Annales de l'institut Fourier

Jean-François Méla

Sur certains ensembles exceptionnels en analyse de Fourier

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 2 (1968), p. 31-71

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_2_31_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 2 (1968), 31-71.

SUR CERTAINS ENSEMBLES EXCEPTIONNELS EN ANALYSE DE FOURIER

par Jean-François MÉLA

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction.

1. *Rappels et compléments.*

Ce travail est, d'une certaine façon, la suite de [1]. Nous rappellerons quelques définitions et résultats, renvoyant à [1] pour des compléments éventuels.

Dans toute la suite, G et Γ désigneront deux groupes abéliens localement compacts en dualité. Si $x \in G$, $\gamma \in \Gamma$ on notera (x, γ) la valeur du caractère γ au point x.

DÉFINITION 1.1. — *Un sous-ensemble* Λ *d'un groupe abélien localement compact* Γ *est un ensemble d'interpolation* (I_0) *(ou plus brièvement ensemble d'interpolation), si toute fonction bornée sur* Λ *peut être prolongée sur* Γ *en une fonction presque périodique.*

Si Γ est compact métrisable, seuls les ensembles finis sont d'interpolation; mais les cas $\Gamma = \mathbf{R}$ ou $\Gamma = \mathbf{Z}$ sont d'un particulier intérêt. L'étude des ensembles d'interpolation a donné lieu à un certain nombre de travaux de mathématiciens polonais, surtout de C. Ryll-Nardzewski et S. Hartman. On pourra consulter une bibliographie plus complète que la présente dans [1] ou [11].

DÉFINITION 1.2. — *Soit* E *un sous-ensemble de* Γ *et* $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *une partition de* E $(E_\lambda \neq \emptyset)$. E *est dit de type* (I_0) *relativement à sa partition* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *si toute fonction bornée sur* E, *constante sur chaque* E_λ, *est prolongeable sur* Γ *en une fonction presque-périodique.*

Nous dirons aussi que $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une *famille de type* (I_0).

Remarquons qu'un ensemble d'interpolation (I_0) est de type (I_0) relativement à la partition dont chaque composante est réduite à un élément.

Soit k entier > 0. Un élément $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in G^k$ définit un homomorphisme de Γ dans T^k

$$\gamma \to [(\xi_1, \gamma), \ldots, (\xi_k, \gamma)] = \xi(\gamma).$$

DÉFINITION 1.3. — *Soit un entier* $k > 0$, Δ *un voisinage de l'identité dans* T^k, K *un compact de* G^k. *Un ensemble d'interpolation* $\Lambda \subset \Gamma$, *possède la propriété* $P(\Delta, K)$ *si, pour toute partition* (Λ', Λ'') *de* Λ, *il existe* $\xi \in K$ *tel que*

$$[\xi(\Lambda') + \Delta] \cap [\xi(\Lambda'') + \Delta] = \emptyset.$$

Il est démontré dans [1] le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1. — *Soit* Λ *un ensemble d'interpolation dans un groupe* Γ *métrisable. Il existe un entier* $k > 0$, Δ *voisinage de l'identité dans* T^k *et* K *compact de* G^k *tels que* Λ *possède la propriété* $P(\Delta, K)$.

DÉFINITION 1.4. — *Nous dirons qu'un ensemble d'interpolation* Λ *est d'ordre* k, *si* k *est le plus petit des entiers* $k' > 0$ *pour lesquels il existe* $\Lambda' \subset \Lambda$ $(\Lambda \diagdown \Lambda'$ fini) *tel que* Λ' *possède la propriété* $P(\Delta, K)$, *pour un* Δ *voisinage de l'identité dans* $T^{k'}$ *et un compact* K *de* $G^{k'}$.

Remarque 1.1. — La notion d'ordre introduite dans [1] est un peu plus restrictive que celle donnée dans la définition 1-4. On imposait en fait $\Lambda' = \Lambda$. L'ordre correspondant sera dit *ordre strict.* Dans la plupart des questions c'est l'ordre d'un ensemble d'interpolation, et non son ordre strict, qui est significatif et qu'il est commode de considérer.

DÉFINITION 1.5. — *Un compact* $K \in G^k$, *sera dit associé à un ensemble d'interpolation* Λ, *s'il existe* $\Lambda' \subset \Lambda(\Lambda \diagdown \Lambda'$ *fini*) *et* Δ *voisinage de* 0 *dans* T^k, *tel que* Λ' *ait la propriété* $P(\Delta, K)$.

Dans ces conditions, le couple (Δ, K) sera dit *couple associé à* Λ.

Certaines propriétés d'un ensemble d'interpolation sont directement liées aux compacts associés et aux couples associés. A ce sujet, rappelons le résultat suivant [1].

THÉORÈME 1.2. — *Si* Λ *est un ensemble d'interpolation d'un groupe métrisable* Γ, *il existe un voisinage de* 0 *dans* Γ, Ω, *tel que la famille* $(\lambda + \Omega)_{\lambda \in \Lambda}$ *est de type* (I_0).

En fait, si l'on se reporte à la démonstration qui est donnée dans [1] (III, théorème 1) on peut affirmer que, si Λ est un ensemble d'interpolation qui possède la propriété $P(\Delta, K)$, la famille $(\lambda + \Omega)_{\lambda \in \Lambda}$ est de type (I_0) si l'on prend

$$\Omega = \bigcup_{\xi \in K} \xi^{-1}(\Delta'),$$

où ξ^{-1} désigne l'application inverse de l'homomorphisme ξ et $\overline{\Delta}' \subset \mathring{\Delta}$.

Soit $\mathcal{B}(\Lambda)$ l'algèbre des fonctions bornées sur Λ.

Théorème 1.3. — *Si Λ est un ensemble d'interpolation, toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda)$ peut être interpolée par une fonction presque-périodique à série de Fourier absolument convergente* [12] [1].

Si $K \subset G^k$ est un compact associé à Λ, tout idempotent de $\mathcal{B}(\Lambda)$ peut être interpolé par une fonction presque-périodique à série de Fourier absolument convergente, dont le spectre est contenu dans un sous-groupe à k générateurs $\xi_1, \ldots, \xi_k$, tels que $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in K$[1].

En particulier, toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda)$ peut être interpolée par la transformée de Fourier d'une mesure bornée sur G (et même d'une mesure atomique bornée). Autrement dit Λ *est un ensemble de Sidon* (cf. [1] chap. II).

Définition 1.6. — *Un compact $K \subset G$ est dit propre pour un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$, s'il existe $\Lambda' \subset \Lambda(\Lambda \setminus \Lambda'$ fini) tel que toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda')$ peut être interpolée par la transformée de Fourier d'une mesure à support dans K. (Alors Λ' est évidemment un ensemble de Sidon et il en est de même de Λ car $\Lambda \setminus \Lambda'$ fini.)*

Cette notion est introduite dans [8] où l'on démontre aussi la caractérisation suivante :

Théorème 1.4. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un compact K soit propre pour Λ est que, pour tout idempotent b de $\mathcal{B}(\Lambda)$, il existe une mesure μ à support dans K telle que*

$$\varlimsup_{\substack{\lambda \to \infty \\ (\lambda \in \Lambda)}} |\hat{\mu}(\lambda) - b(\lambda)| < \frac{1}{2}.$$

Étant donné $(n_1, \ldots, n_k) \in Z^k$, désignons par π_n l'appli-

cation
$$\xi = (\xi_1, \ \ldots\ \xi_k) \to n_1\xi_1 + \cdots + n_k\xi_k$$
$$G^k \to G.$$

Le résultat suivant est établi dans [1] sous une forme légèrement différente (IV, proposition 2).

THÉORÈME 1.5. — *Soit* (Δ, K) *un couple associé à un ensemble d'interpolation* Λ $(\Delta \subset T^k, K \subset G^k)$. *Il existe* N *entier positif, ne dépendant que de* Δ, *tel que l'ensemble*
$$\bigcup_{|n_1|+\cdots+|n_k| \leqslant N} \pi_n(K)$$
est un compact propre pour Λ.

2. *Sommaire.*

Donnons un aperçu des sujets abordés dans le présent travail et des résultats obtenus.

a) Le théorème 2.1 est une version renforcée du théorème 1.1 et bénéficie d'une présentation plus élégante de la méthode de [1] (chapitre I) suggérée par P. Malliavin. Ce théorème précise la structure des ensembles d'interpolation. Pour un sous-ensemble d'un groupe discret, la propriété d'être d'interpolation apparaît comme une généralisation directe de la propriété d'indépendance.

b) Nous avons déjà dit que certaines propriétés d'un ensemble d'interpolation sont intimement liées aux compacts associés. Dans le chapitre III, nous démontrons certains résultats sur les compacts associés dont nous déduirons plus loin des propriétés des ensembles d'interpolation.

Étant donné un compact $K \subset G^k$, est-il associé à un ensemble d'interpolation infini? Une condition nécessaire est que K soit non dénombrable (théorème 3.1). L'étude faite au chapitre IV montre que, moyennant une hypothèse assez large sur le groupe Γ, cette condition est aussi suffisante. Nous établissons en fait un résultat plus fort (théorème 4.4) qui s'énonce ainsi dans le cas de $\mathbf{R}$:

Quel que soit K compact non dénombrable de $\mathbf{R}$, il existe un ensemble d'interpolation infini Λ tel que toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda)$ peut être interpolée par une fonction périodique dont la période appartient à K.

c) Les résultats du chapitre III sont utilisés pour obtenir des résultats sur les ensembles d'interpolation de **R**, dans deux directions.

Nous nous posons, d'une part, le problème de relier l'ordre d'un ensemble d'interpolation de réels avec sa vitesse de croissance (chapitre V). Nous obtenons entre autres le théorème 5.1 qui montre notamment l'existence d'ensembles d'interpolation de tous les ordres.

D'autre part, nous démontrons deux propriétés des mesures d'interpolation (chapitre VI).

(1) Si $\Lambda \subset \mathbf{R}$ est un ensemble d'interpolation, toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda)$ peut être interpolée par la transformée de Fourier d'une mesure diffuse. [On a aussi la même propriété avec les mesures atomiques (théorème 1.3).]

(2) Si $\Lambda \subset \mathbf{R}$ est un ensemble de Sidon qui est d'interpolation, il admet des ensembles propres de mesure de Lebesgue arbitrairement petite (théorème 4.4).

d) Nous introduisons, au chapitre VII la notion de famille de type (I_1) qui joue, par rapport aux ensembles de Sidon, le même rôle que les familles de type (I_0) par rapport aux ensembles d'interpolation. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'élargissement d'un ensemble de Sidon de **R** en une famille (I_1). Ce problème est évidemment lié à la stabilité des ensembles de Sidon. Si la propriété de stabilité se démontre aisément (théorème 7.2), nous ne sommes pas parvenus à démontrer en toute généralité une propriété d'élargissement analogue à celle des ensembles d'interpolation (théorème 1.2). Le théorème 7.3 auquel nous arrivons peut sans doute être amélioré [1]. Enfin, au chapitre VIII nous relions certaines propriétés de mauvaise répartition modulo 1 aux problèmes d'interpolation abordés au chapitre VII. Il s'agit-là d'une simple extension — à notre avis intéressante — de la méthode de [8].

Le présent travail constitue la deuxième partie d'une thèse de doctorat que Monsieur J.-P. Kahane a bien voulu diriger. Je suis heureux de lui exprimer ici ma profonde gratitude.

