ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JULIANE BOKOBZA-HAGGIAG

# Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété différentiable

*Annales de l'institut Fourier*, tome 19, nº 1 (1969), p. 125-177

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_125_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
19,1 (1969), 125 - 177

# OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

par Juliane BOKOBZA-HAGGIAG

TABLE DES MATIERES



N.B. : Cet article contient l'essentiel de notre thèse parue sous le même titre : nous avons supprimé les chapitres I, II et VII de cette thèse dont les résultats sous une forme équivalente ou voisine ont déjà paru, développés indépendamment par d'autres auteurs (cf Kohn-Nirenberg [7] et Hörmander [6]) et nous avons légèrement modifié le chapitre V de façon à rendre cet article indépendant des chapitres qui n'y figurent pas.

## Introduction.

On sait que les opérateurs intégraux singuliers ont connu ces dernières années un renouveau d'intérêt à la suite de leur introduction en topologie, où la démonstration du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer les utilise pour la construction de paramétrix d'opérateurs différentiels elliptiques.

Aux opérateurs intégraux singuliers, tels que les ont étudiés Calderon et Zygmund ([1] et [2]), sont associés des symboles, fonctions $f(x, \xi)$ homogènes de degré 0 par rapport à la deuxième variable $\xi$, et le calcul symbolique ainsi défini est très simple, mais néglige tout opérateur opérant continûment de $H^0$ dans $H^1$. L'invariance par difféomorphisme des opérateurs intégraux singuliers, démontrée par Seeley ([8]), s'accompagne aussi d'un calcul symbolique de ces opérateurs sur une variété, où le symbole est défini comme fonction sur l'espace cotangent à la variété.

L'introduction de fonctions $f(x, \xi)$ d'ordre d'homogénéité $m$ quelconque (Cartan-Schwartz, [3]) définit des opérateurs pseudo-différentiels de tous ordres, et l'on obtient facilement un calcul symbolique modulo les opérateurs d'ordre $m - 1$ (c'est-à-dire opérant continûment, pour tout $s$, de $H^s$ dans $H^{s-m+1}$), lequel est d'ailleurs suffisant pour toutes les applications actuellement en vue en topologie.

Il s'est cependant posé alors le problème de définir un calcul symbolique plus précis, non plus modulo les opérateurs d'ordre inférieur d'une unité, mais modulo les opérateurs régularisants, c'est-à-dire possédant un noyau de classe $C^\infty$.

On y parvient assez facilement sur $\mathbf{R}^n$, surtout avec l'abandon, réalisé dans [3], des intégrales singulières au profit de l'utilisation de la transformation de Fourier : il suffit de considérer, au lieu de symboles homogènes d'ordre $m$, des symboles qui sont sommes de séries de symboles homogènes de degrés $m_j$ tendant vers $-\infty$, ou, ce qui revient au même, des opérateurs sommes de séries d'opérateurs associés à des symboles homogènes de degrés variés : les deux points de vue ont été traités, indépendamment, par Kohn-Nirenberg ([7]), et par nous-mêmes ([11], cet article annonçant également l'invariance par difféomorphisme) ; nous avons aussi, ce qui élargit assez sensiblement la classe d'opérateurs considérée, étudié tous les opérateurs A définis par la formule

$$(\mathrm{A}\varphi)(x) = \int f(x\,,\xi)\, e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi\ ,$$

où $f$, au lieu d'être somme de termes homogènes, a simplement des propriétés de régularité et de croissance à l'infini spécifiées ([12]).

Nous nous bornons ici aux symboles $f$ de classe $\mathrm{C}^\infty$ dont chaque dérivée $\dfrac{\partial^p}{\partial x^p}\dfrac{\partial^q}{\partial \xi^q} f$ est majorée, pour $|\xi|$ tendant vers l'infini, par $\mathrm{C}|\xi|^{m-|q|}$, C dépendant de $p$, de $q$ et du compact dans lequel on limite $x$ : Hörmander a cependant montré, dans [6], que, $\varepsilon$ et $\delta$ étant donnés vérifiant $1-\varepsilon \leqslant \delta < \varepsilon \leqslant 1$, on obtient de "bons" opérateurs avec tout symbole $f$ vérifiant

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial \xi^q} f(x\,,\xi)\right| \leqslant \mathrm{C}\ |\xi|^{m-\varepsilon|q|+\delta|p|}\ ,$$

cette classe beaucoup plus générale ayant l'intérêt de fournir des paramétrix pour un grand nombre d'opérateurs différentiels hypoelliptiques.

Pour la classe que nous étudions, il est facile d'obtenir les propriétés de continuité des opérateurs souhaitées ainsi que l'évaluation du symbole du composé de deux opérateurs pseudo-différentiels ou du symbole du transposé d'un opérateur pseudo-différentiel : c'est ce que nous faisons dans le chapitre I de ce travail ; notons que pour les classes plus générales de Hörmander, la démonstration de la continuité des opérateurs requiert une méthode différente.

Ces classes d'opérateurs sont invariantes par difféomorphisme, résultat que nous avions annoncé dans [11] après une démonstration pénible et qui a un peu plus tard, indépendamment, été prouvé par Hörmander de façon très élégante. Mais il est plus difficile d'obtenir sur une variété un calcul symbolique aussi précis que sur $\mathbf{R}^n$, étant donné que le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m$ sur $\mathbf{R}^n$, considéré comme fonction sur l'espace cotangent de $\mathbf{R}^n$, ne se transforme comme on le voudrait par difféomorphisme que modulo le symbole d'un opérateur d'ordre $m-1$.

On peut alors définir un calcul symbolique indéfiniment précisé (c'est-à-dire tel que le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel caractérise celui-ci à un opérateur régularisant près) en faisant intervenir les jets de tous ordres de la variété : c'est ce que nous avons tenté de faire dans [11], tout au moins au deuxième ordre. Malheureusement les formules obtenues sont d'une complication extrême et ce calcul est peu maniable.

Nous introduisons ici, dans le chapitre V, un calcul qui considère à nouveau le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel comme une fonction sur l'espace cotangent, et établit une correspondance linéaire entre les opérateurs pseudo-différentiels d'une part et une classe de symboles d'autre part, correspondance qui est essentiellement bijective puisqu'on ne "perd" d'un côté que les opérateurs régularisants, et de l'autre les symboles qui sont à décroissance rapide sur les fibres de l'espace cotangent.

L'idée de ce calcul est basée sur le fait que la formule (1) peut aussi s'écrire

$$(A\varphi)(x) = \int f(x\,,\,\xi)\,d\xi \int e^{-2i\pi<y-x,\xi>}\varphi(y)\,dy \;,$$

cette dernière formule prenant un sens sur une variété si l'on y remplace $y - x$ par un vecteur tangent en $x$ à la variété, soit $\nu(x\,,\,y)$, "infinitésimalement égal" à $y - x$, et si l'on prend quelques précautions supplémentaires destinées à faire converger l'intégrale et à lui assurer un sens intrinsèque.

Le matériel géométrique nécessaire à cet effet (à savoir la définition de ce champ $\nu$, que nous avons appelé linéarisation de la variété X) est introduit dans le chapitre III de ce travail.

La correspondance entre les opérateurs pseudo-différentiels et les symboles, définie globalement dans les deux sens et étudiée dans le chapitre V, dépend de la linéarisation $\nu$ de X, mais les classes de symboles correspondant aux classes d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordres donnés n'en dépendent pas : ce point est démontré par une formule de ce chapitre qui montre comment le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété se transforme lorsqu'on change de linéarisation : c'est la démonstration de cette formule qui contient toutes les difficultés de l'extension de la théorie aux variétés, l'invariance par difféomorphisme des opérateurs pseudo-différentiels étant dans ce travail évidente eu égard à la formulation intrinsèque adoptée.

Il est d'ailleurs clair que tout ceci se généraliserait avec des modifications triviales aux classes plus générales de Hörmander, étant admise la démonstration de la continuité des opérateurs, faite dans [6].

Dans le chapitre IV, nous donnons deux théorèmes qui permettent de sommer des séries de symboles ou d'opérateurs dont les ordres tendent vers $-\infty$ : le premier, relatif aux séries de symboles, est dû à Hörmander ([4]) mais est donné ici dans des conditions légèrement différentes ; le second, plus difficile, n'est pas indispensable pour la suite mais peut être utile étant donné qu'il s'applique dans des conditions très générales : c'est sur ce dernier théorème que nous nous étions appuyés dans [11] pour démontrer l'inversibilité des opérateurs elliptiques modulo les opérateurs régularisants lorsque nous ne disposions pas encore des symboles non homogènes.

L'extension de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels aux opérateurs opérant des sections d'un fibré vectoriel dans les sections d'un autre fibré se fait de façon satisfaisante, avec l'introduction d'un élément géométrique supplémentaire : c'est l'objet du chapitre VI, en même temps que les formules donnant, sur une variété, le symbole du produit de deux opérateurs pseudo-différentiels ou le symbole du transposé d'un opérateur pseudo-différentiel ; malheureusement ces dernières, d'aspect analogue à celles déjà obtenues sur $\mathbf{R}^n$, ne sont valables que sur une variété localement affine ; en dehors de ce cas, on peut certes écrire des formules mais elles sont si compliquées que nous attendons d'en avoir une meilleure interprétation (faisant intervenir vraisemblablement la courbure d'une connexion définie sur la variété) pour les développer.

Nous terminons ce chapitre par la description des opérateurs pseudo-différentiels invariants par l'action d'un groupe de Lie compact opérant sur la variété : la définition globale des opérateurs que nous avons donnée simplifie et précise notablement cette étude.

Enfin, les chapitres II et VII décrivent les espaces $\mathrm{H}^\rho$ qui généralisent les espaces de Sobolev au cas où l'exposant $\rho$, au lieu d'être un nombre réel, est une fonction $\mathrm{C}^\infty$ de $x$ ; associée à ces espaces est une théorie des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre variable, que nous avons décrite brièvement, étant donné qu'elle n'a pas d'applications pour le moment.

Je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à Monsieur

Schwartz qui a guidé avec beaucoup de bienveillance mes débuts dans la recherche et dont, par la suite, les conseils constants et éclairés m'ont permis de réaliser ce travail ; j'ai retiré par ailleurs le plus grand bénéfice d'une participation au séminaire Cartan – Schwartz (1963-64) où des idées qui ont ouvert une nouvelle voie dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels ont été introduites par Monsieur Schwartz.

J'adresse également mes plus vifs remerciements à Monsieur Malliavin : c'est à l'occasion d'un cours qu'il a professé à Orsay en 1963 que j'ai eu mes premiers contacts avec la théorie des opérateurs intégraux singuliers ; Monsieur Malliavin m'avait déjà posé à cette époque le problème de la définition d'un calcul symbolique précisé et a bien voulu en outre me proposer maintenant le sujet de seconde thèse.

Je remercie Monsieur Malgrange, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et participer au jury, ainsi que Monsieur Trèves, pour ses nombreux conseils et encouragements.

Enfin, j'ai eu la possibilité d'exposer une partie de ces travaux dans deux séminaires de topologie dirigés l'un par Monsieur Shih, l'autre par Monsieur Karoubi : en plus que pour de nombreuses discussions, je tiens à les remercier pour les encouragements qu'ils m'ont donnés à développer certains points adaptés à un usage en topologie, tels que la définition globale des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété ou l'étude des opérateurs invariants par un groupe de Lie.

## CHAPITRE III

## LINEARISATION D'UNE VARIETE DIFFERENTIABLE

DEFINITION (III.1). – *Soient* X *une variété réelle de classe* $C^\infty$, *paracompacte et* $T(X)$ *son espace tangent. Soit* $v$ *une application de classe* $C^\infty$ *de* $X \times X$ *dans* $T(X)$ *telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "p_1"'] & & T(X) \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

*soit commutatif,* $p_1$ *désignant la première projection du produit* $X \times X$ *sur* X. *On dira que* $v$ *est une linéarisation de* X *si les conditions* i) *et* ii) *sont vérifiées :*

i) *pour tout* $x \in X$, $v(x, x) = 0$

ii) *pour tout* $x \in X$, *la différentielle de l'application*

$$y \longmapsto v(x, y) ,$$

*laquelle est une application linéaire de* $T_y(X)$ *dans* $T_x(X)$, *est au point* $y = x$ *l'application identique de* $T_x(X)$.

Signalons dès maintenant que plus que de l'application $d_y v(x, y)$ nous aurons besoin de sa transposée que nous notons $l_x^y$ : c'est l'application linéaire de $T_x^*(X)$ dans $T_y^*(X)$ définie par

$$l_x^y(\xi) = d_y < v(x, y), \xi >$$

pour tout $\xi$ appartenant à $T_x^*(X)$, où $T^*(X)$ désigne l'espace cotangent de X ; la condition ii) s'exprime bien sûr par le fait que, pour tout $x \in X$, $l_x^x$ est l'application identique de $T_x^*(X)$.

PROPOSITION (III.1). – *Soient* X *et* Y *deux variétés réelles de classe* $C^\infty$, *paracompactes, et* $h$ *une immersion* $Y \longrightarrow X$, *c'est-à-dire une application* $C^\infty$, *de rang partout égal à la dimension de* Y.

*Soit* $h^*(T(X))$ *le fibré sur* Y *image réciproque par* $h$ *de* $T(X)$, *à un sous-fibré duquel on peut identifier* $T(Y)$ *(au moyen de la différentielle de* $h$*), et soit* H *un fibré supplémentaire de* $T(Y)$ *dans*

$h^*(\mathrm{T}(\mathrm{X}))$ *(tel, par exemple, qu'on peut le définir par choix d'une structure riemannienne sur* $h^*(\mathrm{T}(\mathrm{X}))$. *Soit* $q$ *la projection de* $h^*(\mathrm{T}(\mathrm{X}))$ *sur* $\mathrm{T}(\mathrm{Y})$ *parallèlement à* H.

*Alors si* $\nu$ *est une linéarisation sur* X, *on définit une linéarisation sur* Y *en posant*

$$(h^*\nu)(y_1, y_2) = q(\nu(hy_1, hy_2)) .$$

En effet $d_{y_2}(h^*\nu)(y_1, y_2) = q \circ {}^t l_{hy_1}^{hy_2} \circ dh(y_2)$, d'où résulte immédiatement la condition ii) puisque $l_{hy_1}^{hy_1} = \mathrm{I}$ et que l'application $q$ est une inverse à gauche de $dh$.

Notons que $h^*\nu$ est définie canoniquement par la donnée de $h$ et de $\nu$ lorsque $h$ est un difféomorphisme local.

COROLLAIRE. – *Toute variété admet une linéarisation.*

Cela résulte en effet du théorème de Whitney et de la proposition (III.1).

PROPOSITION (III.2). – *Soit* $\nu$ *une linéarisation de la variété* X. *Il existe un voisinage ouvert* $\Omega$ *de* $\Delta$, *diagonale de* $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

iii) *la restriction de* $\nu$ *à* $\Omega$ *est un difféomorphisme de* $\Omega$ *sur un voisinage ouvert de la section nulle de* $\mathrm{T}(\mathrm{X})$.

iv) *les deux projections sur* X *de* $\overline{\Omega}$ *sont des applications propres.*

*Un tel ouvert* $\Omega$ *sera appelé un domaine de la linéarisation* $\nu$. *En outre on peut supposer que* $\Omega$ *est symétrique et que pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *la coupe* $\Omega_x = \{y \in \mathrm{X}$ *tels que* $(x, y) \in \Omega\}$ *est connexe.*

En effet, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe, pour tout $x \in \mathrm{X}$, un voisinage ouvert $\mathcal{U}_x$ de $x$ tel que la restriction de $\nu$ à $\mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_x$ soit un difféomorphisme. On peut bien sûr, supposer $\mathcal{U}_x$ relativement compact.

X étant paracompacte, on sait que l'on peut définir un recouvrement ouvert localement fini $(\mathrm{V}_\lambda)$ de X tel que si $\mathrm{V}_\lambda \cap \mathrm{V}_\mu \neq \emptyset$ il existe $x \in \mathrm{X}$ tel que $\mathrm{V}_\lambda \cup \mathrm{V}_\mu \subset \mathcal{U}_x$.

Alors $\Omega' = \bigcup_\lambda \mathrm{V}_\lambda \times \mathrm{V}_\lambda$ vérifie déjà les conditions iii) et iv) : pour la condition iii), il n'y a que l'injectivité à vérifier ; mais si $\nu(x, y) = \nu(x, z)$, où $(x, y) \in \mathrm{V}_\lambda \times \mathrm{V}_\lambda$ et $(x, z) \in \mathrm{V}_\mu \times \mathrm{V}_\mu$, alors

$V_\lambda \cup V_\mu \subset \mathcal{U}_t$ pour un certain $t \in X$, de sorte que $(x, y)$ et $(x, z)$ appartiennent tous deux à $\mathcal{U}_t \times \mathcal{U}_t$, d'où $y = z$.

Par ailleurs, si K est une partie compacte de X, $(x, y)$ ne peut appartenir à $\Omega'$, $x$ appartenant à K, que si $y$ appartient à la réunion des ouverts relativement compacts $V_\lambda$ qui coupent K, lesquels sont en nombre fini, d'où iv).

Pour assurer les deux dernières conditions, choisissons pour tout $x \in X$ un voisinage ouvert connexe $W_x$ de $x$ tel que $W_x \times W_x \subset \Omega'$. Alors $\Omega = \bigcup_{x \in X} W_x \times W_x$ répond à la question, car $\Omega_x = \bigcup_{x \in W_y} W_y$ est connexe, et $\Omega$ est, bien sûr, symétrique. Cette démonstration prouve d'ailleurs que tout voisinage de $\Delta$ contient un domaine de $\nu$, symétrique et à coupes connexes.

