left(-c\sqrt{\log x^\tau}\right)\right)$$

où $w(t)=w(\overrightarrow{v},t)$ désigne la mesure de $G(\overrightarrow{v},t)$.

Le comportement analytique de la fonction w définie dans le lemme 7.2 a été étudié dans le paragraphe 8 de [18].

Lemme 7.3 ([18, Formules (8.3) et (8.4)]). — *Pour $t>0$, $h\geqslant 0$ et $n\geqslant 2$, on a*

$$|w'(t+h)-w'(t)|\leqslant\frac{h}{t}(\xi\log x)^{n-2}$$

et

$$0\leqslant w'(t)\leqslant(\xi\log x)^{n-1}.$$

De plus, si $n=1$, alors la dérivée à droite $w'(v_1,t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[x^{v_1\xi},x^{(v_1+1)\xi}[$.

En reproduisant l'argument développé dans le paragraphe 10 de [18], on utilise le lemme 7.2 pour obtenir une estimation de $\widehat{S}(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$.

Lemme 7.4. — *Pour tout* $i\in\{1,\dots,5\}$ *et uniformément pour* $x\geqslant 2$, $(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)$, $\mathfrak{i}\in\mathcal{I}$, *on a l'estimation*

$$\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}\left|\widehat{R}\left(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right)\right|\ll\frac{\eta^2c(N_1,N_2)x^3}{\xi^2N(\mathfrak{i})}$$

où $\widehat{R}(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ *désigne la différence entre* $\widehat{S}(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ *et*

$$\frac{c(N_1,N_2)\eta x^3}{N(\mathfrak{i})}\sum_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\boldsymbol{n},v_0))}\Sigma\left(\mathfrak{i},\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0),\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right)$$

avec, pour tout sous-ensemble $\mathcal{R}\subset\mathbf{N}^2$,

$$\Sigma(\mathfrak{i},\mathcal{R},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}):=\sum_{\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2}\frac{b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathcal{R})}{v_1^{(1)}\cdots v_{n_1}^{(1)}v_1^{(2)}\cdots v_{n_2}^{(2)}(\xi\log x)^{n_1+n_2}N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\times w'\left(\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\right).\tag{7.4}$$

Démonstration. — Au vu des définitions de $\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\boldsymbol{n},v_0))$, $b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathcal{R})$ et $\widehat{S}(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0))$, il suffit de montrer que, pour tout $n\geqslant 1$, $\overrightarrow{v}\in\mathbf{N}^n$ tel que $v_i\neq v_j$ si $i\neq j$ et tout ensemble $\mathcal{R}(\boldsymbol{m})$ inclus dans

$$\left\{(r_1,r_2):\Omega(r_1)=\omega(r_1)=m_1,\Omega(r_2)=\omega(r_2)=m_2\text{ et }P^-(r_1r_2)>x^\tau\right\},$$

on a

$$\sum_{\boldsymbol{m}}\left|\widehat{S}(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{R}(\boldsymbol{m}),\overrightarrow{v})-c(N_1,N_2)x^3\eta\frac{\Sigma(\mathfrak{i},\mathcal{R}(\boldsymbol{m}),\overrightarrow{v})}{N(\mathfrak{i})}\right|\ll\frac{\eta^2c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i})v_1\dots v_n}$$

où

$$\widehat{S}(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{R}(\boldsymbol{m}),\overrightarrow{v}):=\sum_{\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}\in\mathcal{B}}b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathcal{R}(\boldsymbol{m}))d_n(\mathfrak{s},\overrightarrow{v}),$$

$$d_n(\mathfrak{s},\overrightarrow{v}):=\begin{cases}\frac{\log N(\mathfrak{p}_1)\cdots\log N(\mathfrak{p}_n)}{v_1\cdots v_n(\xi\log x)^n} & \text{si }\mathfrak{s}=\mathfrak{p}_1\dots\mathfrak{p}_n\\ & \text{avec }N(\mathfrak{p}_i)\in[x^{v_i\xi},x^{(v_i+1)\xi}[,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

et

$$\Sigma(\mathfrak{i},\mathcal{R}(\boldsymbol{m}),\overrightarrow{v}):=\sum_{\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2}\frac{b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathcal{R}(\boldsymbol{m}))}{v_1\cdots v_n(\xi\log x)^nN(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}w'\left(\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\right).$$

Une fois cette estimation établie, le résultat se déduira directement de l'inégalité

$$\sum_{\boldsymbol{n}}\sum_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\mathcal{S}^{(i)}(\boldsymbol{n},v_0)}\frac{1}{v_1^{(1)}\cdots v_{n_1}^{(1)}v_1^{(2)}\cdots v_{n_2}^{(2)}}\leqslant\left(\sum_n\frac{1}{n!}\left(\sum_{v\ll\xi^{-1}}\frac{1}{v}\right)^n\right)^2\ll\xi^{-2}.$$

