

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE BLAMBERT

JEAN SIMÉON

**Régularité et suprarégularité pour une famille
de germes dirichlétiens (par rapport à un
support de référence)**

Annales de l'institut Fourier, tome 19, n° 1 (1969), p. 249-274

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_249_0

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉGULARITÉ ET SUPRARÉGULARITÉ POUR UNE FAMILLE DE GERMES DIRICHLÉTIENS (PAR RAPPORT A UN SUPPORT DE RÉFÉRENCE)

par Maurice BLAMBERT et Jean SIMEON

Introduction.

Ce travail constitue le développement d'une note aux C.R.A.S. de Jean Siméon. Au chapitre I, on introduit, entre autres notions nouvelles, celles de demi-plan, de droite et d'abscisse de régularité d'une part, et similairement, d'autre part, de suprarégularité pour une famille de germes dirichlétiens, par rapport à un support commun. Les notions classiques de demi-plans, droites et abscisses simple et uniforme d'un al-germe-D quelconque se présentent comme des cas particuliers des notions antérieurs. On exprimerait des remarques analogues, avec des précautions convenables, pour l'ultraconvergence. Au chapitre II, on donne des expressions de majorants des abscisses de régularité et de suprarégularité, en utilisant la forme algorithmique donnée par Maurice Blambert à un résultat dû à Kojima. On étend à des familles d'al-germes-D des propriétés classiques relatives à la famille très particulière des polynômes-sections d'un al-germe-D. Au chapitre III, on énonce et démontre des conditions suffisantes pour que les abscisses de régularité et suprarégularité soient égales, et on généralise des résultats dûs à Landau et Fekete.

Plus généralement, au chapitre IV, on énonce et démontre (en utilisant accessoirement des propriétés dûes à V. Bernstein) des relations de dépendance entre les différentes abscisses considérées d'une famille ; on retrouve comme cas particuliers des résultats de cet auteur relatifs à la famille des polynômes-sections d'un al-germe-D.

Ce travail utilise, dans une certaine mesure, une terminologie et des propriétés bien connues des familles normales dont la forme pédagogique, non tout à fait usuelle, a été mise au point, à des fins différentes dans un mémoire antérieur, par les deux auteurs.

CHAPITRE I

σ_0 étant une constante appartenant à \mathbf{R} , on considère une famille —que l'on désigne par \mathfrak{F}_{σ_0} — d'applications du demi-plan $P_{\sigma_0} = \{s \in \mathbf{C} \mid s = \sigma + i\tau, \text{ avec } \sigma = \mathcal{R}s \text{ et } \tau = \mathcal{I}s, \sigma > \sigma_0\}$ dans \mathbf{C} . On suppose que toute application $f \in \mathfrak{F}_{\sigma_0}$ est holomorphe sur le support P_{σ_0} commun aux applications de la famille \mathfrak{F}_{σ_0} . Afin de ne pas exclure ultérieurement le cas $\sigma_0 = -\infty$ et par analogie avec les notations ci-dessus, si on considère plus particulièrement une famille —que l'on désigne par $\mathfrak{F}_{-\infty}$ — d'applications de \mathbf{C} dans \mathbf{C} , holomorphes sur \mathbf{C} , on convient de désigner, à l'occasion, \mathbf{C} par $P_{-\infty}$ ou par

$$\{s \in \mathbf{C} \mid \sigma > -\infty\}.$$

S'il existe $h \in [\sigma_0, +\infty[$ tel que le demi-plan $P_h = \{s \in \mathbf{C} \mid \sigma > h\}$ est un domaine de régularité pour \mathfrak{F}_{σ_0} (où σ_0 peut être égal à $-\infty$),

on désigne alors par $\mathcal{H}_R^{\sigma_0}$ l'ensemble des nombres h pour lesquels les P_h correspondants sont des domaines de régularité pour \mathfrak{F}_{σ_0} .

On désigne par $\sigma_R^{\sigma_0}$ l'infimum de l'ensemble $\mathcal{H}_R^{\sigma_0}$ si cet ensemble est borné inférieurement (l'ensemble $\mathcal{H}_R^{\sigma_0}$ est nécessairement borné

inférieurement si $\sigma_0 > -\infty$) ; sinon on pose $\sigma_R^{\sigma_0} = -\infty$. Si et seulement s'il n'existe aucun $h > \sigma_0$ tel que P_h est un domaine de régularité pour \mathfrak{F}_{σ_0} , on pose $\sigma_R^{\sigma_0} = +\infty$. Il est trivial que $\sigma_R^{\sigma_0} \geq \sigma_0$.

Si $\sigma_R^{\sigma_0} \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, l'ensemble $\{s \in \mathbf{C} \mid \sigma > \sigma_R^{\sigma_0}\}$ est appelé "*le demi-plan de régularité de \mathfrak{F}_{σ_0}* ". Si $\sigma_R^{\sigma_0} = +\infty$, on dit que "*le demi-plan de régularité de \mathfrak{F}_{σ_0} est vide*". Si $\sigma_R^{\sigma_0} \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\{s \in \mathbf{C} \mid s = \sigma_R^{\sigma_0} + i\tau\}$ est appelé "*l'axe (ou la droite de régularité) de \mathfrak{F}_{σ_0}* ".

Remarque. — Le demi-plan de régularité de la famille \mathfrak{F}_{σ_0} est un domaine de régularité pour cette famille. En effet, si ce demi-plan est non vide et non identique à \mathbb{C} , on considère les trois suites suivantes :

— (ε_n) est strictement positive et strictement décroissante vers 0,

— (σ_n) , avec $\sigma_1 > \sigma_R^{\sigma_0} + \varepsilon_1$, est strictement croissante et non bornée,

— (τ_n) est strictement positive, strictement croissante, non bornée, et la suite des rectangles compacts emboîtés \mathcal{C}_n définis de la manière suivante :

$$\mathcal{C}_n = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \in [\sigma_R^{\sigma_0} + \varepsilon_n, \sigma_n], \tau \in [-\tau_n, \tau_n]\}.$$

Soit (f_p) une suite infinie extraite de \mathfrak{F}_{σ_0} . Le demi-plan

$$P_n = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma_R^{\sigma_0} + \varepsilon_n/2\}$$

contient \mathcal{C}_n et est un domaine de régularité, par définition, pour \mathfrak{F}_{σ_0} .

On peut donc extraire de (f_p) une sous-suite infinie — que l'on note (f_p^1) — uniformément convergente sur le compact \mathcal{C}_1 . De (f_p^1) , on peut extraire une sous-suite — que l'on note (f_p^2) — uniformément convergente sur \mathcal{C}_2 (avec le choix $f_1^2 = f_1^1$). Plus généralement, de la suite (f_p^n) on peut extraire une sous-suite — que l'on note (f_p^{n+1}) — uniformément convergente sur \mathcal{C}_{n+1}

$$(\text{avec le choix } f_t^{n+1} = f_t^n, \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

La suite diagonale (f_n^n) est une sous-suite de chacune des suites (f_p^n) , $p \in \mathbb{N}_+$, et donc converge uniformément sur chacun des \mathcal{C}_n . Or \mathcal{C} étant un quelconque compact du demi-plan de régularité de \mathfrak{F}_{σ_0} , il existe un entier — que l'on note n_c — tel que,

$$n \geq n_c : \mathcal{C} \subset \mathcal{C}_n$$

et donc (f_n^n) converge uniformément sur \mathcal{C} . Le demi-plan de régularité est un domaine de régularité pour \mathfrak{F}_{σ_0} . Si le demi-plan de régularité de $\mathfrak{F}_{-\infty}$ est \mathbb{C} , il suffit de considérer une suite emboîtée croissante quelconque de domaines D_n , avec $\lim D_n = \mathbb{C}$; le procédé de démonstration est le même, dans ce cas, à des détails triviaux près.

