ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

H. BEGHIN

Sur la notion de travail dans la mécanique du continu

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 173-184
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__173_0>

SUR LA NOTION DE TRAVAIL DANS LA MÉCANIQUE DU CONTINU.

par H. BÉGHIN (Paris).

La mécanique théorique peut se présenter sous des aspects différents : sous l'un de ces aspects, les systèmes matériels sont présentés comme des ensembles de points matériels de dimensions négligeables par rapport à leurs distances mutuelles ; dans un autre de ces aspects, on raisonne sur des schémas parfaitement continus, considérant les corps comme ils nous apparaissent lorsqu'on les observe par les procédés élémentaires courants.

Ces schémas sont aussi valables l'un que l'autre, à condition que les observations effectuées sur les phénomènes mécaniques pour l'établissement des lois soient traduites dans le langage qui convient au schéma choisi.

Or, si l'on adopte le schéma des ensembles de points matériels, on se trouve en présence de difficultés sérieuses, lorsqu'on a à définir le travail intérieur dans un milieu dit continu et à exposer la théorie de l'énergie, tant qu'on ne veut pas pénétrer jusqu'aux phénomènes complexes où se manifeste la constitution de la matière et où l'on considère les phénomènes thermiques comme cas particulier des phénomènes mécaniques.

J'adopte donc la *Mécanique du continu.*

On connaît la loi fondamentale qui régit les mouvements par rapport à des axes de référence dits de Galilée :

Les forces extérieures et les forces d'inertie d'un système matériel en mouvement forment à chaque instant un système de vecteurs équivalent à zéro.

On connaît également ses corollaires de la quantité de mouvement.

Cela posé, voici comment il me semble bon d'introduire la notion de *travail* dans cette *Mécanique du continu* :

Des observateurs étudiant les phénomènes mécaniques ont constaté qu'en multipliant des forces par les déplacements de leurs points d'application, on obtenait des quantités *paraissant* avoir des propriétés fort intéressantes.

Les théoriciens, s'inspirant de ces suggestions, se sont alors efforcés, passant en revue les aspects si variés des phénomènes mécaniques, de définir avec précision, sur cette base, une grandeur accessible au raisonnement scientifique et au calcul et d'en établir les principales propriétés.

Pour réaliser ce programme et élaborer cette définition, le théoricien *a tout pouvoir* : il n'a d'autre justification à donner de son choix que l'intérêt présenté par les propriétés qu'il aura pu établir, c'est-à-dire leur utilité et leur commodité.

Voici les définitions auxquelles on s'est arrêté et qui conduisent à des énoncés remarquables, corollaires de la loi fondamentale de la mécanique rappelée ci-dessus, *sans qu'il y ait à faire intervenir aucun nouveau principe expérimental.*

1° Le travail d'une *force* $\vec{F}$ *appliquée à un élément de matière* est défini par sa différentielle

$$d\mathcal{T} = \left(\vec{F}\,\vec{V}\right) dt = FV \cos\alpha\, dt,$$

où V désigne *la vitesse de l'élément de matière* ; α désigne l'angle des vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{V}$.

Si la force est appliquée toujours au même élément de matière, $\vec{V}$ désigne à la fois la vitesse de l'élément de matière et la vitesse du point géométrique d'application.

Mais, si le point d'application passe continuellement d'un élément de matière à un autre, il y a lieu de bien préciser que le vecteur $\vec{V}$ qui figure dans la définition est *la vitesse de l'élément de matière* et non celle du point géométrique d'application.

Ainsi, s'il s'agit de la réaction du sol sur une roue de voiture, son travail est nul, car la vitesse de l'élément de matière est nulle si la roue roule sans glisser sur le sol ($V = 0$) ; au contraire, la vitesse du point géométrique d'application est la vitesse de la voiture : elle conduirait pour $d\mathcal{T}$ à une expression toute différente.

2° *Soient n forces extérieures* $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$ *appliquées en des points* A_1, A_2, ..., A_n *d'un solide invariable* S. La définition posée ci-dessus donne pour le travail de ces n forces l'expression

$$(1) \qquad \left(\vec{F}_1\,\vec{V}_1 + \vec{F}_2\,\vec{V}_2 + \dots + \vec{F}_n\,\vec{V}_n\right) dt$$

où $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ désignent les vitesse des *éléments de matière* d'application.