À la suite de [18, Section 10], observons tout d'abord que l'on peut réécrire $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}(\boldsymbol{m}), \overrightarrow{v})$ comme

$$(7.5)\quad \sum_{\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2} \frac{b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathcal{R}(\boldsymbol{m}))}{v_1\cdots v_n(\xi\log x)^n} \sum_{\substack{x^{v_1\xi}\leqslant N(\mathfrak{p}_1)<x^{(v_1+1)\xi}\\ \cdots\\ x^{v_n\xi}\leqslant N(\mathfrak{p}_n)<x^{(v_n+1)\xi}\\ \frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}<N(\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n)\leqslant\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}(1+\eta)}} \prod_{i=1}^n \log N(\mathfrak{p}_i).$$

Le lemme 7.2 permet d'estimer la somme intérieure, ainsi égale à

$$w\left(\frac{c(N_1,N_2)x^3(1+\eta)}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\right) - w\left(\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\right) + O\left(\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\exp\left(-c\sqrt{\log x^\tau}\right)\right).$$

Supposons que $n\neq 1$. En combinant le théorème des accroissements finis et le lemme 7.3, on observe que

$$(7.6)\quad w\left(\frac{c(N_1,N_2)x^3(1+\eta)}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\right) - w\left(\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\right) = \frac{c(N_1,N_2)\eta X^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\left(w'\left(\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\right) + O\left(\eta(\xi\log x)^{n-2}\right)\right)$$

ce qui implique l'estimation attendue.

Dans le cas $n=1$, la dérivée à droite w' étant la fonction caractéristique de $[x^{v_1\xi}, x^{(v_1+1)\xi}[$, il s'ensuit que l'estimation (7.6) est valide sauf éventuellement lorsque $\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\leqslant x^{v\xi}\leqslant\frac{c(N_1,N_2)x^3(1+\eta)}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}$ avec $v=v_1$ ou v_1+1. Pour estimer la contribution de ces derniers idéaux, il suffit d'observer que, d'après le théorème 3.6, on a

$$\sum_{N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)=\frac{c(N_1,N_2)x^{3-v\xi}}{N(\mathfrak{i})}(1+O(\eta))} \frac{b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathcal{R}(\boldsymbol{m}))}{N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \ll \sum_{N(\mathfrak{j})=\frac{c(N_1,N_2)x^{3-v\xi}}{N(\mathfrak{i})}(1+O(\eta))} \frac{e^{c\tau^{-1}}}{N(\mathfrak{j})} \ll \eta e^{c\tau^{-1}}. \quad\square$$

En raison du phénomène de parité, l'argument de la preuve précédente ne permet pas d'estimer l'analogue de (7.5) avec $\mathcal{A}$, à savoir

$$\sum_{\substack{x^{v_1\xi}\leqslant N(\mathfrak{p}_1)<x^{(v_1+1)\xi}\\ \cdots\\ x^{v_n\xi}\leqslant N(\mathfrak{p}_n)<x^{(v_n+1)\xi}\\ \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\in\mathcal{A}}} \prod_{i=1}^n \log N(\mathfrak{p}_i).$$

En vue de lever cette obstruction et de contourner partiellement la dépendance en $\boldsymbol{n}$ dans la somme précédente, introduisons, en nous inspirant des notations (5.10), (5.11) et (5.12) de [19], les quantités

$$\widehat{S}_e\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right):=\sum_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\boldsymbol{n},v_0))}\widehat{S}_e\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0)\right)$$

où

$$\widehat{S}_e\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0)\right):=\sum_{\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}\in\mathcal{A}}b\left(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0)\right)e_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right)$$

avec

$$e_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right):=\frac{w'(N(\mathfrak{s}))}{v_1^{(1)}\cdots v_{n_1}^{(1)}v_1^{(2)}\cdots v_{n_2}^{(2)}(\xi\log x)^{n_1+n_2}}\times\sum_{\substack{\mathfrak{j}\mid\mathfrak{s}\\ N(\mathfrak{j})<x^{\tau/2}}}\mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})\log\left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})}\right).$$

Compte tenu de la définition de w et du lemme 7.3, on peut observer que

$$e_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right),d_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right)\ll\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{s})\log x\tag{7.7}$$

dès que

$$0\leqslant\frac{\log N(\mathfrak{s})}{\xi\log x}-\left(v_1^{(1)}+\cdots+v_{n_1}^{(1)}+v_1^{(2)}+\cdots+v_{n_2}^{(2)}\right)\leqslant n_1+n_2,$$

et que $e_{\boldsymbol{n}}(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ et $d_{\boldsymbol{n}}(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ sont nuls dans le cas contraire.

Dans le lemme suivant, nous estimons asymptotiquement la quantité $\widehat{S}_e(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$. Les estimations de Type I combinées à la formule de Perron permettent de la relier à $\widehat{S}(\mathcal{B},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ en suivant l'argument développé au paragraphe 10 de [18].