Definition (III.2). — *Une linéarisation $\nu$ de X sera dite localement affine s'il existe un domaine $\Omega$ de $\nu$ vérifiant la propriété :*

v) *pour tout points $x_1, x_2, x_3 \in X$ tels que $(x_1, x_2) \in \Omega$ et $(x_2, x_3) \in \Omega$ on a*

$$l_{x_1}^{x_3} = l_{x_2}^{x_3}\, l_{x_1}^{x_2}\,.$$

Notons que si $h : Y \longrightarrow X$ est un difféomorphisme local et que $\nu$ est une linéarisation localement affine de X, alors $h^*\nu$ est une linéarisation localement affine de Y, car dans ce cas

$$(h^*l)_{y_1}^{y_2} = {}^t dh\,(y_2)\, l_{hy_1}^{hy_2}\, {}^t dh\,(y_1)^{-1}$$

et la relation souhaitée est réalisée si $(y_1, y_2) \in (h, h)^{-1}(\Omega)$ ainsi que $(y_2, y_3)$.

Les linéarisations de ce type seront utilisées essentiellement dans le chapitre sur la composition et la transposition des opérateurs pseudo-différentiels. En ce qui concerne l'existence de telles linéarisations, on a la proposition :

Proposition (III.3). — *Pour qu'une variété X admette une linéarisation localement affine, il faut et il suffit que X soit une variété localement affine, c'est-à-dire admette un système distingué de cartes locales tel que les changements de cartes soient des isomorphismes affines entre ouverts de $\mathbf{R}^n$".*

En effet, si $\nu$ est une linéarisation localement affine de X, choisissons un domaine $\Omega$ de $\nu$ à coupes connexes vérifiant ($\nu$), puis, par la méthode utilisée dans la proposition (III.2), un domaine $\Omega'$ de $\nu$ symétrique tel que $\Omega'^2 \subset \Omega$.

Soit alors, pour tout $x_0 \in X$, $\alpha_{x_0}$ le difféomorphisme de $\Omega'_{x_0}$ sur un ouvert de $T_{x_0}(X)$ défini par

$$\alpha_{x_0}(x) = \nu(x_0 , x) .$$

On définit ainsi un système de cartes locales sur X (à valeurs dans un espace vectoriel de dimension $n$ dépendant de la carte, ce qui n'est évidemment pas gênant) : on va montrer que les changements de cartes sont des applications affines.

Remarquons d'abord que si $\xi_0 \in T^*_{x_0}(X)$ et $x \in \Omega_{x_0}$, la fonction

$$< \nu(x_0 , y), \xi_0 > - < \nu(x , y), l^x_{x_0}(\xi_0) >$$

a pour différentielle par rapport à $y$ la différence

$$l^y_{x_0}(\xi_0) - l^y_x \, l^x_{x_0}(\xi_0)$$

expression qui est nulle par hypothèse si $y \in \Omega_x$ ; comme cet ouvert est connexe, on a

$$< \nu(x_0 , y), \xi_0 > - < \nu(x , y), l^x_{x_0}(\xi_0) > = < \nu(x_0 , x), \xi_0 >$$

pour tout $y$ appartenant à $\Omega_x$, autrement dit

$$\nu(x_0 , y) - \nu(x_0 , x) = {}^t l^x_{x_0} \, \nu(x , y) .$$

Cela étant, si $(x_0 , x) \in \Omega'$ ainsi que $(x_0 , y)$, $(x_1 , x)$ et $(x_1 , y)$, on voit que $(x , y) \in \Omega$ et que $(x_1 , x_0) \in \Omega$, d'où

$$\alpha_{x_0}(y) - \alpha_{x_0}(x) = {}^t l^x_{x_0} \, \nu(x , y)$$

et

$$\alpha_{x_1}(y) - \alpha_{x_1}(x) = {}^t l^x_{x_1} \, \nu(x , y) = {}^t l^{x_0}_{x_1} (\alpha_{x_0}(y) - \alpha_{x_0}(x)) ,$$

ce qui prouve que X est localement affine.

Réciproquement, si X est une variété localement affine, choisissons un recouvrement $(\mathcal{U}_\lambda)$ de X par des ouverts domaines de cartes distinguées $\alpha_\lambda : \mathcal{U}_\lambda \longrightarrow \mathbf{R}^n$, puis une fonction $\beta$ réelle de classe $C^\infty$ sur $X \times X$, égale à 1 dans un voisinage de $\Delta$, à support contenu dans l'ouvert $\bigcup_\lambda \mathcal{U}_\lambda \times \mathcal{U}_\lambda$. Posons

$$\nu(x\,,y) = 0 \qquad \text{si} \qquad (x\,,y) \notin \bigcup_\lambda \mathcal{U}_\lambda \times \mathcal{U}_\lambda$$

et

$$\nu(x\,,y) = \beta(x\,,y)\,(d\alpha_\lambda(x))^{-1}\,(\alpha_\lambda(y) - \alpha_\lambda(x))$$

si $x$ et $y$ appartiennent à $\mathcal{U}_\lambda$.

Si $x$ et $y$ appartiennent aussi à $\mathcal{U}_\mu$, on peut écrire

$$\alpha_\mu = \rho_{\lambda\mu} \circ \alpha_\lambda$$

où $\rho_{\lambda\mu}$ est une application affine dont on note $d\rho_{\lambda\mu}$ l'application linéaire tangente. On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_\mu(y) - \alpha_\mu(x) &= \rho_{\lambda\mu}(\alpha_\lambda(y)) - \rho_{\lambda\mu}(\alpha_\lambda(x)) \\ &= d\rho_{\lambda\mu}(\alpha_\lambda(y) - \alpha_\mu(x))\ , \end{aligned}$$

et

$$d\alpha_\mu(x) = d\rho_{\lambda\mu}(x) \circ d\alpha_\lambda(x)$$

d'où

$$(d\alpha_\mu(x))^{-1}\,(\alpha_\mu(y) - \alpha_\mu(x)) = (d\alpha_\lambda(x))^{-1}\,(\alpha_\lambda(y) - \alpha_\lambda(x))\ ,$$

ce qui prouve que la définition de $\nu(x\,,y)$ ne dépend pas du choix de $\lambda$.

Le fait que $\nu$ est une linéarisation localement affine résulte alors de ce que cette propriété est locale (pour une application $\nu$ déjà construite), et de la remarque qui suit la définition (III.2).

# CHAPITRE IV

## ESPACES DE SYMBOLES ET D'OPERATEURS

Dans tout ce qui suit, X est une variété réelle de classe $C^\infty$ et de dimension $n$, que l'on suppose, pour simplifier, dénombrable à l'infini.

DEFINITION (IV.1). – *Soit m un nombre réel.*

$C^\infty(T^*(X)\,; m)$ *est l'espace des fonctions* F *de classe* $C^\infty$ *sur* $T^*(X)$, *à valeurs complexes, telles que pour tout compact* K *de* X *contenu dans un domaine de coordonnées, pour tout choix d'un système de coordonnées dans un voisinage de* K, *et quels que soient les multi-indices p et q, il existe une constante* C *telle que :*

$$|D_x^p\, \partial_\xi^q\, F(x\,,\xi)| \leqslant C|\xi|^{m-|q|} \quad \textit{pour} \quad x \in K \quad \textit{et} \quad \xi \in T_x^*(X),\ |\xi| \geqslant 1\ .$$

*Remarque.* – On pose

$$D_x^p = \frac{1}{(2i\pi)^{|p|}}\,\frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}} \text{ et } \partial_\xi^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial \xi_1^{p_1}\ldots\partial \xi_n^{p_n}}\ ;$$

il y aura lieu d'introduire également des dérivations par rapport aux coordonnées de l'espace tangent sous la forme

$$D_\eta^p = \frac{1}{(2\,i\pi)^{|p|}}\,\frac{\partial^{|p|}}{\partial \eta_1^{p_1}\ldots\partial \eta_n^{p_n}}$$

Ces dérivations ne prennent bien sûr un sens que moyennant la donnée d'un système de coordonnées locales ou celle d'une base en un point donné de l'espace tangent ou cotangent ; mais toutes les formules globales de ce travail qui font intervenir de telles dérivations (propositions (V.3), (VI.2), (VI.3), (VI.4)) ont un sens intrinsèque, étant entendu que les dérivations par rapport aux coordonnées de l'espace tangent et cotangent sont toujours écrites par rapport à des bases duales de ces deux espaces.

Par ailleurs, on voit facilement qu'il suffit que l'inégalité souhaitée soit remplie localement pour un certain système de coordonnées pour qu'elle le soit pour tout système de coordonnées.

DEFINITION (IV) bis. — *Soit $m$ un nombre réel.*

$\mathcal{L}(X\,;\,m)$ *est l'espace des opérateurs linéaires continus* A *de* $\mathcal{D}(X)$ *dans* $\mathcal{D}(X)$, *qui se prolongent continûment de* $\mathcal{D}'(X)$ *dans* $\mathcal{D}'(X)$, *et pour tout $s$ réel, de* $H^s_{\mathrm{comp}}(X)$ *dans* $H^{s-m}_{\mathrm{comp}}(X)$, *et qui, en outre, sont très réguliers, c'est-à-dire vérifient la condition suivante : si* T *est une distribution sur* X *de classe* $C^\infty$ *dans un ouvert* $\Omega$ *de* X, *alors la distribution* AT *est de classe* $C^\infty$ *dans* $\Omega$.

*Remarque.* — Tous les espaces de distributions considérés ici sont des sous-espaces de $\mathcal{D}'(X)$, espace des courants pairs de degré 0. $\mathcal{D}(X)$ est l'espace des fonctions (à valeurs complexes) de classe $C^\infty$ sur X et à support compact, $\mathcal{E}(X)$ l'espace des fonctions de classe $C^\infty$ et $\mathcal{E}'(X)$ l'espace des courants à support compact : chacun de ces espaces est muni de sa topologie forte.

$H^s_{\mathrm{loc}}(X)$ est l'espace de Fréchet des distributions qui sont localement dans $H^s$ (notion invariante par changement de coordonnées) et $H^s_{\mathrm{comp}}(X)$ est l'intersection de ce dernier espace avec $\mathcal{E}'(X)$ : il est muni de la topologie limite inductive des $H^s_K(X)$ espace des distributions dans $H^s_{\mathrm{loc}}(X)$ à support dans un compact donné K de X.

Il résulte facilement de la définition que si $A \in \mathcal{L}(X\,;\,m)$, alors A opère de $\mathcal{E}'(X)$ dans $\mathcal{E}'(X)$, de $H^s_{\mathrm{loc}}(X)$ dans $H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(X)$ et de $\mathcal{E}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$ : en effet toute partie bornée de $\mathcal{E}'(X)$ est une partie bornée de $H^s_{\mathrm{comp}}(X)$ pour $s$ convenable, et $\mathcal{E}'(X)$ est bornologique, ce qui montre le premier point ; par ailleurs, si $T \in H^s_{\mathrm{loc}}(X)$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, soit $\psi \in \mathcal{D}(X)$ égale à 1 dans un voisinage du support de $\varphi$ : alors

$$\varphi AT = \varphi A(\psi T) + \varphi A(1-\psi)T,$$

$$\varphi A(\psi T) \in H^{s-m}_{\mathrm{comp}}(X) \quad \text{et} \quad \varphi A(1-\psi)T \in \mathcal{E}(X)\,;$$

ceci montre que A opère de $H^s_{\mathrm{loc}}(X)$ dans $H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(X)$, la continuité de cette application résultant du théorème du graphe fermé ; le troisième point résulte alors de ce que $\mathcal{E}(X) = \bigcap_s H^s_{\mathrm{loc}}(X)$.

Il convient de remarquer, pour un usage ultérieur, que dans la définition (IV.1) bis, on peut supprimer l'hypothèse que A opère de $\mathcal{D}'(X)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ (la dernière condition étant alors remplacée par la condition : $T \in \mathcal{E}'(X)$ et T est $C^\infty$ dans $\Omega$ entraînent AT est $C^\infty$ dans $\Omega$) si pour tout compact K de X on peut trouver un compact L de X tel que $T \in \mathcal{D}(X)$ et $T = 0$ sur L entraînent $AT = 0$ sur K.

En effet, moyennant cette condition, AT n'annulera sur $\overset{\circ}{K}$ si $T \in \mathcal{E}'(X)$ et s'annule dans un voisinage de L, puisque la régularisation n'augmente pas trop le support ; cela étant, soit $(\varphi_i)$ une partition $C^\infty$ de l'unité sur X, dénombrable et localement finie ; alors si $T \in \mathcal{D}'(X)$ la famille $(A(\varphi_i T))$ est une famille de distributions localement finie (le support de $A(\varphi_i T)$ ne pouvant couper un compact K si le support de $\varphi_i$ ne coupe pas le compact L associé) et en définissant $AT = \sum_i A(\varphi_i T)$ on obtient le prolongement voulu de A à $\mathcal{D}'(X)$ ; l'inclusion supp.sing. $AT \subset$ supp.sing.T pour toute $T \in \mathcal{D}'(X)$ est évidente.

Enfin, signalons que $\mathcal{L}(X\ ; -\infty) = \bigcap_m \mathcal{L}(X\ ; m)$ n'est autre que l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{E}'(X)$ dans $\mathcal{D}(X)$ et de $\mathcal{D}'(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$ ; nous désignerons ces opérateurs sous le nom d'opérateurs régularisants.

PROPOSITION (IV.1). — $C^\infty(T^*(X)\ ; m)$ *est complet pour sa structure de groupe topologique (non séparé) pour laquelle un système fondamental de voisinages de* 0 *est constitué par les sous-espaces* $C^\infty(T^*(X)\ ; k)$ *(k réel* $\leqslant m$*).*

Cette proposition, et la suivante, permettent de sommer des séries de symboles ou d'opérateurs dont les ordres tendent vers $-\infty$. Elles ont été données en même temps, la première par Hörmander ([4]), et la deuxième par nous-mêmes ([11]).

Rappelons cependant la démonstration de cette première proposition donnée par Hörmander étant donné que les conditions (et l'énoncé) sont légèrement différents ; il s'agit de montrer que si $(m_j)$ est une suite de nombres réels décroissante tendant vers $-\infty$, et si $(F_j)$ est une suite de fonctions sur $T^*(X)$, $F_j$ appartenant à $C^\infty(T^*(X)\ ; m_j)$, il existe une fonction $F \in C^\infty(T^*(X)\ ; m_0)$ telle que, quel que soit $k$, $F - \sum_{0 \leqslant j \leqslant k-1} F_j$ appartienne à $C^\infty(T^*(X)\ ; m_k)$.

On peut, par partition de l'unité sur X, se ramener au cas où la projection sur X du support de $F_j$ est contenu dans un ouvert relativement compact $\Omega$ de X, domaine de coordonnées, indépendant de $j$. On choisit des coordonnées sur $\Omega$.

Soit alors $\varphi$ une fonction $C^\infty$ sur $T^*(\Omega)$ à valeurs réelles, égale à 0 pour $|\xi| < 1/2$ et à 1 pour $|\xi| > 1$ : on peut choisir une suite $(t_j)$ de nombres réels tendant en croissant vers $+\infty$ telle que, $\forall (x, \xi) \in T^*(\Omega)$,

$$|D_x^p \partial_\xi^q \left(\varphi\left(x, \frac{\xi}{t_j}\right) F_j(x, \xi)\right)| \leqslant 2^{-j} |\xi|^{m_j - 1 - |q|} \quad \text{pour} \quad |p| + |q| \leqslant j ,$$

et la fonction

$$F(x, \xi) = \sum_{j \geqslant 0} \varphi\left(x, \frac{\xi}{t_j}\right) F_j(x, \xi)$$

répond à la question.

Notons que la somme de la série $\sum_{j \geqslant 0} F_j$ (qui est convergente pour la topologie donnée dans la proposition (IV.1)) n'est définie qu'à un élément de $C^\infty(T^*(X) ; -\infty) = \bigcap_m C^\infty(T^*(X) ; m)$ près. On écrira $F \sim \sum_{j \geqslant 0} F_j$.

Proposition (IV.1) bis. — *$\mathcal{L}(X ; m)$ est complet pour sa structure de groupe topologique pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est constitué par les sous-espaces*

$$\mathcal{L}(X ; k) \ (k \text{ réel} \leqslant m) .$$

Le groupe séparé associé est, bien sûr, le quotient par le sous-groupe des opérateurs régularisants.

La démonstration repose ici sur le théorème de Mittag-Leffler (cf. Bourbaki, Topologie générale, chapitre 2). Les lemmes (IV.1) et (IV.2) sont des intermédiaires à cette démonstration.

Nous commençons par définir, pour tout compact K de X et tout nombre réel $m$, l'espace $\mathfrak{M}_K(X ; m)$ suivant : c'est l'espace des opérateurs A de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$\forall T \in \mathcal{D}(X), \operatorname{supp}(T) \subset \complement K \Longrightarrow AT = 0 . \qquad (1)$$

$$\forall s, t \in \mathbf{R}, t > m, \text{ A opère de } H^s_{loc}(X) \text{ dans } H^{s-t}_{loc}(X) . \qquad (2)$$

Notons qu'en vertu de l'inégalité stricte imposée à $t$, il suffit que cette dernière condition soit réalisée lorsque $s$ et $t$ sont rationnels. Par ailleurs, un tel opérateur A opère évidemment de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{D}'(X)$ dans $\mathcal{D}'(X)$. On peut mettre sur $\mathcal{M}_K(X\,;m)$ une structure d'espace de Fréchet de la façon suivante : soit K′ un compact de X, $K \subset \overset{\circ}{K'}$ ; quels que soient $s$ et $t$, l'espace d'applications linéaires continues $\mathcal{L}(H^s_{K'}(X), H^{s-t}_{loc}(X))$ est un espace de Fréchet pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $H^s_{K'}(X)$.

Pour $s$ et $t$ rationnels, $t > m$, l'application naturelle (de restriction) de $\mathcal{M}_K(X\,;m)$ dans $\mathcal{L}(H^s_{K'}(X), H^{s-t}_{loc}(X))$ est injective.

