ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES MEYER
JEAN-PIERRE SCHREIBER

Quelques fonctions moyennes-périodiques non bornées

Annales de l'institut Fourier, tome 19, nº 1 (1969), p. 231-236
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_231_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
19,1 (1969), 231 - 236

QUELQUES FONCTIONS MOYENNES-PÉRIODIQUES NON BORNÉES

par Y. MEYER et J. P SCHREIBER

Soit $D = \{\lambda_n\}_{n \geqslant 0}$, une suite de nombres réels vérifiant

1) $\lim_{n \to \infty} (n - \lambda_n) = 0$.

2) $\lambda_n \neq n$, pour une infinité de valeurs de n.

On se propose de montrer l'existence de fonctions moyenne périodiques non bornées, à spectre (simple) dans D.

On désigne par $B(\mathbf{R}^n)$ l'algèbre des transformées de Fourier des mesures bornées sur $\mathbf{R}^n$ et on pose $\|\hat{\mu}\|_{B(\mathbf{R}^n)} = \int d\,|\mu|$. Pour un fermé E de $\mathbf{R}^n$, B(E) est l'algèbre des restrictions à E des fonctions de $B(\mathbf{R}^n)$, munie de la norme quotient. On rappelle :

DEFINITION. – ([4] déf. 1.2.1). *On dira qu'une partie* A *de* **R** *possède un compact associé s'il existe un intervalle compact* I *et une constante* K, *tels que pour toute famille* $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *de nombres complexes nuls sauf un nombre fini, on ait*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x} \right| \leqslant K \sup_{x \in I} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x} \right|.$$

PROPOSITION. – ([1] prop. 1). *Si toute fonction moyenne-périodique à spectre dans* Λ *est bornée,* Λ *possède un compact associé.*

On a alors le théorème suivant :

THEOREME 1. – *L'ensemble* D (*défini plus haut*) *ne possède pas de compact associé.*

Démonstration. – Soit l un nombre positif vérifiant

$$2l < \inf_{i,j \in \mathbf{N}} |\lambda_i - \lambda_j|$$

et pour toute fonction f continue sur $D + [-l, l]$, soit $\tilde{f}$ la fonction continue sur $D \times [-l, l]$ définie par

$$\tilde{f}(x, y) = f(x + y).$$

Si D avait un compact associé, il existerait une constante C telle que pour toute partie D' de D, on ait ([4] th. I)

$$\|f\|_{B(D'+[-l,l])} \leqslant C \|\tilde{f}\|_{B(D' \times [-l,l])}.$$

Soit N tel que pour $n \geqslant N$, on ait $|\lambda_n - n| < \frac{l}{3}$. Prenons $D' = \{\lambda_n\}_{n \geqslant N}$. Pour tout ε positif inférieur à l, considérons la fonction f_ε définie sur $D' + [-l, l]$ par :

$$\begin{cases} f_\varepsilon(x) = 1 - \dfrac{|x - \lambda_n|}{\varepsilon}, \text{ si } |x - \lambda_n| \leqslant \varepsilon ; \\ f_\varepsilon(x) = 0, \text{ pour les autres valeurs de } x . \end{cases}$$

Il est clair que $\tilde{f}_\varepsilon$ possède un prolongement à $\mathbf{R}^2$ dont la norme dans $B(\mathbf{R}^2)$ ne dépend pas de ε ; par conséquent $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_{B(D' \times [-l,l]}$ est majorée indépendamment de ε et donc aussi $\|f\|_{B(D'+[-l,l])}$. Si g est une fonction de $B(\mathbf{R})$ valant 1 sur $\mathbf{Z} + \left[-\frac{l}{3}, \frac{l}{3}\right]$ et nulle hors de $\mathbf{Z} + \left[-\frac{2l}{3}, \frac{2l}{3}\right]$, le produit de g avec des prolongements de f_ε en des fonctions de $B(\mathbf{R})$ donne une famille de fonctions h_ε vérifiant :

$$\begin{cases} \|h_\varepsilon\|_{B(\mathbf{R})} \leqslant K \\ h_\varepsilon(\lambda_n) = 1 \quad \text{si} \quad \lambda_n \in D' \\ h_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin D' + [-\varepsilon, \varepsilon]. \end{cases}$$

Ces fonctions h_ε sont les transformées de Fourier de mesures de masse inférieure à K qui, considérées comme des mesures sur le compactifié de Bohr de $\mathbf{R}$, ont pour valeur d'adhérence faible, quand ε tend vers 0, une mesure μ dont la transformée de Fourier est la fonction

caractéristique de D'. La mesure μ est semi-idempotente et, d'après Kessler ([3]), D' doit être l'intersection avec $[0, +\infty[$ d'un élément de l'anneau des classes du groupe **R** discret.

On sait qu'un ensemble E, discret, de **R** qui appartient à l'anneau des classes du groupe discret **R** s'écrit $\bigcup_{i=1}^{n} (\tau_i \mathbf{Z} + \beta_i)\backslash F$ où les τ_i et β_i sont réels et F un ensemble fini. On voit facilement que la démonstration ([5], p. 71) s'applique au cas où l'on sait seulement que $E \cap [0, +\infty[$ est discret. Mais les hypothèses faites sur D interdisent à D' d'avoir cette forme, ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. — *Il existe des fonctions moyennes-périodiques non bornées de la forme* : $f \sim \sum_{n \geqslant 0} a_n \sin \lambda_n x$ *et de la forme*

$$g \sim \sum_{n \geqslant 0} b_n \cos \lambda_n x .$$

Posons $\Delta = D \cup (-D)$. Le corollaire résulte en fait seulement de l'existence d'une fonction moyenne périodique non bornée à spectre dans Δ et de ce que $\delta = \inf_{\substack{\lambda \in \Delta \\ \lambda' \in \Delta}} |\lambda' - \lambda| > 0$.