Lemme 7.5. — *Soit $i\in\{1,\ldots,5\}$. Uniformément pour $x\geqslant 2$, $v_0\geqslant 1$ et $(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)$, on a l'estimation*

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}\\ x^{v_0}\leqslant N(\mathfrak{i})<x^{(v_0+1)\xi}}}\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}\left|\widehat{R}_e\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right)\right|\ll\eta^{\frac{11}{5}}x^2(\log x)^c$$

où $\widehat{R}_e(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))$ désigne la différence

$$\widehat{S}_e\left(\mathcal{A},\mathfrak{i},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})\right)-\sigma_0\eta^2x^2\frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}\sum_{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\in\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\boldsymbol{n},v_0))}\Sigma\left(\mathfrak{i},\mathcal{R}^{(\mathfrak{i})}(\boldsymbol{m},\overrightarrow{\boldsymbol{v}},v_0),\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right)$$

et $\Sigma(\mathfrak{i},\mathcal{R},\overrightarrow{v})$ est défini par (7.4).

Démonstration. — Dans l'esprit de la preuve du lemme 3.9 de [18] et compte tenu du lemme 2.3, commençons par remplacer $w'(N(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2))$ par $w'\Big(\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\Big)$. Si $n_1+n_2 \geqslant 2$, on utilise successivement le lemme 7.3, l'inégalité de Hœlder et le lemme 2.1 de sorte que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\mathfrak{i},\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2,\mathfrak{s}_1,\mathfrak{s}_2\\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\in\mathcal{A}}} \frac{b(\dots)}{(\xi\log x)^{n_1+n_2}} \left| w'(N(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2)) - w'\left(\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\right)\right| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \left| \sum_{\substack{\mathfrak{j}\mid\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\\ N(\mathfrak{j})<x^{\tau/2}}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})\log\left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})}\right)\right| \\
&\ll \frac{\eta^{\frac14}}{\xi^2\log x}\sum_{\mathfrak{j}\in\mathcal{A}}\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})^5 \\
&\ll \frac{\eta^{\frac14}}{\xi^2\log x}\#\mathcal{A}^{39/40}\left(\sum_{1\leqslant n_1,n_2\leqslant 2x}\tau_{\mathbf{K}}\left(n_1+n_2\sqrt[3]{2}\right)^{200}\right)^{1/40} \\
&\ll \eta^{\frac{11}{5}}x^2(\log x)^c.
\end{aligned}$$

Considérons à présent le cas $n_1+n_2=1$. L'identité

$$w'(N(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2)) = w'\left(\frac{c(N_1,N_2)x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)}\right)$$

est vraie excepté pour les idéaux qui satisfont

$$N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = c(N_1,N_2)x^{3-v\xi}(1+O(\eta^{\frac14}))$$

avec $v=v_1$ ou v_1+1. Par suite, en utilisant le lemme 3.4, on peut majorer le terme d'erreur ainsi engendré par

$$\ll \xi^{-1}\sum_{\substack{\mathfrak{i},\mathfrak{s}\\ N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}}\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{s})\sum_{\substack{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r})=c(N_1,N_2)x^{3-v\xi}(1+O(\eta^{\frac14}))\\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}\mathfrak{s}\in\mathcal{A}}}\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{r})$$

$$\ll \xi^{-1} \left(\sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \ll x^{2-\tau/2} \\ N(\mathfrak{j}) = c(N_1,N_2)x^{3-v\xi}(1+O(\eta^{\frac{1}{4}}))}} \#\mathcal{A}_{\mathfrak{j}} \right)^{44/45} \times \left(\sum_{1 \leqslant n_1, n_2 \ll x} \tau_{\mathbf{K}} \left(n_1 + n_2 \sqrt[3]{2} \right)^{135} \right)^{1/45}$$

$$\ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c.$$

Définissons $\Sigma_1(\mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, v_0))$ par la somme

$$\sum_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2} \frac{b\left(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, v_0)\right)}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}} w' \left(\frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \right) \times \sum_{N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \#\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{i}\mathfrak{j}} \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})} \right).$$

Dans la mesure où $N(\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{j}) \ll x^{2-\tau/2}$, le lemme 3.4 combiné à l'estimation $\alpha(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = 1 + O(\frac{1}{\tau x^\tau})$ entraîne, pour tout $B > 0$, l'inégalité

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\boldsymbol{m}} \left| \Sigma_1 \left(\mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, v_0) \right) - \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \Sigma \left(\mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\boldsymbol{m}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}, v_0), \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \right) \sum_{N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha(\mathfrak{i}\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})} \right) \right|$$

$$\ll \frac{x^2}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)}} (\log x)^{-B}.$$

Il s'agit à présent d'étudier la somme sur $\mathfrak{j}$. Écrivons

$$\sum_{N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha(\mathfrak{i}\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})} \right) = \alpha(\mathfrak{i}) \sum_{m < x^{\tau/2}} \frac{\widehat{\xi}(\mathfrak{i}, m)}{m} \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{m} \right)$$

où $\widehat{\xi}(\mathfrak{i}, \cdot)$ est la fonction multiplicative définie par

$$\widehat{\xi}(\mathfrak{i}, p^k) := \sum_{N(\mathfrak{j}) = p^k} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \frac{\alpha(\mathfrak{i}\mathfrak{j})}{\alpha(\mathfrak{i})}$$

lorsque $\alpha(\mathfrak{i}) \neq 0$.