On met sur $\mathcal{M}_K(X\,;m)$ la topologie borne supérieure des topologies induites par ces espaces, lorsque $s$ et $t$ parcourent $\mathbf{Q}$, avec $t > m$. Il est clair que $\mathcal{M}_K(X\,;m)$ devient ainsi un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable ; de plus si $(A_k)$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}_K(X\,;m)$, soit A sa limite dans

$$\bigcap_{s,t\in\mathbf{Q}} \mathcal{L}(H^s_{K'}(X), H^{s-t}_{loc}(X)) \ ,$$

et soit $\varphi$ une fonction de $\mathcal{D}(X)$ égale à 1 dans un voisinage de K ; alors si $T \in H^s_{loc}(X)$, $\varphi T \in H^s_{K'}(X)$ et

$$AT = \lim . (A_m T) = \lim . (A_m \varphi T) \in H^{s-t}_{loc}(X) \ ;$$

la condition (1) se vérifie non moins facilement, et $\mathcal{M}_K(X\,;m)$ est donc un espace de Fréchet, dont la structure ne dépend d'ailleurs pas du choix de K′, d'après le théorème du graphe fermé.

Enfin, remarquons que pour qu'une suite $(A_k)$, $A_k \in \mathcal{M}_K(X\,;m)$ converge vers A dans $\mathcal{M}_K(X\,;m)$, il suffit que pour tout $s \in \mathbf{Q}$ et tout $t \in \mathbf{Q}$, $t > m$, et toute $T \in H^s_{K'}(X)$, $A_m T$ converge vers AT dans $H^{s-t}_{loc}(X)$. En effet, si tel est le cas, et si $s$ et $t$ sont rationnels, $t > m$, choisissons $s'$ et $t'$ rationnels tels que $s + m - t < s' < s$ et $m < t' < t + s' - s$. Alors si W est une partie bornée de $H^s_{K'}(X)$ W est précompacte (lemme de Rellich) dans $H^{s'}_{K'}(X)$ et d'après le théorème de Banach-Steinhaus, $A_m$ converge vers A sur W, uniformément à valeurs dans $H^{s'-t'}_{loc}(X)$, et a fortiori à valeurs dans $H^{s-t}_{loc}(X)$.

On peut alors démontrer le

LEMME (IV.1). — *Si $t < m$, $\mathcal{M}_K(X\,, t)$ est dense dans*

$$\mathcal{M}_K(X\,;m) \ .$$

D'après la remarque qui précède, il suffit de construire une suite $(\mathrm{R}_k)$ d'opérateurs opérant pour tout $s$ de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$ dans $\mathrm{H}^{s+m-t}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$ et convergeant simplement vers l'opérateur identique de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$, car si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{\mathrm{K}}(\mathrm{X}\ ;\ m)$ la suite (dans $\mathcal{M}_{\mathrm{K}}(\mathrm{X}\ ;\ t)$) de terme général $\mathrm{R}_k\mathrm{A}$ convergera alors vers A. Il suffit en fait de construire, pour tout compact $\mathrm{K}_0$, une suite d'opérateurs de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{K}_0}(\mathrm{X})$ dans $\mathcal{E}(\mathrm{X})$ convergeant simplement vers l'opérateur identique de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{K}_0}(\mathrm{X})$ (et indépendants de $s$), puisque la suite des opérateurs de multiplication par une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathrm{X})$ égales à 1 sur des compacts de X finissant par contenir tout compact donné à l'avance est une suite d'opérateurs de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$ dans $\mathrm{H}^s_{\mathrm{comp}}(\mathrm{X})$ convergeant vers l'identité.

Par choix d'un système fini de cartes, on se ramène alors au problème suivant :

Soient $\mathrm{L}_1$ et $\mathrm{L}_2$ deux compacts de $\mathbf{R}^n$, $\mathrm{L}_1 \subset \mathring{\mathrm{L}}_2$ ; montrer qu'il existe une suite d'opérateurs sur $\mathbf{R}^n$ convergeant simplement pour tout $s$ vers l'application identique de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{L}_1}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathrm{H}^s_{\mathrm{L}_2}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{D}_{\mathrm{L}_2}(\mathbf{R}^n)$.

Or, si $(\alpha_k)$ est la suite standard de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ convergeant vers la distribution de Dirac $\delta$, la suite des opérateurs de convolution associés répond à la question, car

$$\|\alpha_k * \mathrm{T} - \mathrm{T}\|_{\mathrm{H}^s} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\ \hat{\mathrm{T}}(\xi)\ [\hat{\alpha}_k(\xi) - 1]\|_{\mathrm{H}^0}$$

tend vers 0, puisque $\hat{\alpha}_k - 1$ est uniformément bornée et tend vers 0 sur tout compact. (Rappelons qu'on peut supposer

$$\alpha_k(x) = k^n\ \alpha_0(kx)\ ,$$

d'où

$$\alpha_k(\xi) = \hat{\alpha}_0\left(\frac{\xi}{k}\right), \quad \text{avec} \quad \hat{\alpha}_0(0) = \int \alpha_0(x)\,dx = 1)$$

LEMME (IV.2). – *Soient* K *et* K′ *deux compacts de* X, $\mathrm{K} \subset \mathrm{K}'$, $(m_j)_{j \geqslant 0}$ *une suite strictement décroissante de nombres réels tendant vers* $-\infty$, *et pour tout* $j$, *un opérateur* $\mathrm{A}_j \in \mathcal{L}(\mathrm{X}\ ;\ m_j)$ *à bisupport compact dans* K, *c'est-à-dire tel que :*

$$\forall \mathrm{T} \in \mathcal{D}(\mathrm{X}) \ , \ \mathrm{supp.}(\mathrm{A}_j\mathrm{T}) \subset \mathrm{K} \ ,$$

*et* :

$$\forall \mathrm{T} \in \mathcal{D}(\mathrm{X}) \, , \ \mathrm{supp.}(\mathrm{T}) \subset \complement \mathrm{K} \Longrightarrow \mathrm{A}_j\mathrm{T} = 0 \ .$$

*Il existe alors* $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{X} \ ; m_0)$, *à bisupport compact dans* K′, *tel que, quel que soit k,* $\mathrm{A} - \sum_{j \leqslant k-1} \mathrm{A}_j$ *appartienne à* $\mathcal{L}(\mathrm{X} \ ; m_k)$.

En effet, soit, pour tout $k$

$$\mathrm{W}_k = \sum_{j \leqslant k-1} \mathrm{A}_j + \mathcal{M}_{\mathrm{K}}(\mathrm{X} \ ; m_k) \ ,$$

variété linéaire affine dans l'espace des opérateurs de $\mathcal{D}(\mathrm{X})$ dans $\mathcal{E}(\mathrm{X})$, que l'on munit de la métrique de $\mathcal{M}_{\mathrm{K}}(\mathrm{X} \ ; m_k)$ transportée par translation. Les espaces $\mathrm{W}_k$ constituent une suite décroissante d'espaces métriques complets, et d'après le lemme (IV.1) chacun est dense dans le précédent : d'après le théorème de Mittag-Leffler, il existe $\mathrm{B} \in \bigcap_k \mathrm{W}_k$.

Soit $\varphi$ une fonction de $\mathcal{D}_{\mathrm{K}'}(\mathrm{X})$ égale à 1 dans un voisinage de K, nous allons montrer que $\mathrm{A} = (\varphi)\mathrm{B}$ répond à la question. ($(\varphi)$ est ici l'opérateur multiplication par $\varphi$).

La décomposition :

$$\mathrm{A} - \sum_{j \leqslant k-1} \mathrm{A}_j = (\varphi) \left[ \mathrm{B} - \sum_{j \leqslant k} \mathrm{A}_j \right] + (\varphi)\,\mathrm{A}_k + (\varphi - 1) \sum_{j \leqslant k-1} \mathrm{A}_j$$

montre bien que cet opérateur opère, pour tout $s$, de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$ dans $\mathrm{H}^{s-m}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$ (pour le dernier terme, cela résulte du fait que les $\mathrm{A}_j$ sont très réguliers et à bisupport dans K).

Le seul point non évident qu'il reste à établir est le fait que A est très régulier : soit alors $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathrm{X})$, de classe $\mathrm{C}^\infty$ dans un ouvert $\Omega$. On peut écrire $\mathrm{AT} = \mathrm{A}(\varphi\mathrm{T})$, et $\varphi\mathrm{T}$ est une distribution à support compact qui appartient donc à $\mathrm{H}^{s_0}_{\mathrm{comp}}(\mathrm{X})$ pour $s_0$ convenable.

Alors, pour tout $s$, AT est de classe $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}$ dans $\Omega$ puisque si l'on choisit $k$ tel que $s_0 - m_k > s$, alors $\mathrm{AT} - \sum_{j \leqslant k-1} \mathrm{A}_j\mathrm{T}$ appartient à $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$ et $\sum_{j \leqslant k-1} \mathrm{A}_j\mathrm{T}$ est de classe $\mathrm{C}^\infty$ dans $\Omega$, puisque les $\mathrm{A}_j$ sont très réguliers.

*Démonstration de la proposition* (IV.1) bis. – Il s'agit de prouver qu'étant donnée une suite $(A_j)_{j \geqslant 0}$, $A_j \in \mathcal{L}(X\,;\,m_j)$, où $m_j \to -\infty$, il existe $A \in \mathcal{L}(X\,;\,m)$ tel que, quel que soit $k$, $A - \sum_{j \leqslant k-1} A_j$ appartienne à $\mathcal{L}(X\,;\,m_k)$.

Soit alors $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in N}$ une partition $C^\infty$ de l'unité, dénombrable et localement finie, et soit, d'après le lemme (IV.2), pour tout couple $(\lambda\,,\mu) \in N \times N$ un opérateur $A^{\lambda\mu}$ à bisupport compact tel que, pour tout $k$, $A^{\lambda\mu} - \sum_{j \leqslant k-1} (\varphi_\lambda)\, A_j(\varphi_\mu)$ appartienne à $\mathcal{L}(X\,;m_k)$.

Puisque les opérateurs $A_j$ sont très réguliers, on peut supposer $A^{\lambda\mu} = 0$ si les supports de $\varphi_\lambda$ et de $\varphi_\mu$ ne se coupent pas, et par suite, par un argument sur les recouvrements d'un espace paracompact analogue à celui figurant dans la démonstration de la proposition (III.2), on peut supposer que la famille des "bisupports" des opérateurs $A^{\lambda\mu}$ est localement finie.

Alors $A = \sum_{\lambda\,,\mu} A^{\lambda\mu}$ est un opérateur bien défini de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{D}(X)$, et l'on vérifie facilement qu'il répond à la question.

*Remarque.* – En anticipant sur le chapitre suivant, notons que si A est un opérateur tel que, pour tout $m > 0$, il existe un opérateur pseudo-différentiel $B_m$ tel que $A - B_m$ appartienne à $\mathcal{L}(X\,;\,-\,m)$, alors l'opérateur A est un opérateur pseudo-différentiel : ce résultat s'obtient par une légère modification des démonstrations des propositions (IV.1) et (V.4).

Ceci prouve que si $(A_j)$ est une série d'opérateurs pseudo-différentiels convergente au sens de la proposition (IV.1) bis, "sa" somme A est aussi un opérateur pseudo-différentiel.

## CHAPITRE V

## OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS SUR UNE VARIETE DIFFERENTIABLE

Soient $\nu$ une linéarisation de X et $\Omega$ un domaine de $\nu$ (nous renvoyons pour les définitions et les notations au chapitre III).

Quels que soient $x$ et $y$ appartenant à X, l'application linéaire

$$l_x^y : T_x^*(X) \longrightarrow T_y^*(X)$$

définit, en passant à la puissance extérieure n-ième, une application linéaire

$$\Lambda^n\, l_x^y : \Lambda^n\, T_x^*(X) \longrightarrow \Lambda^n\, T_y^*(X)$$

que l'on peut aussi interpréter comme un élément de

$$\Lambda^n\, T_x(X) \otimes \Lambda^n\, T_y^*(X)\ ,$$

et une section $\Lambda^n\, l$ de classe $C^\infty$ du fibré $\Lambda^n\, T(X) \otimes \Lambda^n\, T^*(X)$ au-dessus de $X \times X$ (il s'agit bien sûr ici du produit tensoriel externe).

Au-dessus de $\Omega$, il y a également une section canonique (relativement à $\nu$) du fibré $\Lambda_t^n\, T(X) \otimes \Lambda_t^n\, T^*(X)$, où $\Lambda_t^n\, T(X)$ (resp. $\Lambda_t^n\, T^*(X)$) est l'espace des $n$-vecteurs tordus (resp. $n$-covecteurs tordus), section qui se déduit de la précédente puisqu'une orientation de $\Omega_x$ est définie canoniquement par la donnée d'une orientation de X au point $x$ (en effet, $y \longmapsto \nu(x\,,y)$ définit un difféomorphisme de $\Omega_x$ sur un ouvert de $T_x(X)$).

On désignera la valeur de cette dernière section au point $(x\,,y)$ par la notation

$$\text{dét}\ \frac{\partial \nu(x\,,y)}{\partial y}\ d\xi \otimes dy\ .$$

C'est du reste son expression en coordonnées locales, lorsque des coordonnées locales sont choisies dans des voisinages de $x$ et de $y$ de façon compatible quant à l'orientation définie par la carte

$$\Omega_x \longrightarrow T_x(X)$$

et par n'importe laquelle des deux orientations possibles de $T_x(X)$.

Si $f$ est une fonction localement sommable sur X, à support dans $\Omega_x$, on désignera par

$$d\xi \int_{\Omega_x} f(y) \text{ dét } \frac{\partial \nu(x\,,y)}{\partial y}\, dy$$

l'intégrale sur $\Omega_x$ de $f(y)$ dét $\dfrac{\partial \nu(x\,,y)}{\partial y}\, d\xi \otimes dy$, qui est une forme impaire de degré $n$ sur $\Omega_x$, à valeurs dans l'espace des $n$-vecteurs tordus en $x$ : cette intégrale est un $n$-vecteur tordu en $x$, qui peut donc servir de mesure sur $T_x^*(X)$.

Definition (V.1). – *Soient $\Omega$ un domaine d'une linéarisation $\nu$ de* X, *et $\alpha$ une fonction* $C^\infty$ *sur* X x X, *à support contenu dans $\Omega$, et égale à* 1 *dans un voisinage de la diagonale* $\Delta$ *de* X x X.

*Si* $F \in C^\infty(T^*(X)\ ;\ m)$, *$m$ étant un nombre réel quelconque,* $A = \Theta\,[F\ ;\nu\ ;\alpha]$ *est l'opérateur défini sur* $\mathcal{D}(X)$ *par*

$$(A\varphi)(x) = \int_{T_x^*(X)} F(x\,,\xi)\, d\xi \int_{\Omega_x} \alpha(x\,,y)\,\varphi(y)\, e^{-2i\pi<\nu(x,y),\xi>} \text{ dét } \frac{\partial \nu(x\,,y)}{\partial y}\, dy\ .$$

Notons que la deuxième intégrale joue ici le rôle d'une transformée de Fourier ; elle est définie (au moins) pour toute fonction localement sommable et est une application continue de $T^*(X)$ dans $\Lambda_t^n\, T(X)$, fibrée au-dessus de X : on notera sa valeur en $(x\,,\xi)$ par $(\mathcal{F}\varphi)\ (x\,,\xi)$, la notation $\hat{\varphi}$ étant réservée aux véritables transformées de Fourier sur $\mathbf{R}^n$ ; la "fausse" transformation de Fourier ainsi définie dépend évidemment de $\nu$ et de $\alpha$.

On notera $\nu_x$ le difféomorphisme de $\Omega_x$ sur un ouvert de $T_x(X)$ défini par $\nu_x(y) = \nu(x\,,y)$ et $w_x$ le difféomorphisme réciproque ; $\widetilde{\alpha}(x\,,\eta)$ sera la fonction définie sur $T(X)$ par $\widetilde{\alpha}(x\,,\eta) = \alpha(x\,, w_x\,(\eta))$ si $(x\,,\eta) \in \nu(\Omega)$ et nulle en dehors de $\nu(\Omega)$.

On peut alors écrire aussi

$$(\mathcal{F}\varphi)\,(x\,,\xi) = d\xi \int_{T_x(X)} \widetilde{\alpha}(x\,,\eta)\,\varphi(w_x(\eta))\, e^{-2i\pi<\eta,\xi>}\, d\eta\,.$$

Proposition (V.1). – *Avec les notations de la définition* (V.1), A *opère de* $\mathcal{D}(X)$ *dans* $\mathcal{D}(X)$ *et de* $\mathcal{E}(X)$ *dans* $\mathcal{E}(X)$.

On va montrer que si $s$ et $t$ sont deux entiers tels que

$$s - m - n > t \geqslant 0, s \geqslant 0 ,$$

A opère de $H^s_{\text{comp}}(X)$ dans $C^t_{\text{comp}}(X)$, espace des fonctions de classe $C^t$ à support compact, ce qui montrera le premier point.

Il est tout d'abord clair que si $\varphi$ est à support compact, la projection sur X du support de $\mathcal{F}\varphi$ est relativement compacte, puisque lorsque $y$ varie dans un compact, $\alpha(x , y)$ ne peut être non nul que si $x$ reste dans un compact fixe.