On considère un domaine $D \subset P_{\sigma_0}$ où $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si de toute suite infinie d'applications extraites de \mathfrak{F}_{σ_0} , on peut extraire une sous-suite infinie uniformément convergente sur toute partie \mathcal{E} de D , fermée dans \mathbb{C} , vers la restriction à \mathcal{E} d'une certaine application holomorphe sur D , ou vers l'infini, alors D est appelé un "domaine de suprarégularité pour \mathfrak{F}_{σ_0} ".

Remarque. — Il est évident que tout domaine D de suprarégularité de \mathfrak{F}_{σ_0} est un domaine de régularité pour cette famille. Si D est un domaine "borné" de régularité pour \mathfrak{F}_{σ_0} alors D est aussi un domaine de suprarégularité pour cette famille.

Procédant comme ci-dessus, s'il existe un nombre

$$h (\geq \sigma_0 \geq -\infty) \in \mathbb{R}$$

tel que le demi-plan P_h est un domaine de suprarégularité pour \mathfrak{F}_{σ_0} , on désigne alors par $\mathcal{H}_s^{\sigma_0}$ l'ensemble des nombres h pour lesquels les P_h sont des domaines de suprarégularité pour \mathfrak{F}_{σ_0} . Si $\mathcal{H}_s^{\sigma_0}$ est borné inférieurement (il est trivial que cet ensemble est nécessairement borné inférieurement si $\sigma_0 > -\infty$), on désigne par $\sigma_s^{\sigma_0}$ son infimum ; sinon (on a alors nécessairement $\sigma_0 = -\infty$) on pose $\sigma_s^{\sigma_0} = -\infty$. Si et seulement s'il n'existe aucun $h (> \sigma_0) \in \mathbb{R}$ tel que P_h est un domaine de suprarégularité pour \mathfrak{F}_{σ_0} , on pose $\sigma_s^{\sigma_0} = +\infty$. Il est trivial que $\sigma_s^{\sigma_0} \geq \sigma_0$. Si $\sigma_s^{\sigma_0} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, l'ensemble

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma_s^{\sigma_0}\}$$

est appelé "le demi-plan de suprarégularité de \mathfrak{F}_{σ_0} ". Si $\sigma_s^{\sigma_0} = +\infty$, on dit que "le demi-plan de suprarégularité de \mathfrak{F}_{σ_0} est vide".

Si $\sigma_s^{\sigma_0} \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{s \in \mathbb{C} \mid s = \sigma_s^{\sigma_0} + i\tau\}$ est appelé "l'axe (ou droite) de suprarégularité de \mathfrak{F}_{σ_0} ".

Il est trivial que $\sigma_R^{\sigma_0} \leq \sigma_s^{\sigma_0}$.

On dit qu'une famille \mathcal{F} d'applications holomorphes sur leur domaine-support $D \subset \mathbb{C}$ est une pseudo-famille si et seulement si à deux applications quelconques f_1 et f_2 extraites de \mathcal{F} on peut toujours associer un nombre $c_{1,2}$ (dépendant en général des deux applications f_1 et f_2 considérées) tel que :

$$\forall z \in D : f_1(z) - f_2(z) = c_{1,2} .$$

On dit qu'une famille \mathcal{F} d'applications holomorphes sur leur domaine-support D est une "vraie" famille si \mathcal{F} ne contient aucune sous-famille \mathcal{F}_1 qui est une pseudo-famille.

Remarque. — Si $\sigma_s^{\mathcal{F}} \sigma_0 = -\infty$ (σ_0 est nécessairement alors égal à $-\infty$), le demi-plan de suprarégularité qui est alors identique à \mathbb{C} ne peut être un domaine de suprarégularité pour \mathcal{F}_{σ_0} si cette famille est une "vraie famille" ou, plus généralement, si \mathcal{F}_{σ_0} contient une sous-famille infinie qui est une "vraie famille".

CHAPITRE II

(λ_n) étant une D-suite où $\lambda_1 > 0$, on considère une famille — que l'on note Φ — d'éléments dirichletiens,

$$\{f\}: \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \exp(-s\lambda_n), \quad \text{où } s = \sigma + i\tau, \quad \sigma \text{ et } \tau \in \mathbb{R}.$$

$\{f\}$ est l'al-germe-D d'un germe dirichletien — que l'on note $\{f; P_c^f\}$ — de fonction analytique dans C . Dans le doublet $\{f; P_c^f\}$, P_c^f désigne l'ouvert maximal de convergence de $\{f\}$ (cet ouvert est l'ensemble $\{s \in C \mid \sigma > \sigma_c^f\}$, où σ_c^f est l'abscisse de convergence simple de $\{f\}$) et f désigne l'application suivante de support P_c^f à valeurs dans C :

$$s \text{ --- } \circ \text{ --- } \rightarrow f(s)$$

où $f(s)$ est la valeur de $\{f\}$ en $s \in P_c^f$. On désigne par \mathfrak{F} la famille, associée à Φ , des applications f . On supposera explicitement dans l'énoncé de certaines propriétés ultérieures que la condition suivante dite "condition (\mathcal{A})" est satisfaite

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, \exists A_n \in [0, +\infty[: A_n = \sup |a_n(f)|, f \in \mathfrak{F}.$$

On désigne par \mathcal{G}_f l'étoile rectiligne de Riesz définie à l'aide du germe $\{f; P_c^f\}$. Indifféremment on convient de dire que \mathcal{G}_f est "l'étoile rectiligne de Riesz de f ", ou de $\{f\}$ ". On note f_A la fonction analytique dont $\{f; P_c^f\}$ est un germe, et $f_{\mathcal{G}}$ la restriction de f_A à \mathcal{G}_f qui satisfait aux conditions suivantes :

1/ $f_{\mathcal{G}}$ est holomorphe sur \mathcal{G}_f

2/ $f_{\mathcal{G}}(s)$ désignant la valeur de $f_{\mathcal{G}}$ au point $s \in \mathcal{G}_f$, on a,

$$\forall s \in P_c^f : f_{\mathcal{G}}(s) = f(s).$$

$f_{\mathcal{G}}$ est la restriction à \mathcal{G}_f de la branche principale de f_A .