Or on sait que la vitesse $\vec{V}_i$ d'un élément de matière A_i du solide S est donnée par l'expression

$$\vec{V}_i = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}_i, \tag{2}$$

où O désigne un point arbitraire de S, $\vec{V}_0$ la vitesse de l'élément de matière qui se trouve en O à l'instant considéré, $\vec{\omega}$ la rotation instantanée de S.

Remplaçant les vitesses $\vec{V}_i$ par ces valeurs et utilisant la propriété bien connue d'un produit mixte de se conserver lorsqu'on effectue sur ses facteurs une permutation circulaire, on obtient l'expression connue

$$d\mathcal{T} = (\vec{R}\,\vec{V}_0 + \vec{G}\,\vec{\omega})\,dt, \tag{3}$$

où $\vec{R}$ et $\vec{G}$ sont les éléments de réduction en O du système des forces $\vec{F}_i$.

Les forces $\vec{F}_i$ ne figurant dans cette expression que par les éléments de réduction $\vec{R}$ et $\vec{G}$, on voit que deux systèmes de forces équivalents *appliqués à un même solide invariable* donnent le même travail, un système équivalent à zéro donne un travail nul.

3° *Soient des forces extérieures réparties de manière continue dans un solide invariable.* J'imagine le solide S décomposé en un grand nombre de petits morceaux a_i. Le morceau a_i est soumis ainsi à des forces dont les éléments de réduction en un point intérieur arbitraire A_i sont $\vec{r}_i$ et $\vec{g}_i$.

Il est naturel — *et c'est ce que l'on fait* — de prendre la même définition du travail que s'il s'agissait d'un très grand nombre de vecteurs appliqués en des points voisins les uns des autres; on convient ainsi de définir le travail des forces considérées par la même formule que ci-dessus

$$d\mathcal{T} = (\vec{R}\,\vec{V}_0 + \vec{G}\,\vec{\omega})\,dt. \tag{4}$$

En vue de préparer l'extension au cas des corps déformables, il est intéressant d'exprimer ce travail au moyen des éléments $\vec{r}_i, \vec{g}_i$ définis ci-dessus.

En appliquant la formule (4) à chacun des morceaux a_i, on peut écrire

$$d\mathcal{T} = \sum_i \left(\vec{r}_i \vec{V}_i + \vec{g}_i \vec{\omega}\right) dt, \tag{5}$$

dont l'identité avec cette formule globale se vérifie d'ailleurs immédiatement en remplaçant $\vec{V}_i$ par $\vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}_i$.

En général, les couples $\vec{g}_i$ sont du 4^e ordre, ce qui se produit si les forces sont définies par un champ de forces $\vec{f}$ (par unité de masse) ; la formule (5) se réduit alors à son premier terme

$$d\mathcal{T} = \sum \left(\vec{r}_i \vec{V}_i\right) dt. \tag{6}$$

Cependant, si, comme cela a lieu en Magnétisme, les forces considérées sont définies par l'ensemble d'un champ de forces $\vec{f}$ et d'un champ de couples $\vec{\gamma}$, les couples $\vec{g}_i$ sont du 3^e ordre et les termes correspondants doivent être conservés dans la formule (5).

4° *Soient des forces extérieures appliquées à un corps continu déformable*. Les notations étant les mêmes que ci-dessus relativement à une décomposition du corps en petits morceaux a_i, la cinématique des milieux continus montre que le déplacement élémentaire dans le temps dt du morceau résulte de la *translation* $\vec{V}_i\, dt$, où $\vec{V}_i$ désigne la vitesse de l'élément qui passe en A_i à l'instant t, *d'une rotation* $\vec{\omega}_i\, dt$ autour d'un axe issu de A_i et de *trois dilatations rectangulaires* à partir du point A_i.

Par définition, le travail du système de forces considéré dans ce déplacement est ce qu'on obtient en donnant à chaque élément a_i le déplacement $\left(\vec{V}_i dt,\ \vec{\omega}_i dt\right)$ à la manière d'un solide invariable, *sans faire mention des trois dilatations rectangulaires*.

L'établissement du théorème du travail virtuel qui sera énoncé plus loin sera basé sur la forme particulière de cette définition : toute prise en considération des dilatations rectangulaires qui se traduirait numériquement sur la valeur du travail $d\mathcal{T}$ empêcherait d'énoncer ce théorème dont l'intérêt est capital.