En reprenant un à un les arguments de Heath-Brown conduisant à l'estimation [18, (10.4)], on observe finalement, en appliquant la formule de Perron à la série de Dirichlet $\zeta_{\widehat{\xi}(\mathfrak{i},\cdot)}(s)$ engendrée par $\widehat{\xi}(\mathfrak{i},\cdot)$, que l'on a

$$\sum_{N(\mathfrak{j})<x^{\tau/2}} \frac{\alpha(\mathfrak{ij})}{N(\mathfrak{j})}\mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})\log\left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})}\right) = \frac{\pi^2\sigma_0\sigma(\mathfrak{i})}{6} + O\left(\exp\left(-c\sqrt{\log x^{\tau/2}}\right)\right).$$

□

L'estimation du terme d'erreur qui apparaît avec le remplacement de $d_{\boldsymbol{n}}(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ par $e_{\boldsymbol{n}}(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$ a constitué le tour de force majeur des travaux de Heath-Brown (voir à ce sujet les paragraphes 8, 9 et 11 à 13 de [18]). De telles estimations de sommes, dites de Type II, se révèlent être l'ingrédient nécessaire pour s'affranchir du phénomène de parité.

Lemme 7.6. — *Soit $B \geqslant 0$. Uniformément pour $h : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \to \mathbf{C}$ bornée par 1 et $b : \mathcal{J}(\mathbf{K})^2 \to [-1,1]$, $x \geqslant 2$, $x^{1+\tau} \leqslant V \leqslant x^{\frac{3}{2}-\tau}$ et $\xi \leqslant \tau$, on a*

$$S_V := \sum_{\substack{\mathfrak{i},\mathfrak{s},\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2\in\mathcal{J}(\mathbf{K})\\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}\in\mathcal{A}\\ V<N(\mathfrak{s})\leqslant 2V}} h(\mathfrak{i})b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2)\left(d_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) - e_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right)\right) \ll x^2(\log x)^{-B}$$

où la constante implicite dépend du zéro de Siegel.

Démonstration. — La preuve étant calquée sur les arguments développés dans [18] et [20], nous nous contentons ici de souligner les différences. Introduisons l'ensemble des idéaux primitifs, à savoir

$$\mathcal{P} := \{\mathfrak{j}\in\mathcal{J}(\mathbf{K}) : p\mathcal{O}_{\mathbf{K}} \nmid \mathfrak{j} \text{ pour tout premier } p\}$$

et observons que $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}$.

En vue de s'affranchir de la condition de coprimalité dans la définition de $\mathcal{A}$, écrivons, à l'aide du principe d'inclusion-exclusion, la relation

$$S_V = \sum_{m\geqslant 1}\mu(m)S_V(m)$$

où

$$S_V(m) := \sum_{\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\in\mathcal{P}} h(\mathfrak{i})b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2) \sum_{\substack{\mathfrak{s}\in\mathcal{P}\\ V<N(\mathfrak{s})\leqslant 2V\\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}\in\mathcal{A}(m)}} d_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) - e_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right)$$

et

$$\mathcal{A}(m) = \left\{n_1+n_2\sqrt[3]{2} : (n_1,n_2)\in C(N_1,N_2), m \mid (n_1,n_2)\right\}.$$

Soit $M \geqslant 1$ un paramètre qui sera explicité plus tard. Au vu de (7.7), du lemme 2.1 et des bornes sur b et h, on estime la contribution des entiers $m > M$ en s'inspirant de la majoration (11.2) de [18] par

$$\begin{aligned}\sum_{m>M}\left|\sum_{\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\in\mathcal{P}} h(\mathfrak{i})b(\mathfrak{r}_1,\mathfrak{r}_2)\sum_{\substack{\mathfrak{s}\in\mathcal{P}\\ V<N(\mathfrak{s})\leqslant 2V\\ \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}\in\mathcal{A}(m)}} d_{\boldsymbol{n}}\left(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right)\right| &\leqslant \log x\sum_{m>M}\sum_{\mathfrak{j}\in\mathcal{A}(m)}\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})^4\\ &\ll \frac{x^2}{M}(\log x)^c. \end{aligned}\tag{7.8}$$

Une estimation similaire est valide pour la contribution des $e_{\boldsymbol{n}}(\mathfrak{s},\overrightarrow{\boldsymbol{v}})$.