Remarque 1. — Considérant un élément dirichlétien $\{f\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s\lambda_n),$$

on désigne par $\{f_p\}$ le polynôme-section d'indice $p \in \mathbb{N}_+$,

$$\sum_{n=1}^p a_n \exp(-s\lambda_n),$$

par Φ_f la suite $(\{f_p\})$, et par \mathfrak{F}_f la suite des applications entières (f_p) , avec $f_p : s \rightarrow f_p(s)$, où $f_p(s)$ est la valeur en $s \in \mathbb{C}$ de $\{f_p\}$. (On peut considérer $\{f_p\}$ comme un al-germe-D dont la suite des exposants est la D-suite (λ_n) et dont les coefficients d'indices strictement supérieurs à p sont tous nuls, et donc $\sigma_c^p = \sigma_A^p = -\infty$). On sait que $\{f\}$ converge uniformément sur le secteur

$$S_{s_0, \theta} = \{s \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg}(s - s_0)| \leq \theta\}$$

indexé par le doublet (s_0, θ) , où $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, avec $\sigma_0 \in]\sigma_c^f, +\infty[$ et $\tau_0 \in \mathbb{R}$, et où $\theta \in]0, \pi/2[$. Quel que soit le compact $\mathcal{C} \subset P_c^f$, on peut toujours trouver s_0 et θ satisfaisant aux conditions ci-dessus et tels que $\mathcal{C} \subset S_{s_0, \theta}$; il en résulte que $\sigma_R^{ff} \leq \sigma_c^f$. On suppose $\sigma_R^{ff} < \sigma_c^f$

et soit $\sigma_1 \in]\sigma_R^{ff}, \sigma_c^f[$. Le demi-plan $P_{\sigma_1} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma_1\}$ est un domaine de régularité pour \mathfrak{F}_f . Soit un point s' avec $\sigma' \in]\sigma_1, \sigma_c^f[$. A ce point, on peut associer une suite infinie d'entiers (p_j) , strictement croissante et telle que $\lim |f_{p_j}(s')| = +\infty$ (en effet, dans le cas contraire, il existerait un nombre (fini) strictement positif M tel que

$$\forall p \in \mathbb{N}_+ : |f_p(s')| < M,$$

et on sait qu'alors $\{f\}$ convergerait en chaque point

$$s \in P_{\sigma'} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma'\};$$

ce qui est impossible puisque $\sigma' < \sigma_c^f$. On considère maintenant le demi-plan $P_{\sigma_2} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma_2\}$, où $\sigma_2 \in]\sigma_R^{ff}, \sigma_1[$. P_{σ_2} étant un domaine de régularité pour \mathfrak{F}_f , de la suite (f_{p_j}) on peut extraire une sous-suite uniformément convergente sur tout compact $\mathcal{C} \subset P_{\sigma_2}$. Choissant $\mathcal{C} \ni s'$ et satisfaisant en outre à la condition, $\mathcal{C}^0 \cap P_c^f \neq \emptyset$, toute sous-suite infinie extraite de (f_{p_j}) converge uniformément vers une fonction holomorphe sur tout domaine appartenant à $\mathcal{C} \cap P_c^f$. Il y a contradiction et donc $\sigma_R^{ff} \geq \sigma_c^f \implies \sigma_R^{ff} = \sigma_c^f$. Il est trivial que $\sigma_s^{ff} = \sigma_U^f$ (où σ_U^f désigne, comme il est usuel, l'abscisse de convergence uniforme de f).

Remarque 2. — Eu égard à la manière dont les abscisses de régularité et de suprarégularité d'une famille \mathfrak{F} ont été définies au chapitre I, on se limitera, pour les éléments de la famille particulière \mathfrak{F} considérée dans ce chapitre II et les suivants, à leurs restrictions au demi-plan

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sup \sigma_c^f, f \in \mathfrak{F}\}$$

(en le supposant non vide). C'est ce demi-plan qui jouera le rôle dévolu au demi-plan P_{σ_0} du chapitre I. On désignera encore par \mathfrak{F} la famille des restrictions des applications f à ce demi-plan (ces restrictions sont évidemment toutes holomorphes sur leur demi-plan support commun). Dans la remarque (I), le demi-plan de référence (support commun) P_{σ_0} n'est autre que \mathbb{C} (choix cohérent à l'objet de cette remarque (2) puisque $\forall p \in \mathbb{N}_+ : \sigma_c^f = -\infty$).

On pose :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ : n[x] &= \text{Min} \{n \in \mathbb{N}_+ \mid \lambda_n \geq [x]\} \\ n(x) &= \text{Max} \{n \in \mathbb{N}_+ \mid \lambda_n < x, x > \lambda_1\} \\ &= 0, \quad \forall x \in [0, \lambda_1], \end{aligned}$$

où $[x]$ désigne, comme il est usuel, le plus grand des entiers inférieurs à x . On rappelle que M. Blambert a donné une démonstration nouvelle d'un algorithme de Kojima et l'a condensé, entre autres formes, sous la suivante : *le nombre $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ étant donné, une condition nécessaire et suffisante pour que l'élément $\{f\}$ ait une abscisse de convergence simple égale à α est que*

$$\alpha = \limsup_{\substack{\mathbb{R}_\lambda \\ x \uparrow +\infty}} \left\{ \log \left[\text{Max}_{k \in \{n[x], \dots, n(x)\}} \left| \sum_{n=n[x]}^k a_n(f) \right| \right] / \lambda_{n[x]} \right\},$$

où \mathbb{R}_λ désigne l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}_+ \mid n[x] \leq n(x)\}$. Il est trivial que dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus, on peut remplacer indifféremment, $\lambda_{n[x]}$ par $\lambda_{n(x)}$ (et plus généralement par $\mu_{n[x]}$; la suite (μ_n) satisfaisant à la condition : $\lim \{\mu_n / \lambda_n\} = 1, n \uparrow \infty$). Il n'est pas dans notre propos de nous étendre sur ce point), $[x]$, x . On désigne par \mathcal{N} le sous-ensemble de \mathbb{N} suivant :

$$\{p \in \mathbb{N} \mid n[p] \leq n(p+1)\}.$$

On constatera qu'on peut remplacer l'égalité qui figure dans l'énoncé de la condition nécessaire et suffisante par la suivante qu'on utilisera de préférence dans ce qui suit :

$$\alpha = \limsup_{\mathcal{H} \ni p \uparrow \infty} \left\{ \log \left[\max_{k \in \{n[p], \dots, n(p+1)\}} \left| \sum_{n=n[p]}^k a_n(f) \right| \right] / \lambda_{n[p]} \right\}.$$

La condition (α) étant supposée satisfaite, on pose :

$$\sigma^{\mathcal{F}} = \limsup_{\mathcal{H} \ni p \uparrow \infty} \left\{ \log \left[\max_{k \in \{n[p], \dots, n(p+1)\}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \sum_{n=n[p]}^k a_n(f) \right| \right] / \lambda_{n[p]} \right\},$$

(Comme on l'a fait observer antérieurement, on ne modifie pas la valeur de $\sigma^{\mathcal{F}}$ en substituant, dans cet algorithme, $\mu_{n[p]}$ à $\lambda_{n[p]}$; la suite (μ_n) satisfaisant à la condition : $\lim \{\mu_n / \lambda_n\} = 1, n \uparrow \infty$),
 $\forall p \in \mathcal{H}$ et $\forall k \in \{n[p], \dots, n(p+1)\}$:

$$B_k = \sup \left| \sum_{n=n[p]}^k a_n(f) \right|, f \in \mathcal{F}.$$

(Eu égard à la définition de A_n , on a : $A_{n[p]} = B_{n[p]}, \forall p \in \mathcal{H}$).
 On considère la suite (c_n) définie par la condition