Le travail de forces extérieures appliquées à un corps déformable a donc pour expression

$$d\mathcal{T} = \sum_i \left(\vec{r}_i \vec{V}_i + \vec{g}_i \vec{\omega}_i\right) dt. \tag{7}$$

ou plus exactement l'intégrale de cette somme quand on fait tendre vers zéro les dimensions des éléments a_i.

Changement du système de référence. La formule bien connue

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e \tag{8}$$

de la composition des vitesses, appliquée à la définition du travail, conduit manifestement à la relation générale

$$d\mathcal{T} = d\mathcal{T}_r + d\mathcal{T}_e, \tag{9}$$

qui exprime que le travail d'un système de forces dans un mouvement résultant est la somme du travail $d\mathcal{T}_r$ calculé avec les vitesses relatives V_r et du travail $d\mathcal{T}_e$ calculé avec les vitesses d'entraînement V_e.

Les V_e étant les vitesses de points invariablement liés à un même système de référence, possèdent les propriétés des vitesses des divers points d'un solide invariable.

Il en résulte que deux systèmes de forces équivalents donnent le même travail d'entraînement $d\mathcal{T}_e$.

Le travail d'entraînement d'un système de forces équivalent à zéro est nul.

Et, par suite, *le travail d'un système de forces équivalent à zéro est indépendant du système de référence,* propriété dont il est très utile de se souvenir.

Travail des forces intérieures dans un corps continu. — Si un système matériel est composé de corps distincts agissant les uns sur les autres, leurs actions mutuelles sont des forces intérieures au système, mais extérieures à chacun d'eux, de sorte que leur travail n'a pas à être défini spécialement.

Ainsi, si un système est composé de n éléments matériels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, exerçant à distance les uns sur les autres des actions mutuelles $\vec{F}_{ij}$, $\vec{F}_{ji}$, ... deux à deux opposées, le travail élémentaire de ces $n(n-1)$ forces est la somme de $n(n-1)$ termes de la forme $\vec{F}_{ij}\, \overrightarrow{da_{ij}}$.

Si F_{ij} désigne la mesure commune des forces $\vec{F}_{ij}$, $\vec{F}_{ji}$, affectée du signe $+$ s'il s'agit d'une répulsion, du signe $-$ s'il s'agit d'une attraction, le travail élémentaire de toutes ces forces est la somme de $\frac{n(n-1)}{2}$ termes

$$(10) \qquad d\mathcal{T} = \sum_{ij} F_{ij} dr_{ij},$$

où r_{ij} désigne la distance des éléments a_i et a_j.

Je suppose maintenant qu'il s'agisse de *forces intérieures de contact* dans un corps continu, telles que les efforts (ou contraintes) qui s'exercent le long de petits éléments de surface, de positions et d'orientations arbitraires, donc dépendant de cinq paramètres, que l'on peut imaginer dans le système.

Dans ce cas, *la définition du travail exige une extension toute spéciale.* Voici la définition qu'il y a lieu de donner :

Les notations concernant la décomposition du système matériel donné en petits éléments étant les mêmes que ci-dessus, $\vec{r}_i$ et $\vec{g}_i$ étant les éléments de réduction en A_i des efforts exercés sur a_i par les éléments contigus, le travail élémentaire des efforts intérieurs dans le système considéré S est *par définition* la somme

$$(11) \qquad d\mathcal{T} = \sum_i \left(\vec{r}_i \vec{V}_i + \vec{g}_i \vec{\omega}_i\right) dt,$$

des travaux que donneraient les efforts auxquels chaque élément a_i est soumis de la part des éléments voisins si chaque élément se déplaçait seulement de la translation $\vec{V}_i\, dt$ et de la rotation $\vec{\omega}_i\, dt$, *donc à la manière d'un solide invariable, sans qu'on tienne compte des trois dilatations rectangulaires* signalées précédemment.

D'une manière plus précise, $d\mathcal{T}$ est *l'intégrale* limite de cette somme Σ, lorsqu'on fait tendre vers zéro les dimensions des éléments a_i.