[1] Cf. Y. Meyer. Séminaire d'Analyse Harmonique (1967-68) Faculté des Sciences d'Orsay.

2. Un théorème de structure fondamental (Γ métrisable).

1. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant, dont le théorème 1.1 est une conséquence.

THÉORÈME 2.1. — *Soit* Λ *un ensemble d'interpolation* (I_0) *dans un groupe* Γ *métrisable. Il existe* $\Lambda' \subset \Lambda (\Lambda \setminus \Lambda'$ *fini), un entier* $k > 0$, *un couple de fermés disjoints de* T^k, *d'intérieur non vide,* (F_0, F_1), *et un compact* K *de* G^k, *tels que, pour toute fonction* $\varepsilon(\lambda)$ *à valeur* 0 *ou* 1, *il existe* $\xi \in K$, *avec la propriété que* $\xi(\lambda) \in F_{\varepsilon(\lambda)} (\lambda \in \Lambda')$.

Γ étant métrisable, G est dénombrable à l'infini. Pour un entier $k > 0$ désignons par $\mathcal{K}_k$ une famille dénombrable de compacts de G^k, telle que tout compact de G^k est contenu dans un compact de la famille. D'autre part il existe $\mathcal{F}_k$, famille dénombrable de couples ordonnés de fermés disjoints de T^k, d'intérieur non vide, telle que, pour tout couple (H_0, H_1) de fermés disjoints de T^k, il existe un couple $(F_0, F_1) \in \mathcal{F}_k$ pour lequel $H_0 \subset F_0$ et $H_1 \subset F_1$.

L'ensemble des fonctions définies sur Λ et à valeurs 0 ou 1 peut être identifié à $\{0, 1\}^\Lambda$ et ainsi muni d'une topologie d'espace compact. Pour un entier $k > 0$, un couple $\Phi = (F_0, F_1) \in \mathcal{F}_k$, un compact $K \in \mathcal{K}_k$, notons $E_{k, \Phi, K}$ le sous-ensemble de $\{0, 1\}^\Lambda$ constitué par les fonctions $\varepsilon(\lambda)$ pour lesquelles il existe $\xi \in K$ tel que $\xi(\lambda) \in F_{\varepsilon(\lambda)} (\lambda \in \Lambda)$. Alors

$$\{0, 1\}^\Lambda = \bigcup_{\substack{\Phi \in \mathcal{F}_k \\ K \in \mathcal{K}_k \\ k > 0}} E_{k, \Phi, K}. \tag{1}$$

En effet soit $\varepsilon \in \{0, 1\}^\Lambda$. Considérons les ensembles

$$\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda | \varepsilon(\lambda) = 0\}$$
$$\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda | \varepsilon(\lambda) = 1\}.$$

Puisque Λ est d'interpolation, il existe un entier $k > 0$ et $\xi \in G^k$ tel que $\xi(\Lambda_0)$ et $\xi(\Lambda_1)$ sont d'adhérences disjointes dans T^k (cf. [1] chapitre I, proposition 1). Soit $\Phi = (F_0, F_1) \in \mathcal{F}_k$ tel que $\xi(\Lambda_0) \subset F_0$ et $\xi(\Lambda_1) \subset F_1$. Soit $K \in \mathcal{K}_k$ tel que $\xi \in K$. De façon évidente $\varepsilon \in E_{k, \Phi, K}$.

Les ensembles $E_{k,\Phi,K}$ sont fermés dans $\{0, 1\}^{\Lambda}$. En effet, soit $\varepsilon \notin E_{k,\Phi,K}$; pour tout $\xi \in K$, il existe $\lambda_{\xi} \in \Lambda$ tel que

$$\xi(\lambda_{\xi}) \notin F_{\varepsilon(\lambda_{\xi})}.$$

Il en résulte que, pour un voisinage ouvert de ξ dans G^k, $V(\xi)$ et pour tout $\zeta \in V(\xi)$,

$$\zeta(\lambda_{\xi}) \notin F_{\varepsilon(\lambda_{\xi})}.$$

Lorsque ξ décrit K, les $V(\xi)$ engendrent un recouvrement de K dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $V(\xi_1), \ldots, V(\xi_p)$. Soit $\varepsilon' \in \{0, 1\}^{\Lambda}$ satisfaisant à

$$\varepsilon'(\lambda_{\xi_i}) = \varepsilon(\lambda_{\xi_i}) \quad (i = 1, \ldots, p).$$

Pour tout $\zeta \in K$,

$$\zeta(\lambda_{\xi_i}) \notin F_{\varepsilon'(\lambda_{\xi_i})}$$

pour au moins un indice $i \in \{1, \ldots, p\}$. Autrement dit $\varepsilon' \notin E_{k,\Phi,K}$. Il existe donc un voisinage de ε dans $\{0, 1\}^{\Lambda}$ qui est contenu dans le complémentaire de $E_{k,\Phi,K}$. $E_{k,\Phi,K}$ est donc fermé.

Il résulte de (1), en utilisant le théorème de Baire, que, pour un entier $k > 0$, un couple $\Phi \in \mathcal{F}_k$, un compact $K \in \mathcal{K}_k$, $E_{k,\Phi,K}$ est d'intérieur non vide, et contient donc un ouvert cylindrique de $\{0, 1\}^{\Lambda}$. Dans une autre formulation, ceci n'est pas autre chose que l'énoncé du théorème 2.1.

Remarque 2.1. — Le théorème 1.1 se déduit aisément du théorème 2.1. En effet, soit Δ, voisinage de 0 dans T^k, tel que

$$[F_0 + \Delta] \cap [F_1 + \Delta] = \emptyset.$$

Il est évident que Λ' possède la propriété $P(\Delta, K)$. Il suffit alors d'utiliser le lemme 1 et la remarque 1 du chapitre I de [1] pour conclure.

Remarque 2.2. — Si, pour un ensemble Λ, la conclusion du théorème 2.1 est vraie (pour k, Λ', K, F_0, F_1 convenables), Λ est évidemment d'interpolation. Le plus petit entier $k > 0$ pour lequel la conclusion du théorème 2.1 est vraie (pour Λ', K, F_0, F_1 convenables) n'est pas autre chose que l'ordre de k. En effet, il suffit de remarquer que, si un ensemble d'interpolation possède la propriété $P(\Delta, K)$ avec $\Delta \subset T^k$, $K \subset G^k$, pour un certain entier $k > 0$, alors, par une modification évidente du raisonnement, on obtient que la conclusion du théorème 2.1 est vraie avec le même entier k.

Remarque 2.3. — Le compact K mis en évidence dans le théorème 2.1 est associé à Λ. Inversement, si K est associé à Λ, on obtient, par une modification évidente du raisonnement, que la conclusion du théorème 2.1 est vraie avec le même K.

Remarque 2.4. — Supposons que la conclusion du théorème 2.1 soit valable avec un compact K de la forme

$$K = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

avec des K_j compacts. Poursuivons le raisonnement du théorème 2.1. Désignons par E_j le sous-ensemble de $\{0, 1\}^{\Lambda'}$ constitué par les fonctions $\varepsilon(\lambda)$ pour lesquelles il existe $\xi \in K_j$ tel que $\xi(\lambda) \in F_{\varepsilon(\lambda)}(\lambda \in \Lambda')$. Alors

$$\{0, 1\}^{\Lambda'} = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

De plus nous montrerions comme précédemment que les ensembles E_j sont fermés. Par suite, pour un indice $j = j_0$ au moins, E_{j_0} est d'intérieur non vide. Autrement dit, il existe $\Lambda'' \subset \Lambda' \subset \Lambda$ $(\Lambda \setminus \Lambda''$ fini) tel que la conclusion du théorème 2.1 est vraie en remplaçant Λ' par Λ'' et K par K_{j_0}, mais avec les mêmes F_0 et F_1.

Cette dernière remarque permet notamment de donner une démonstration plus simple de la proposition 2, chapitre v de [1], et sera utilisée plus loin.

2. *Ensembles d'interpolation et ensembles indépendants.*

Pour un sous-ensemble d'un groupe discret, la propriété d'être un ensemble d'interpolation généralise d'une certaine façon la propriété d'indépendance. Citons d'abord le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. — *Soit* Γ *un groupe discret. Tout sous-ensemble indépendant de* Γ *est un ensemble d'interpolation d'ordre* 1.

Pour $\gamma \in \Gamma$, nous poserons $S(\gamma) = \mathbf{T}$ si γ est d'ordre infini et $S(\gamma) = \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ si γ est d'ordre q. Alors toute fonction f définie sur un ensemble indépendant $\Lambda \subset \Gamma$ et telle que $f(\lambda) \in S(\lambda)(\lambda \in \Lambda)$ se prolonge en un caractère ξ sur Γ (cf. [3], p. 98). Soit (Λ_0, Λ_1) une partition de Λ. Nous lui associons une fonction f satisfaisant à

$$f(\lambda) = 1 \quad (\lambda \in \Lambda_0)$$
$$f(\lambda) = e^{i\varphi} \in S(\lambda), \qquad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}\right), \quad (\lambda \in \Lambda_1).$$

$F_0 = \{1\}$ et $F_1 = \left\{ e^{i\varphi} \,\middle|\, \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2} \right\}$ sont deux fermés disjoints de T, et quelle que soit la fonction $\varepsilon(\lambda)$ à valeur 0 ou 1, il existe $\xi \in G$ dual de Γ, tel que $\xi(\lambda) \in F_{\varepsilon(\lambda)}$.

Soit Λ un sous-ensemble indépendant d'un groupe discret, dont tous les éléments sont d'ordre infini. Alors, dans la démonstration précédente il est possible de prendre $F_0 = \{a_0\}$, $F_1 = \{a_1\}$ $(a_0, a_1 \in T, a_0 \neq a_1)$. Pour un tel ensemble Λ la conclusion du théorème 2.1 vaut donc pour un couple de fermés réduit à un couple de points quelconques de T. Le cas d'un ensemble indépendant apparaît ainsi comme un cas limite. Du point de vue de l'approximation des fonctions de module 1 par des caractères, la propriété pour un ensemble d'être d'interpolation généralise directement la propriété d'indépendance.

3. Compacts associés à un ensemble d'interpolation.

1. Nous nous proposons d'établir ici quelques résultats sur les compacts associés à un ensemble d'interpolation, que nous aurons l'occasion d'utiliser dans la suite. Rappelons tout d'abord le résultat suivant établi en [1].

THÉORÈME 3.1. — *Si* Λ *est un ensemble d'interpolation infini, tout compact associé à* Λ *est non dénombrable.*

Soit $K \subset G^k$ un compact associé à Λ. Il existe $\Lambda' \subset \Lambda$ ($\Lambda \setminus \Lambda'$ fini) et un couple de fermés disjoints de $\mathbf{T}^k$, (F_0, F_1), tels que, pour toute fonction $\varepsilon(\lambda)$ à valeur 0 ou 1, il existe $\xi \in K$, avec la propriété que $\xi(\lambda) \in F_{\varepsilon(\lambda)} (\lambda \in \Lambda')$ (cf. théorème 2.1 et remarque 2.3).