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{n[p], \dots, n(p+1)\} : \sum_{m=n[p]}^k c_m = \\ = \max_{r \in \{n[p], \dots, k\}} B_r. \end{aligned}$$

Il est trivial que la constante $c_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$, est univoquement définie par les conventions ci-dessus et que la condition (α) est équivalente à la suivante :

$$\forall p \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{n[p], \dots, n(p+1)\} : B_k < +\infty.$$

Eu égard, pour $k > n[p]$, à l'identité d'Abel suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{n=n[p]}^k a_n(f) \exp(-\sigma_0 \lambda_n) &= \left[\sum_{n=n[p]}^k a_n(f) \right] \exp(-\sigma_0 \lambda_k) + \\ &\quad \sum_{t=n[p]}^{k-1} \left[\sum_{n=n[p]}^t a_n(f) \right] [\exp(-\sigma_0 \lambda_t) - \exp(-\sigma_0 \lambda_{t+1})] \end{aligned}$$

et puisque

$$\left| \sum_{n[p]}^k a_n(f) \right| \leq \sum_{n[p]}^k c_n ,$$

le premier membre de la relation d'Abel est majoré par

$$\left[\sum_{n=n[p]}^k c_n \right] \exp(-\sigma_0 \lambda_k) + \sum_{t=n[p]}^{k-1} \left[\sum_{n=n[p]}^t c_n \right] |\exp(-\sigma_0 \lambda_t) - \exp(-\sigma_0 \lambda_{t+1})|$$

si $\sigma_0 \geq 0$, on a,

$$\left| \sum_{n=n[p]}^k a_n(f) \exp(-\sigma_0 \lambda_n) \right| \leq \sum_{n=n[p]}^k c_n \exp(-\sigma_0 \lambda_n)$$

Cette relation reste valable dans le cas $k = n[p]$ puisqu'alors

$$c_{n[p]} = A_{n[p]}$$

(Il est trivial que c_n n'est pas nécessairement un majorant de $|a_n(f)|$; en effet, pour certaines valeurs de n , on peut avoir $c_n = 0$ alors que $a_n(f) \neq 0$).

Si $\sigma_0 < 0$, on a,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=n[p]}^k a_n(f) \exp(-\sigma_0 \lambda_n) \right| &\leq 2 \left(\sum_{n=n[p]}^k c_n \right) \exp(-\sigma_0 \lambda_k) \\ &< 2 \left(\sum_{n=n[p]}^k c_n \right) \exp(-\sigma_0 \lambda_{n[p]} - \sigma_0) \\ &< 2 \exp(-\sigma_0) \sum_{n=n[p]}^k c_n \exp(-\sigma_0 \lambda_n) . \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité reste valable dans le cas $k = n[p]$.

PROPOSITION (II.1). — Si $\sigma^* < +\infty$ et σ_0 étant une constante choisie strictement supérieure à σ^* , la famille \mathfrak{F} est bornée sur le secteur $\{s \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg}(s - \sigma_0)| \leq \theta\}$, indexé par θ sur $]0, \pi/2[$, et $\sigma^* \geq \sigma_R$.

Pour $k > n[p]$, on considère l'identité d'Abel suivante,

$$\sum_{n[p]}^k a_n(f) \exp(-s \lambda_n) = \left[\sum_{n[p]}^k a_n(f) \exp(-\sigma_0 \lambda_n) \right] \exp[-(s - \sigma_0) \lambda_k] +$$

$$\sum_{t=n[p]}^{k-1} \left[\sum_{n[p]}^t a_n(f) \exp(-\sigma_0 \lambda_n) \right] \{ \exp[-(s - \sigma_0) \lambda_t] - \exp[-(s - \sigma_0) \lambda_{t+1}] \}$$

où $\sigma > \sigma_0$. On a, comme il est évident,

$$| \exp[-(s - \sigma_0) \lambda_t] - \exp[-(s - \sigma_0) \lambda_{t+1}] | \leq$$

$$[|s - \sigma_0|/(\sigma - \sigma_0)] \{ \exp[-(\sigma - \sigma_0) \lambda_t] - \exp[-(\sigma - \sigma_0) \lambda_{t+1}] \}.$$

Eu égard à une majoration antérieure, on obtient si $\sigma_0 \geq 0$,

$$\left| \sum_{n[p]}^k a_n(f) \exp(-s \lambda_n) \right| \leq [|s - \sigma_0|/(\sigma - \sigma_0)] \sum_{n[p]}^k c_n \exp(-\sigma \lambda_n) +$$

$$\{ 1 - [|s - \sigma_0|/(\sigma - \sigma_0)] \} \exp[-(\sigma - \sigma_0) \lambda_k] \sum_{n[p]}^k c_n \exp(-\sigma_0 \lambda_n),$$

et, puisque $|s - \sigma_0|/(\sigma - \sigma_0) \geq 1$, le membre de gauche est majoré par

$$[|s - \sigma_0|/(\sigma - \sigma_0)] \sum_{n[p]}^k c_n \exp(-\sigma \lambda_n).$$

Pour $\sigma_0 > \sigma^*$ et $\theta \in]0, \pi/2[$, on a donc,

$$\forall s \in \{s \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg}(s - \sigma_0)| \leq \theta\} : |f(s)| \leq \varphi(\sigma)/\cos \theta,$$

où $\varphi(\sigma)$ désigne la valeur en σ de l'élément

$$\{\varphi\} : \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-s \lambda_n)$$

Si $\sigma_0 < 0$ les majorations obtenues ci-dessus sont encore valables en affectant du coefficient $2 \exp(-\sigma_0)$ l'expression

$$\sum_{n=n[p]}^k c_n \exp(-\sigma \lambda_n)$$

partout où elle figure ; alors sous les mêmes conditions relatives à s et θ , et avec $\sigma_0 > \sigma^*$, on a,

$$|f(s)| \leq 2 \exp(-\sigma_0) \varphi(\sigma) / \cos \theta.$$

La famille \mathfrak{F} est donc bornée sur le secteur $\{s \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Arg}(s - \sigma_0)| \leq \theta\}$ indexé par le doublet (θ, σ_0) , avec θ sur $]0, \pi/2[$ et $\sigma_0 > \sigma^{\mathfrak{F}}$. Il en résulte que \mathfrak{F} est bornée sur tout compact de l'ouvert maximal de convergence de l'élément $\{\varphi\}$. Ce demi-plan est donc un domaine de régularité pour la famille \mathfrak{F} . Or $\sigma^{\mathfrak{F}}$ n'est autre que l'abscisse de convergence de $\{\varphi\}$ et donc $\sigma_R^{\mathfrak{F}} \leq \sigma^{\mathfrak{F}}$.

(Il est trivial que $\sigma^{\mathfrak{F}} \geq \sup \sigma_c^f, f \in \mathfrak{F}$).

La condition $\sigma^{\mathfrak{F}} < +\infty$, et "a fortiori" la condition que l'on introduira ultérieurement $\sigma_*^{\mathfrak{F}} < +\infty$, impliquent que la condition (\mathfrak{A}) est satisfaite.