Définissons alors une structure riemannienne sur X par le choix d'un produit scalaire (.|.) sur T*(X), prolongé de façon $\mathbf{C}$-bilinéaire sur le complexifié de T*(X). On a, pour $\xi \neq 0$ :

$$e^{-2i\pi< v(x,y),\xi >} = -\frac{1}{2i\pi\,|\xi|^2}\left(\xi|(l^y_x)^{-1}\, d_y\, e^{-2i\pi< v(x,y),\xi >}\right),$$

d'où, après une intégration par parties (effectuée sur l'espace tangent) :

$$(\mathcal{F}\varphi)(x , \xi) = \frac{1}{2i\pi} d\xi \int_{\Omega_x} e^{-2i\pi<(x,y),\xi >}$$
$$\left(\xi|(l^y_x)^{-1}\, d_y(|\xi|^{-2}\,\alpha(x , y)\,\varphi(y))\right) \text{dét}\, \frac{\partial v(x , y)}{\partial y}\, dy ,$$

ce qui donne, en itérant $s$ fois le procédé,

$$|(\mathcal{F}\varphi)(x , \xi)| \leqslant C\,|\xi|^{-s}\, \|\varphi\|_{H^s} \quad \text{pour } \xi \neq 0 ,$$

et comme on a

$$|(\mathcal{F}\varphi)(x , \xi)| \leqslant C\, \|\varphi\|_{H^o} \quad \text{pour } |\xi| \leqslant 1 ,$$

$$|(A\varphi)(x)| \leqslant C\, \|\varphi\|_{H^o} + C \int_{|\xi|\geqslant 1} |F(x , \xi)|\, |\xi|^{-s}\, \|\varphi\|_{H^s}\, d\xi \leqslant C_1\, \|\varphi\|_{H^s}$$

puisque $s - m - n > 0$ ; enfin, en appliquant un opérateur différentiel P d'ordre $\leqslant t$ à $A\varphi$ écrite sous sa forme initiale, on voit que l'on a encore

$$|(PA\varphi)(x)| \leqslant C\|\varphi\|_{H^s} .$$

Le procédé d'extension de A à l'espace $\mathcal{E}(X)$ a été indiqué dans une remarque suivant la définition (IV.1) bis.

PROPOSITION (V.2). – *Soit* A *l'opérateur défini dans la définition* (V.1), *et soit* $h : \mathrm{Y} \longrightarrow$ *un difféomorphisme.*

*Si* $h^*\mathrm{A}$ *est l'opérateur défini sur* $\mathcal{D}(\mathrm{Y})$ *par* $(h^*\mathrm{A})\varphi = \mathrm{A}(\varphi \circ h^{-1}) \circ h$, *on a* $h^*\mathrm{A} = \Theta[h^*\mathrm{F} ; h^*\nu ; h^*\alpha]$, *avec*

$$(h^*\alpha)(x , y) = \alpha(hx , hy), \; (h^*\nu)(x , y) = dh(x)^{-1} \, \nu(hx , hy) ,$$

*et*

$$(h^*\mathrm{F})(x , \xi) = \mathrm{F}(hx , {}^t dh(x)^{-1} \xi) .$$

En effet,

$$[(h^*\mathrm{A})\varphi](x) = \int_{\mathrm{T}^*_{hx}(\mathrm{X})} \mathrm{F}(x , \xi) \, d\xi \int_{\mathrm{X}} \alpha(hx , z) \varphi(h^{-1} z)$$
$$e^{-2i\pi < \nu(hx,z),\xi >} \, \text{dét} \, \frac{\partial \nu(hx , z)}{\partial z} \, dz$$

expression qui devient, après le changement de variables $z = hy$, $\xi = {}^t dh(x)^{-1} \zeta$ :

$$\int_{\mathrm{T}^*_x(\mathrm{X})} \mathrm{F}(hx , {}^t dh(x)^{-1} \zeta) \, d\zeta \int_{\mathrm{Y}} \alpha(hx , hy) \varphi(y)$$
$$e^{-2i\pi < dh(x)^{-1} \nu(hx,hy),\zeta >} \, \text{dét}(dh(x)^{-1}) \, \text{dét} \, \frac{\partial \nu(hx , hy)}{\partial y} \, dy .$$

DEFINITION (V.2). – *Soit* A *un opérateur linéaire continu de* $\mathcal{D}(\mathrm{X})$ *dans* $\mathcal{E}(\mathrm{X})$. *Soient* $\nu$ *une linéarisation de* X *et* $\alpha$ *une fonction* $\mathrm{C}^\infty$ *sur* $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, *à support dans un domaine de* $\nu$, *égale à* 1 *dans un voisinage de* $\Delta$. *Le symbole de* A *par rapport à* $(\nu , \alpha)$ *est la fonction (de classe* $\mathrm{C}^\infty$*) sur* $\mathrm{T}^*(\mathrm{X})$ *définie par*

$$\sigma(\mathrm{A} ; \nu ; \alpha)(x , \xi) = (x , \xi) = \mathrm{A}_y(\alpha(x , y) \, e^{2i\pi<\nu(x,y),\xi>})(x) ,$$

*la notation* $\mathrm{A}_y$ *signifiant que l'opérateur* A *agit sur la fonction qui suit considérée comme fonction de* $y$, *les autres variables étant fixées.*

PROPOSITION (V.3). – *Soient* $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}^*(\mathrm{X}) ; m)$, $\nu$ *et* $\nu_1$ *deux linéarisations de* X, $\alpha$ *et* $\alpha_1$ *deux fonctions* $\mathrm{C}^\infty$ *sur* $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, *à support dans des domaines respectifs de* $\nu$ *et* $\nu_1$, *égales à* 1 *dans un voisinage de* $\Delta$, *et* $\mathrm{A} = \Theta[\mathrm{F} ; \nu ; \alpha]$. *Alors* $\sigma(\mathrm{A} ; \nu_1 ; \alpha_1)$ *appartient à* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}^*(\mathrm{X}) ; m)$ *et ne dépend pas de* $\alpha$ *ni de* $\alpha_1$ *à un élément de*

$C^\infty(T^*(X)\,;\,-\infty)$ *près. En fait, si* $\psi_x$ *est la fonction définie sur* $\nu_x(\Omega) \subset T_x(X)$ *qui fait passer de* $\nu(x\,,y)$ *à* $\nu_1(x\,,y)$, *on a*

$$\sigma(A\,;\nu_1\,;\alpha_1)(x\,,\xi) \sim \sum_{|r|\geqslant 0} \frac{1}{r!}\,\partial_\xi^r F(x\,,\xi)\, D_\eta^r\,\{e^{2i\pi<\psi_x(\eta)-\eta,\xi>}\}$$

$$(\eta = 0)\,,$$

*et en particulier* $\sigma(A\,;\nu\,;\alpha)(x\,,\xi) \sim F(x\,,\xi)$.

Avant de démontrer cette proposition, remarquons que la somme

$$\sum_{|r|=k} \frac{1}{r!}\,\partial_\xi^r F(x\,,\xi)\, D_\eta^r\,\{e^{2i\pi<\psi_x(\eta)-\eta,\xi>}\}\ (\eta = 0)$$

est bien définie indépendamment du système de coordonnées choisi et appartient à

$$C^\infty(T^*(X)\,;m - [(k+1)/2])$$

$[(k+1)/2]$ désignant la partie entière de $(k+1)/2$ ; en effet

$$D_\eta^r\,\{e^{2i\pi<\psi_x(\eta)-\eta,\xi>}\}\ (\eta = 0)$$

est un polynôme en $\xi$ de degré $\leqslant [|r|/2]$ dont les coefficients sont des fonctions $C^\infty$ de $x$, comme il résulte du fait que $\psi_x(\eta) - \eta$ s'annule ainsi que ses dérivées du premier ordre en $\eta = 0$.

La série est alors convergente au sens de la proposition (IV.1).

Posons alors $\alpha_2(x\,,y) = \alpha(x\,,y)\ \alpha_1(x\,,y)$, fonction dont le support est contenu dans $\Omega \cap \Omega_1$, intersection de domaines de $\nu$ et $\nu_1$ respectivement.

On a :

$$\sigma(A\,;\nu_1\,;\alpha_1)(x\,,\xi) = \int_{T_x^*(X)} F(x\,,\zeta)\,d\zeta \int_{\Omega_x} \alpha_2(x\,,y)$$

$$e^{-2i\pi<\nu(x,y),\zeta>+2i\pi<\nu_1(x,y),\xi>}\,\text{dét}\,\frac{\partial\nu(x\,,y)}{\partial y}\,dy$$

Choisissons une structure riemannienne sur X, et une fonction $\beta$ de classe $C^\infty$ sur $T(X)$, égale à 1 pour $|\eta| \leqslant \frac{1}{2}$ et à 0 pour $|\eta| \geqslant 1$, et posons

$$\gamma(x\,,y\,,\xi) = \beta(x\,,|\xi|^{1/4}\,\nu(x\,,y))\ .$$

On écrit alors $\sigma(A\,;\nu_1\,;\alpha_1) = G_1 + G_2$, avec :

$$G_1(x\,,\xi) = \int_{T_x^*(X)} F(x\,,\zeta)\,d\zeta \int_{\Omega_x} \alpha_2(x\,,y)\,\gamma(x\,,y\,,\xi)$$
$$e^{-2i\pi<\nu(x,y),\zeta> + 2i\pi<\nu_1(x,y),\xi>}\ \text{dét}\ \frac{\partial\nu(x,y)}{\partial y}\,dy,$$

$G_2$ s'obtenant en remplaçant dans cette expression $\gamma$ par $1-\gamma$. Commençons par montrer que $G_2 \in C^\infty(T^*(X)\ ;\ -\infty)$.

Puisque $1-\beta(x\,,\eta) = 0$ pour $|\eta| \leqslant \frac{1}{2}$, on peut écrire, aussi grand que soit l'entier N,

$$1-\beta(x\,,\eta) = |\eta|^{4N}\,\chi(x\,,\eta)\ ,$$

où $\chi$ est une fonction $C^\infty$ sur $T(X)$, d'où

$$1-\gamma(x\,,y\,,\xi) = |\xi|^N\,|\nu(x\,,y)|^{4N}\,\chi(x\,,|\xi|^{1/4}\,\nu(x\,,y))\ ,$$

et après une intégration par parties :

$$G_2(x\,,\xi) = |\xi|^N \sum_{|s|=4N} c_s \int_{T_x^*(X)} \partial_\zeta^s\,F(x\,,\zeta)\,d\zeta \int_{\Omega_x} \alpha_2(x\,,y)$$
$$e^{-2i\pi[<\nu(x,y),\zeta> - <\nu_1(x,y),\xi>]}\ \chi(x\,,|\xi|^{1/4}\,\nu(x\,,y))\,\text{dét}\,\frac{\partial\nu(x\,,y)}{\partial y}\,dy\ ,$$

les $c_s$ étant des coefficients complexes.

Lorsque $(x\,,y)$ appartient au support de $\alpha_2$, le transport de covecteurs $(l_1)_x^y$ qui dérive de la linéarisation $\nu_1$ est inversible. Pour $\xi \neq 0$, on a alors

$$e^{2i\pi<\nu_1(x,y),\xi>} = \frac{1}{2i\pi|\xi|^2}\,(\xi|[(l_1)_x^y]^{-1}\,d_y(e^{2i\pi<\nu_1(x,y),\xi>}))\ ,$$

et après une intégration par parties effectuée au moyen de la carte définie par le difféomorphisme $(\nu_1)_x$, l'intégrale de droite s'écrit :

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{(\nu_1)_x(\Omega_x \cap \Omega_{1,x})} e^{2i\pi<\eta,\xi>}\left(\xi | d_\eta\left(\frac{\overline{\alpha}_2(x,\eta)}{|\xi|^2}\right.\right.$$

$$\left.\left. e^{-2i\pi<\varphi_x^{-1}(\eta),\zeta>}\chi(x, |\xi|^{1/4}\psi_x^{-1}(\eta))\text{ dét } d\psi_x^{-1}(\eta)\right)\right) d\eta$$

avec $\overline{\alpha}_2(x,\eta) = \alpha_2(x, w_x \,.\, \psi_x^{-1}(\eta))$, et se majore par

$$C(1 + |\zeta|^2)^{1/2}\,|\xi|^{-3/4}.$$

En itérant $2N$ fois ce procédé, l'intégrale se majore par

$$C(1 + |\zeta|^2)^N\,|\xi|^{-\frac{3N}{2}}.$$

Par ailleurs, lorsque $x$ varie dans un compact, on a :

$$|\partial_\zeta^s F(x,\zeta)| \leqslant C(1 + |\zeta|^2)^{\frac{m}{2}-2N} \quad \text{pour } |s| = 4N\,,$$

d'où

$$|G_2(x,\xi)| \leqslant C|\xi|^N \int (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}-2N}\,(1 + |\zeta|^2)^N\,|\xi|^{-\frac{3N}{2}}\,d\zeta$$

et

$$|G_2(x,\xi)| \leqslant C\,|\xi|^{-\frac{N}{2}} \quad \text{pour } |\xi| \neq 0 \quad \text{et} \quad m - 2N < -n\,.$$

On voit de même que

$$|D_x^p\,\partial_\xi^q\,G_2(x,\xi)| \leqslant C|\xi|^{-\frac{N}{2}+|p|} \quad \text{si} \quad m - |q| + |p| - 2N < -n\,,$$

ce qui termine l'étude de $G_2$.

$G_1$ s'écrit, après les changements de variables

$$\zeta \longrightarrow \xi + \zeta \quad \text{et} \quad \eta = \nu(x,y)\,,$$

$$G_1(x,\xi) = \int_{T_x^*(X)} F(x, \xi+\zeta)\,d\zeta \int_{T_x(X)} \widetilde{\alpha}_2(x,\eta)\,\beta(x, |\xi|^{1/4}\eta)\, e^{-2i\pi<\eta,\zeta>}\,e^{2i\pi<\psi_x(\eta)-\eta,\xi>}\,d\eta\,,$$

soit en développant $F(x, \xi+\zeta)$ par la formule de Taylor et en remarquant que $\widetilde{\alpha}_2(x,\eta)\,\beta(x, |\xi|^{1/4}\eta) = 1$ dans un voisinage de $\eta = 0$,

$$G_1(x, \xi) = \sum_{|r| \leqslant 2k-1} \frac{1}{r!} \partial_\xi^r F(x, \xi)\, D_\eta^r \{e^{2i\pi < \psi_x(\eta) - \eta, \xi >}\}(\eta = 0) + $$
$$+ R_k(x, \xi),$$

où

$$R_k(x, \xi) = \int [F(x, \xi + \zeta) - \sum_{|r| \leqslant 2k-1} \frac{1}{r!} \partial_\xi^r F(x, \xi)\, \zeta^r]\, d\zeta$$
$$\int \widetilde{\alpha}_2(x, \eta)\, \beta(x, |\xi|^{1/4} \eta)\, e^{-2i\pi < \eta, \zeta >}\, e^{2i\pi < \psi_x(\eta) - \eta, \xi >}\, d\eta .$$

Il s'agit de prouver que quels que soient $p$ et $q$, $D_x^p\, \partial_\xi^q\, R_k(x, \xi)$ est majoré, $x$ restant dans un compact, par telle puissance de $\xi$ que l'on veut, pourvu que $k$ soit assez grand. Mais d'après la formule de Leibniz, une dérivée de $R_k$ est somme d'expressions analogues à celle de $R_k$, mais où F est remplacée par une dérivée de F et $\widetilde{\alpha}_2(x, \eta)$ par un polynôme en $\xi$ et $|\xi|^{1/4}$ dont les coefficients sont des fonctions $C^\infty$ de $(x, \eta)$. Il suffit donc d'obtenir une estimation de $R_k$.

On sépare $R_k$ en deux :

$$R_k^1(x, \xi) = \int_{|\zeta| < \frac{|\xi|}{2}} \quad \text{et} \quad R_k^2(x, \xi) = \int_{|\zeta| > \frac{|\xi|}{2}}$$

Pour simplifier les notations, posons

$$\varphi(x, \xi, \eta) = \widetilde{\alpha}_2(x, \eta)\, \beta(x, |\xi|^{1/4} \eta)\, e^{2i\pi < \psi_x(\eta) - \eta, \xi >},$$

$\hat{\varphi}(x, \xi, \zeta)$ désignant sa transformée de Fourier par rapport à $\eta$, calculée au point $\zeta$. Dans le support de $\beta(x, |\xi|^{1/4} \eta)$, on a

$$|\eta| \leqslant |\xi|^{-1/4},$$

et, $\psi_x(\eta) - \eta$ s'annulant ainsi que ses dérivées premières en $\eta = 0$, une dérivée d'ordre $j$ (par rapport à $\eta$) de $\varphi(x, \xi, \eta)$ est majorée par $C|\xi|^{3j/4}$, où C est une constante indépendante de $\xi$ et de $x$ lorsque ce dernier parcourt un compact.

Ceci prouve que quel que soit $\nu$ entier positif,

$$|\hat{\varphi}(x, \xi, \zeta)| \leqslant C|\zeta|^{-2\nu}\, |\xi|^{3\nu/2} \qquad \text{pour} \qquad \zeta \neq 0 .$$

Pour $|\zeta| > \dfrac{|\xi|}{2}$, on a

$$\left| F(x, \xi + \zeta) - \sum_{|r| \leqslant 2k-1} \frac{1}{r!} \partial_\xi^r F(x, \xi)\, \zeta^r \right| \leqslant C\, |\zeta|^{2k + \sup(m, 0)},$$

et

$$|\zeta|^{-2\nu} \leqslant C\, |\zeta|^{-\frac{\nu}{4}}\, |\xi|^{-\frac{7\nu}{4}}$$

d'où

$$|R_k^2(x\,,\,\xi)| \leqslant C\, |\zeta|^{-\frac{\nu}{4}} \int_{|\xi| > \frac{|\xi|}{2}} |\zeta|^{2k + \sup(m\,,0) - \frac{\nu}{4}}\, d\zeta\,.$$

Pour évaluer $R_k^1$, on écrit, pour $|\zeta| < \dfrac{|\xi|}{2}$ :

$$\left| F(x\,,\,\xi + \zeta) - \sum_{|r| \leqslant 2k-1} \frac{1}{r!} \partial_\xi^r\, F(x\,,\,\xi)\, \zeta^r \right|$$

$$\leqslant 2 \sum_{|r| = 2k} \frac{1}{r!}\, |\partial_\xi^r\, F(x\,,\,\xi + \theta\zeta)|\, |\zeta|^{2k} \leqslant C\, |\xi|^{m-2k}\, |\zeta|^{2k} \quad ,$$

d'où

$$|R_k^1(x\,,\,\xi)| \leqslant C\, |\xi|^{m-2k} \int_{|\zeta| < \frac{|\xi|}{2}} |\zeta|^{2k}\, |\hat{\varphi}(x\,,\,\xi\,,\zeta)|\, d\zeta\,.$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz, l'intégrale se majore par

$$C\, |\xi|^{k + \frac{n}{2}}\, \|\varphi(x\,,\,\xi\,,\,.)\|_{H^k} \leqslant C\, |\xi|^{k + \frac{n}{2} + \frac{3k}{4}}\,,$$

d'où

$$|R_k^1(x\,,\,\xi)| \leqslant C\, |\xi|^{m + \frac{n}{2} - \frac{k}{4}}\,,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition (V.3).