Pour traiter les entiers $m \leqslant M$, on suit essentiellement la démarche développée dans la preuve du lemme 3.10 de [18]. Soit $Y \ll x^{\tau/3}$ un paramètre qui sera explicité en fin de preuve. À la suite de Heath-Brown, on introduit un système de générateurs d'idéaux primitifs à travers la condition

$$N(\beta)^{1/3}\varepsilon_0^{-1/2} < \beta \leqslant N(\beta)^{1/3}\varepsilon_0^{1/2}$$

et on note $\widehat{\beta}$ les coordonnées de β dans la base $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$. En reprenant les arguments des chapitres 11 et 12 de [18], on obtient l'existence de $Vx^{-1}Y^{-1} < \Delta \ll Vx^{-1}$, $Y^2 < Z \leqslant 2Y^2$ et d'un cube $\mathfrak{C} := \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ tels que l'on ait la majoration suivante, analogue de [18, Lemma 12.2],

$$S_V(m) \ll x^2Y^{-1/2}(\log x)^c + x^{3/2}V^{-1/2}Y^7 S_V^{(1)}(m,Z,\Delta,\mathfrak{C})^{1/2}(\log x)^c \tag{7.9}$$

$$S_V^{(1)}(m,Z,\Delta,\mathfrak{C}) := \sum_{D\in\left]\frac{Z-1}{Y^2}\Delta,\frac{Z}{Y^2}\Delta\right]}\left|\sum_{dD\leqslant d_0}\mu(d)S^{(2)}(m,d,D,\mathfrak{C})\right|$$

avec

$$S^{(2)}(m,d,D,\mathfrak{C}) := \sum_{\substack{(\beta_1),(\beta_2)\in\mathcal{P}\\ \widehat{\beta}_1\in\mathfrak{C}_1,\widehat{\beta}_2\in\mathfrak{C}_2\\ dD\mid\widehat{\beta}_1\wedge\widehat{\beta}_2}} f_{\boldsymbol{n}}\left(\beta_1,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) f_{\boldsymbol{n}}\left(\beta_2,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right)\epsilon_{m,D}\left(\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2\right),$$

où

$$f_{\boldsymbol{n}}(\beta,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}) = d_{\boldsymbol{n}}\left(\beta\mathcal{O}_{\mathbf{K}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) - e_{\boldsymbol{n}}\left(\beta\mathcal{O}_{\mathbf{K}},\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right),$$

et $\epsilon_{m,D}(\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2)$ vaut

$$\begin{cases} 1 & \text{si } mD \mid p_1\left(\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2\right), p_2\left(\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2\right), q_1\left(\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2\right) \text{ et } q_2\left(\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2\right)\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

les formes cubiques p_1, p_2, q_1, q_2 étant définies dans le chapitre 12 de [18].

En reprenant *mutatis mutandis* les arguments de [20, Section 5] basés sur l'introduction de caractères additifs, on peut réécrire $S^{(2)}(m,d,D,\mathfrak{C})$ sous la forme

$$\frac{1}{(mdD)^6}\sum_{\substack{\lambda\in(\mathbf{Z}/(dD)\mathbf{Z})^*\\ \boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\in(\mathbf{Z}/(mdD)\mathbf{Z})^3}} T\left(\lambda,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\right) S\left(mdD,\boldsymbol{b}_1,\mathfrak{C}_1\right) S\left(mdD,\boldsymbol{b}_2,\mathfrak{C}_2\right)$$

avec

$$S\left(l,\boldsymbol{b}_i,\mathfrak{C}_i\right)=\sum_{\substack{\widehat{\beta}\in\mathfrak{C}_i\cap\mathbf{Z}^3\\ (\beta)\in\mathcal{P}}} \mathrm{e}\left(\frac{\boldsymbol{b}_i.\widehat{\beta}}{l}\right) f_{\boldsymbol{n}}\left(\beta,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right).$$

et

$$\begin{aligned}T\left(\lambda,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\right):=\sum_{\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_5}\mathrm{e}\left(-\frac{(\boldsymbol{b}_1+\lambda\boldsymbol{b}_2).\boldsymbol{\eta}_5}{dD}\right)&\\ \times\,\mathrm{e}\left(-\frac{(\boldsymbol{b}_1+\lambda\boldsymbol{b}_2).\boldsymbol{\eta}_4+dD\boldsymbol{b}_2.\boldsymbol{\eta}_3}{mdD}\right)&\end{aligned}$$

où la sommation porte sur les $\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4\in\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ et $\boldsymbol{\eta}_5\in\mathbf{Z}/(dD)\mathbf{Z}$ satisfaisant, pour tout polynome $H\in\{p_1,p_2,q_1,q_2\}$,

$$H\left(\boldsymbol{\eta}_4,\lambda\boldsymbol{\eta}_4+dD\boldsymbol{\eta}_3\right)\equiv 0 \pmod{mD}.$$

La propriété d'orthogonalité des caractères additifs et la majoration triviale entraînent que

$$\left|T\left(\lambda,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\right)\right|\leqslant\begin{cases}(dD)^3m^6 & \text{si } \boldsymbol{b}_1+\lambda\boldsymbol{b}_2\equiv 0 \pmod{dD},\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