On pose,

$$\sigma_*^{\mathfrak{F}} = \limsup_{\mathfrak{N} \ni p \uparrow \infty} \left\{ \log \left[\sup_{f \in \mathfrak{F}} \sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} |a_n(f)| \right] / \lambda_{n[p]} \right\}$$

Il est trivial que $\sigma_*^{\mathfrak{F}} \geq \sup \sigma_A^f, f \in \mathfrak{F}$.

PROPOSITION (II.2). — Si $\sigma_*^{\mathfrak{F}} < +\infty$ et σ_0 étant une constante strictement supérieure à $\sigma_*^{\mathfrak{F}}$, la famille \mathfrak{F} est bornée sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq \sigma_0\}$ et $\sigma_*^{\mathfrak{F}} \geq \sigma_s^{\mathfrak{F}}$.

On considère la suite (c'_n) définie d'une manière analogue à la suite (c_n) par la condition suivante :

$$\forall p \in \mathfrak{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{n[p], \dots, n(p+1)\} : \sum_{n=n[p]}^k c'_n = \max_{t \in \{n[p], \dots, k\}} \left\{ \sup_{f \in \mathfrak{F}} \sum_{n=n[p]}^t |a_n(f)|, f \in \mathfrak{F} \right\}$$

Il est trivial que

$$\sum_{n=n[p]}^k c'_n = \sup_{f \in \mathfrak{F}} \sum_{n=n[p]}^k |a_n(f)|, f \in \mathfrak{F}.$$

On considère l'élément dirichletien

$$\{\psi\} : \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \exp(-s\lambda_n).$$

σ_* est l'abscisse de convergence de $\{\psi\}$.

Eu égard aux majorations préliminaires à la proposition (II.1), on a pour chaque s avec $\sigma \geq \sigma_0$:

$$|f(s)| \leq \psi(\sigma_0) \quad \text{si} \quad \sigma_0 \geq 0$$

et

$$|f(s)| \leq 2 \exp(-\sigma_0) \psi(\sigma_0) \quad \text{si} \quad \sigma_0 < 0$$

où $\psi(\sigma_0)$ est la valeur en σ_0 de l'élément $\{\psi\}$.

On considère l'élément dirichletien

$$\{\theta\} : \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-s\lambda_n),$$

et on pose

$$L = \limsup \{\log n/\lambda_n\}, \quad n \uparrow \infty.$$

Remarque. — Il est trivial que :

$$\sigma^* \leq \sigma_*^* \leq \sigma_c^\theta.$$

PROPOSITION (II.3). — Si $\sigma_c^\theta < +\infty$, on a :

$$\sigma_c^\theta - \sigma^* \leq L.$$

Pour $p \in \mathcal{N}$, et dans le cas $n[p] < n(p+1)$, on a,

$\forall r \in \{n[p] + 1, \dots, n(p+1)\}$:

$$a_r(f) = \sum_{n=n[p]}^r a_n(f) - \sum_{n=n[p]}^{r-1} a_n(f),$$

et donc

$$|a_r(f)| \leq 2 \sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} c_n \implies A_r \leq 2 \sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} c_n.$$

(Cette dernière inégalité est "a fortiori" légitime dans le cas

$$r = n[p] = n(p+1)$$

puisqu'alors $C_{n[p]} = A_{n[p]}$). Par conséquent, on a,

$$\sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} A_n \leq 2 \{n(p+1) + 1 - n[p]\} \sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} c_n \leq 2n(p+1) \sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} c_n.$$

Utilisant l'algorithme de Kojima, on obtient,

$$\sigma_c^\theta \leq \lim_{\pi \ni p \uparrow \infty} \sup \left\{ \log \left[\sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} c_n \right] / \lambda_{n[p]} \right\} + \lim \sup \{ \log n(p+1) / \lambda_{n[p]} \},$$

et donc,

$$\sigma_c^\theta \leq \sigma^\theta + L$$

Il est trivial que la condition $L = 0$ implique l'égalité : $\sigma^\theta = \sigma_*^\theta = \sigma_c^\theta$.

Remarque. — Ce résultat est à rapprocher de l'analogie bien connu relatif à la différence des abscisses de convergence simple et absolue d'une série de Dirichlet générale.

CHAPITRE III

Les nombres $\sigma^{\mathfrak{F}}$, $\sigma_{*}^{\mathfrak{F}}$, σ_c^{θ} définis au chapitre II sont, en général, distincts. Dans ce chapitre, on se propose d'énoncer des conditions suffisantes pour que $\sigma^{\mathfrak{F}}$ et $\sigma_{*}^{\mathfrak{F}}$ soient égaux. Les résultats obtenus constituent une extension de théorèmes classiques dûs à Landau et Fekete.

Les notations étant celles utilisées au chapitre II, on considère une famille Φ d'éléments $\{f\}$ satisfaisant à la condition (\mathcal{A}) . On énonce :

PROPOSITION (III.1). — *Sous les conditions :*

- 1/ les éléments $\{f\}$ de la famille Φ sont à coefficients positifs,
- 2/ $\sigma^{\mathfrak{F}} < +\infty$

alors

$$\sigma_s^{\mathfrak{F}} = \sigma_R^{\mathfrak{F}} = \sigma^{\mathfrak{F}} = \sigma_{*}^{\mathfrak{F}}.$$

Les coefficients $a_n(f)$ étant positifs, il est trivial que pour $p \in \mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} \forall k \in \{n[p], \dots, n(p+1)\} : \sup_{f \in \mathfrak{F}} \sum_{n[p]}^k a_n(f) &\leq \\ &\leq \sup_{f \in \mathfrak{F}} \sum_{n[p]}^{n(p+1)} a_n(f) = \sum_{n[p]}^{n(p+1)} c_n, \end{aligned}$$

et que $\{\varphi\} = \{\psi\}$, $\sigma^{\mathfrak{F}} = \sigma_{*}^{\mathfrak{F}}$. La proposition (III.1) est triviale si $\sigma^{\mathfrak{F}} = -\infty$. On considère le cas où $\sigma^{\mathfrak{F}}$ est fini, et on pose :

$$\sigma^{*\mathfrak{F}} = \sup_{f \in \mathfrak{F}} \sigma_c^f, f \in \mathfrak{F}.$$

Il est trivial que $\sigma^{*\mathfrak{F}} \leq \sigma^{\mathfrak{F}}$. L'égalité $\sigma^{*\mathfrak{F}} = \sigma^{\mathfrak{F}}$ implique trivialement la légitimité de l'assertion de la proposition (III.1) ; il suffit d'étudier le cas $\sigma^{*\mathfrak{F}} < \sigma^{\mathfrak{F}}$. Soient alors un nombre $\sigma_0 \in]\sigma^{*\mathfrak{F}}, \sigma^{\mathfrak{F}}[$ et un nombre $\varepsilon \in]0, \sigma^{\mathfrak{F}} - \sigma_0[$. A ce nombre ε , on peut associer une suite infinie strictement croissante d'entiers, (P_j) , telle que

$$\log \left[\sum_{n=n[P_j]}^{n(P_j+1)} c_n \right]^{1/\lambda_{n[P_j]}} > \sigma^{\mathfrak{F}} - \varepsilon.$$