PROPOSITION (V.4). – *Soient* A *un opérateur régularisant* (*c'est-à-dire opérant de* $\mathcal{E}'$(X) *dans* $\mathcal{D}$(X) *et de* $\mathcal{D}'$(X) *dans* $\mathcal{E}$(X)), $\nu$ *une linéarisation de* X *et* $\alpha$ *une fonction* $C^\infty$ *sur* X × X, *à support dans un domaine de* $\nu$, *égale à* 1 *dans un voisinage de* $\Delta$. *Alors*

$$\sigma(A\,;\nu\,;\alpha) \in C^\infty(T^*(X)\ ;\ -\infty)\,.$$

Rappelons que

$$\sigma(A\,;\nu\,;\alpha)\,(x\,,\,\xi) = A_y\, \{\alpha(x\,,\,y)\, e^{2i\pi<\nu(x,y),\xi>}\}\,(x)\,.$$

Les estimations qu'il faut prouver étant de nature locale en $x$, et étant donné que, lorsque $x$ reste dans un compact, $\alpha(x\,,y)$ ne peut être non nul que si $y$ reste dans un compact, on peut, après partition finie de l'unité, supposer que $X = \mathbf{R}^n$. Remarquons aussi que, puisque

$$\partial_\xi^{(j)}\, \sigma(A\,;\nu\,;\alpha)\,(x\,,\xi) = 2\,i\,\pi\, A_y\, \{\alpha(x\,,y)\, \nu_j(x\,,y)\, e^{2\,i\pi<\nu(x,y),\xi>}\}\ (x)$$

et que

$$D_x^{(j)}\, \sigma(A\,;\nu\,;\alpha)\,(x\,,\xi) = [(D^{(j)}\, A)_y\ \{\alpha(x\,,y)\, e^{2\,i\pi<\nu(x,y),\xi>}\}]\ (x) +$$

$$A_y\, \{D_x^{(j)}\, \alpha(x\,,y)\, e^{2\,i\pi<\nu(x,y),\xi>}\}\ (x) +$$

$$\sum_k \xi_k A_y \left\{\alpha(x\,,y)\ \frac{\partial \nu_k(x\,,y)}{\partial x_j}\, e^{2\,i\pi<\nu(x,y),\xi>}\right\}(x)$$

on peut se borner à montrer que, quel que soit l'entier N,

$$|\xi|^N\, \sigma(A\,;\nu\,;\alpha)\,(x\,,\xi)$$

reste borné indépendamment de $\xi$ lorsque $x$ parcourt un compact. Puisque A est régularisant, il suffit de montrer que, dans les conditions données $|\xi|^N\, \alpha(x\,,y)\, e^{2\,i\pi<\nu(x,y),\xi>}$ reste borné dans $\mathcal{D}'_y(X)$, autrement dit que si $\varphi$ reste dans une partie bornée de $\mathcal{D}(X)$, l'intégrale

$$|\xi|^N \int \alpha(x\,,y)\, e^{2\,i\pi<\nu(x,y),\xi>}\, \varphi(y)\, dy$$

reste bornée. En remarquant que

$$\sum_j\, (l_x^y(\xi))_j\, D_y^{(j)}\, (e^{2\,i\pi<\nu(x,y),\xi>}) = e^{2\,i\pi<\nu(x,y),\xi>}\, |l_x^y(\xi)|^2\,,$$

on peut écrire cette intégrale, après intégration par parties, sous la forme

$$|\xi|^N \int e^{2\,i\pi<\nu(x,y),\xi>} \sum_j D_y^{(j)} \left(\frac{\alpha(x\,,y)\,\varphi(y)\,(l_x^y(\xi))_j}{|l_x^y(\xi)|^2}\right) dy\,,$$

et il suffit de répéter l'opération N fois pour obtenir le résultat.

PROPOSITION (V.5). – *Soit* A *un opérateur linéaire continu de* $\mathcal{D}(X)$ *dans* $\mathcal{E}(X)$, *et soient* $\nu$ *et* $\alpha$ *une linéarisation de* X *et une fonction* $C^\infty$ *sur* X x X, *à support dans un domaine de* $\nu$, *égale à* 1 *dans un voisinage de* $\Delta$. *Alors, quelle que soit* $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ :

$$\mathrm{A}_z[(\alpha(x\,,z))^2\,\varphi(z)]\,(x) = \int_{\mathrm{T}_x^*(\mathrm{X})} \sigma(\mathrm{A}\,;\nu\,;\alpha)\,(x\,,\xi)\,d\xi$$

$$\int_{\Omega_x} \alpha(x\,,y)\,\varphi(y)\,e^{-2i\pi<\nu(x,y),\xi>}\,\text{dét}\,\frac{\partial\nu(x\,,y)}{\partial y}\,dy\,.$$

Remarquons tout de suite que si A se prolonge de $\mathcal{D}'(\mathrm{X})$ dans $\mathcal{D}'(\mathrm{X})$, de $\mathcal{E}'(\mathrm{X})$ dans $\mathcal{E}'(\mathrm{X})$, de $\mathcal{E}(\mathrm{X})$ dans $\mathcal{E}(\mathrm{X})$ et est très régulier, alors l'opérateur B défini par

$$(\mathrm{B}\varphi)\,(x) = \mathrm{A}_z[(\alpha(x\,,y))^2\,\varphi(z)]\,(x)$$

diffère de A par un opérateur régularisant.

Démontrons maintenant la proposition (V.5) ; la transformée de Fourier de la fonction

$$\eta \longmapsto \alpha(x\,,w_x(\eta))\,\varphi(w_x(\eta))$$

où $w_x = \nu_x^{-1}$, est égale à

$$d\xi \int_{\Omega_x} \alpha(x\,,y)\,e^{-2i\pi<\nu(x,y),\xi>}\,\text{dét}\,\frac{\partial\nu(x\,,y)}{\partial y}\,dy\,.$$

On peut donc écrire

$$\alpha(x\,,w_x(\eta))\,\varphi(w_x(\eta)) = \int e^{2i\pi<\eta,\xi>}\,d\xi \int \alpha(x\,,y)\,\varphi(y)$$

$$e^{-2i\pi<\nu(x,y),\xi>}\,\text{dét}\,\frac{\partial\nu(x\,,y)}{\partial y}\,dy\,,$$

et

$$(\alpha(x\,,z))^2\,\varphi(z) = \int \alpha(x\,,z)\,e^{2i\pi<\nu(x,z),\xi>}\,d\xi \int \alpha(x\,,y)\,\varphi(y)$$

$$e^{-2i\pi<\nu(x,z),\xi>}\,\text{dét}\,\frac{\partial\nu(x\,,y)}{\partial y}\,dy\,.$$

Pour $x$ fixé, la fonction

$$\xi \longmapsto \alpha(x\,,z)\,e^{2i\pi<\nu(x,z),\xi>}\,d\xi \int \alpha(x\,,y)\,\varphi(y)$$

$$e^{-2i\pi<\nu(x,y),\xi>}\,\text{dét}\,\frac{\partial\nu(x\,,y)}{\partial y}\,dy\,.$$

définie sur $T_x^*(X)$ et à valeurs dans $\mathcal{O}_z \otimes \Lambda_t^n T_x(X)$ est sommable, ce qui permet d'appliquer l'opérateur $A_z$ à l'intérieur du premier signe d'intégration et d'obtenir la formule indiquée.

PROPOSITION (V.6). – *Soit* X *une variété réelle de classe* $C^\infty$ *dénombrable à l'infini. Alors, si* $F \in C^\infty(T^*(X)\,; m)$,

$$\Theta\,[F\,; \nu\,; \alpha] \in \mathcal{L}(X\,; m)\ .$$

Il suffit de prouver qu'il en est ainsi pour un opérateur

$$A = (\psi_1)\,\Theta\,[F\,; \nu\,; \alpha]\,(\psi_2)\ ,$$

où la réunion des supports compacts de $\psi_1$ et $\psi_2$ admet un voisinage ouvert Y (non nécessairement connexe) domaine d'un système de coordonnées. L'opérateur A, qui est à bisupport compact dans Y, admet une restriction $A_Y$ et il s'agit de montrer que $A_Y \in \mathcal{L}(X\,; m)$.

La restriction $\nu_Y$ de $\nu$ à Y est bien sûr une linéarisation de Y : soit $\Omega_Y$ un domaine de $\nu_Y$, que l'on peut supposer contenu dans $\Omega \cap (Y \times Y)$, et soit $\beta$ une fonction $C^\infty$ sur $Y \times Y$, à support dans $\Omega_Y$, égale à 1 sur $\Delta_Y$. Puis soient K un voisinage compact (contenu dans Y) de la réunion des supports de $\psi_1$ et $\psi_2$, L un voisinage compact de K, et enfin $\lambda$ et $\mu$ deux fonctions $C^\infty$ sur $Y \times Y$, à supports contenus respectivement dans $\mathring{L} \times \mathring{L}$, et $Y \times Y - K \times K$, telles que $\lambda + \mu = 1$. Alors la fonction (sur $Y \times Y$) :

$$\alpha_1(x\,, y) = \lambda(x\,, y)\,\alpha(x\,, y) + \mu(x\,, y)\,\beta(x\,, y)$$

est égale à 1 dans un voisinage de $\Delta_Y$, a son support contenu dans $(\Omega \cap (\mathring{L} \times \mathring{L})) \cup \Omega_Y$, qui est un domaine de $\nu_Y$, et coïncide avec $\alpha$ sur $\operatorname{supp}(\psi_1) \times \operatorname{supp}(\psi_2)$, et l'on peut écrire

$$A_Y = (\psi_1)\,\Theta\,[F_Y\,; \nu_Y\,; \alpha_1]\,(\psi_2)\ .$$

On peut alors, par la proposition (V.2), se ramener au cas où Y est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Soit alors $\alpha_2$ une fonction $C^\infty$ sur $Y \times Y$, égale à 1 sur un voisinage de $(\operatorname{supp}(\psi_1) \times \operatorname{supp}(\psi_2)) \cup \Delta_Y$, à support dans un domaine de la linéarisation euclidienne $\nu_0$ de Y (on vient de voir comment construire une telle fonction).

Soit B l'opérateur $\Theta\,[F_Y\,; \nu_Y\,; \alpha_1]$.

D'après la proposition (V.3), le symbole $\sigma(\mathrm{B}\ ;\nu_0\ ;\alpha_2)$ appartient à $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}^*(\mathrm{Y})\ ; m)$, et d'après la proposition (V.5) l'opérateur

$$\Theta\,[\sigma(\mathrm{B}\ ;\nu_0\ ;\alpha_2)\ ;\nu_0\ ;\alpha_2]$$

n'est autre que l'opérateur C défini par

$$(\mathrm{C}\varphi)\,(x) = \mathrm{B}_y((\alpha_2(x\,,y))^2\,\varphi(y))\,(x)\ .$$

D'autre part, d'après les propriétés du support de $\alpha_2$, on a

$$\mathrm{A}_\mathrm{Y} = (\varphi_1)\,\mathrm{B}(\psi_2) = (\psi_1)\,\mathrm{C}(\psi_2)\ .$$

Si l'on pose $\mathrm{G}(x\,,\xi) = \psi_1(x)\,\sigma(\mathrm{B}\ ;\nu_0\ ;\alpha_2)\,(x\,,\xi)$ et si l'on définit l'opérateur D par

$$(\mathrm{D}\varphi)\,(x) = \int \mathrm{G}(x\,,\xi)\,d\xi \int \psi_2(y)\,e^{-2i\pi<y-x,\xi>}\,\varphi(y)\,dy\ ,$$

on peut écrire

$$[(\psi_1)\,\mathrm{C}(\varphi)]\,(\varphi)\,(x) = \mathrm{D}_y\,[\alpha_2(x\,,y)\,\varphi(y)]\,(x)$$

et il reste alors à prouver que D opère, pour tout $s$ réel, de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{comp}}(\mathrm{Y})$ dans $\mathrm{H}^{s-m}_{\mathrm{comp}}(\mathrm{Y})$ et est très régulier.

Or

$$\widehat{\mathrm{D}\varphi}\,(\xi) = \int \hat{\mathrm{G}}^1(\xi - \eta\,,\eta)\,\widehat{\psi_2\varphi}(\eta)\,d\eta\ ,$$

$\mathrm{G}^1$ désignant la transformée de Fourier partielle de G par rapport à $x$.

Pour tout polynôme P, il existe $\mathrm{C} > 0$ telle que

$$|\mathrm{P}(\mathrm{D}_x)\,\mathrm{G}(x\,,\xi)| \leqslant \mathrm{C}(1 + |\xi|^2)^{m/2}$$

d'où

$$|\mathrm{P}(\xi)\,\hat{\mathrm{G}}^1(\xi\,,\eta)| \leqslant \mathrm{C}\,(1 + |\eta|^2)^{m/2}\ .$$

Par ailleurs

$$\|\mathrm{D}\varphi\|_{\mathrm{H}^{s-m}} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s-m}{2}} \int \hat{\mathrm{G}}^1(\xi - \eta\,,\eta)\,\widehat{\psi_2\varphi}(\eta)\,d\eta\|_{\mathrm{L}^2}\ ,$$

et en utilisant la majoration triviale

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s-m}{2}} \leqslant \mathrm{C}\,(1 + |\eta|^2)^{\frac{s-m}{2}}\,(1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{|s-m|}{2}}$$

on obtient, avec $k$ arbitrairement grand :

$$(1+|\xi|^{2})^{\frac{s-m}{2}}\left|\int \hat{G}^1(\xi-\eta,\eta)\,\widehat{\psi_2\varphi}(\eta)\,d\eta\right| \leqslant C\int (1+|\eta|^2)^{\frac{s-m}{2}}$$

$$(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s-m|}{2}-k}\,(1+|\eta|^2)^{\frac{m}{2}}\,|\widehat{\psi_2\varphi}(\eta)|\,d\eta\ ,$$

d'où

$$\|D\varphi\|_{H^{s-m}} \leqslant C\,\|(1+|\xi|^2)^{\frac{|s-m|}{2}-k}\|_{L^1}\,\|\psi_2\varphi\|_{H^s}$$

d'après l'inégalité d'Young.

Ceci prouve que D opère pour tout $s$ de $H^s_{\mathrm{comp}}(Y)$ dans $H^{s-m}_{\mathrm{comp}}(Y)$. Le fait que D est très régulier résulte alors de ce que le noyau de D est la distribution $\hat{G}^2(x\,,y-x)\ \psi_2(y)$, laquelle est une fonction $C^\infty$ en dehors de la diagonale de $Y\times Y$ : en effet, quels que soient $k$ et $p$, $|z|^{2k}\,D_z^p\,\hat{G}^2(x\,,z)$ est (à un coefficient près) la transformée de Fourier de $\Delta^k(\xi^p G(x,\xi))$, où $\Delta$ est le laplacien, et est donc continue pour $k$ assez grand, $p$ étant donné.

On peut résumer les résultats obtenus dans le théorème suivant où $(\nu\,,\alpha)$ désigne toujours le couple constitué par une linéarisation $\nu$ de X et une fonction $\alpha$ de classe $C^\infty$ sur $X\times X$, à support dans un domaine de $\nu$, égale à 1 dans un voisinage de $\Delta$, et où l'on entend par opérateur très régulier un opérateur se prolongeant de $\mathcal{D}'(X)$ dans $\mathcal{D}'(X)$, de $\mathcal{E}'(X)$ dans $\mathcal{E}'(X)$, de $\mathcal{E}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$, et n'augmentant pas le support singulier.

THEOREME (V.7).

1) *Soit* A *un opérateur linéaire continu de* $\mathcal{D}(X)$ *dans* $\mathcal{D}(X)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *il existe* $(\nu\,,\alpha)$ *tel que* $\sigma(A\,;\nu\,;\alpha)\in C^\infty(T^*(X)\,;m)$ *et* A *est très régulier.*

b) *quel que soit* $(\nu\,,\alpha)$, $\sigma(A\,;\nu\,;\alpha)\in C^\infty(T^*(X)\,;m)$, *et* A *est très régulier.*

c) *il existe* $(\nu\,,\alpha)$ *et* $F\in C^\infty(T^*(X)\,;m)$ *tels que* $A-\Theta\,[F\,;\nu\,;\alpha]$ *soit un opérateur régularisant.*

d) *quel que soit* $(\nu\,,\alpha)$, *il existe* $F\in C^\infty(T^*(X)\,;m)$ *tel que* $A-\Theta\,[F\,;\nu\,;\alpha]$ *soit un opérateur régularisant.*

*On désignera par* PSD(X ; $m$) *l'espace des opérateurs* A *vérifiant ces conditions équivalentes, et ces opérateurs seront appelés opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m.*

2) PSD(X ; $m$) $\subset \mathscr{L}$(X ; $m$).

3) $(\nu, \alpha)$ *étant donné,* $\Theta[.;\nu;\alpha]$ *et* $\sigma(.;\nu;\alpha)$ *définissent par passage aux quotients deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre entre*

$$C^\infty(T^*(X);m)/C^\infty(T^*(X);-\infty) \quad \text{et} \quad \mathrm{PSD}(X;m)/\mathscr{L}(X;-\infty),$$

*et ces isomorphismes ne dépendent pas de* $\alpha$.