Supposons que G soit métrisable. Étant donné $\delta > 0$, K peut s'écrire

$$K = \bigcup_{j=1}^{N} K_j,$$

où les K_j sont des compacts de diamètre inférieur à δ. En utilisant la remarque 2.4, il est possible d'énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 3.2. — *Supposons* G *métrisable. Soit* Λ *un ensemble d'interpolation d'ordre* k. *Il existe un couple de fermés disjoints de* $\mathbf{T}^k$, (F_0, F_1) *tel que, quel que soit* $\delta > 0$, *il est possible de trouver* $\Lambda_\delta \subset \Lambda$ ($\Lambda \setminus \Lambda_\delta$ *fini*) *et un compact* $K_\delta \subset G^k$ *de diamètre inférieur à* δ *avec la propriété : pour toute fonction* $\varepsilon(\lambda)$ *à valeur* 0 *ou* 1, *il existe* $\xi \in K_\delta$ *tel que* $\xi(\lambda) \in F_{\varepsilon(\lambda)}$ $(\lambda \in \Lambda_\delta)$.

Soit $K \subset G^k$ un compact associé à un ensemble d'interpolation Λ. Pour $n = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbf{Z}^k$, désignons par π_n l'application continue

$$\begin{gathered}(x_1, \ldots, x_k) \to n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k. \\ G^k \to G.\end{gathered}$$

Supposons qu'il existe un ensemble dénombrable d'éléments de G, $(y_i)_{i=1}^{\infty}$, tels que K soit de la forme

$$K \subset \bigcup_{\substack{i=1 \\ n \in Z^k}}^{\infty} \pi_n^{-1}(\{y_i\}). \tag{1}$$

alors (remarque 2.4) il existe un $i = i_0$ et un $n = n_0$, tels que

$$K \cap \pi_{n_0}^{-1}(\{y_{i_0}\})$$

est un compact associé à Λ. Nous pouvons ensuite utiliser la proposition 2, chapitre v, de [1], ainsi que le corollaire de cette proposition pour obtenir le résultat suivant.

THÉORÈME 3.3. — *Supposons le groupe* G *divisible et sans torsion. Soit* Λ *un ensemble d'interpolation infini. Il existe une décomposition finie* $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{N} \Lambda_j$, *telle que, pour tout* j $(1 \leqslant j \leqslant N)$, Λ_j *est d'ordre* $k_j \geqslant 1$, *et aucun compact* $K \subset G^{k_j}$ *associé à* Λ_j, *n'est de la forme* (1).

DÉFINITION 3.1. — *Étant donné* $\Lambda \subset \Gamma$ *et un ouvert* U *de* T^k, *nous écrirons*

$$H_U^\Lambda = \{\xi \in G^k | \xi(\Lambda) \cap U = \varnothing\}.$$

Cette définition généralise, d'une certaine façon, la notion classique d'ensemble de Rajchman (cf. [10], p. 58). Remarquons aussi qu'il résulte de la définition que H_U^Λ est un ensemble fermé (éventuellement vide).

Revenons au résultat du théorème 2.1 avec les mêmes notations. Soit $\xi \in K$ tel que $\xi(\lambda) \in F_{\varepsilon(\lambda)}$ $(\lambda \in \Lambda')$, pour une fonction $\varepsilon(\lambda)$ à valeur 0 ou 1. Soit U le complémentaire de $F_0 \cup F_1$. Il est évident que $\xi \in H_U^{\Lambda'}$. Autrement dit la conclusion du théorème 2.1 tient encore si l'on remplace K par $K \cap H_U^{\Lambda'}$. Nous pouvons retenir l'énoncé suivant.

THÉORÈME 3.4. — *Soit* $\Lambda \subset \Gamma$ *un ensemble d'interpolation d'ordre* k. *Il existe* $\Lambda' \subset \Lambda$ $(\Lambda \setminus \Lambda'$ *fini*) *et un ouvert* U *de* $\mathbf{T}^k$ *tel que* $H_U^{\Lambda'}$ *contient un compact associé à* Λ.

2. *Mesures portées par les ensembles* $H_U^{\Lambda'}$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{T}^k$. Il existe $\varphi \in A(\mathbf{T}^k)$, à valeurs réelles, telle que $\hat{\varphi}(0) = 0$ et $\varphi(t) > \varepsilon > 0$ $\left(t \in \complement(U)\right)$. Quel que soit $\lambda \in \Lambda$ et $\xi \in H_U^\Lambda$, nous aurons donc

$$F(\xi, \lambda) = \varphi(\xi(\lambda)) > \varepsilon.$$

Et, pour toute mesure μ positive de masse 1, portée par H_U^Λ,

$$\int F(\xi, \lambda)\, d\mu\, (\xi) > \varepsilon.$$

Écrivons

$$\varphi(t) = \varphi(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{n \in \mathbf{Z}^k} a_{n_1, \ldots, n_k} e^{(n_1 t_1 + \cdots + n_k t_k)}$$

$$(n = (n_1, \ldots, n_k)).$$

Alors
$$\int F(\xi,\ \lambda)\ d\mu\ (\xi) = \sum_{n\in \mathbf{Z}^k} a_{n_1,\dots,n_k}\hat{\mu}(n_1\lambda,\ \dots,\ n_k\lambda).$$

Soit N entier positif (indépendant de μ) tel que
$$\sum_{|n|>N} |a_{n_1,\dots,n_k}| < \varepsilon/2$$
$$(|n| = |n_1| + \cdots + |n_k|).$$

Posons
$$\eta = \frac{\varepsilon}{2\Sigma|a_{n_1,\dots,n_k}|}.$$

Il est impossible que nous ayons, pour un $\lambda \in \Lambda$,
$$\hat{\mu}(n_1\lambda,\ \dots,\ n_k\lambda) \leqslant \eta$$
quel que soit $n \neq 0$ $(|n| \leqslant N)$. Pour $n \in \mathbf{Z}^k$, désignons par $\mu_n = \pi_n(\mu)$ la mesure sur G, image de μ par l'application π_n
$$(x_1,\ \dots,\ x_k) \to n_1x_1 + \cdots + n_kx_k$$
$$G^k \to G.$$
On vérifie que
$$\hat{\mu}_n(\lambda) = \hat{\mu}(n_1\lambda,\ \dots,\ n_k\lambda).$$

Il est impossible que nous ayons, pour un $\lambda \in \Lambda$, et pour tout $n \neq 0$ $(|n| \leqslant N)$
$$|\hat{\mu}_n(\lambda)| \leqslant \eta.$$
Donc, à tout $\lambda \in \Lambda$ il correspond $n(\lambda) \neq 0$ $(|n(\lambda)| \leqslant N)$ tel que
$$\hat{\mu}_{n(\lambda)}(\lambda) > \eta.$$
Posons
$$\Lambda_n = \{\lambda \in \Lambda | n(\lambda) = n\} \quad (n \neq 0,\ |n| \leqslant N),$$
alors
$$\Lambda = \bigcup_{\substack{|n| \leqslant N \\ n\neq 0}} \Lambda_n$$
et
$$|\hat{\mu}_n(\lambda)| > \eta \quad (\lambda \in \Lambda_n).$$

Théorème 3.5. — *Si* μ *est une mesure positive non triviale portée par un ensemble* $H_{U}^{\Lambda} \subset G^k$, *il existe une décomposition* *finie de* Λ,

$$\Lambda = \bigcup_{\substack{|n| \leqslant N \\ n \neq 0}} \Lambda_n,$$

telle que, pour tout n $(n \neq 0 \; |n| \leqslant N)$,

$$\inf_{\lambda \in \Lambda_n} |\widehat{\pi_n(\mu)}\ (\lambda)| > 0,$$

où $\pi_n(\mu)$ *désigne la mesure image de* μ *par l'application* π_n $(n = (n_1, \ldots, n_k))$:

$$\begin{gathered}(x_1, \ldots, x_k) \rightarrow n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k \\ G^k \rightarrow G.\end{gathered}$$

4. Théorèmes d'existence.

Soit K un compact de G^k. Existe-t-il un ensemble d'interpolation infini $\Lambda \subset \Gamma$, qui admet K comme compact associé? Nous verrons que, si K est « assez épais », la réponse est affirmative. En fait, une condition nécessaire est que K soit non dénombrable (théorème 3.1). Si G est un groupe métrisable, cette condition s'avère suffisante (remarque 4.2). Les résultats du paragraphe 1 permettent de préciser l'association d'un compact à un ensemble d'interpolation et d'établir certains théorèmes d'existence (paragraphes 2 et 3).

1. Théorème 4.1. — *Supposons* Γ *connexe non compact. Soit* K *un compact de* G *qui porte une mesure diffuse non triviale. Soit*

$$(I^j_{k_j})_{\substack{j=1,2\ldots \\ k_j=1,\ldots,n_j}}$$

une famille de fermés de $\mathbf{T}$, *d'intérieur non vide. Il existe un ensemble infini* $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \subset \Gamma$, *tel que, pour un choix arbitraire de* $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ $(1 \leqslant k_j \leqslant n_j)$, *il existe* $\xi \in K$ *pour lequel* $\xi(\lambda_j) \in I^j_{k_j}$ $(j = 1, \ldots)$.

Nous utiliserons, dans la démonstration, le lemme suivant.

Lemme. — *Soit* $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ *des mesures diffuses sur* G, $n_1, \ldots, n_p$, *des entiers non tous nuls. Alors*

$$\mathfrak{M}_{\gamma}\{\hat{\sigma}_1(n_1\gamma) \ldots \hat{\sigma}_p(n_p\gamma)\} = 0.$$

[$\mathfrak{M}_{\gamma}$ désigne une moyenne sur Γ, telle qu'elle est définie dans [3], p. 118].

Supposons, par exemple, que $n_1 \neq 0$. Nous pouvons écrire

$$|\mathfrak{M}_{\gamma}\{\hat{\sigma}_1(n_1\gamma) \dots \hat{\sigma}_p(n_p\gamma)\}|^2 \leqslant \mathfrak{M}_{\gamma}|\hat{\sigma}_1(n_1\gamma)|^2 . \|\sigma_2\|^2 \dots \|\sigma_p\|^2.$$

Soit σ_1' la mesure image de σ_1 par l'application

$$x \to n_1 x.$$

On vérifie que $\hat{\sigma}_1'(\gamma) = \hat{\sigma}_1(n_1\gamma)$. De plus, G étant sans torsion, la mesure σ_1' est diffuse. Par suite

$$\mathfrak{M}_{\gamma}|\hat{\sigma}_1(n_1\gamma)|^2 = \mathfrak{M}_{\gamma}|\hat{\sigma}_1'(\gamma)|^2 = 0$$

ce qui démontre la propriété.

Pour $\gamma \in \Gamma$ nous poserons

$$\mathrm{E}_{\gamma}^{j, k_j} = \{x \in \mathrm{K} \quad (x, \gamma) \in \mathrm{I}_{k_j}^j\}.$$

Nous allons construire une suite infinie $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \subset \Gamma$, telle que, pour un choix quelconque des k_j $(1 \leqslant k_j \leqslant n_j,\ j = 1, \dots)$,

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}_{\lambda_j}^{j, k_j} \neq \emptyset. \tag{1}$$

Les ensembles $\mathrm{E}_{\lambda_j}^{j, k_j}$ étant compacts, (1) est équivalent à

$$\bigcap_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{E}_{\lambda_j}^{j, k_j} \neq \emptyset \tag{2}$$

pour tout entier $\mathrm{N} > 0$.