Soit un nombre $\varepsilon' \in]0, \exp(\sigma^{\mathfrak{F}} - \varepsilon) - \exp(\sigma_0)[$. A chaque entier P_j on peut associer une application — que l'on note f_{P_j} — de la famille \mathfrak{F} telle que :

$$\left[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j}) \right]^{1/\lambda_{n[P_j]}} > \left[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} c_n \right]^{1/\lambda_{n[P_j]}} - \varepsilon'.$$

Eu égard aux choix des constantes strictement positive ε et ε' , on a donc,

$$\exp(-\sigma_0) \left[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j}) \right]^{1/\lambda_{n[P_j]}} > \exp(\sigma^{\mathfrak{F}} - \sigma_0 - \varepsilon) - \varepsilon' \exp(-\sigma_0) > 1.$$

L'expression

$$\exp(-\sigma_0 \lambda_{n[P_j]}) \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j})$$

tend vers $+\infty$ lorsque $P_j \uparrow \infty$. On a deux cas possibles :

$$\sigma_0 \leq 0 : f_{P_j}(\sigma_0) \geq \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j}) \cdot \exp(-\sigma_0 \lambda_n) \geq \exp(-\sigma_0 \lambda_{n[P_j]}) \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j})$$

$$\sigma_0 > 0 : f_{P_j}(\sigma_0) \quad \quad \quad > \exp[-\sigma_0(1 + \lambda_{n[P_j]})] \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j}).$$

La suite (f_{P_j}) et toute sous-suite infinie extraite de cette suite ne sont pas bornées au point σ_0 . Ce résultat étant légitime $\forall \sigma_0 \in]\sigma^{*\mathfrak{F}}, \sigma^{\mathfrak{F}}[$, la famille \mathfrak{F} est donc non bornée au voisinage du point $\sigma^{\mathfrak{F}}$ (on remarquera qu'en chaque point s de l'ouvert maximal de convergence de $\{\varphi\}$ — cet ouvert n'est autre que le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma^{\mathfrak{F}}\}$ — on peut trouver un disque centré en ce point (et donc une infinité) sur lequel \mathfrak{F} est bornée). Ce point $\sigma^{\mathfrak{F}}$ est irrégulier pour \mathfrak{F} et donc

$$\sigma_R^{\mathfrak{F}} = \sigma_s^{\mathfrak{F}} = \sigma^{\mathfrak{F}}.$$

A chaque élément $\{f\}$ de la famille Φ , on associe l'élément suivant :

$$\{f^*\} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| \exp(-s\lambda_n)$$

et on désigne par Φ^* la famille de ces éléments, et par \mathfrak{F}^* la famille des applications

$$s \longrightarrow f^*(s),$$

où $f^*(s)$ est la valeur de $\{f^*\}$ en tout point $s \in P_c^{f^*}$ (ouvert maximal de convergence de $\{f^*\}$). A la famille \mathfrak{F}^* on associe un élément

$$\{\varphi^*\} : \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \exp(-s\lambda_n),$$

de la même manière que $\{\varphi\}$ à été associé à \mathfrak{F} . Il est trivial qu'alors $\{\varphi^*\} = \{\psi\}$.

PROPOSITION (III.2). — *Pour toute famille Φ d'éléments $\{f\}$ satisfaisant à la condition (A) et, en outre, à la condition,*

$$\exists \theta \in [0, \pi/2[: |\text{Arg } a_n(f)| \leq \theta, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ \quad \text{et} \quad \forall f \in \mathfrak{F},$$

on a :

$$\sigma_R^{\mathfrak{F}} = \sigma_s^{\mathfrak{F}} = \sigma^{\mathfrak{F}} = \sigma_*^{\mathfrak{F}}.$$

Il est trivial que,

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \forall f \in \mathfrak{F} : \sum_{n \in [p]}^{n(p+1)} |a_n(f)| &\geq \left| \sum_{n \in [p]}^{n(p+1)} a_n(f) \right| \geq \\ &\geq \cos \theta \sum_{n \in [p]}^{n(p+1)} |a_n(f)|, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n \in [p]}^{n(p+1)} c_n^* \geq \sum_{n \in [p]}^{n(p+1)} c_n \geq \cos \theta \sum_{n \in [p]}^{n(p+1)} c_n^*, \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ :$$

$$c_n^* = c_n',$$

et donc,

$$\sigma^{\mathfrak{F}^*} \geq \sigma^{\mathfrak{F}} \geq \sigma^{\mathfrak{F}^*} \implies \sigma^{\mathfrak{F}} = \sigma_*^{\mathfrak{F}}.$$

De même $\forall \sigma > \sigma_c^{f^*} = \sigma_A^f$ on a,

$$f^*(\sigma) \geq |f(\sigma)| \geq f^*(\sigma) \cdot \cos \theta$$

Donc si \mathcal{F}^* n'est pas bornée au voisinage d'un point réel σ_0 , \mathcal{F} ne l'est pas non plus. Eu égard à la proposition (III.1) le point $\sigma_*^{\mathcal{F}}$ est irrégulier pour la famille \mathcal{F}^* ; il l'est donc aussi pour la famille \mathcal{F} . Ainsi on a : $\sigma_R^{\mathcal{F}} = \sigma_s^{\mathcal{F}} = \sigma^{\mathcal{F}} = \sigma_*^{\mathcal{F}}$.

CHAPITRE IV

Dans ce chapitre, on considère à nouveau, comme au chapitre III, une famille Φ d'éléments $\{f\}$ satisfaisant à la condition (\mathcal{A}) .

PROPOSITION (IV.1). — $(\{f_p\})$, $p \in \mathbb{N}$, étant une suite d'éléments extraits de la famille Φ et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$1/ \quad L < +\infty$$

$$2/ \quad +\infty > \sup \sigma_c^{f_p}, \quad p \in \mathbb{N}$$

3/ $\exists \sigma_0 \in]L + \sup \sigma_c^{f_p}, +\infty[: (f_p)$ converge uniformément sur le demi-plan $P_{\sigma_0} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq \sigma_0\}$ vers une application F , de support P_{σ_0} , holomorphe sur $P_{\sigma_0}^0$,

alors on a :

$$1/ \quad \forall n \in \mathbb{N}_+, \quad \exists a_n^0 \in \mathbb{R} : \lim a_n(f_p) = a_n^0, \quad p \uparrow \infty,$$

$$2/ \quad P_{\sigma_0+L}^0 = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma_0 + L\} \text{ est contenu dans l'ouvert maxi-}$$

mal de convergence de l'élément $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \exp(-s \lambda_n)$ et le doublet

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \exp(-s \lambda_n) ; P_{\sigma_0+L}^0 \right\} \text{ est un germe de } F.$$

Chaque application f_p est bornée sur P_{σ_0} ; en outre, la suite (f_p) est bornée sur P_{σ_0} . On a,

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall s \in P_{\sigma_0} : |f_p(s)| \leq M,$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N} : |a_n(f_p)| \exp(-\sigma_0 \lambda_n) \leq M.$$

On a aussi,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N} : |f_p(s) - f_q(s)| < \varepsilon, \quad \forall p \geq p_\varepsilon, \quad \forall q \geq p_\varepsilon \quad \text{et}$$

$$s \in P_{\sigma_0}$$

et donc,

$\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall p \text{ et } \forall q \geq p_\varepsilon : |a_n(f_p) - a_n(f_q)| \exp(-\sigma_0 \lambda_n) < \varepsilon.$