De plus, si $T(\lambda,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)\neq 0$, alors $\boldsymbol{b}_2$ est déterminé de manière unique modulo dD par la donnée de λ et de $\boldsymbol{b}_1$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz entraîne alors l'estimation

$$S^{(2)}(m,d,D,\mathfrak{C})\ll\frac{m^3}{(dD)^2}\max_{i=1,2}\sum_{\boldsymbol{b}\pmod{mdD}}\left|S\left(mdD,\boldsymbol{b},\mathfrak{C}_i\right)\right|^2.$$

Afin d'appliquer une inégalité de grand crible, on réduit les différentes phases $\boldsymbol{b}(mdD)^{-1}$ à des phases irréductibles $\boldsymbol{b}l^{-1}$, c'est-à-dire telles que $(l,b_1,b_2,b_3)=1$, en suivant [18, p. 78]. On remarque pour cela qu'une phase $\boldsymbol{b}l^{-1}$ apparaît avec un poids qui peut être majoré uniformément en m par

$$\sum_{D\geqslant Vx^{-1}Y^{-1}}\sum_{\substack{d\\ l\mid mdD}}\frac{m^3}{(dD)^2}\ll m^5\sum_{\substack{v\geqslant Vx^{-1}Y^{-1}\\ l\mid v}}\frac{\tau(v)}{v^2}\ll m^5\frac{\tau(l)}{l}xY\frac{\log V}{V}.$$

Au vu de la condition $dD \leqslant d_0$, on en déduit que

$$S_V^{(1)}(m,Z,\Delta,\mathfrak{C}) \ll \frac{m^5xY(\log x)^c}{V}\max_{i=1,2}\sum_{l\leqslant md_0}\frac{\tau(l)}{l}\sideset{}{^{(l)}}\sum_{\boldsymbol{b}\,(\mathrm{mod}\ l)}|S\left(l,\boldsymbol{b},\mathfrak{C}_i\right)|^2$$

où la sommation $\sum^{(l)}$ porte sur les vecteurs $\boldsymbol{b}\mod l$ vérifiant la relation $(l,b_1,b_2,b_3)=1$. On peut alors reproduire étape par étape les arguments du paragraphe 13 de [18] pour majorer la somme du membre de droite de la formule précédente. Il s'ensuit la majoration

$$S_V^{(1)}(m,Z,\Delta,\mathfrak{C}) \ll m^8xV\left(YQ_1^{-1/4}+Y^{46}x^{-\tau/2}\right)(\log x)^c \tag{7.10}$$

où $Q_1 := (\log x)^{c(B)}$ avec $c(B)>0$ une constante qui peut-être choisie arbitrairement grande.

En combinant les estimations (7.8), (7.9) et (7.10) avec les choix de paramètres $Y=M^4$ et $M=Q_1^{1/288}$, on obtient finalement

$$S_V \ll x^2(\log x)^{-B}.$$

L'uniformité du résultat en $(\log x)^{-\varpi_2}\leqslant\xi\leqslant\tau$ ainsi que la non-effectivité de la constante implicite sont des conséquences directes de la preuve du lemme 3.8 de [18]. □

En conclusion de cette partie, on peut énoncer une borne supérieure du terme d'erreur $S(|h|)$ défini par (5.15).

Proposition 7.7. — *Soit $B>0$. Il existe une constante $c(B)>0$ telle que, pour tout $c_0>c(B)$ et uniformément en $x\geqslant 2$, $(N_1,N_2)\in\mathcal{N}(\eta)$, $y_2>x^\tau$, $y_1=1$ ou $y_1>x^\tau$, w un complexe de module 1, $h\in\mathcal{M}(w;y_1,y_2)$ et $(\log x)^{-\tau}\leqslant\xi\leqslant\tau^2$, on ait*

$$S(|h|)\ll\eta^2x^2(\log x)^{-B}+\sum_{i=1}^{5}\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}R^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$$

pour le choix $\eta:=(\log x)^{-c_0}$, où les $R^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ sont définis par (7.1).

Démonstration. — Soit $c_1>0$. Puisqu'il y a au plus $O(\xi^{-1})$ choix possibles pour chaque v_i et compte tenu de l'hypothèse $(\log x)^{-\tau}\leqslant\xi$, les lemmes 7.4, 7.5 et 7.6 entraînent l'existence d'une constante $c_2>0$ indépendante de c_1 et η telle que, pour tout $i\in\{1,\dots,5\}$,

$$\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}\sum_{N(\mathfrak{i})\in\mathcal{I}}\left|\widehat{S}(\mathcal{A},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i})-\frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x}\sigma(\mathfrak{i})\widehat{S}(\mathcal{B},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathfrak{i}))\right| \ll x^2\left(\eta^{\frac{11}{5}}+(\log x)^{-c_1}\right)(\log x)^{c_2}.$$

En choisissant $c(B) = 5(c_2 + B)$ et $c_1 = 2c_0 + c_2 + B$ et en majorant $S(|h|)$ par

$$\sum_{i=1}^{5} \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} \sum_{N(\mathrm{i})\in\mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathrm{i}) - \frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x}\sigma(\mathrm{i})\widehat{S}(\mathcal{B},\mathcal{C}^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\mathrm{i})) \right| + \sum_{i=1}^{5}\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}} R^{(i)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}),$$

on en déduit le résultat. □

8. Applications de la méthode

Compte tenu des résultats des paragraphes précédents, il est possible d'estimer les différentes quantités intervenant dans la proposition 5.2, ce qui conduit au résultat suivant.