Considérons des fonctions $\Psi_{j, k_j} \in \mathrm{A}(\mathrm{T})$, dont les supports sont contenus dans les $\mathrm{I}_{k_j}^j$ $(1 \leqslant k_j \leqslant n_j,\ j = 1, \dots)$ respectivement, et telles que $\hat{\Psi}_{j, k_j}(0) \neq 0$. Pour $\gamma \in \Gamma$, écrivons

$$\mathrm{F}_{\gamma}^{j, k_j} = \{x \in \mathrm{G} | \Psi_{j, k_j}((x, \gamma)) \neq 0\}.$$

Pour que (2) soit réalisée, il suffit que l'ensemble $\bigcap_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{F}_{\lambda_j}^{j, k_j}$ ait une intersection non vide avec K, ou encore qu'il soit de σ-mesure non nulle, pour une mesure positive σ portée par $\mathrm{K}(\sigma \neq 0)$. Dans ce dernier cas nous dirons que la propriété $\mathrm{P}(k_1, \dots, k_{\mathrm{N}}; \sigma)$ est vraie.

Nous allons construire $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ par récurrence, de façon que, pour tout entier $N > 0$, les propriétés $P(k_1, \ldots, k_N;\ \sigma_{k_1,\ldots,k_N})$ $(1 \leqslant k_j \leqslant n_j;\ 1 \leqslant j \leqslant N)$ soient vraies, avec des mesures $\sigma_{k_1,\ldots,k_N}$ positives, diffuses, portées par K.

1) Il existe λ_1 tel que les propriétés $P(k_1;\ \sigma)$ $(1 \leqslant k_1 \leqslant n_1)$ soient vraies, si l'on choisit pour σ une mesure positive, diffuse, non triviale, portée par K. En effet, si $P(k_1, \sigma)$ n'est pas vérifiée,

$$\int \Psi_{1,k_1}((x,\ \lambda_1))\, d\sigma(x) = 0.$$

S'il était vrai que, pour tout $\lambda_1 \in \Gamma$, les propriétés $P(k_1, \sigma)$ $(1 \leqslant k_1 \leqslant n_1)$ ne sont pas toutes vérifiées, nous aurions

$$\prod_{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1} \int \Psi_{1,k_1}((x,\ \gamma))\, d\sigma(x) \equiv 0 \tag{3}$$

Or si $\Psi \in A(\mathbf{T})$ s'écrit

$$\Psi(t) = \sum_n \hat{\Psi}(n) e^{int},$$

alors,

$$\int \Psi((x,\ \gamma))\, d\sigma(x) = \sum_n \hat{\Psi}(n)\hat{\sigma}(n\lambda).$$

Il résulte aisément du lemme, que

$$\mathfrak{M}_{\gamma}\left\{ \prod_{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1} \int \Psi_{1,k_1}((x,\ \gamma))\, d\sigma(x) \right\} = \prod_{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1} \hat{\Psi}_{1,k_1}(0) . \hat{\sigma}(0) \neq 0$$

ce qui fournit une contradiction.

2) Supposons déterminés $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ de façon que les propriétés $P(k_1, \ldots, k_N;\ \sigma_{k_1,\ldots,k_N})$ $(1 \leqslant k_j \leqslant n_j;\ 1 \leqslant j \leqslant N)$ soient vraies, pour des mesures $\sigma_{k_1,\ldots,k_N}$ positives, diffuses, non triviales, portées par K. $P(k_1, \ldots, k_N, \sigma_{k_1,\ldots,k_N})$ signifie que l'ensemble $\bigcap_{j=1}^{N} F_{\lambda_j}^{j,k_j}$ est de $\sigma_{k_1,\ldots,k_N}$ - mesure non nulle. Nous pouvons donc supposer, sans restriction, que $\sigma_{k_1,\ldots,k_N}$ est concentrée sur cet ensemble. Alors, si, pour un choix de λ_{N+1}, la propriété $P(k_1, \ldots, k_{N+1};\ \sigma_{k_1,\ldots,k_N})$ n'est pas vraie, c'est que

$$\int \Psi_{N+1,k_{N+1}}((x,\ \lambda_{N+1}))\, d\sigma_{k_1,\ldots,k_N}(x) = 0.$$

Supposons qu'il soit impossible de choisir $\lambda_{N+1} \in \Gamma$ de façon que toutes les propriétés $P(k_1, \ldots, k_{N+1}, \sigma_{k_1, \ldots, k_N})$ soient vraies. Nous aurions

$$\prod_{\substack{1 \leqslant k_j \leqslant n_j \\ 1 \leqslant j \leqslant N+1}} \int \Psi_{N+1, k_{N+1}}((x, \gamma))\, d\sigma_{k_1, \ldots, k_N}(x) \equiv 0$$

et par un argument analogue à celui de 1), nous conclurions à une contradiction. Ceci achève la démonstration du théorème 4.1.

Remarque 4.1. — L'hypothèse que Γ est connexe n'est utile que pour la démonstration du lemme et peut être affaiblie. Il suffit de supposer que l'ensemble des éléments d'ordre borné, de G, est dénombrable (par exemple $G = \mathbf{T}$), pour que la méthode demeure valable. Les résultats énoncés dans la suite, dans le cas où Γ est connexe, demeurent également valables avec cette hypothèse.

D'autre part il est possible de démontrer un résultat analogue au théorème 4.1, si K est un compact de G^k et les $I^j_{k_j}$ sont des fermés d'intérieur non vide, de $\mathbf{T}^k$. Il suffit de supposer alors que K porte une mesure non triviale dont toutes les images sur G par les applications

$$(x_1, \ldots, x_k) \to n_1x_1 + \cdots + n_kx_k \quad (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbf{Z}^k,$$

sont diffuses. Mais le théorème 4.1 suffit pour obtenir le résultat suivant.

THÉORÈME 4.2. — *Supposons* Γ *connexe non compact. Soit* K *un compact de* G^k *qui porte une mesure diffuse non triviale. Quel que soit* Δ *voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{T}^k$ *vérifiant* $\Delta + \Delta \neq \mathbf{T}^k$, *il existe un ensemble d'interpolation infini, dans* Γ, *qui possède la propriété* $P(\Delta, K)$.

En réalité il suffit de démontrer la propriété pour $k = 1$. En effet si $k > 1$, l'une des projections de K sur l'un des groupes facteurs de G^k est un compact K' qui porte une mesure diffuse non triviale. Sinon, soit σ la mesure diffuse non triviale portée par K; les k projections de σ sur les groupes facteurs seraient atomiques et σ serait concentrée sur un sous-ensemble dénombrable de K. D'autre part, soit Δ' une projection de Δ sur l'un des groupes facteurs de

$\mathbf{T}^k$; $\overline{\Delta' + \Delta'} \neq \mathbf{T}$. Si le théorème 4.2 est vrai pour $k = 1$, il existe un ensemble d'interpolation infini, dans Γ, qui possède la propriété $P(\Delta', K')$; on se convaincra aisément, en se référant aux définitions, qu'il a aussi la propriété $P(\Delta, K)$.

Supposons que $k = 1$. Puisque $\overline{\Delta + \Delta} \neq \mathbf{T}$, il est possible de trouver I_1 et I_2 fermés d'intérieur non vide, de $\mathbf{T}$, tels que

$$[I_1 + \Delta] \cap [I_2 + \Delta] = \emptyset.$$

Appliquons le théorème 4.1 en prenant, pour tout j, $n_j = 2$ et $I_1^j = I_1$, $I_2^j = I_2$. Pour toute partition (Λ_1, Λ_2) de Λ, il existe $\xi \in K$ tel que

$$[\xi(\Lambda_1) + \Delta] \cap [\xi(\Lambda_2) + \Delta] = \emptyset.$$

Autrement dit, Λ est un ensemble d'interpolation et possède la propriété $P(\Delta, K)$.

Remarque 4.2. — Le théorème 4.2 est une réciproque du théorème 1.1. On sait que tout compact associé à un ensemble d'interpolation infini, est nécessairement non dénombrable (théorème 3.1). Inversement si l'on se donne K compact non dénombrable de G^k, et si G est supposé métrisable, on peut affirmer que K porte une mesure diffuse non triviale, car il contient un parfait homéomorphe à l'ensemble de Cantor. Ainsi, dans ce cas, tout compact non dénombrable est associé à un ensemble d'interpolation infini.

Remarque 4.3. — Nous avons obtenu des théorèmes d'existence sans imposer de restriction à Λ. On peut se demander si le théorème 4.2 subsiste lorsqu'on impose $\Lambda \subset E$, où E est un ensemble infini non compact de Γ. Il est facile de donner un contre-exemple. En effet, si $K \subset G$ est un compact de Kronecker, il existe une suite $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma$ telle que

$$(x, \gamma_n) \to -1$$

uniformément sur K et

$$\gamma_n \to \infty.$$

Si nous prenons comme ensemble E la suite $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$, aucune sous-suite infinie de E ne peut être un ensemble d'interpolation de compact associé K.

2. *Interpolation par des fonctions périodiques.*

Dans [5] J. S. Lipinski construit une classe de suites Λ de nombres réels, ayant la propriété que toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda)$ est prolongeable en une fonction périodique continue, sur **R**. Il est évident que Λ est un ensemble d'interpolation d'ordre 1; mais il existe des ensembles d'interpolation d'ordre 1 qui n'ont pas cette propriété. Par exemple, une suite de Hadamard $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ $(\lambda_{j+1}/\lambda_j \geqslant q > 3)$ est un ensemble d'interpolation d'ordre 1 [4]; mais nous démontrerons au chapitre suivant, que, pour une suite infinie ayant la propriété de Lipinski, λ_{j+1}/λ_j ne peut pas être borné. L'ensemble des périodes des fonctions d'interpolation est nécessairement non dénombrable si Λ est infini. En sens inverse nous pouvons énoncer le résultat général suivant.

THÉORÈME 4.4. — *Supposons* Γ *connexe, non compact. Soit* K *un compact de* G, *qui porte une mesure diffuse non triviale. Il existe un ensemble d'interpolation infini* $\Lambda \subset \Gamma$, *tel que toute fonction de* $\mathcal{B}(\Lambda)$ *est prolongeable en une fonction presque-périodique dont le spectre est contenu dans le sous-groupe engendré par un élément de* K.

Nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME. — *Soit* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *une suite de nombres réels positifs non nuls, telle que* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < 2\pi$. *Soit* $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ *une suite bornée quelconque de nombres réels. Il existe sur* **T** *identifié au cercle de rayon* 1, *une suite d'intervalles* J_k *de longueur* $|J_k| = a_k$ *et une fonction* φ *continue sur* **T**, *telle que* $\varphi(t) = b_k$ $(t \in J_k)$.

C'est un exercice facile : il existe une démonstration immédiate que nous laissons à la sagacité du lecteur.

Donnons-nous une suite $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ de nombres réels positifs non nuls telle que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < 2\pi$. Pour chaque j, considérons un recouvrement fini de **T** par des intervalles fermés d'intérieur non vide, $I_1^j, \ldots, I_{n_j}^j$, assez petits pour que tout intervalle de longueur a_j contienne au moins l'un d'eux. Soit K un compact de G satisfaisant à l'hypothèse du théorème 4.1. Il existe un ensemble d'interpolation infini $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ possédant la propriété du théorème 4.1 relativement à la famille $(I_{k_j}^j)_{\substack{j=1,2,\dots \\ k_j=1,\dots,n_j}}$ considérée.