La suite $(a_n(f_p)), p \in \mathbb{N}$, converge pour chaque valeur n sur \mathbb{N}_+ .
On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, \exists a_n^0 \in \mathbb{R} : \lim a_n(f_p) = a_n^0, \quad p \uparrow \infty,$$

et

$$\forall s \in P_{\sigma_0} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}_+ : |a_n^0| \exp(-s \lambda_n) \leq M \exp[-(\sigma - \sigma_0) \lambda_n].$$

L'ouvert $P_{\sigma_0+L}^0$ est l'ouvert maximal de convergence de l'élément

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp[-(s - \sigma_0) \lambda_n]. \text{ L'ouvert maximal de convergence de l'élément}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \exp(-s \lambda_n) \text{ contient l'ouvert } P_{\sigma_0+L}^0. \text{ On montre facilement}$$

$$\text{que le doublet } \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \exp(-s \lambda_n) ; P_{\sigma_0+L}^0 \right\} \text{ est un germe de F.}$$

PROPOSITION (IV.2). — Si $\sigma_*^\mathfrak{F} < +\infty$ on a $\sigma_*^\mathfrak{F} - \sigma_s^\mathfrak{F} \leq L$.

La proposition est triviale si $L = +\infty$. Soit L fini. On suppose $\sigma_*^\mathfrak{F} - \sigma_s^\mathfrak{F} > L$ et on considère deux nombres σ_0 et σ_1 satisfaisant à la condition :

$$\sigma_s^\mathfrak{F} < \sigma_1 \leq \sigma_1 + L < \sigma_0 < \sigma_*^\mathfrak{F}.$$

Soit une constante $\varepsilon \in]0, \sigma_*^\mathfrak{F} - \sigma_0[$. A ce nombre ε , on peut associer une suite infinie strictement croissante (P_j) , d'entiers extraits de \mathfrak{N} telle que

$$\sigma_*^\mathfrak{F} - \varepsilon < \log \left[\sup_{f \in \mathfrak{F}} \sum_{n \in [P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f)| \right]^{1/\lambda_n [P_j]}$$

Soit $\varepsilon' \in]0, \exp(\sigma_*^\mathfrak{F} - \varepsilon) - \exp(\sigma_0)[$. On peut associer à ce nombre ε' une suite d'applications extraites de \mathfrak{F} , (f_j) , telle que :

$$\left[\sum_{n \in [P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)| \right]^{1/\lambda_n [P_j]} > \left[\sup_{f \in \mathfrak{F}} \sum_{n \in [P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f)| \right]^{1/\lambda_n [P_j]} - \varepsilon',$$

et donc,

$$\exp(-\sigma_0) \left[\sum_{n \in [P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)| \right]^{1/\lambda_n [P_j]} > \exp(\sigma_*^\mathfrak{F} - \sigma_0 - \varepsilon) - \varepsilon' \exp(-\sigma_0) > 1$$

$$\lim \left[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)| \right] \exp(-\sigma_0 \lambda_{n[P_j]}) = +\infty, \quad j \uparrow \infty$$

Si $\sigma_0 > 0$, on a :

$$n \in \{n[P_j], \dots, n(P_j + 1)\} : \sigma_0 \lambda_{n[P_j]} \leq \sigma_0 \lambda_n < \sigma_0 \lambda_{n[P_j]} + \sigma_0$$

et donc,

$$\lim \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)| \exp(-\sigma_0 \lambda_n) = +\infty, \quad j \uparrow \infty.$$

si $\sigma_0 \leq 0$, on a,

$$\left[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)| \right] \exp(-\sigma_0 \lambda_{n[P_j]}) \leq \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)| \exp(-\sigma_0 \lambda_n)$$

et donc

$$\lim \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)| \exp(-\sigma_0 \lambda_n) = +\infty, \quad j \uparrow \infty.$$

Si la suite (f_j) ne comporte qu'un nombre fini de termes "distincts", alors il existe un entier j_0 et une sous-suite infinie (P_{j_r}) de (P_j) telle que

$$\lim \sum_{n[P_{j_r}]}^{n(P_{j_r}+1)} |a_n(f_{j_0})| \exp(-\sigma_0 \lambda_n) = +\infty, \quad j_r \uparrow \infty.$$

On considère alors l'élément dirichletien

$$\{f_{j_0}\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f_{j_0}) \exp(-s \lambda_n).$$

Puisque $\sigma_0 > \sigma_1 + L > \sigma_s^{\mathfrak{F}}$ on a $\sigma_0 > \sigma_c^{f_{j_0}} + L \geq \sigma_A^{f_{j_0}}$, et donc,

$$\lim \sum_{n[P_{j_r}]}^{n(P_{j_r}+1)} |a_n(f_j)| \exp(-\sigma_0 \lambda_n) = 0.$$

La contradiction implique $\sigma_*^{\mathfrak{F}} - \sigma_s^{\mathfrak{F}} \leq L$.

Si la suite (f_j) comporte une infinité d'applications distinctes, alors on peut extraire une sous-suite infinie (f_{j_k}) uniformément convergente sur $P_{\sigma_1} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq \sigma_1\}$ vers une application F , holomorphe sur $\overset{\circ}{P}_{\sigma_1}$.

Raisonnant comme dans la démonstration de la proposition (IV.1), on a,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists j_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall j_k \text{ et } \forall j_{k'} > j_\varepsilon \text{ et } \forall s \in P_{\sigma_1} : \\ |f_{j_k}(s) - f_{j_{k'}}(s)| \leq \varepsilon,$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ : |a_n(f_{j_k}) - a_n(f_{j_{k'}})| \leq \varepsilon \exp(\sigma_1 \lambda_n)$$

qui implique :

$$|a_n(f_{j_k}) - a_n^0| \leq \varepsilon \exp(\sigma_1 \lambda_n), \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(f_{j_k}) = a_n^0, \quad j_k \uparrow \infty,$$

où

$$\{F\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \exp(-s \lambda_n) \text{ admet } \sigma_A^F \leq \sigma_1 + L,$$

et donc

$$|a_n(f_{j_k})| \exp(-\sigma_0 \lambda_n) \leq |a_n^0| \exp(-\sigma_0 \lambda_n) + \varepsilon \exp[-(\sigma_0 - \sigma_1) \lambda_n] \\ \sum_{n \in [P_{j_r}]}^{n(P_{j_r}+1)} |a_n(f_{j_k})| \exp(-\sigma_0 \lambda_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^0| \exp(-\sigma_0 \lambda_n) + \\ + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-(\sigma_0 - \sigma_1) \lambda_n] < +\infty.$$

La contradiction implique $\sigma_*^{\mathcal{F}} - \sigma_s^{\mathcal{F}} \leq L$.

A l'aide d'un raisonnement analogue à celui-ci-dessus, on prouve :

PROPOSITION (IV.3). — Si $\sigma_c^\theta < +\infty$ et si $L = 0$, on a $\sigma_c^\theta = \sigma_s^{\mathcal{F}}$.

PROPOSITION (IV.3 bis). — Si $\sigma_c^\theta < +\infty$ et si la D-suite (λ_n) est à densité maximale \mathcal{O} finie alors $\sigma_c^\theta = \sigma_s^{\mathcal{F}}$.