Proposition 8.1. — *Soit* $\varepsilon > 0$. *Uniformément en* $x \geqslant 2$, w *un complexe de module* 1, $y_2 > \exp(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}})$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ *et* h *dans* $\mathcal{M}(w; 1, y_2)$, *on a*

$$M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x} M_{\sigma h}(\mathcal{B}) \ll \frac{\eta^2x^2}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}}. \tag{8.1}$$

Si, de plus, $\exp(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1/2-\varepsilon}}) \leqslant y_2 \leqslant x^{1/2-\varepsilon}$, *alors on peut remplacer dans* (8.1) *le terme* $1/(\log\log x)^{1-\varepsilon}$ *par* $\exp(-(\log\log x)^{1/2-\varepsilon})$.

D'autre part, si $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ *où* $y_1 > \exp(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}})$, *alors on a*

$$M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x} M_{\sigma h}(\mathcal{B}) \ll \frac{\eta^2x^2}{\log y_1}\frac{\log x}{\log y_1(\log\log x)^{1-\varepsilon}}. \tag{8.2}$$

Démonstration. — Soient $\tau := (\log\log x)^{\varepsilon/2-1}$ et $\tau_1 := (\log\log x)^{\varepsilon-1}$. Les lemmes 6.1, 6.3 et 6.7 fournissent une borne supérieure des quantités $\Delta_0(|h|)$, $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$ et $T(|h|)$ qui est négligeable, compte tenu des choix de τ et τ_1. En utilisant la proposition 7.7 avec le choix $\xi := \tau^7$, le lemme 7.1, ainsi que la majoration (6.11), on obtient d'autre part l'estimation

$$S(|h|) \ll \tau\eta^2x^2.$$

Enfin, le lemme 6.6 permet d'estimer $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$, ce qui conduit à (8.1). L'estimation (8.2) s'obtient de même en utilisant (6.10) en lieu et place de (6.9) et en notant que $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) = 0$.

Supposons à présent que $y_2 \leqslant x^{1/2-\varepsilon}$ et posons $\tau := (\log\log x)^{\varepsilon/2-1/2}$ et $\tau_1 := \varepsilon/2$. Sous ces conditions, on observe que seuls interviennent les éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$ dans la discussion du paragraphe 5. On a alors

$$M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x} M_{\sigma h} S(\mathcal{B}) \ll S(|h|) + \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0\left(|h|\right).$$

On en déduit le résultat en utilisant là encore les lemmes 6.1 et 6.3, la proposition 7.7 avec le choix $\xi := (\log x)^{-\tau}$ ainsi que le lemme 7.1. □

En combinant le résultat précédent avec les ordres moyens établis dans le paragraphe 4.2, on peut en déduire les théorèmes 1.1 et 1.3 et le corollaire 1.2.

Démonstration du théorème 1.1 et du corollaire 1.2. — La proposition 4.2 entraîne que, uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et dans le domaine (1.3) défini par

$$x \geqslant 3, \qquad \exp\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}}\right) \leqslant y \leqslant 3x^3,$$

on a

$$\frac{\eta\sigma_0}{c(N_1,N_2)x} M_{\sigma 1_{S(y)}}(\mathcal{B}) = \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \rho\left(3u\right)\left(1 + O\left(\log\log x \frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right).$$

En sommant sur les différents $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ (voir la formule (2.3)), le théorème 1.1 découle de la proposition 8.1.

Pour démontrer le corollaire 1.2, il s'agit de se restreindre à la région (1.3), le résultat étant une conséquence de [3, Corollary 1] dans le domaine $u \geqslant (\log\log x)^{1-\varepsilon}$ (voir la remarque qui suit le corollaire 1.2). Considérons la convolution

$$\Psi\left(\mathcal{K}\cdot x, y\right) = \sum_{m \leqslant \log x} \Psi^{(1)}\left(\mathcal{K}\cdot \frac{x}{m}, y\right) + O\left(\sum_{m > \log x} \frac{x^2}{m^2}\right).$$

Le corollaire s'obtient comme conséquence du théorème 1.1, puisque l'on a, d'après (4.14), l'estimation

$$\begin{aligned}\sum_{m \leqslant (\log x)^B} \frac{\rho\left(3u - \frac{\log m}{\log y}\right)}{m^2} &= \sum_{m \leqslant (\log x)^B} \frac{\rho(3u)}{m^2}\left(1 + O\left(\frac{\log m \log(u+1)}{\log y}\right)\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6}\rho(3u)\left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right).\end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème 1.3. — Soit $h \in \mathcal{M}(w)$. La proposition 4.1 permet d'évaluer $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$:

$$M_{\sigma h}(\mathcal{B}) = c(N_1, N_2)\eta x^3 \left(3\log x\right)^{w-1} \left(\frac{\sigma(h)}{\Gamma(w)} + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right)$$