Soit b une fonction à valeurs réelles de $\mathcal{B}(\Lambda)$. Posons $b(\lambda_j) = b_j$. D'après le lemme il existe U_j intervalles de $\mathbf{T}$ de longueur a_j, et une fonction φ continue sur $\mathbf{T}$, telle que $\varphi(t) = b_j$ si $t \in U_j$. Pour chaque indice j déterminons k_j $(1 \leqslant k_j \leqslant n_j)$ de façon que $I_{k_j}^j \subset U_j$. Il existe $\xi \in K$ tel que

$$\xi(\lambda_j) \in I_{k_j}^j \subset U_j.$$

Par suite, la fonction presque-périodique continue $\varphi \circ \xi$ interpole b. Le spectre de $\varphi \circ \xi$ est contenu dans le sous-groupe de G engendré par l'élément ξ.

Corollaire. — *Soit* K *un compact non dénombrable de* $\mathbf{R}$. *Il existe un ensemble d'interpolation infini* $\Lambda \subset \mathbf{R}$, *tel que toute fonction de* $\mathcal{B}(\Lambda)$ *est prolongeable en une fonction périodique continue, à période dans* K.

En effet si $\mathcal{T}$ est la période d'une fonction périodique continue, son spectre est contenu dans le sous-groupe engendré par $\dfrac{2\pi}{\mathcal{T}}$ et inversement. Or l'image de K par l'application $x \to \dfrac{2\pi}{x}$ contient un compact non dénombrable qui porte une mesure diffuse non triviale, et il suffit d'appliquer le théorème précédent.

3. *Familles* (I_0) *et compacts associés.*

Soit $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de type (I_0) dans Γ. Pour une partition (Λ_0, Λ_1) de Λ, écrivons

$$E_{\Lambda_0} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} E_\lambda,$$
$$E_{\Lambda_1} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} E_\lambda.$$

Rappelons la définition suivante donnée dans [1] et qui généralise la définition 1.3.

DÉFINITION 4.1. — *Soit* Δ *un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{T}^k$, K *un compact de* G^k. *Nous dirons que* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *possède la propriété* $P^*(\Delta, K)$ *si, quelle que soit la partition* (Λ_0, Λ_1) *de* Λ, *il existe* $\xi \in K$ *pour lequel*

$$[\xi(E_{\Lambda_0}) + \Delta] \cap [\xi(E_{\Lambda_1}) + \Delta] = \emptyset.$$

On démontre dans [1] un résultat analogue au théorème 1.1.

DÉFINITION 4.2. — *Nous dirons qu'un compact* $K \subset G^k$ *est associé à* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *s'il existe* $\Lambda' \subset \Lambda$ $(\Lambda\setminus\Lambda'$ *fini) et* Δ *voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{T}^k$ *tels que* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'}$ *ait la propriété* $P^*(\Delta, K)$.

Certaines propriétés des familles (I_0) sont liées aux compacts associés (cf. [1]).

Nous avons rappelé dans l'introduction (théorème 1.2) que l'on peut élargir un ensemble d'interpolation Λ en une famille (I_0) $(\lambda + \Omega)_{\lambda\in\Lambda}$ où Ω désigne un voisinage de 0 dans Γ, qui peut être

$$\Omega = \bigcap_{\xi\in K} \xi^{-1}(\Delta')$$

si $\overline{\Delta'} \subset \mathring{\Delta}$ et (Δ, K) est un couple associé à Λ. Il est facile de voir que, si Δ'' est un voisinage de 0 dans $\mathbf{T}^k$ tel que $\Delta' + \Delta'' \subset \Delta$, $(\Omega + \lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ possède la propriété $P^*(\Delta'', K)$. Remarquons alors que K qui était associé à Λ est aussi associé à $(\lambda + \Omega)_{\lambda\in\Lambda}$.

THÉORÈME 4.5. — *Supposons* Γ *connexe non compact. Soit* U *un voisinage relativement compact de* 0 *dans* Γ. *Il existe un voisinage de* 0 *dans* G, V, *tel que tout compact* $K \subset V$ *et portant une mesure diffuse non triviale, est associé à une famille* (I_0) $(\lambda + U)_{\lambda\in\Lambda}$ $(\Lambda$ *infini*).

Donnons-nous Δ et Δ' voisinages de 0 dans $\mathbf{T}$, tels que $\overline{\Delta'} \subset \mathring{\Delta}$ et $\overline{\Delta + \Delta} \neq \mathbf{T}$. L'ensemble

$$V = \{x \in G \mid \forall\gamma \in U, \quad (x, \gamma) \in \Delta'\}$$

est un voisinage de 0 dans G. Soit un compact $K \subset V$, portant une mesure diffuse non triviale. Il existe un ensemble d'interpolation infini $\Lambda \subset \Gamma$ qui admet (Δ, K) comme couple associé. De plus

$$U \subset \bigcap_{\xi \in K} \xi^{-1}(\Delta').$$

Théorème 4.6. — *Supposons* Γ *connexe non compact. Tout compact d'intérieur non vide de* G *est associé à une famille* $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *de type* (I_0) *avec* Λ *infini et les* E_λ *de mesure de Haar infinie.*

Soit W un compact de G d'intérieur non vide. G étant supposé non discret et sans torsion, W contient un ensemble de Kroneker homéomorphe à l'ensemble de Cantor ([3], p. 100). Soit K cet ensemble. Il existe $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma$, tel que

$$(x, \gamma_n) \rightarrow -1$$

uniformément sur K et

$$\gamma_n \rightarrow \infty.$$

Soit Δ, Δ' et Δ'' voisinages de 0 dans **T** tels que $\overline{\Delta + \Delta'} \subset \mathring{\Delta}''$ et $\overline{\Delta'' + \Delta''} \neq \mathbf{T}$. Soit n_0 tel que $(x, \gamma_n - \gamma_{n_0}) \in \Delta$ pour $x \in K$ et $n > n_0$. K porte une mesure diffuse non triviale. Il existe donc $\Lambda \subset \Gamma$, ensemble d'interpolation infini admettant (Δ'', K) comme couple associé. D'autre part

$$\Omega = \bigcap_{\xi \in K} \xi^{-1}(\Delta + \Delta')$$

est non relativement compact puisqu'il contient $(\gamma_n - \gamma_{n_0})_{n > n_0}$. En fait Ω est de mesure de Haar infinie. En effet en même temps que $\gamma_n - \gamma_{n_0}$ il contient $\gamma_n - \gamma_{n_0} + \bigcap_{\xi \in K} \xi^{-1}(\Delta')$. On vérifie que la famille $(\lambda + \Omega)_{\lambda \in \Lambda}$ satisfait aux propriétés du théorème 4.6.

Exemple. — Pour illustrer le théorème 4.6, donnons un exemple simple, dans R, d'une famille (I_0) infinie, dont chaque composante est de mesure de Lebesgue infinie.

La suite $(10^j)_{j=1}^{\infty}$ est un ensemble d'interpolation d'ordre 1 (cf. [1], [4]). On peut démontrer directement que, si l'on pose $E_j = (10^j + 2.10^k)_{k=1}^{\infty}$, la famille $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ est une famille (I_0), et, d'après le th. 1, chap. III [1] il existe un intervalle U tel que la famille $(E_j + U)_{j=1}^{\infty}$ soit aussi de type (I_0) (on peut aussi le démontrer directement). Ainsi chaque composante de la famille est une suite lacunaire infinie d'intervalles égaux.

5. Ordre des ensembles d'interpolation $(\Gamma = \mathbf{R}^n)$.

1. *Suites d'interpolation dans* R.

Soit $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ $(\lambda_j < \lambda_{j+1})$ une suite de nombres réels positifs, qui est d'interpolation. Nous savons, par exemple, que, si $\lambda_{j+1}/\lambda_j \geqslant 3$, l'ordre de la suite d'interpolation est égal à 1 [7]. Par ailleurs Ryll-Nardzewski démontre que, pour toute suite $\lambda_j = 0(2^j)$, les idempotents de $\mathcal{B}(\Lambda)$ ne peuvent pas tous être interpolés par des fonctions périodiques [6], ce qui revient à dire que son ordre est supérieur à 1. Nous nous proposons ici de relier l'ordre de Λ à sa vitesse de croissance. Par une méthode qui englobe, d'une certaine manière, celle de [6], nous allons établir la propriété suivante.

Théorème 5.1. — *Si* $\lambda_j = 0(2^{j/k})$ *l'ordre de* Λ *est strictement supérieur à* k.

Ceci montre en particulier, qu'il existe des suites d'interpolation d'ordre arbitrairement grand. D'autre part, aucune suite qui croît moins vite que toute suite de Hadamard, n'est d'interpolation.

Soit Λ un ensemble d'interpolation d'ordre k. Il existe $\Lambda' \subset \Lambda$ $(\Lambda \setminus \Lambda'$ fini), F_0, F_1 fermés disjoints de $\mathbf{T}^k$ et K compact de $\mathbf{R}^k$ tels que, pour toute fonction $\varepsilon(\lambda)$ à valeur 0 ou 1, il existe $\xi \in K$, avec la propriété que $\xi(\lambda) \in F_{\varepsilon(\lambda)}$ $(\lambda \in \Lambda')$ (théorème 2.1). De plus, on peut supposer que $K \subset H^{\Lambda'}_{\complement(F_0 \cup F_1)}$, (théorème 3.4). De ce dernier fait il résulte d'abord que K est de mesure nulle (théorème 6.2). D'autre part, nous identifions l'ensemble des fonctions $\varepsilon(\lambda)$ définies sur Λ' et à valeur 0 ou 1 avec l'espace compact $\{0, 1\}^{\Lambda'}$ lui-même homéomorphe au groupe compact $(\mathbf{Z}/2.\mathbf{Z})^{\Lambda'}$. Alors, à tout élément $\xi \in K$ il correspond un élément $\varepsilon = \varepsilon_\xi \in (\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z})^{\Lambda'}$ par la relation

$$\xi(\lambda) \in F_{\varepsilon(\lambda)} \quad (\lambda \in \Lambda').$$

L'application

$$\begin{gathered}\xi \to \varepsilon_\xi \\ \mathrm{K} \to (\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z})^{\Lambda'}\end{gathered}$$

est continue et surjective.

Nous supposerons, pour la commodité de l'écriture que $\Lambda' = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$. Si $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbf{R}^k$, nous noterons

$$|x| = \sup_{i=1,\ldots,k} |x_i|.$$

Soit Δ voisinage de 0 dans $\mathbf{T}^k$ tel que

$$[\mathrm{F}_0 + \Delta] \cap [\mathrm{F}_1 + \Delta] = \emptyset.$$

Il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de Δ, telle que, pour un indice j donné, la relation

$$|\xi - \xi'| < c/\lambda_j \quad (\xi,\ \xi' \in \mathrm{K})$$

entraîne

$$\xi(\lambda_j) - \xi'(\lambda_j) \in \Delta$$

et donc

$$\varepsilon_\xi(\lambda_j) = \varepsilon_{\xi'}(\lambda_j).$$

Soit P un pavé carré de $\mathbf{R}^k$ de côté δ vérifiant

$$c/\lambda_{\mathrm{N}+1} \leqslant \delta < c/\lambda_{\mathrm{N}}.$$

Quel que soit $\xi \in \mathrm{P} \cap \mathrm{K}$,

$$\varepsilon_\xi(\lambda_j) = \varepsilon_j \quad (j = 1,\ \ldots,\ \mathrm{N})$$

avec des ε_j indépendants de ξ ($\varepsilon_j = 0,\ 1$). La mesure de Haar dans $(\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z})^{\Lambda'}$ de l'image de $\mathrm{P} \cap \mathrm{K}$ par l'application $(\xi \to \varepsilon_\xi)$ est majorée par $\frac{1}{2^{\mathrm{N}}}$. Si nous faisons l'hypothèse que $\lambda_{\mathrm{N}} = 0\left(2^{\frac{\mathrm{N}}{k}}\right)$,

$$\frac{1}{2^{\mathrm{N}}} \leqslant \frac{c'}{(\lambda_{\mathrm{N}+1})^k} \leqslant c''\delta^k,$$

avec des constantes c' et c'' indépendantes de δ. Donc la mesure de Haar de l'image de $\mathrm{P} \cap \mathrm{K}$ dans $(\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z})^{\Lambda'}$ est majorée, à une constante près, par la mesure de Lebesgue de P dans $\mathbf{R}^k$. Comme K est de mesure de Lebesgue nulle, l'image de K serait de mesure de Haar nulle dans $(\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z})^{\Lambda'}$, ce qui fournit une contradiction, puisque l'image de K est le groupe $(\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z})^{\Lambda'}$ tout entier.