L'existence d'une telle fonction équivaut en effet à l'existence d'une suite de polynômes trigonométriques

$$P_\nu(x) = \sum_{\lambda \in \Delta} a_\lambda(\nu)\, e^{i\lambda x} \quad , \ \nu = 1,2, \ldots$$

vérifiant :

a) $\sup_{x \in \mathbf{R}} |P_\nu(x)| = 1$

b) $P_\nu(x) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$ uniformément sur tout compact.

Si on considère alors les polynômes trigonométriques

$$C_\nu(x) = P_\nu(x) + P_\nu(-x)$$

$$S_\nu(x) = P_\nu(x) - P_\nu(-x)$$

on voit qu'en se restreignant au besoin à une sous suite et en multipliant au besoin ces polynômes par des constantes, on a les propriétés a) et

b) soit pour les polynômes C_ν soit pour les polynômes S_ν. Supposons par exemple qu'on ait

$$\begin{cases} C_\nu(x) = \sum_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \cos \lambda_n x \\ \operatorname{Sup}_{x \in \mathbf{R}} |C_\nu(x)| = 1 \\ C_\nu(x) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \text{ uniformément sur tout compact.} \end{cases}$$

On peut dès lors affirmer l'existence de fonctions moyennes-périodiques paires non bornées à spectre dans Δ. Pour les fonctions impaires considérons

$$\begin{aligned} D_\nu(x, h) &= C_\nu(h + x) - C_\nu(h - x) \\ &= -2 \sum_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \sin \lambda_n h \sin \lambda_n x . \end{aligned}$$

Pour tout h, $D_\nu(x, h)$ converge aussi uniformément sur tout compact vers 0. De plus on peut trouver une valeur de h, une suite $\{\nu_i\}$ et un nombre $\eta > 0$ tels que

$$\operatorname{Sup}_{x \in \mathbf{R}} |D_{\nu_i}(x, h)| > \eta \quad \text{pour tout } i .$$

En effet, sinon on aurait pour tout $T > 0$ et tout $h \in [0, T]$

$$\operatorname{Sup}_{x \in \mathbf{R}} |D_\nu(x + h, h) + D_\nu(h - x, h)| \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 .$$

c'est-à-dire

$$4 \operatorname{Sup}_{x \in \mathbf{R}} \left| \sum_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \sin^2 \lambda_n h \cos \lambda_n x \right| \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$$

cette suite restant d'ailleurs majorée par 4 pour toute valeur de h. Mais

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \cos \lambda_n x &= \sum_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \cos 2\lambda_n h \cos \lambda_n x \\ &\quad + 2 \sum_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \sin^2 \lambda_n h \cos \lambda_n x \end{aligned}$$

d'où en intégrant par rapport à h sur $[0, T]$ et en utilisant l'inégalité de Schwarz

$$T\left|\sum_{n\leqslant N_\nu} c_n(\nu)\cos\lambda_n x\right| \leqslant \left\{\sum_{n\leqslant N_\nu} |c_n(\nu)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{n\leqslant N_\nu} \frac{1}{\lambda_n^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\int_0^T 2\left|\sum_{n\leqslant N_\nu} c_n(\nu)\sin^2\lambda_n h\cos\lambda_n x\right| dh.$$

La régularité de Δ entraîne d'une part que les sommes $\sum_{n\leqslant N_\nu}\frac{1}{\lambda_n^2}$ sont bornées et d'autre part, par l'inégalité d'Ingham ([2] p. 94).

$$\sum |c_n(\nu)|^2 \leqslant k\int_0^{\frac{2\pi}{\delta}}\left|\sum_{n\leqslant N_\nu} c_n(\nu)\cos\lambda_n x\right|^2 dx \leqslant k\,\frac{2\pi}{\delta}$$

Comme, pour toute valeur de T et de x l'intégrale du 2e membre tend vers 0 lorsque ν tend vers l'infini et comme un choix convenable de x donne au 1er membre une valeur arbitrairement voisine de T, on obtient une contradiction dès que T est supérieur à

$$(2\pi\,\delta^{-1})^{\frac{1}{2}}\left(\sum\frac{1}{\lambda_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi donc nous avons aussi prouvé l'existence de fonctions moyennes-périodiques impaires à spectre dans Δ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. KAHANE, Sur les fonctions moyennes-périodiques bornées, *Ann. Inst. Fourier,* VII, (1957) (p. 293-314).

[2] J.P. KAHANE, Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires, *Ann. Ec. Norm.* 79 (1962).

[3] I. KESSLER, Semi idempotent measures on abelian groups, *Bull. Am. Math. Soc.* 73 (1967) p. 258.

[4] Y. MEYER, Isomorphisme entre certaines algèbres de restrictions. *Ann. Inst. Fourier* 18, 2 (1968), 73-86.

[5] H.P. ROSENTHAL, Projections on to invariant subspaces of $L^p(G)$, *Mémoirs of the Am. Math. Soc.* (1966) (n° 63).

Manuscrit reçu le 26 décembre 1968

Y. MEYER et J.P. SCHREIBER
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
91 – Orsay