Le théorème 1.3 est alors une conséquence directe de la proposition 8.1 et de (2.3), dans la mesure où l'hypothèse $|w-1| \geqslant \frac{1}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}}$ implique l'estimation $(\log x)^{w-1} \ll \frac{1}{(\log\log x)^{1-\varepsilon}}$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Balog, V. Blomer, C. Dartyge & G. Tenenbaum, « Friable values of binary forms », *Comment. Math. Helv.* **87** (2012), n° 3, p. 639-667.

[2] E. Bombieri, « The asymptotic sieve », *Rend. Accad. Naz. XL* **1-2** (1976), p. 243-269.

[3] R. de la Bretèche & T. D. Browning, « Sums of arithmetic functions over values of binary forms », *Acta Arith.* **125** (2006), n° 3, p. 291-304.

[4] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, « Moyennes de fonctions arithmétiques de formes binaires », *Mathematika* **58** (2012), n° 2, p. 290-304.

[5] ———, « Sur la conjecture de Manin pour certaines surfaces de Châtelet », *J. Inst. Math. Jussieu* **12** (2013), n° 4, p. 759-819.

[6] N. G. de Bruijn, « On the number of positive integers $\leqslant x$ and free prime factors $> y$. II », *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **69** (1966), p. 239-247.

[7] S. Chowla, « The Riemann hypothesis and Hilbert's tenth problem », *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **38** (1965), p. 62-64.

[8] R. Crandall & C. Pomerance, *Prime numbers, a computational perspective*, second éd., Springer, 2005, xvi+597 pages.

[9] S. Daniel, « On the divisor-sum problem for binary forms », *J. Reine Angew. Math.* **507** (1999), p. 107-129.

[10] F. Delmer, « Sur la somme de diviseurs $\sum_{k\leqslant x} \{d[f(k)]\}^s$ », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **272** (1971), p. 849-852.

[11] J. Friedlander & H. Iwaniec, *Opera de cribro*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 57, American Mathematical Society, 2010, xx+527 pages.

[12] G. Greaves, « On the divisor-sum problem for binary cubic forms », *Acta Arith.* **17** (1970), p. 1-28.

[13] ———, « Large prime factors of binary forms », *J. Number Theory* **3** (1971), p. 35-59, errata in *ibid.* **9** (1977), p. 561-562.

[14] ———, « Power-free values of binary forms », *Q. J. Math., Oxf. II. Ser.* **43** (1992), n° 169, p. 45-65.

[15] H. Halberstam & H.-E. Richert, *Sieve methods*, London Mathematical Society Monographs, vol. 4, Academic Press, 1974, loose errata, xiv+364 pages.

[16] G. Hanrot, G. Tenenbaum & J. Wu, « Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. II », *Proc. Lond. Math. Soc.* **96** (2008), n° 1, p. 107-135.

[17] D. R. Heath-Brown, « Diophantine approximation with square-free numbers », *Math. Z.* **187** (1984), n° 3, p. 335-344.

[18] ———, « Primes represented by $x^3 + 2y^3$ », *Acta Math.* **186** (2001), n° 1, p. 1-84.

[19] D. R. Heath-Brown & B. Z. Moroz, « Primes represented by binary cubic forms », *Proc. Lond. Math. Soc.* **84** (2002), n° 2, p. 257-288.

[20] ———, « On the representation of primes by cubic polynomials in two variables », *Proc. Lond. Math. Soc.* **88** (2004), n° 2, p. 289-312.

[21] H. A. Helfgott, « The parity problem for irreducible cubic forms », `http://arxiv.org/abs/math/0501177`, 2005.

[22] A. Lachand, « Entiers friables et formes binaires », Thèse, Université de Lorraine (France), 2014, `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01104211`.

[23] A. Selberg, « On elementary methods in prime number-theory and their limitations », in *Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim, 1949*, Johan Grundt Tanums Forlag, 1952, p. 13-22.

[24] P. Shiu, « A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions », *J. Reine Angew. Math.* **313** (1980), p. 161-170.

[25] G. Tenenbaum, « Sur une question d'Erdős et Schinzel », in *A tribute to Paul Erdős*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, p. 405-443.

[26] ———, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3e éd., Échelles, Belin, 2008, 592 pages.

[27] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra. 2*, F. Vieweg & Sohn, 1899, x+247 pages.

Manuscrit reçu le 7 mars 2016,
révisé le 26 mai 2016,
accepté le 13 juillet 2017.

Armand LACHAND
Institut Élie Cartan
Université de Lorraine
B.P. 70239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex (France)
research@lachand.net