2. *Interpolation des fonctions à q valeurs.*

Il existe des ensembles $\Lambda \subset \mathbf{R}$ tels que toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda)$ à q valeurs est prolongeable en une fonction périodique continue. Il suffit d'adapter le théorème 2.1, de façon évidente, pour montrer que cette propriété entraîne la suivante : il existe $\Lambda' \subset \Lambda$ ($\Lambda \setminus \Lambda'$ fini), $F_1, \ldots, F_q$ fermés de $\mathbf{T}$, deux à deux disjoints, et K compact de $\mathbf{R}$, tels que, pour toute fonction $\varepsilon(\lambda)$ à valeurs dans $\{1, \ldots, q\}$, il existe $\xi \in K$ pour lequel $\xi(\lambda) \in F_{\varepsilon(\lambda)}$ $(\lambda \in \Lambda')$.

Il est intéressant de considérer, pour chaque entier $q > 1$, un ordre k_q d'un ensemble d'interpolation Λ d'un groupe Γ. Ce sera le plus petit des entiers $p > 0$ pour lequel il existe $\Lambda' \subset \Lambda$ ($\Lambda \setminus \Lambda'$ fini), Δ voisinage de 0 dans $\mathbf{T}^p$, tels que, quel que soit la partition $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_q)$ de Λ, il existe $\xi \in G^p$, pour lequel

$$[\xi(\Lambda_i) + \Delta] \cap [\xi(\Lambda_j) + \Delta] = \emptyset$$
$$(i, j = 1, \ldots, q;\ i \neq j).$$

L'ordre ordinaire de Λ est égal à k_2. Il est facile de voir que

$$k_q \leqslant (q - 1)k_2.$$

D'autre part nous pouvons obtenir dans le cas de $\mathbf{R}$ un théorème analogue au théorème 5.1. Il suffit de remplacer dans la démonstration, $\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$.

THÉORÈME 5.2. — *Pour une suite de nombres réels $\lambda_j = 0(q^{j/k})$, l'ordre k_q est strictement supérieur à k.*

Il résulte de là notamment que, si toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda)$ est interpolable par une fonction périodique, nécessairement λ_{j+1}/λ_j n'est pas borné.

3. *Suites d'interpolation dans $\mathbf{R}^n$.*

Si nous reprenons la démonstration du théorème 1, le raisonnement est le même, mais $\mathbf{R}^k$ est remplacé par $\mathbf{R}^{kn}$.

De sorte que, en tenant compte également des remarques précédentes, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 5.3. — *Soit* $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ *une suite de points de* $\mathbf{R}^n$. *Si* $|\lambda_j| = 0(q^{j/k.n})$ *l'ordre* k_q *de* Λ *est strictement supérieur à* k.

Ainsi notamment, pour une même condition de croissance, l'ordre d'une suite peut être moindre dans $\mathbf{R}^2$ que dans $\mathbf{R}$. Par exemple la suite $(2^j)_{j=1}^{\infty}$ est d'ordre > 1 dans $\mathbf{R}$ (en fait elle est d'ordre 2). Mais il est aisé de se convaincre que la suite $(2, 0), (0, 2^2) \ldots (2^{2j-1}, 0)\ (0, 2^{2j}) \ldots$ est d'ordre 1 dans $\mathbf{R}^2$ (il suffit de savoir que (4^j) est d'ordre 1 dans $\mathbf{R}$). Néanmoins on ne peut espérer réduire l'ordre d'une suite $\Lambda \subset \mathbf{R}$ en plongeant $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$.

6. Mesures d'interpolation.

1. *Mesures d'interpolation diffuses.*

Soit $\Lambda \subset \Gamma$, un ensemble de Sidon. Toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda)$ peut-être interpolée par la transformée de Fourier d'une mesure bornée sur G, qui sera dite *mesure d'interpolation.* Si Λ est un ensemble d'interpolation, toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda)$ admet une mesure d'interpolation atomique; nous allons montrer, dans le cas $\Gamma = \mathbf{R}$, qu'elle admet aussi une mesure d'interpolation diffuse.

LEMME 1. — *Soit* $\Lambda \subset \Gamma$ *un ensemble de Sidon. Supposons qu'il existe une mesure diffuse sur* G, *telle que*

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} |\hat{\mu}(\lambda)| > 0.$$

alors toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda)$ *admet une mesure d'interpolation diffuse.*

Soit $b \in \mathcal{B}(\Lambda)$. Posons

$$c(\lambda) = b(\lambda)/\hat{\mu}(\lambda).$$

$c \in \mathcal{B}(\Lambda)$ et il existe une mesure bornée sur G, telle que

$$\hat{\nu}(\lambda) = c(\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda),$$

et par suite, $\sigma = \mu * \nu$ qui est diffuse, est une mesure d'interpolation pour b.

Lemme 2. — *Soit Λ un ensemble de Sidon qui admet une décomposition finie $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{N} \Lambda_j$. Supposons que, pour chaque ensemble de Sidon Λ_j les mesures d'interpolation peuvent être prises diffuses; alors il en est de même pour Λ.*

En effet, nous pouvons supposer les Λ_j deux à deux disjoints et $b \in \mathcal{B}(\Lambda)$ s'écrit

$$b = \sum_{j=1}^{N} b.c_j,$$

où c_j est la fonction caractéristique de Λ_j dans Λ. Soit ν_j une mesure diffuse d'interpolation pour $b|_{\Lambda_j}$, μ_j une mesure quelconque d'interpolation pour c_j. Alors

$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} \mu_j * \nu_j$$

est une mesure diffuse d'interpolation pour b.

Soit $\Lambda \subset \mathbf{R}$ un ensemble d'interpolation d'ordre k. Il existe $\Lambda' \subset \Lambda (\Lambda \diagdown \Lambda'$ fini) et un ouvert U de $\mathbf{T}^k$, tels que $\mathrm{H}_{\mathrm{U}}^{\Lambda'} \subset \mathbf{R}^k$ contient un compact K associé à Λ (théorème 3.4). Soit σ une mesure positive, non triviale portée par K. Reprenant les notations du théorème 3.5, Λ' admet une décomposition finie

$$\Lambda' = \bigcup_{\substack{|n| \leqslant N \\ n \neq 0}} \Lambda'_n$$

avec

$$\inf_{\lambda \in \Lambda'_n} |\widehat{\pi_n(\sigma)}\ (\lambda)| > 0 \quad (|n| \leqslant N,\ n \neq 0).$$

Supposons que l'on puisse choisir σ de façon que les mesures $\pi_n(\sigma)$ $(|n| \leqslant N,\ n \neq 0)$ soient diffuses. Alors chaque Λ'_n vérifie l'hypothèse du lemme 1; de plus $\Lambda \diagdown \Lambda'$ est fini, et le lemme 2 permet de conclure que toute fonction de $\mathcal{B}(\Lambda)$ admet une mesure d'interpolation diffuse.

Si Λ est infini (le cas Λ fini est trivial) K est non dénombrable (théorème 3.1), peut-être supposé parfait (à cause de la remarque 2.4) et contient un parfait P, homéomorphe à l'ensemble de Cantor, qui porte une mesure σ positive diffuse non triviale. Supposons que

$$\text{(1)} \qquad \text{card}\,\{P \cap \pi_n^{-1}\,(\{y\})\} \leqslant 1$$

quel que soit n ($|n| \leqslant N$, $n \neq 0$) et quel que soit $y \in \mathbf{R}$. Alors chaque π_n ($|n| \leqslant N$, $n \neq 0$) est un homéomorphisme de P sur son image, et, par suite, les mesures $\pi_n(\sigma)$ ($|n| \leqslant N$, $n \neq 0$) sont diffuses non triviales.

a) Supposons que K ne vérifie aucune condition du type

$$\text{(2)} \qquad K \subset \bigcup_{\substack{i=1 \\ |n| \leqslant N,\, n \neq 0}}^{\infty} \pi_n^{-1}(\{y_i\})$$

pour des $y_i \in \mathbf{R}$. Alors K contient un parfait qui satisfait la condition (1).

Nous nous bornerons à esquisser la démonstration. P sera défini de la manière suivante.

$$P = \bigcap_{j=1}^{\infty} P_j$$

avec

$$P_j = \bigcup_{\substack{\varepsilon_k = 1,2 \\ 1 \leqslant k \leqslant j}} P_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j}$$

et les $P_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j} \subset K$, sont des boules fermées, dans la topologie relative de K, deux à deux disjointes, de rayon tendant vers 0 ($j \to \infty$) et telles que

$$P_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}} \subset P_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j} \quad (\varepsilon_{j+1} = 1,\ 2).$$

Pour que (1) soit satisfaite, il suffit que, pour tout $j \geqslant 1$,

$$\text{(3)} \qquad \pi_n(P_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j}) \cap \pi_n(P_{\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_j}) = \emptyset$$

si

$$(\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_j) \neq (\varepsilon'_1,\ \ldots,\ \varepsilon'_j),$$

et quel que soit n ($|n| \leqslant N$, $n = 0$).

Supposons (3) réalisée pour un indice j. (3) sera réalisée pour $j+1$ si, quel que soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)$ il est possible de choisir $P_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j, 1}$ et $P_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j, 2}$ de façon que

$$\pi_n(P_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j, 1}) \cap \pi_n(P_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j, 2}) = \emptyset$$
$$(|n| \leqslant N, \; n \neq 0).$$

Il est aisé de voir que ceci est possible si $P_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j}$ ne vérifie pas une condition du type (2). Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir les $P_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j}$ $(j \geqslant 1)$ avec cette restriction. Bornons-nous à le montrer pour $j = 1$ (on n'aura aucune peine à poursuivre le raisonnement). Tout d'abord, il existe $a \in K$ tel qu'aucune boule fermée de K, de centre a, ne vérifie une condition du type (2). Sinon il serait possible de recouvrir K par une réunion finie de boules, chacune satisfaisant une condition du type (2), et il en serait de même de K, contrairement à l'hypothèse. Soit $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de boules fermées de K, de centre a et de rayon $\frac{1}{n}\cdot$ Prenons $P_1 = Q_n$ pour un n donné. Alors si, quel que soit P_2 disjoint de P_1, P_2 satisfait à une condition de type (2), il en serait de même de $K \setminus \mathring{Q}_{n-1}$. Ceci est impossible pour tout n, sinon comme

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K \setminus \mathring{Q}_{n-1},$$

il en serait de même, aussi, de K.

b) Supposons que K satisfasse à une condition du type (2). Utilisant le théorème 3.3, nous pouvons écrire Λ comme réunion finie d'ensembles pour lesquels le raisonnement précédent (*a*) est valable. Il suffit alors du lemme 2 pour conclure.