Cette proposition est un corollaire de la précédente ; en effet, on sait que \mathcal{O} est l'infimum des densités des D-suites mesurables contenant la D-suite (λ_n) comme sous-suite. Soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver une D-suite mesurable — que l'on désigne par (μ_n) — contenant (λ_n) comme sous-suite et de densité strictement inférieure à $\mathcal{O} + \varepsilon$. Il est évident que :

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ : \mu_n \leq \lambda_n \text{ et que } \lim \{\text{Log } n / \mu_n\} = 0, \quad n \uparrow \infty,$$

et donc

$$L = 0,$$

PROPOSITION (IV.4). — *Sous les conditions :*

1/ *la D-suite (λ_n) est mesurable à densité D (finie)*

2/ $\sigma_c^\theta < +\infty$

3/ $\sigma_R^\sharp < 0$

alors $\exists \alpha \in]0, \pi/2[$ et $l \in]0, |\sigma_R^\sharp|/\text{tg } \alpha[$ tels qu'à chaque $f \in \mathfrak{F}$ on peut associer une application — que l'on note φ_f — de

$$S_\alpha = \{s \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg } s| < \alpha\}$$

dans \mathbb{C} , satisfaisant aux conditions suivantes

1/ φ_f *est holomorphe sur S_α*

2/ $\forall \varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon > 0 : |\varphi_f(z)| < \exp \{[(\pi D - l)|\sin \psi| + \varepsilon]|z|\},$

$$\forall z \in \{S_\alpha \mid |z| > r_\varepsilon\}, \text{ avec } z = |z| \exp(i\psi),$$

(r_ε est le même pour chaque $f \in \mathfrak{F}$).

3/ $\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall f \in \mathfrak{F} : \varphi_f(\lambda_n) = a_n(f) \mathcal{C}'(\lambda_n).$

($\mathcal{C}'(\lambda_n)$ désignant la valeur en λ_n de la dérivée de l'application entière

$$z \longmapsto \mathcal{C}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/\lambda_n^2)$$

Cette proposition résulte immédiatement d'un résultat classique et d'une remarque dûs à V. Bernstein [(I), p. 103 et p. 115]. En effet, on a $\sigma^{*\sharp} \leq \sigma_c^\theta$ (les al-germes-D, $\{f\}$, ont tous une abscisse de convergence finie au plus égale à $\sigma_c^\theta < +\infty$). La famille \mathfrak{F} est bornée sur chaque demi-plan $P_{\sigma_0} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq \sigma_0\}$, indexé par $\sigma_0 > \sigma_s^\sharp$. \mathfrak{F} est régulière sur $P_0^0 = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > 0\}$ et bornée sur le secteur $S_\theta = \{s \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg } s| \leq \theta\}$ indexé par θ sur $]0, \pi/2[$. Puisque $\sigma_R^\sharp < 0$, on peut trouver un triangle compact \mathfrak{C} (de sommets $il, -il, -l\text{tg } \alpha$, avec $l \in]0, |\sigma_R^\sharp|/\text{tg } \alpha[$ et $\alpha \in]0, \pi/2[$) sur lequel tous les f sont holomorphes et \mathfrak{F} est bornée. Il suffit dès lors d'appliquer le résultat de V. Bernstein ((I), th. III, p. 103) à chacune des applications de \mathfrak{F} , compte tenu d'une remarque justifiant l'assertion (2) ((I), p. 115).

PROPOSITION (IV.5). — *Sous les conditions :*

1/ la D-suite (λ_n) est mesurable à densité D (finie),

2/ $\sigma_c^\theta < +\infty$,

alors $\sigma_s^\mathfrak{F} - \sigma_R^\mathfrak{F} \leq \delta$ (où δ est l'indice de condensation, au sens de V. Bernstein, de la D-suite (λ_n)).

La condition (1) implique $L = 0$, et (2) implique $\sigma_R^\mathfrak{F} < +\infty$. On considère un nombre $h > \sigma_R^\mathfrak{F}$ et la famille — que l'on désigne par Φ_h — des éléments (indexés par f sur \mathfrak{F})

$$\{f_h\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \exp[-(s+h)\lambda_n] .$$

La famille \mathfrak{F}_h — définie à partir de Φ_h comme \mathfrak{F} a été définie à partir de Φ — a une abscisse de suprarégularité $\sigma_s^{\mathfrak{F}_h} = \sigma_s^\mathfrak{F} - h$ et une abscisse de régularité $\sigma_R^{\mathfrak{F}_h} < 0$. Eu égard à la proposition (IV.4), il existe une famille d'applications φ_h satisfaisant aux conditions suivantes :

$$1/ \forall \varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon > 0, \forall r > r_\varepsilon : |\varphi_h(r)| < \exp(\varepsilon r)$$

(r_ε est le même pour chaque $f_h \in \mathfrak{F}_h$; la condition ci-dessus moins fine que son analogue dans l'assertion (1) de la proposition (IV.4) suffit cependant pour ce qui suit)

$$2/ \forall n \in \mathbb{N}_+ : \varphi_h(\lambda_n) = a_n(f) \exp(-h\lambda_n) \mathcal{C}'(\lambda_n) .$$

Il est trivial que $\sigma_s^\mathfrak{F} \leq \sigma_c^\theta$, et donc,

$$\sigma_s^\mathfrak{F} \leq \limsup_{n \uparrow \infty} \left\{ \log \left[\left\{ \sup_{f \in \mathfrak{F}} |\varphi_h(\lambda_n)| \right\} / \mathcal{C}'(\lambda_n) \right] / \lambda_n \right\} + h$$

$$'' \leq \limsup_{n \uparrow \infty} \{ \log [1/\mathcal{C}'(\lambda_n)] / \lambda_n \} + \varepsilon + h .$$

On sait que si la D-suite (λ_n) est mesurable à densité finie alors son indice de condensation (au sens de V. Bernstein) δ peut s'exprimer sous la forme :

$$\delta = \limsup \{ \log [1/\mathcal{C}'(\lambda_n)] / \lambda_n \}, \quad n \uparrow \infty ,$$

On a donc :

$$\sigma_s^\mathfrak{F} \leq \delta + h \implies \sigma_s^\mathfrak{F} - \sigma_R^\mathfrak{F} \leq \delta ,$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BLAMBERT, Sur l'abscisse de convergence simple des séries de Dirichlet générales (Démonstration nouvelle de la relation de Kojima) *Annales de l'Inst. Fourier*, T. XIV, (1964), 509-518.
- [2] M. BLAMBERT et J. SIMEON, Points irréguliers d'une famille d'applications holomorphes, Algorithme de S. Mandelbrojt et ses extensions, Ensemble irrégulier d'une famille de "Faltung" au sens Hadamard, *Annales du C.S.U. de Chambéry*, (1968), 7-39.
- [3] J. SIMEON, Généralisation d'un théorème de Composition de S. Mandelbrojt et applications, *C.R.A.S.*, (1968), t. 266, 1233-1236.
- [4] J. SIMEON, Régularité et suprarégularité d'une famille de germes dirichletiens, *C.R.A.S.*, (1969), t. 268, 32-35).

Manuscrit reçu le 3 février 1969

Maurice BLAMBERT et Jean SIMEON

Institut de Mathématiques Pures

Boîte Postale 116

38 - St Martin d'Hères