Montrons que

$$\begin{tikzcd} & & & \text{d)} & \\ \text{d)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{c)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{b)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ & & & \text{a)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{c)} \end{tikzcd}$$

d) $\Longrightarrow$ c) et b) $\Longrightarrow$ a) sont triviales.

c) $\Longrightarrow$ b) résulte des propositions (V.3), (V.4) et (V.6).

b) $\Longrightarrow$ d) et a) $\Longrightarrow$ c) résultent de la proposition (V.5) et de la remarque qui en précède la démonstration.

2) résulte de la définition c) et de la proposition (V.6).

Enfin démontrons 3) :

– le fait que $\Theta[.;\nu;\alpha]$ et $\sigma(.;\nu;\alpha)$ passent aux quotients résulte respectivement de la proposition (V.6) et de la proposition (V.4) ; notons, pour un usage immédiat, $\hat{\sigma}(.;\nu;\alpha)$ et $\hat{\Theta}[.;\nu;\alpha]$ les applications ainsi obtenues après passage aux quotients.

– le fait que $\hat{\sigma}(.;\nu;\alpha) \circ \hat{\Theta}[.;\nu;\alpha]$ est l'identité résulte de la proposition (V.3).

– le fait que $\hat{\Theta}[.;\nu;\alpha] \circ \hat{\sigma}(.;\nu;\alpha)$ est l'identité résulte de la proposition (V.5) et du fait que les opérateurs pseudo-différentiels sont très réguliers.

– le fait que $\hat{\Theta}[.;\nu;\alpha]$ ne dépend pas de $\alpha$ résulte de ce que les opérateurs considérés sont très réguliers et de la remarque qui précède la démonstration de la proposition (V.5).

– le fait que $\hat{\sigma}(.;\nu;\alpha)$ ne dépend pas de $\alpha$ résulte des propositions (V.3) et (V.4).

*Remarque.* – La dépendance du symbole d'un opérateur pseudo-différentiel à l'égard de la linéarisation à laquelle ce symbole est exprimé est donnée par la proposition (V.3).

Par ailleurs, notons qu'un opérateur pseudo-différentiel qui appartient à $\mathcal{L}(X\,; m)$ n'est pas nécessairement un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m$ (lesquels seraient donc mieux désignés sous le nom d'opérateurs pseudo-différentiels-d'ordre $m$) ; en revanche, pour les opérateurs pseudo-différentiels dont les symboles sont sommes de séries de symboles homogènes de ***degrés indépendants de** $x$*, les deux définitions de l'ordre coïncident.

## CHAPITRE VI

## EXTENSION AUX FIBRES. COMPOSITION. TRANSPOSITION

PROPOSITION (VI.1). – *Soient* E *un fibré vectoriel (réel ou complexe) sur* X, $\pi$ *la projection canonique* $E \longrightarrow X$. *Il existe une application* $\tau$ *de classe* $C^\infty$ : $X \times E \longrightarrow E$, *telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \times E \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

*soit commutatif, et vérifiant en outre les conditions suivantes :*

i) *quels que soient* $x$ *et* $y \in X$, *l'application* $\tau_x^y : E_x \longrightarrow E_y$ *définie par* $\tau_x^y(e) = \tau(y, e)$ *est linéaire.*

ii) *quel que soit* $x \in X$, $\tau_x^x$ *est l'application identique de* $E_x$. *On appellera une telle application* $\tau$ *un transport local de* E. *Si* $\tau$ *est un transport local de* E, *il existe un voisinage ouvert* $\Omega$ *de* $\Delta$, *diagonale de* $X \times X$, *tel que* $\tau_x^y$ *soit inversible pour tout* $(x, y) \in \Omega$ : *on dira dans ces conditions que* $\Omega$ *est un domaine de* $\tau$.

Il existe une famille $(\varphi_k)$ de fonctions $C^\infty$ à support compact subordonnée à un recouvrement ouvert localement fini $(\mathcal{U}_k)$ de X telle que $\Sigma\varphi_k^2 = 1$ et que E soit trivial au-dessus de chaque $\mathcal{U}_k$. On a de façon évidente un transport (global) $\tau_k$ de $E|_{\mathcal{U}_k}$. On définit alors $\tau$ par

$$\tau_x^y(e) = \Sigma\varphi_k(x)\varphi_k(y)\,(\tau_k)_x^y(e) \qquad \text{pour} \qquad e \in E_x \ ,$$

la somme étant étendue à l'ensemble des indices $k$ tels que $(x, y)$ appartienne à $\mathcal{U}_k \times \mathcal{U}_k$.

Il est clair que $\tau$, ainsi définie, est bien un transport local de E. En vertu de la condition ii), il existe pour tout $x \in X$ un voisinage ouvert $V_x$ de $x$ tel que $\tau_y^z$ soit inversible pour tout $(y, z) \in V_x \times V_x$ : alors la réunion des $V_x \times V_x$ est un domaine de $\tau$.

Si E est un fibré vectoriel complexe sur X, on définit sans peine les espaces de sections $\mathcal{D}(X ; E)$, $\mathcal{E}'(X ; E)$, $\mathcal{E}'(X ; E)$, $\mathcal{D}'(H ; E)$, $H^s_{comp}(X ; E)$ et $H^s_{loc}(X ; E)$.

D'où une définition évidente, si $E^1$ et $E^2$ sont deux fibrés vectoriels complexes sur X, de l'espace $\mathcal{L}(X\,; E^1\,; E^2\,; m)$ des opérateurs de $\mathcal{D}(X\,; E^1)$ dans $\mathcal{D}(X\,; E^2)$ possédant des propriétés analogues à celles de la définition (IV.1) bis.

Soit $\mathcal{L}(E^1, E^2)$ le fibré des applications linéaires des fibres de $E^1$ dans les fibres de $E^2$. Si F est une application $C^\infty$ de $T^*(X)$ dans $\mathcal{L}(E^1, E^2)$ fibrée au-dessus de X, F s'écrit localement, moyennant une trivialisation locale de $\mathcal{L}(E^1, E^2)$, comme un système de fonctions numériques sur $T^*(X)$ ; on dira que

$$F \in C^\infty_X(T^*(X)\,; \mathcal{L}(E^1, E^2)\,; m)$$

si toutes les composantes de F ainsi définies appartiennent à $C^\infty(T^*(X)\,; m)$ : cette définition ne dépend pas des trivialisations locales de $\mathcal{L}(E^1, E^2)$ choisies, et est équivalente au fait que pour toute section $(e^1_x)$ de $E^1$ et toute section $(e^2_x)^*$ du dual de $E^2$, la fonction

$$< (e^2_x)^*, F(x, \xi)\, e^1_x >$$

appartient à $C^\infty(T^*(X)\,; m)$.

Les propositions (IV.1) et (IV.1) bis s'étendent avec des modifications triviales, aussi bien dans les énoncés que dans les démonstrations.

Si $\nu$ est une linéarisation de X, $\tau$ un transport local de $E^1$, $\Omega$ un domaine commun de $\nu$ et de $\tau$, $\alpha$ une fonction $C^\infty$ sur $X \times X$, à support dans $\Omega$, égale à 1 dans un voisinage de $\Delta$, et enfin F un élément de $C^\infty_X(T^*(X)\,; \mathcal{L}(E^1, E^2)\,; m)$, on définit un opérateur A de $\mathcal{D}(X\,; E^1)$ dans $\mathcal{D}(X\,; E^2)$, noté $A = \Theta[F\,; \nu\,; \tau\,; \alpha]$, en posant

$$A(\varphi)(x) = \int_{T^*_x(X)} F(x, \xi)\, d\xi \int_{\Omega_x} \alpha(x, y)\, (\tau^y_x)^{-1}\, \varphi(y)$$

$$e^{-2i\pi<\nu(x,y),\xi>}\, \text{dét}\, \frac{\partial\nu(x, y)}{\partial y}\, dy\,.$$

Par ailleurs, $\nu$, $\tau$ et $\alpha$ vérifiant les mêmes conditions, on définit le symbole $\sigma(A\,; \nu\,; \tau\,; \alpha)$ d'un opérateur A de $\mathcal{D}(X\,; E^1)$ dans

$$\mathcal{E}(X\,; E^2)\,,$$

qui est une application $C^\infty$ de $T^*(X)$ dans $\mathcal{L}(E^1, E^2)$, fibrée au-dessus de X, en posant, pour $e^1_x$ appartenant à $E^1_x$ :

$$\sigma(A\,;\nu\,;\tau\,;\alpha)\,(x\,,\xi)\,(e_x^1) = A_y\,\{\alpha(x\,,y)\,(\tau_x^y)\,(e_x^1)\,e^{2i\pi<\nu(x,y),\xi>}\}\,(x)$$

On a la proposition suivante, qui est pour les changements de transports locaux de $E^1$, l'analogue de ce qu'était la proposition (V.3) pour les changements de linéarisation :

PROPOSITION (VI.2). – *Soient* $F \in C_X^\infty(T^*(X)\,;\mathcal{L}(E^1\,,E^2)\,;\rho)$, $\nu_1$ *une linéarisation de* X, $\tau$ *et* $\tau_1$ *deux transports locaux de* $E^1$, $\alpha$ *et* $\alpha_1$ *deux fonctions* $C^\infty$ *sur* X × X, *à supports contenus dans des domaines* $\Omega$ *et* $\Omega_1$ *de* $\tau$ *et* $\tau_1$ *respectivement, mais tous deux dans un domaine de* $\nu$, *et* $A = \Theta[F\,;\nu\,;\alpha]$. *Alors*

$$\sigma(A\,;\nu\,;\tau_1\,;\alpha_1) \in C_X^\infty(T^*(X)\,;\mathcal{L}(E^1\,,E^2)\,;m)\,.$$

*Si l'on définit, pour* $(x\,,y) \in \Omega \cap \Omega_1$ :

$$\chi(x\,,y) = \widetilde{\chi}_x(\nu(x\,,y)) = (\tau_x^y)^{-1}\,(\tau_1)_x^y\,,$$

*automorphisme de* $E_x^1$, *on peut écrire :*

$$\sigma(A\,;\nu\,;\tau_1\,;\alpha_1)\,(x\,,\xi) \sim \sum_{|r|\geq 0} \frac{1}{r!}\,\partial_\xi^r F(x\,,\xi)\,D_\eta^r\,(\widetilde{\chi}_x(\eta))\quad(\eta = 0)\,.$$

En effet, en posant $\alpha_2(x\,,y) = \alpha(x\,,y)\,\alpha_1(x\,,y)$ et après le changement de variable $\zeta \longmapsto \xi + \zeta$, $\sigma(A\,;\nu\,;\tau_1\,;\alpha_1)\,(x\,,\xi)\,(e_x^1)$ s'écrit :

$$\int_{T_x^*(X)} F(x\,,\xi+\zeta)\,d\zeta \int \alpha_2(x\,,y)\,\chi(x\,,y)\,(e_x^1)\,e^{-2i\pi<\nu(x,y),\zeta>}$$

$$\text{dét}\,\frac{\partial\nu(x\,,y)}{y}\,dy = \int_{T_x^*(X)} F(x\,,\xi+\zeta)\,d\zeta \int_{T_x(X)} \widetilde{\alpha}_2(x\,,\eta)\,\widetilde{\chi}_x(\eta)\,(e_x^1)\,e^{-2i\pi<\eta,\zeta>}\,d\eta\,.$$

En posant $\varphi(x\,,\eta) = \widetilde{\alpha}_2(x\,,\eta)\,\widetilde{\chi}_x(\eta)\,(e_x^1)$ et en appelant $\hat{\varphi}(x\,,\zeta)$ la transformée de Fourier de $\varphi$ par rapport à $\eta$, calculée au point $\zeta$, on peut écrire, en tenant compte du fait que $\widetilde{\alpha}_2(x\,,\eta) = 1$ pour $\eta$ voisin de 0 :

$$\sigma(A\,;\nu\,;\tau_1\,;\alpha_1)\,(x\,,\xi)\,(e_x^1) =$$

$$\sum_{|r|\geq 0} \frac{1}{r!}\,\partial_\xi^r\,F(x\,,\xi)\,D_\eta^r\{\widetilde{\chi}_x(\eta)e_x^1\}\,(\eta = 0) + R_k(x\,,\xi)\,(e_x^1)$$

$$R_k(x, \xi)(e_x^1) = \int_{T_x^*(X)} [F(x, \xi + \zeta) - \sum_{|r| \geqslant 0} \frac{1}{r!} \partial_\xi^r F(x, \xi) \zeta^r] \hat{\varphi}(x, \zeta) \, d\zeta \, .$$

On sépare alors l'intégrale en deux

$$R_k^1(x, \xi)(e_x^1) = \int_{|\zeta| > \frac{|\xi|}{2}} \quad \text{et} \quad R_k^2(x, \xi)(e_x^1) = \int_{|\zeta| < \frac{|\xi|}{2}} ,$$

et les estimations sont alors analogues à celles qui terminent la démonstration de la proposition (V.3) (quoique beaucoup plus simples, $\varphi(x, \eta)$ restant bornée ainsi que toutes ses dérivées par rapport à $\eta$ lorsque $x$ parcourt un compact et que $(e_x^1)$ est une section $C^\infty$ de $E^1$).

La proposition (V.4) s'étend ; par ailleurs, si A est un opérateur de $\mathcal{D}(X ; E^1)$ dans $\mathcal{E}(X ; E^2)$ dont le symbole $F = \sigma(A ; \nu ; \tau ; \alpha)$ appartient à $C_X^\infty(T^*(X) ; \mathcal{L}(E^1, E^2) ; m)$, on peut encore écrire :

$$A_y \, \{\alpha(x, y)^2 \varphi(y)\} (x) = \Theta[F ; \nu ; \tau ; \alpha] \, ,$$

par une démonstration identique à celle de la proposition (V.5).

D'autre part, si $E^1$ et $E^2$ sont deux fibrés triviaux sur X, si

$$\omega^1 : E^1 \longrightarrow X \times C^k \quad \text{et} \quad \omega^2 : E^2 \longrightarrow X \times C^l$$

sont deux trivialisations de $E^1$ et $E^2$ respectivement, si pour tout $x \in X$, $\omega_x^1 : E_x^1 \longrightarrow C^k$ est l'application linéaire définie par

$$(x, \omega_x^1(e)) = \omega^1(e) \, ,$$

si l'on a une définition analogue pour $\omega_x^2$, et si enfin $\tau$ est le transport local de $E^1$ défini par

$$\tau_x^y = (\omega_y^1)^{-1} \circ \omega_x^1 \, ,$$

alors, avec les notations usuelles,

$$A = \Theta[F ; \nu ; \tau ; \alpha] \in \mathcal{L}(X ; E^1 ; E^2 ; m) \, .$$

En effet, à l'opérateur A est associé l'opérateur

$$\widetilde{A} : \mathcal{D}(X ; C^k) \longrightarrow \mathcal{D}(X ; C^l)$$

au moyen de la définition

$$(\widetilde{A}\varphi)(x) = \omega_x^2 \, A_y \{(\omega_y^1)^{-1} \varphi(y)\} (x) ,$$

et on voit immédiatement que $\widetilde{A}$ n'est autre que l'opérateur

$$\Theta[\widetilde{F}(x , \xi) ; \nu ; \tau_0 ; \alpha] ,$$

$\tau_0$ étant le transport canonique du fibré trivial $C^k$, avec

$$\widetilde{F}(x , \xi) = \omega_x^2 \, F(x , \xi) \, (\omega_x^1)^{-1} .$$

Il en résulte que $\widetilde{A}$ appartient à $\mathrm{PSD}(X ; m) \otimes \mathcal{L}(C^k ; C^l)$. Dans le cas général ($E^1$ et $E^2$ n'étant plus supposés triviaux), on peut toujours, par la méthode de la proposition (V.6), écrire un opérateur $A = \Theta [F ; \nu ; \tau ; \alpha]$ comme somme d'opérateurs $(\psi_1) \, B(\psi_2)$, où B est un opérateur du même type sur un ouvert Y au-dessus duquel $E^1$ et $E^2$ sont triviaux, et lorsque $F_Y$ décrit

$$C_Y^\infty(T^*(Y) ; \mathcal{L}(E^1 , E^2) ; m)$$

$\nu$ et $\tau$ étant donnés, $\widetilde{B}$ peut être (à un opérateur régularisant près) n'importe quel opérateur de $\mathrm{PSD}\,(Y ; m) \otimes \mathcal{L}(C^k ; C^l)$.

D'où un analogue du théorème (V.7), que nous n'énoncerons pas, et une définition, également évidente de l'espace

$$\mathrm{PSD}(X ; E^1 ; E^2 ; m) .$$

THEOREME (VII.3). – *Soient $\nu$ une linéarisation localement affine de X, $E^1$, $E^2$ et $E^3$ trois fibrés vectoriels complexes sur X, $\tau^1$ et $\tau^2$ deux transports locaux de $E^1$ et $E^2$ respectivement, $\alpha$ une fonction $C^\infty$ sur X × X, à support dans un domaine de $\nu$, de $\tau^1$ et de $\tau^2$, égale à 1 dans un voisinage de $\Delta$, et enfin $F_1 \in C_X^\infty(T^*(X) ; \mathcal{L}(E^1 , E^2) \; m_1)$ et $F_2 \in C_X^\infty(T^*(X) ; \mathcal{L}(E^2 , E^3) ; m_2)$.*

*Posons*

$$A_1 = \Theta [F_1 ; \nu ; \tau^1 ; \alpha] \quad \text{et} \quad A_2 = \Theta [F_2 ; \nu ; \tau^2 ; \alpha] .$$

*Alors, si l'on suppose que $\tau^1$ est tel qu'il existe un voisinage $\Omega$ de $\Delta$ tel que si $(x_1 , x_2)$ et $(x_2 , x_3)$ appartiennent à $\Omega$ on a*

$$(\tau^1)_{x_1}^{x_3} = (\tau^1)_{x_2}^{x_3} \, (\tau^1)_{x_1}^{x_2} ,$$

$A_2 A_1$ *appartient à* $\mathrm{PSD}(X ; E^1 ; E^3 ; m_1 + m_2)$ *et*

$$\sigma(A_2\, A_1\ ;\nu\ ;\tau^1\ ;\alpha)\,(x\,,\xi) \sim \sum_{|r|\geqslant 0} \frac{1}{r\,!}\ \partial_\xi^r\, F_2(x\,,\xi)$$

$$D_\eta^r\{\,[(\tau^2)_x^{w_x(\eta)}]^{-1} \circ F_1(w_x(\eta),\ l_x^{w_x(\eta)}\ \xi) \circ (\tau^1)_x^{w_x(\eta)}\}\ (\eta=0)$$

Pour alléger les notations, nous ne ferons la démonstration que dans le cas où $E_1 = E_2 = E_3 = C$ (les transports $\tau^1$ et $\tau^2$ étant l'identité).