Théorème 6.1. — *Soit* $\Lambda \subset \mathbf{R}$ *un ensemble d'interpolation. Toute fonction de* $\mathcal{B}(\Lambda)$ *peut être interpolée par la transformée de Fourier d'une mesure diffuse.*

2. *Compacts propres pour un ensemble d'interpolation* $\Lambda \subset \mathbf{R}$.

Définition 6.2. — *Un ensemble fermé d'un groupe abélien localement compact, est dit de type* U^* *s'il ne porte aucune* *mesure dont la transformée de Fourier tend vers zéro à l'infini sur le groupe dual.*

THÉOREME 6.2. — *Tout ensemble d'interpolation* $\Lambda \subset \mathbf{R}$ *d'ordre* k, *possède un compact associé* $K \subset \mathbf{R}^k$ *de type* U^*.

Soit $\Lambda \subset \mathbf{R}$ un ensemble d'interpolation d'ordre k. Il existe $\Lambda' \subset \Lambda (\Lambda \setminus \Lambda'$ fini) et un ouvert U de $\mathbf{T}^k$ tel que $H_U^{\Lambda'}$ contient un compact K associé à Λ (théorème 3.4). Si K portait une mesure positive μ dont la transformée de Fourier tend vers zéro à l'infini, il en serait de même des $\pi_n(\mu)$ $(n \neq 0)$ ce qui est en contradiction avec le théorème 3.5 si Λ est infini (si Λ est fini le théorème 6.2 est évident). Il en résulte que K est de type U^* ([9] vol. 2 pages 145-160).

Si K est associé à Λ, il existe N entier positif tel que

$$L = \bigcup_{|n| \leqslant N} \pi_n(K)$$

est un compact propre pour l'ensemble de Sidon Λ, en reprenant les notations du théorème 1.5. Supposons que Λ est d'ordre 1. Si $K \subset \mathbf{R}$ est de type U^*, il en est de même de $\pi_n(K)$ pour tout n, et par suite L est de type U^*.

THÉORÈME 6.3. — *Si* $\Lambda \subset \mathbf{R}$ *est un ensemble de Sidon qui est d'interpolation d'ordre* 1, *il possède un compact propre de type* U^*.

Si Λ est ensemble d'interpolation d'ordre $k \geqslant 1$, nous pouvons affirmer, en combinant les théorèmes 1.5 et 3.2, que, pour tout $\delta > 0$ il existe un compact K_δ de diamètre inférieur à δ, associé à Λ et qu'il existe un entier positif N indépendant de δ, tel que

$$L_\delta = \bigcup_{|n| \leqslant N} \pi_n(K_\delta)$$

est un compact propre pour Λ. Le diamètre de $\pi_n(K_\delta)$ est majoré par $N.\delta$. Il existe donc une constante C ne dépendant que de N telle que la mesure de L_δ est majorée par $C.\delta$.

THÉORÈME 6.4. — *Soit* $\Lambda \subset \mathbf{R}$ *un ensemble de Sidon qui est d'interpolation. Il existe des compacts propres pour* Λ, *de mesure de Lebesgue arbitrairement petite.*

7. Stabilité des ensembles de Sidon et ensemble de type (I_1).

DÉFINITION 7.1. — *Une famille* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *de sous-ensembles deux à deux disjoints d'un groupe abélien localement compact* Γ, *est de type* (I_1) *si toute fonction définie sur* $E = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, *bornée, constante sur chaque* E_λ, *est prolongeable dans* $B(\Gamma)$.

Nous dirons aussi que E *est un ensemble de type* (I_1) relativement à sa partition $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Les familles (I_1) jouent, par rapport aux ensembles de Sidon, le même rôle que les familles (I_0) par rapport aux ensembles d'interpolation.

Notre objet est d'établir, pour un ensemble de Sidon contenu dans $\mathbf{R}$, un théorème « d'élargissement » analogue au théorème 3 de l'introduction pour les ensembles d'interpolation. Nous commencerons par établir un résultat général sur la stabilité des ensembles de Sidon.

1. *Stabilité des ensembles de Sidon* (Γ métrisable).

THÉORÈME 7.1. — *Si* Λ *est un ensemble de Sidon d'un groupe métrisable* Γ, *il existe un compact* K *du dual* G, *tel que toute fonction bornée sur* Λ *peut être interpolée par la transformée de Fourier d'une mesure à support dans* K (*alors* K *est propre pour* Λ).

Le fait est évidemment trivial si G est compact et sera sans intérêt dans la suite. Remarquons que, si Γ est métrisable, G est dénombrable à l'infini. D'autre part, la propriété à démontrer est équivalente à la suivante [8] : il existe un compact K tel que, sur l'ensemble des polynômes trigonométriques sur G, à spectre dans Λ, $P(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda)(x, \lambda)$, les normes

$$\sup_{x\in K} |P(x)|, \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda} |a(\lambda)|,$$

sont équivalentes.

Supposons le contraire. Soit $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de compacts de G telle que tout compact est contenu dans un K_n, pour un n assez grand. Alors il existe une suite de polynômes trigonométriques

$$P_n(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_n(\lambda)(x, \lambda)$$

tels que

$$\sup_{x \in K_n} |P_n(x)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$(1) \qquad \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_n(\lambda)| = 1.$$

Alors, pour toute mesure μ bornée sur G,

$$\int P_n(x)\, d\mu\,(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_n(\lambda)\hat{\mu}(\lambda) \to 0$$

Λ étant un ensemble de Sidon, ceci entraîne que, pour toute fonction $b \in \mathcal{B}(\Lambda)$,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_n(\lambda)\ b(\lambda) \to 0$$

et par suite (cf. [13], p. 296),

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_n(\lambda)| \to 0$$

ce qui est en contradiction avec (1).

Corollaire. — *Soit* Λ *un ensemble de Sidon d'un groupe métrisable* Γ. *Il existe un compact* K *de* G *tel que les fonctions de la boule unité de* $\mathcal{B}(\Lambda)$ *peuvent être interpolées dans un ensemble uniformément équicontinu de transformées de Fourier de mesures à support dans* K.

(Ce résultat est à rapprocher du th. 1 § 2 [1] pour les ensembles d'interpolation.)

En effet soit K le compact mis en évidence par le théorème 7.1. Si M(K) désigne l'espace des mesures portées par K, muni de la topologie forte, l'application

$$\begin{gathered} \mu \to \hat{\mu}|_\Lambda \\ M(K) \to \mathcal{B}(\Lambda) \end{gathered}$$

est continue et surjective. $\mathcal{B}(\Lambda)$ est donc isomorphe à un quotient de M(K) par un sous-espace fermé. Il en résulte que les fonctions de la boule unité de $\mathcal{B}(\Lambda)$ peuvent être interpolées par les transformées de Fourier de mesures appartenant à un ensemble uniformément borné de M(K), qui constituent un ensemble uniformément équicontinu de fonctions de $B(\Gamma)$.

Remarque 7.1. — Si K est un compact propre pour Λ, quelconque, la démonstration du corollaire subsiste à condition de remplacer Λ par $\Lambda' \subset \Lambda(\Lambda \setminus \Lambda'$ fini) (cf. définition 1.6). La boule unité de $\mathcal{B}(\Lambda')$ peut être interpolée dans un ensemble équicontinu de transformées de Fourier de mesures à support dans K.

DÉFINITION 7.2. — *Soit Ω un voisinage de 0 dans Γ. Un sous-ensemble Λ' de Γ est dit Ω-voisin d'un sous-ensemble Λ s'il existe une bijection $\lambda \to \lambda'$ de Λ sur Λ', telle que $\lambda - \lambda' \in \Omega$.*

THÉORÈME 7.2. — *Soit Λ un ensemble de Sidon d'un groupe métrisable Γ. Il existe Ω voisinage de 0 dans Γ tel que tout ensemble Ω-voisin de Λ est de Sidon.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire du th. 7.1 en utilisant le th. 1.4.

2. *Élargissement d'un ensemble de Sidon en ensemble* (I_1) $(\Gamma = \mathbf{R})$.

Nous nous posons le problème de savoir si, pour un ensemble de Sidon $\Lambda \subset \mathbf{R}$ il existe un voisinage de 0, Ω, tel que $\Lambda + \Omega$ soit de type (I_1) relativement à la partition $(\lambda + \Omega)_{\lambda \in \Lambda}$. S'il en est ainsi, nous dirons que Λ *a la propriété d'élargissement.* Nous allons établir le résultat suivant.

THÉORÈME 7.3. — *Tout ensemble de Sidon réel est la réunion de deux ensembles de Sidon (au plus) ayant la propriété d'élargissement.*

Nous utiliserons les lemmes suivants.

LEMME 1. — *Soit une mesure sur $\mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ de coefficients de Fourier $(c_n)_{-\infty}^{+\infty}$. Soit $\Phi \in A(\mathbf{R})$ à support compact. La fonction*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \Phi(x - n) \quad (x \in \mathbf{R})$$

appartient à $B(R)$.

Nous omettrons la démonstration.

Lemme 2. — *Supposons que* $(\alpha n_j + \beta)_{j=1}^{\infty}$ $(\alpha,\ \beta \in \mathbf{R},\ n_j \in \mathbf{Z})$ *est un ensemble de Sidon dans* $\mathbf{R}$. *Alors* $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ *est un ensemble de Sidon dans* $\mathbf{Z}$.

Nous omettrons la démonstration.

Soit $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$, un ensemble de Sidon. D'après le théorème 7.2, il existe $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ et une suite $\Lambda' = (\lambda'_j)_{j=1}^{\infty}$ contenue dans la progression arithmétique $(\alpha n + \beta)_{-\infty}^{+\infty}$, qui est aussi un ensemble de Sidon et vérifie

$$|\lambda'_j - \lambda_j| \leqslant \frac{\alpha}{2} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots)$$

a) Supposons d'abord qu'il existe $0 < \delta < \frac{\alpha}{2}$ tel que

$$|\lambda'_j - \lambda_j| \leqslant \frac{\alpha}{2} - \delta.$$

Soit $\Phi \in \mathrm{A}(\mathbf{R})$ à support contenu dans $\left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$ et prenant la valeur 1 sur $\left[-\frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2}, \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}\right]$. Soit $(c_n)_{-\infty}^{+\infty}$ la suite des coefficients de Fourier d'une mesure sur T. Alors

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \Phi(x - (\alpha n + \beta))$$

est dans $\mathrm{B}(\mathbf{R})$ (lemme 1). En particulier soit $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite bornée quelconque. Posons

$$\lambda'_j = \alpha n_j + \beta \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Alors $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ est un ensemble de Sidon dans $\mathbf{Z}$ (lemme 2) et il existe une mesure sur $\mathbf{T}$, de coefficients de Fourier $(c_n)_{-\infty}^{+\infty}$, telle que

$$c_{n_j} = b_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots).$$

On vérifie alors que

$$\mathrm{F}(x) = b_j, \qquad x \in \left[\lambda_j - \delta/2,\ \lambda_j + \frac{\delta}{2}\right].$$

b) Mais en général, rien ne permet d'affirmer que la condition

$$|\lambda_j - \lambda'_j| \leqslant \frac{\alpha}{2} - \delta$$

est réalisée pour au moins un α (assez petit pour que toute suite $\left[-\frac{\alpha}{2}, +\frac{\alpha}{2}\right]$ voisine de $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ soit de Sidon).

La condition s'écrit aussi :

$$|\lambda_j/\alpha - \gamma| \leqslant \eta \pmod 1 \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

pour γ, η réels positifs et pour α assez petit. Or si une telle condition est réalisable pour certaines classes d'ensembles de Sidon (ensembles d'interpolation d'ordre 1, par exemple) nous n'avons pas pu démontrer, pour une suite de Sidon de type le plus général, l'existence d'un nombre réel α tel que $(e^{2\pi i\lambda_j/\alpha})_{j=1}^{\infty}$ soit non dense sur $\mathbf{T}$, (ni d'ailleurs trouver de contre-exemple). Mais il est facile de voir que, pour une suite Λ absolument quelconque, il existe une décomposition (et même en général une infinité) en deux sous suites possédant cette propriété. Il suffit de se donner arbitrairement un nombre α et de poser

$$\Lambda_1 = \left\{\lambda_j \in \Lambda | \lambda_j/\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \pmod 1\right\}$$
$$\Lambda_2 = \left\{\lambda_j \in \Lambda | \lambda_j/\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\pmod 1\right\}.$$

On peut alors appliquer le raisonnement *a*) à chacune des suites Λ_1 et Λ_2, α ayant été préalablement choisi en fonction de Λ.

8. Sur les mauvaises répartitions modulo 1.

Soit $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite croissante de nombres réels positifs. Nous nous intéressons à la répartition modulo 1 de la suite $(\lambda_j x)_{j=0}^{\infty}$ où x est un nombre réel.

D'après un théorème de Hermann Weyl [14], si λ_j est une suite d'entiers, l'ensemble des x tels que $(\lambda_j x)$ ne soit pas équirépartie modulo 1 est de mesure de Lebesgue nulle. En ce qui nous concerne, il suffira de savoir que ce résultat est équivalent au suivant : l'ensemble des x tels que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i \lambda_j x} = 0$$

est de mesure de Lebesgue pleine. Ce résultat subsiste pour une suite de réels, pourvu que $\lambda_{j+1} - \lambda_j \geqslant \delta_j$, avec $\Sigma(j^3\delta_j)^{-\frac{1}{2}} < \infty$, ce qui est une hypothèse de croissance très faible puisque δ_j peut-être décroissante vers zéro.

Nous nous intéressons à l'ensemble (de mesure nulle) des x tels que la suite $(e^{2\pi i\lambda_j x})$ n'a aucune limite par le procédé de sommation de Cesaro. Plus généralement, nous considérerons l'ensemble $E(\Lambda, M)$ des x tels que $(e^{2\pi i\lambda_j x})_{j=1}^{\infty}$ n'a aucune limite par le procédé régulier de sommation M. (cf. [18]).

THÉORÈME 8.1. — *Supposons que* Λ *possède une partition de type* (I_1) $(\Lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ $(\Lambda_k$ *fini). Pour tout procédé régulier de sommation* M, $E(\Lambda, M)$ *est non dénombrable.*

Supposons de plus qu'il existe un ensemble $H \subset \mathbf{R}$ *ayant la propriété : pour toute suite* $\zeta_k = 0, 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *il existe une mesure bornée* μ *concentrée sur* H, *telle que*

$$\hat{\mu}(\lambda) = \zeta_k \quad (\lambda \in \Lambda_k)$$

pour tous les entiers $k > 0$, *sauf un nombre fini. Alors* $E(\Lambda, M) \cap H$ *est non dénombrable.*

THÉORÈME 8.2. — *Supposons que* Λ *possède une partition* $(\Lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ $(\Lambda_k$ *fini) et un ensemble* $H \subset \mathbf{R}$ *ayant la propriété : pour toute suite* $\zeta_k = 0, 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *il existe une mesure bornée* μ *concentrée sur* H, *telle que*

$$|\hat{\mu}(\lambda) - \zeta_k| < \frac{1}{2} - \delta \quad (\lambda \in \Lambda_k)$$

pour tous les entiers $k > 0$ *sauf un nombre fini, et* $\delta > 0$. *Alors, pour tout procédé régulier de sommation à coefficients positifs,* $E(\Lambda, M) \cap H$ *est non dénombrable.*

Remarques et exemples. — Ces théorèmes ne sont qu'une extension d'un résultat de [8], qui s'avère intéressante dans les cas suivants, par exemple :

a) Si $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ est une famille de type (I_0), où les E_k sont des intervalles de longueur constante (nous savons que tout ensemble d'interpolation peut être ainsi élargi en une famille (I_0) cf. théorème 1.2), il suffit de choisir arbitrairement dans chaque E_k une suite finie Λ_k pour que $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$ satisfasse à l'hypothèse du théorème 8.1. De plus, quel que soit la suite $\zeta_k = 0, 1$ ($k = 1, 2, \ldots$) il existe une mesure atomique bornée μ telle que

$$\hat{\mu}(\gamma) = \zeta_k \quad (\gamma \in E_k).$$

Nous pouvons prendre comme ensemble H la réunion des ensembles sur lesquels sont concentrées ces mesures atomiques. Si K est un compact associé à la famille $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ (définition 4.2) H peut être relié à K de la même façon que pour les ensembles d'interpolation (théorème 1.3) (cf. aussi [1]).

b) Soit $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ un ensemble de Sidon qui admet H comme compact propre. Il existe un entier $k_0 \geqslant 1$ et un ensemble uniformément équicontinu de transformées de Fourier de mesures à support dans H, $\mathcal{M}$, tels que, quel que soit la suite $\zeta_k = 0, 1$, il existe $\hat{\mu} \in \mathcal{M}$ telle que

$$\zeta_k = \hat{\mu}(\lambda_k) \quad (k \geqslant k_0).$$

(cf. corollaire du théorème 7.1 et remarque 7.1). Il existe donc $\alpha > 0$ tel que, si $E_k = [\lambda_k - \alpha, \lambda_k + \alpha]$,

$$|\zeta_k - \hat{\mu}(\gamma)| < \frac{1}{2} - \delta \quad (\gamma \in E_k,\ k \geqslant k_0)$$

pour un $\delta > 0$. Il suffit de choisir arbitrairement une suite finie Λ_k dans chaque intervalle E_k pour que $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$ satisfasse à l'hypothèse du théorème 8.2, avec le même ensemble H).

Pour démontrer les théorèmes 8.1 et 8.2, nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME. — *Supposons que, pour un ensemble* H,

$$E(\Lambda, M) \cap H \neq \emptyset,$$

quel que soit le procédé M (*resp. quel que soit le procédé* M *à coefficients positifs*); *alors* $E(\Lambda, M) \cap H$ *est non dénombrable quel que soit le procédé* M (*resp. quel que soit le procédé* M *à coefficients positifs*).

Pour la démonstration, on pourra se reporter à [8].

Supposons que $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ possède une partition $(\Lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ de type (I_1) (Λ_k fini) et soit H un ensemble satisfaisant à l'hypothèse du théorème 8.1. Soit M un procédé régulier de sommation de matrice $(a_j^n)_{\substack{j=1,2,\ldots\\ n=1,2,\ldots}}$. Supposons que $E(\Lambda, M) \cap H = \emptyset$. Pour tout $x \in H$, la suite $(e^{2\pi i\lambda_j x})_{j=1}^{\infty}$ est M-sommable, c'est-à-dire que

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n e^{2\pi i\lambda_j x}$$

a une limite $(n \to \infty)$. Alors, quel que soit μ mesure bornée concentrée sur H,

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \hat{\mu}(\lambda_j)$$

a une limite $(n \to \infty)$. En particulier soit une suite $\zeta_k = 0, 1$. Il existe μ concentrée sur H, telle que

$$\hat{\mu}(\lambda) = \zeta_k \quad (\lambda \in \Lambda_k,\ k \geqslant k_0).$$

Posons

$$A_k^n = \sum_{\lambda_j \in \Lambda_k} a_j^n.$$

On vérifie aisément que $(A_k^n)_{\substack{k=1,2\ldots\\ n=1,2,\ldots}}$ est la matrice d'un procédé régulier de sommation. Or

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \hat{\mu}(\lambda_j) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^n \zeta_k$$

et il est impossible que $\sum_{k=1}^{\infty} A_k^n \zeta_k$ converge $(n \to \infty)$ pour tout choix des $\zeta_k = 0, 1$. Ceci démontre le théorème 8.1.

Supposons maintenant que Λ possède une partition $(\Lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ ayant la propriété du théorème 8.2 pour un certain ensemble H. Nous pouvons reprendre le raisonnement précédent. Soit une suite $\zeta_k = 0, 1$. Il existe une mesure μ concentrée sur H, telle que

$$|\hat{\mu}(\lambda) - \zeta_k| < \frac{1}{2} - \delta \quad (\lambda \in \Lambda_k,\ k \geqslant k_0).$$

Alors, avec des a_j^n et A_k^n positifs,

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \hat{\mu}(\lambda_j) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k^n \zeta_k\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n\right)\left(\frac{1}{2} - \delta\right).$$

Il est possible de choisir les ζ_k de façon que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^n \zeta_k = 1$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^n \zeta_k = 0.$$

Comme $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \to 1$ $(n \to \infty)$, il en résulte que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \hat{\mu}(\lambda_j)$ ne peut pas converger $(n \to \infty)$, ce qui fournit une contradiction et démontre le théorème 8.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. Mela, Sur les ensembles d'interpolation de C. Ryll-Nardzewski et de S. Hartmann, *Studia Math.* 29 (1968), 167-193.

[2] S. Hartmann et C. Ryll-Nardzawski, Almost periodic extensions of functions, *Coll. Math*, 12 (1964), 23-29.

[3] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience tracts, (1962).

[4] J. Mycielski, On a problem of interpolation by periodic functions, *Coll. Math*, 8, 1961, 95-97.

[5] J. S. Lipinski, Sur un problème de Marczeski concernant les fonctions périodiques, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, Série des Sci. Math. astr. et phys., 8, (1960), 695-697.

[6] C. Ryll-Nardzewski, Remark on interpolation by periodic functions, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, Série des Sci. Math. astr. et phys., 11, (1963), 363-366.

[7] E. Strzelecki, Some theorems of interpolation by periodic functions, *Colloquium Math.*, 12 (1964), p. 239-248.

[8] H. Helson et J. P. Kahane, A fourier method in diophantine problems, *J. anal. Math.*, *Iraël*, 15 (1965), 245-262.

[9] A. Zygmund, Trigonometric series. Cambridge University press.

[10] J. P. Kahane et R. Salem, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, Paris.

[11] S. Hartman, J. P. Kahane et C. Ryll-Nardzewski, Sur les ensembles d'interpolation, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 13 (1965), 625-626.

[12] J. P. Kahane, Ensembles de Ryll-Nardzewski et ensembles de Helson, *Colloquium Math.*, 15 (1965).

[13] N. Dunford et J. Schwartz, Linear operators.

[14] H. Weyl, Veber die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, *Math. Ann.*, 77 (1916).

INDEX DES TERMES INTRODUITS

Manuscrit reçu le 16 février 1968

Jean-François MÉLA
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
91-Orsay.