$A_1$, $A_2$ et $A_2\, A_1$ sont très réguliers. On ne modifie pas $A_1$ à un opérateur régularisant près, en le remplaçant par

$$A_1' = \Theta\,[F_1\ ;\nu\ ;\alpha_1]\ ,$$

où l'on peut supposer que le support de $\alpha_1$ est contenu dans un domaine $\Omega$ de $\nu$ symétrique, à coupes connexes et tel que $(x_1\ ,x_2) \in \Omega$ et $(x_2\,,x_3) \in \Omega$ entraînant $l_{x_1}^{x_3} = l_{x_2}^{x_3}\, l_{x_1}^{x_2}$. Puis l'on peut remplacer $A_2$ par

$$A_2' = \Theta\,[F_2\ ;\nu\ ;\alpha_2]\ ,$$

où le support de $\alpha_2$ est tel que les conditions

$$\alpha_2(x\,,y) \neq 0 \text{ et } \alpha_2(x\,,z) \neq 0$$

entraînent $\alpha_1(y\,,z) = 1$ (d'où il résulte que

$$\alpha_2(x\,,y)\ \alpha_2(x\,,z)\ \alpha_1(y\,,z) = \alpha_2(x\,,y)\ \alpha_2(x\,,z)\,)\ .$$

Enfin, $A_2'\, A_1'$ est équivalent à B, défini, pour $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, par

$$(B\varphi)\,(x) = (A_2'\, A_1')_z\,\{\alpha_2(x\,,z)\ \varphi(z)\}\,(x)\ ,$$

soit :

$$(B\varphi)\,(x) = \int_{T_x^*(X)} F_2(x\,,\zeta)\ d\zeta \int \alpha_2(x\,,y)\ e^{-2i\pi<\nu(x,y),\zeta>}$$

$$\text{dét}\ \frac{\partial\nu(x\,,y)}{\partial y}\ dy \int_{T_y^*(X)} F_1(y\,,\lambda)\ d\lambda \int \alpha_2(x\,,z)\ e^{-2i\pi<\nu(y,z),\lambda>}$$

$$\varphi(z)\ \text{dét}\ \frac{\partial\nu(y\,,z)}{\partial z}\ dz\ .$$

On pose $\lambda = l_x^y\ \xi$, $\xi$ parcourant $T_x^*(X)$. Dans le domaine d'intégration, on a

$$<\nu(y\,,z),\lambda> = <\nu(x\,,z),\xi> - <\nu(x\,,y),\xi>$$

et

$$\text{dét }(l_x^y)\, d\xi \otimes \text{dét } \frac{\partial \nu(y\,,z)}{\partial z}\, dz = \text{dét } \frac{\partial \nu(x\,,z)}{\partial z}\, d\xi \otimes dz\,,$$

d'après les propriétés de la linéarisation $\nu$.

D'où

$$(\mathrm{B}\varphi)(x) = \int_{\mathrm{T}_x^*(\mathrm{X})} \mathrm{F}_2(x\,,\zeta)\, d\zeta \int_{\mathrm{T}_x(\mathrm{X})} \widetilde{\alpha}_2(x\,,\eta)\, e^{-2i\pi<\eta,\zeta>}\, d\eta$$

$$\int_{\mathrm{T}_x^*(\mathrm{X})} \mathrm{F}_1(w_x(\eta)\,, l_x^{w_x(\eta)}\,\xi)\, e^{2i\pi<\eta,\xi>}\, d\xi \int \alpha_2(x\,,z)\, e^{-2i\pi<\nu(x,z),\xi>}$$

$$\varphi(z)\ \text{dét } \frac{\partial \nu(x\,,z)}{\partial z}\, dz\,.$$

Posons

$$\psi(x\,,\xi)\, d\xi = d\xi \int \alpha_2(x\,,z)\, e^{-2i\pi<\nu(x,z),\xi>}\, \varphi(z)\ \text{dét } \frac{\partial \nu(x\,,z)}{\partial z}\, dz\,.$$

$(\mathrm{B}\varphi)(x)$ s'écrit alors

$$\int_{\mathrm{T}_x^*(\mathrm{X})} \mathrm{F}_2(x\,,\zeta)\, d\zeta \int_{\mathrm{T}_x(\mathrm{X})} \widetilde{\alpha}_2(x\,,\eta)\, e^{-2i\pi<\eta,\zeta>}\, d\eta$$

$$\int_{\mathrm{T}_x^*(\mathrm{X})} \mathrm{F}_1(w_x(\eta), l_x^{w_x(\eta)}\,\xi)\, \psi(x\,,\xi)\, e^{2i\pi<\eta,\xi>}\, d\xi\,.$$

Démontrons que l'on peut changer l'ordre d'intégration : quel que soit M réel positif, il existe une constante C indépendante de $\xi$ et de $\zeta$ telle que

$$|\psi(x\,,\xi)| \leqslant \mathrm{C}\,(1 + |\xi|)^{-2\mathrm{M}}$$

et

$$\left| \int_{\mathrm{T}_x(\mathrm{X})} \widetilde{\alpha}_2(x\,,\eta)\, \mathrm{F}_1(w_x(\eta), l_x^{w_x(\eta)}\,\xi)\, e^{2i\pi<\eta,\xi-\zeta>}\, d\eta \right| \leqslant$$

$$\mathrm{C}(1 + |\xi - \zeta|)^{-\mathrm{M}}\,(1 + |\xi|)^{m_1}\,,$$

et par suite grâce à l'inégalité

$$(1 + |\xi - \zeta|)^{-\mathrm{M}} \leqslant \mathrm{C}(1 + |\xi|)^{+\mathrm{M}}\,(1 + |\zeta|)^{-\mathrm{M}}\,,$$

$$|\mathrm{F}_2(x\,,\zeta)|\, |\psi(x\,,\xi)|\, \left|\int_{\mathrm{T}_x(\mathrm{X})} \right| \widetilde{\alpha}_2(x\,,\eta)\, \mathrm{F}_1(w_x(\eta), l_x^{w_x(\eta)}\,\xi)$$

$$e^{2i\pi<\eta,\xi-\zeta>}\, d\eta| \leqslant \mathrm{C}(1 + |\zeta|)^{m_2-\mathrm{M}}\,(1 + |\xi|)^{m_1-\mathrm{M}}\,.$$

En choisissant M assez grand, on voit que cette dernière fonction de $x$, $\zeta$ et $\xi$ est sommable ; d'après Fubini, on peut donc écrire

$$(B\varphi)(x) = \int_{T_x^*(X)} \Big( \int_{T_x^*(X)} F_2(x, \xi + \zeta)\, d\zeta \int_{T_x(X)} \widetilde{\alpha}_2(x, \eta)$$
$$F_1(w_x(\eta), l_x^{w_x(\eta)}\, \xi)\, e^{-2i\pi<\eta,\zeta>}\, d\eta \Big)\, \psi(x, \xi)\, d\xi\, .$$

Pour démontrer le théorème, il suffit alors de montrer que

$$G(x, \xi) = \int_{T_x^*(X)} F_2(x, \xi + \zeta)\, d\zeta \int_{T_x(X)} \widetilde{\alpha}_2(x, \eta)$$
$$F_1(w_x(\eta), l_x^{w_x(\eta)}\, \xi)\, e^{-2i\pi<\eta,\zeta>}\, d\eta$$

appartient à $C_X^\infty(T^*(X)\, ; \mathcal{L}(E^1, E^3)\, ; m_1 + m_2)$ et admet le développement indiqué.

Compte tenu du fait que $\widetilde{\alpha}_2(x, \eta)$ est égale à 1 pour $\eta$ voisin de 0, on peut écrire :

$$G(x, \xi) = \sum_{|r| \leqslant k-1} \frac{1}{r!}\, \partial_\xi^r F_2(x, \xi)\, D_\eta^r \{F_1(w_x(\eta), l_x^{w_x(\eta)}\, \xi)\}\, (\eta = 0) +$$
$$R_k(x, \xi)\, ,$$

avec

$$R_k(x, \xi) = \int_{T_x^*(X)} \left[ F_2(x, \xi + \zeta) - \sum_{|r| \leqslant k-1} \frac{1}{r!}\, \partial_\xi^r F_2(x, \xi)\, \zeta^r \right] d\zeta$$
$$\int_{T_x(X)} \widetilde{\alpha}_2(x, \eta)\, F_1(w_x(\eta), l_x^{w_x(\eta)}\, \xi)\, e^{-2i\pi<\eta,\zeta>} d\eta\, .$$

L'estimation de $R_k$ se fait par la méthode usuelle, ici très facile, puisque pour $|\xi| \neq 0$ toute dérivée par rapport à $\eta$ de $F_1(w_x(\eta), l_x^{w_x(\eta)}\, \xi)$ se majore par $C|\xi|^{m_1}$, C étant une constante indépendante de $\xi$, de $x$ parcourt un compact.

Etudions maintenant le transposé d'un opérateur

$$A = \Theta\, [F\, ; \nu\, ; \tau^1\, ; \alpha] \in PSD\, (X\, ; E^1\, ; E^2\, ; m)\, ,$$

$\nu$ étant une linéarisation localement affine de X et $\tau^1$ un transport local de $E^1$.

${}^tA$ est bien défini comme élément de

$$\mathscr{L}(X ; E^{2*} \otimes \Lambda_t^n T^*(X) ; E^{1*} \otimes \Lambda_t^n T^*(X) ; m) ,$$

$E^{i*}$ étant le fibré dual de $E^i$, puisque les duaux de $H^s_{loc}(X ; E^i)$ et $H^s_{comp}(X ; E^i)$ sont canoniquement $H^{-s}_{comp}(X ; E^{i*} \otimes \Lambda_t^n T^*(X))$ et $H^{-s}_{loc}(X ; E^{i*} \otimes \Lambda_t^n T^*(X))$ respectivement, et que le transposé d'un opérateur très régulier est très régulier.

On peut supposer que $\alpha$ est à support dans un domaine $\Omega$ vérifiant les mêmes conditions que dans la démonstration du théorème (VI.3). Cela étant, on construit un transport local $\tau^{1*}$ de

$$E^{1*} \otimes \Lambda_t^n T^*(X) ,$$

en posant :

$$(\tau^{1*})_x^y = {}^t(\tau^1)_y^x \otimes \left(\text{dét } \frac{\partial \nu(x, y)}{\partial y} \, d\xi \otimes dy\right) ,$$

où ${}^t(\tau^1)_y^x : E_x^{1*} \longrightarrow E_y^{1*}$ est le transposé de $(\tau^1)_y^x$ (on rappelle que $\mu_x^y = \text{dét } \dfrac{\partial \nu(x, y)}{\partial y} \, d\xi \otimes dy$ définit un transport local $\mu$ du fibré $\Lambda_t^n T^*(X)$).

Par ailleurs, F appartenant à $C_X^\infty(T^*(X) ; \mathscr{L}(E^1, E^2) ; m)$, on en déduit canoniquement un élément, noté ${}^tF$, de

$$C_X^\infty(T^*(X) ; \mathscr{L}(E^{2*}, E^{1*}) ; m)$$

et un élément ${}^tF \otimes I$ de

$$C_X^\infty(T^*(X) ; \mathscr{L}(E^{2*} \otimes \Lambda_t^n T^*(X), E^{1*} \otimes \Lambda_t^n T^*(X)) ; m) ,$$

$I_x$ étant l'application identique de $\Lambda_t^n T^*(X)$. On posera

$$\check{F}(y, \zeta) = F(y, -\zeta) .$$

Soit enfin $\tau^2$ un transport local de $E^2$, et supposant $\alpha$ à support dans un domaine de $\nu$, de $\tau^1$ et de $\tau^2$ (donc aussi de $\tau^{1*}$ et de $\tau^{2*}$).

On peut énoncer :

THEOREME (VI.4). – *On suppose que $\nu$ est une linéarisation localement affine de X. Avec les notations précédentes, posons :*

$$G(x, y, \xi) = [(\tau^{1*})_x^y]^{-1} \circ [{}^t\check{F}(y, l_x^y \xi) \otimes I_y] \circ [(\tau^{2*})_x^y] .$$

*Alors*

$$ {}^t\mathrm{A} \in \mathrm{PSD}(\mathrm{X}\ ;\ \mathrm{E}^{2*} \otimes \Lambda^n_t\, \mathrm{T}^*(\mathrm{X})\ ;\ \mathrm{E}^{1*} \otimes \Lambda^n_t\, \mathrm{T}^*(\mathrm{X})\ ;\ m) $$

*et*

$$ \sigma({}^t\mathrm{A}\ ; \nu\ ; \tau^{2*}\ ; \alpha)\,(x\,,\,\xi) \sim \sum_{|r| \geqslant 0} \frac{1}{r\,!}\, \partial^r_\xi\, \mathrm{D}^r_\eta\, \{\mathrm{G}(x\,,\, w_x(\eta),\, \xi)\}\ (\eta = 0)\,. $$

${}^t\mathrm{A}$ est défini par l'identité

$$ \int_y (\mathrm{A}\psi)(y).\varphi(y) = \int_x \psi(x)\,.\,({}^t\mathrm{A}\varphi)\,(x) $$

valable quelles que soient

$$ \varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{X}\ ;\ \mathrm{E}^{2*} \otimes \Lambda^n_y\, \mathrm{T}^*(\mathrm{X})) \quad \text{et} \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathrm{X}\ ;\ \mathrm{E}^1) $$

(les indices $y$ et $x$ sous le signe d'intégration indiquent la variable d'intégration, en l'absence d'un facteur $dy$ ou $dx$ apparent).

Pour tout entier positif $p$, on considère la fonction $\chi_p$ définie sur $\mathrm{T}^*(\mathrm{X})$ par $\chi_p(x\,,\,\xi) = \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{p}\right)$ où $|\xi|^2$ est la forme quadratique définie par une structure riemannienne sur X. On peut alors écrire

$$ (\mathrm{A}\psi)\,(y) = \lim_{p\to\infty} \int_{\mathrm{T}^*_y(\mathrm{X})} \mathrm{F}(y\,,\zeta)\, \chi_p(y\,,\,\zeta)\, d\zeta \int \alpha(x\,,\,y)\, [(\tau^1)^x_y]^{-1} $$
$$ \psi(x)\, e^{-2i\pi<\nu(y,x),\zeta>}\, \text{dét}\, \frac{\partial\nu(y\,,\,x)}{\partial x}\, dx\,, $$

formule qui a l'avantage de permettre l'échange des intégrations et le changement de variable $\zeta = l^y_x\, \xi$, $\xi \in \mathrm{T}^*_x(\mathrm{X})$.

En notant que

$$ <\nu(y\,,x),\,\zeta> = -<\nu(x\,,\,y),\,\xi> $$

et que

$$ \text{dét}\,(l^y_x)\, d\xi \otimes \text{dét}\, \frac{\partial\nu(y\,,\,x)}{\partial x}\, dx = \mathrm{I}_x $$

puisque la linéarisation $\nu$ est localement affine, on a alors

$$ \int_y (\mathrm{A}\psi)\,(y)\,.\,\varphi(y) = \lim_{p\to\infty} \int_y \varphi(y)\,.\int_x \alpha(y\,,\,x) \int_{\xi\in\mathrm{T}^*_x(\mathrm{X})} \chi_p(y\,,\,l^y_x\,\xi) $$
$$ \check{\mathrm{F}}(y\,,\,l^y_x\,\xi)\,[(\tau^1)^x_y]^{-1}\ \psi(x)\, e^{-2i\pi<\nu(x,y),\xi>}. $$

Après quelques calculs triviaux et moyennant l'identification canonique de $E_x^{1*} \otimes \Lambda_t^n T_y^*(X)$ avec

$$E_x^{1*} \otimes \Lambda_t^n T_x^*(X) \otimes \Lambda_t^n T_x(X) \otimes \Lambda_t^n T_y^*(X) \, ,$$

on obtient l'égalité

$$\varphi(y) \, . \, \check{F}(y \, , l_x^y \, \xi) \, [(\tau^1)_x^y]^{-1} \, \psi(x) = \{[(\tau^{1*})_x^y]^{-1} \, [{}^t\check{F}(y \, , l_x^y \, \xi) \otimes I_y] \, \varphi(y)\}$$
$$\otimes \left(\text{dét} \, \frac{\partial v(x \, , y)}{\partial y} \, d\xi \otimes dy\right) . \, \psi(x) \; .$$

D'où

$$\int_y \varphi(y) \, . \, (A\psi) \, (y) = \lim_{p \to \infty} \int_x \psi(x) \int_{\xi \in T_x^*(X)} d\xi \int \alpha(y \, , x) \, \chi_p(y \, , l_x^y \, \xi)$$

$$[(\tau^{1*})_x^y]^{-1} \, [{}^t\check{F}(y \, , l_x^y \, \xi) \otimes I_y] \, \varphi(y) \, e^{-2i\pi < v(x,y),\xi >} \, \text{dét} \, \frac{\partial v(x \, , y)}{\partial y} \, dy \; .$$

Quand $p \longrightarrow \infty$, l'intégrale double de droite tend vers

$$\int_{T_x^*(X)} d\xi \int \alpha(y \, , x) \, [(\tau^{1*})_x^y]^{-1} \, [{}^t\check{F}(y \, , l_x^y \, \xi) \otimes I_y] \, \varphi(y)$$
$$e^{-2i\pi < v(x,y),\xi >} \, \text{dét} \, \frac{\partial v(x \, , y)}{\partial y} \, dy$$

en restant bornée sur le support de $\psi$. Cette dernière intégrale double est donc $({}^tA\varphi) \, (x)$. D'où, si $\check{\alpha}$ est définie par

$$\check{\alpha}(x \, , y) = \alpha(y \, , x)$$

et si $\varepsilon_x^{2*} \in E_x^{2*} \otimes \Lambda_t^n T_x^*(X)$ :

$$\sigma({}^tA \, ; v \, ; \tau^{2*} \, ; \check{\alpha}) \, (x \, , \xi) \, (\varepsilon_x^{2*}) = \int_{T_x^*(X)} d\zeta \int (\check{\alpha}(x \, , y))^2 \, [\tau^{1*})_x^y]^{-1}$$

$$[{}^tF(y \, , l_x^y \, \xi) \otimes I_y] \, [(\tau^{2*})_x^y] \, \varepsilon^{2*} \, e_x^{-2i\pi < v(x,y),\zeta - \xi >} \, \text{dét} \, \frac{\partial v(x \, , y)}{\partial y} \, dy =$$

$$\int_{T_x^*(X)} d\zeta \int_{T_x(X)} (\widetilde{\alpha}(\eta \, , x))^2 \, [(\tau^{1*})_x^{w_x(\eta)}]^{-1} \, [{}^t\check{F}(w_x(\eta), l_x^{w_x(\eta)} \, (\xi + \zeta) \otimes$$
$$I_{w_x(\eta)}] \, [(\tau^{2*})_x^{w_x(\eta)}] \, (\varepsilon_x^{2*}) \, e^{-2i\pi < \eta, \zeta >} \, d\eta,$$

et il suffit de développer l'élément de

$$\mathscr{L}(E_x^{2*} \otimes \Lambda_t^n T^*(X), E_x^{1*} \otimes \Lambda_t^n T_x^*(X))$$

qui figure dans l'intégrale par la formule de Taylor au voisinage de $\zeta = 0$, les estimations du reste se faisant par la méthode usuelle.

Si X est une variété non localement affine, il n'y a pas en général de formules "simples" pour écrire le composé de deux opérateurs pseudo-différentiels ou le transposé d'un opérateur pseudo-différentiel.

Cependant, il reste vrai que si $A_1 \in PSD(X\ ; E^1\ ; E^2\ ; m_1)$ et $A_2 \in PSD(X, E^2\ ; E^3\ ; m_2)$ alors $A_2 A_1 \in PSD(X\ ; E^1\ ; E^3\ ; m_1 + m_2)$ et ${}^tA_1 \in PSD(X\ ; E^{2*} \otimes \Lambda_t^n T^*(X)\ ; E^{1*} \otimes \Lambda_t^n T^*(X)\ ; m_1)$.

Montrons-le pour le composé :

Soient $(\mathfrak{U}_\lambda)$ un recouvrement ouvert localement fini de X, chaque $\mathfrak{U}_\lambda$ étant domaine de coordonnées et de trivialisation de $E^1$, $(V_\alpha)$ un recouvrement ouvert localement fini de X tel que

$$V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, \alpha \qquad \text{tel que} \qquad V_\alpha \cup V_\beta \subset \mathfrak{U}_\lambda ,$$

$(W_j)$ un recouvrement ouvert localement fini de X tel que

$$W_j \cap W_k \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, \alpha \qquad \text{tel que} \qquad W_j \cup W_k \subset V_\alpha ,$$

et enfin $(\varphi_j)$ une partition $C^\infty$ de l'unité subordonnée au recouvrement $(W_j)$.

On peut écrire, puisque $A_i$ $(i = 1,2)$ est très régulier :

$$A_i \sim A_i' = \Sigma(\varphi_j)\, A_i(\varphi_k)$$

où l'on ne retient que les couples d'indices $(j, k)$ pour lesquels les supports de $\varphi_j$ et de $\varphi_k$ se coupent. Alors

$$A_2 A_1 \sim \Sigma(\varphi_j)\, A_2(\varphi_k)\, (\varphi_l)\, A_1(\varphi_m) ,$$

où l'on ne retient que les quadruples d'indices pour lesquels les supports de $\varphi_j$, de $\varphi_k$, de $\varphi_l$ et de $\varphi_m$ se coupent deux à deux.

Chaque opérateur $(\varphi_j)\, A_2(\varphi_k)\, (\varphi_l)\, A_l(\varphi_m)$ est alors un opérateur pseudo-différentiel, et la famille des bisupports (compacts) de ces opérateurs est localement fini : il résulte que $A_2 A_1$ est un opérateur pseudo-différentiel.

Les propositions (V.3) et (VI.2) montrent que le symbole d'un opérateur $A \in \mathrm{PSD}(X ; \mathcal{L}(E^1, E^2) ; m)$ est indépendant de la linéarisation de X et du transport local de $E^1$ choisis pour le définir, à un élément de $C^\infty_X(T^*(X) ; \mathcal{L}(E^1, E^2) ; m-1)$ près ; il en résulte que si $A_i (i = 1,2) \in \mathrm{PSD}(X ; \mathcal{L}(E^i, E^{i+1}) ; m_i)$ a pour symbole $F_i$ relativement à une linéarisation $\nu_i$ quelconque de X et à un transport local $\tau^i$ quelconque de $E^i$, on obtient facilement, comme il est bien connu d'ailleurs, la "partie principale" du symbole de $A_2 A_1$ :

Ce symbole relativement à une linéarisation quelconque de X et à un transport local quelconque de $E^1$ est égal à $F_2 \circ F_1$ à un élément de $C^\infty_X(T^*(X) ; \mathcal{L}(E^1, E^3) ; m_1 + m_2 - 1)$ près.

De même le symbole de ${}^tA_1$ est égal à ${}^t\check{F}_1 \otimes I$ à un élément de $C^\infty_X(T^*(X) ; \mathcal{L}(E^{2*} \otimes \Lambda^n_t T^*(X), E^{1*} \otimes \Lambda^n_t T^*(X) ; m_1 - 1)$ près.

Le "calcul symbolique approché" ainsi défini est comme on sait suffisant dans un grand nombre d'applications.

On peut cependant penser que le calcul symbolique complet, qui est l'objet essentiel de ce travail, se révèlera utile pour d'autres problèmes, en particulier des problèmes non elliptiques.

De toute manière, on obtient par ce calcul des résultats plus précis : il permet par exemple d'inverser un opérateur elliptique modulo la classe des opérateurs régularisants (cf. [11]).

## Une application : opérateurs pseudo-différentiels invariants par un groupe de Lie opérant sur X.

Soit $\Gamma$ un groupe de Lie compact opérant sur la variété différentiable X, et, de façon compatible avec son action sur X, opérant aussi sur deux fibrés vectoriels $E^1$ et $E^2$ de base X.

Si $g \in \Gamma$ et $x \in X$, nous notons $gx$ le transformé de $x$ par $g$. $E^1_x$ (resp. $E^2_x$) désignant la fibre de $E^1$ (resp. $E^2$) au-dessus de $x$, nous notons $g^1_x$ (resp. $g^2_x$) l'application linéaire de $E^1_x$ dans $E^1_{gx}$ (resp. de $E^2_x$ dans $E^2_{gx}$) (définie par l'action de $\Gamma$ sur $E^2$).

Notre propos est de caractériser, parmi les opérateurs pseudo-différentiels définis dans le début de ce chapitre, ceux qui sont invariants par $\Gamma$ ; il convient auparavant de définir les notions de linéarisation $\Gamma$-invariante, de fonction $\alpha(x\,,y)$ $\Gamma$-invariante et enfin de transport local $\Gamma$-invariant.

L'exigence de la validité, quel que soit $g$ appartenant à $\Gamma$ et quels que soient $x$ et $y$ appartenant à $\Omega$, des formules

$$\nu(gx\,,gy) = dg(x)\,\nu(x\,,y)$$

$$\alpha(gx\,,gy) = \alpha(x\,,y)$$

$$g_y\,\tau_x^y = \tau_{gx}^{gy}\,g_x$$

remplit ce rôle.

L'existence de tels éléments $\Gamma$-invariants s'établit en se servant d'une mesure de Haar $d\mu$ sur $\Gamma$ de masse totale égale à 1 comme suit : si $\nu_0$ est une linéarisation quelconque sur X, on définit une linéarisation $\nu$ sur X en posant

$$\nu(x\,,y) = \int_G dg(g^{-1}x)\,\nu_0\,(g^{-1}x\,,g^{-1}y)\,d\mu\,(g)\,.$$

En effet, seule la condition ii) de la définition (III.1) nécessite une vérification : or

$$d_y\,\nu(x\,,y) = \int_G [dg(g^{-1}x) \otimes \{d_z\,\nu_0(g^{-1}x\,,z)\}(z = g^1 y) \circ dg^{-1}(y)]\,d\mu(g)$$

d'où

$$\{d_y\,\nu(x\,,y)\}\,(y = x) = \int_G [(dg(g^{-1}x) \circ dg^{-1}(x)]\,d\mu(g)$$

est l'application identique de $T_x(X)$.

Si $d\mu$ est invariante à gauche, $\nu$ est alors $\Gamma$-invariante comme on le voit en posant $g = \gamma h$ dans l'égalité

$$\nu(\gamma x\,,\gamma y) = \int_G d\mu(g^{-1}\gamma x)\,\nu_0(g^{-1}\gamma x\,,g^{-1}\gamma y)\,d\mu(g)\,.$$

On construit de même un transport local $\tau$, $\Gamma$-invariant, du fibré $E^1$ à partir d'un transport local $\tau_0$ quelconque de $E^1$ en posant

$$\tau_x^y = \int_G g_{g^{-1}y} \circ (\tau_0)_{g^{-1}x}^{g^{-1}y} \circ (g^{-1})_x \, d\mu(g) \, .$$

Enfin, à partir d'une fonction $\alpha_0$ de classe $C^\infty$ sur $X \times X$, à valeurs réelles, égale à 1 dans un voisinage de $\Delta$, à support dans un domaine commun à $\nu$ et à $\tau$, on construit une fonction $\alpha$ du même type et en outre $\Gamma$-invariante en posant

$$\alpha(x\,,y) = \int_G \alpha_0(g^{-1}\,x\,, g^{-1}\,y)\, d\mu(g) \;;$$

la condition sur le support est assurée si le domaine commun à $\nu$ et à $\tau$ est choisi $\Gamma$-invariant en un sens évident, ce qui ne présente pas de difficulté.

On a fait ici un usage essentiel du fait que $\Gamma$ était compact : un exemple contradictoire en l'absence de cette hypothèse est fourni par la sphère de Riemann sur laquelle il n'existe pas de linéarisation invariante par le groupe des automorphismes de la structure analytique complexe.

Nous supposons désormais tous les éléments décrits dans ce qui précède $\Gamma$-invariants (notons qu'il n'est pas besoin d'un transport local de $E^2$) et supprimons les indices $\nu$, $\tau$, $\alpha$ dans l'écriture des opérateurs $\Theta$ et $\sigma$.

PROPOSITION (VI.5). – *Si* $F \in C_X^\infty(T^*(X)\;;\mathcal{L}(E^1\,,E^2)\;;m)$, *si* A *est un opérateur de* $\mathcal{D}(X\,;E^1)$ *dans* $\mathcal{E}(X\,;E^2)$ *et si* $g \in \Gamma$, *alors*

$$\Theta[g^*F] = g^*\Theta[F]$$

$$\sigma(g^*A) = g^*\sigma(A)$$

Par $g^*F$ on entend ici la fonction définie par

$$(g^*F)\,(x\,,\xi) = (g^{-1})^2_{gx} \circ F(gx\,, {}^t dg(x)^{-1}\,\xi) \circ g^1_x \, .$$

Pour définir $g^*A$, notons que si $\varphi$ est une section de $E^1$, alors

$$z \longmapsto g^{-1}_{g^{-1}z}\, \varphi(g^{-1}\,z)$$

est aussi une section de $E^1$ et $g^*A$ est alors défini sur $\mathcal{D}(X\,;E^1)$, à valeurs dans $\mathcal{E}(X\,;E^2)$, par

$$[(g^*A)\varphi]\,(x) = (g^{-1})^2_{gx}\,[A_z(g^1_{g^{-1}z}\,\varphi(g^{-1}\,z)]\,(gx)$$

définition qui coïncide avec celle donnée dans la proposition (V.2) lorsque $E^1$ et $E^2$ sont les fibrés triviaux de rang 1 sur X et que l'action de $\Gamma$ sur $E^1$ et $E^2$ résulte, par une extension triviale, d'une action de $\Gamma$ sur X.

La première partie de la proposition (VI.5) se démontre alors exactement comme la proposition (V.2), en utilisant en outre l'égalité :

$$(\tau_{gx}^{gy})^{-1}\, g_y^1 = g_x^1 (\tau_x^y)^{-1} ,$$

fournie par la $\Gamma$-invariance de $\tau$.

La deuxième partie s'obtient aussi sans difficulté : en effet

$$\sigma(g^*A)\,(x\,,\,\xi)\,(e_x^1) = (g^{-1})_{gx}^2\,\{A_z(g_{g^{-1}z}^1\,\alpha(x\,,g^{-1}z)\tau_x^{g^{-1}z}\,(e_x^1)\, e^{2i\pi<\nu(x,g^{-1}z),\xi>})\}\,(gx)\,,$$

soit, en utilisant la $\Gamma$-invariance de $\nu$, de $\tau$ et de $\alpha$

$$\sigma(g^*A)\,(x\,,\,\xi)\,(e_x^1) = (g^{-1})_{gx}^2\,\{A_z(\alpha(gx\,,z)\,\tau_{gx}^z\,g_x^1\,(e_x^1)\, e^{2i\pi<\nu(gx,z),{}^t dg(x)^{-1}\xi>})\}\,(gx) = (g^{-1})_{gx}^2\,\sigma(A)\,(gx\,,{}^t dg^{-1}\,(g)\,\xi)\,(g_x^1\;e_x^1).$$

COROLLAIRE. — *Un opérateur pseudo-différentiel des sections de* $E^1$ *dans les sections de* $E^2$ *est* $\Gamma$*-invariant à un opérateur régularisant près si et seulement si son symbole relativement à un* $\nu$ *et un* $\tau$ $\Gamma$*-invariants (qui est bien défini à un élément de*

$$C_X^\infty(T^*(X)\,;\,\mathcal{L}(E^1\,,E^2)\,;\,-\infty)\ \textit{près})$$

*est* $\Gamma$*-invariant à un élément de* $C_X^\infty(T^*(X)\,;\,\mathcal{L}(E^1\,,E^2)\,;\,-\infty)$ *près.*

Naturellement, dans cet énoncé, un opérateur est dit $\Gamma$-invariant à un opérateur régularisant près si et seulement si, pour tout $g$ appartenant à $\Gamma$, l'opérateur $g^*A - A$ est régularisant, et l'on a une définition analogue pour les symboles.

## BIBLIOGRAPHIE

[0] J. BOKOBZA-HAGGIAG, Une définition globale des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété différentiable, *C.R. Acad. Sc. Paris,* tome 267, p. 4 - 6, (1968).

[1] A.P. CALDERON and A. ZYGMUND, On singular integrals, *Amer. J. Math., Vol.* 78, (1956), p. 289-309.

[2] A.P. CALDERON and A. ZYGMUND, Singular integral operators and differential equations, *Amer. J. Math.,* Vol. 79, (1957), p. 901-921.

[3] H. CARTAN et L SCHWARTZ, Séminaire sur la formule d'Atiyah-Singer, (1963-64).

[4] L. HÖRMANDER, Pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965) p. 501-517.

[5] L. HÖRMANDER, Pseudo-differential operators and non elliptic boundary problems, *Ann. of Math.* 83 (1966), p. 129-209.

[6] L. HÖRMANDER, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, *Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math.* 10, (1967).

[7] J.J. KOHN and L. NIRENBERG, An algebra of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.,* Vol. 18, (1965), p. 269-305.

[8] R.T. SEELEY, Singular integrals on compact manifolds, *Amer. J. Math.* Vol. 81, (1959), p. 658-690.

[9] R.T. SEELEY, Refinement of the functional calculus of Calderón and Zygmund, Proceedings, Koniklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, vol 68 (1965), p. 521-531.

[10] R.T. SEELEY, Singular integral operators on vector bundles, Transactions of the American Mathematical Society.

[11] A. UNTERBERGER et J. BOKOBZA, Les opérateurs de Calderón - Zygmund précisés, *C.R. Acad. Sc. Paris,* tome 259, (1964), p. 1612-1614 tome 260, (1965), p. 34-37.

[12] A. UNTERBERGER et J. BOKOBZA, Sur une généralisation des opérateurs de Calderón - Zygmund et des espaces $H^s$, *C.R. Acad. Sc. Paris,* tome 260, (1965), p. 3265-3267.

[13] A. UNTERBERGER et J. BOKOBZA, Les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre variable, *C.R. Acad. Sc. Paris,* tome 261, (1965), p. 2271-2273.

[14] S. ZAIDMAN, Some non-homogeneous symbols and associated pseudo-differential operators, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa,* Vol. XXI, Fac. IV (1967).

[15] K.O. FRIEDRICHS, Pseudo-differential Operators, An introduction, Courant Institute, New-York, (1968).

(Thèse, Fac. Sciences, Paris 1968)

Juliane BOKOBZA-HAGGIAG
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre-et-Marie Curie
Paris 5ème