Le plus souvent, le couple $\vec{g}_i$ est d'un ordre de grandeur supérieur à 3, de sorte que la translation $\vec{V}_i\, dt$ peut être seule retenue ; la formule se réduit alors à

$$(12) \qquad d\mathcal{T} = \sum \left(\vec{r}_i \vec{V}_i\right) dt.$$

Une propriété importante du travail des forces intérieures est d'être indépendant des axes de référence. Cette propriété est évidente, car les forces qui figurent dans l'expression de ce travail étant deux à deux opposées, leur ensemble équivaut à zéro, et par suite, lorsqu'on change de système de référence, leur travail d'entraînement est nul, quelle que soit la convention que l'on imagine pour définir les déplacements figurant dans la définition.

Il est très important de remarquer que si l'on avait tenu compte des trois dilatations rectangulaires, ce qui eût paru plus logique, on aurait obtenu une toute autre valeur pour le travail intérieur. *La démonstration du théorème du travail virtuel qui sera donnée plus loin justifiera le choix qui a été fait.*

Applications.

1° Un tambour circulaire S tourne à la vitesse angulaire ω autour de son centre O. Une lame flexible $C_1A_1BA_2C_2$ est en contact (avec ou sans frottement) le long de l'arc A_1BA_2 avec la surface latérale du tambour.

L'arc A_1BA_2 a par rapport au tambour une vitesse de glissement u, le sens positif des rotations étant le sens de l'axe fixe Ox vers l'axe perpendiculaire Oy. Soient T_1 et T_2 les tensions de la lame en A_1 et A_2.

a) soit à évaluer le travail des réactions de la lame sur le tambour par rapport au système de référence xOy. Ces réactions *équivalent* à T_1 et T_2, donc ce travail est égal au travail qu'auraient T_1 et T_2, *si elles étaient appliquées au tambour* S. C'est donc

$$(T_2 - T_1)\, R\, \omega\, dt. \tag{13}$$

b) soit à évaluer la somme des travaux des réactions mutuelles lame-tambour.

Ces forces forment un système équivalent à zéro ; leur travail est donc indépendant du système de référence. Je rapporte au tambour. Seules les réactions appliquées à la lame donnent un travail. Or elles équivalent à T_1 et T_2 changées de sens ; leur travail sur la lame A_1BA_2 qui n'est pas déformée est donc

$$(T_1 - T_2)\, u\, dt. \tag{14}$$

c) soit enfin à évaluer le travail des réactions appliquées à la lame.

Ces forces équivalent à T_1 et T_2 changées de sens ; leur travail est donc

$$(T_1 - T_2)\,(u + R\omega)\,dt \tag{15}$$

On vérifie que l'expression (14) est la somme des expressions (13) et (15).

2° *Calcul du travail des efforts intérieurs dans un corps continu.*

Je me bornerai au cas classique où les actions à distance qui s'exercent sur chaque élément de matière ne comportent pas de couple de masse et où l'effort qui s'exerce sur chaque élément d'aire $d\sigma$ est représenté par une force $\vec{F}d\sigma$ appliquée en un point intérieur.

Les composantes X, Y, Z de cet effort unitaire $\vec{F}$ dépendent des coordonnées x, y, z du point de l'espace où se trouve l'élément et des cosinus directeurs α, β, γ de la normale orientée vers l'extérieur du corps auquel elle est appliquée superficiellement.

Dans l'étude des milieux continus, on établit que ces composantes X, Y, Z sont linéaires en α, β, γ, les coefficients étant des fonctions de x, y, z formant un tableau symétrique par rapport à sa diagonale :

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} X = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ Y = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ Z = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma. \end{cases}$$

Si ω désigne un petit élément de matière du corps, s, sa surface, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure en un point de cette surface ; pour calculer le travail intérieur dans le domaine entier Ω, je dois d'abord, par application de la formule (12), former la somme géométrique des efforts le long de s ; sa composante suivant Ox est

$$\text{(17)} \qquad \iint_s (N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma)\, d\sigma.$$

Par application de la formule d'Ostrogradsky, elle se transforme en l'intégrale triple

$$\text{(18)} \qquad \iiint_\omega \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) d\omega,$$

qui, pour la suite du calcul, peut se remplacer par l'expression équivalente infiniment petite

$$\text{(19)} \qquad \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) \omega,$$

Je dois former ensuite le produit scalaire $\vec{r}_i \vec{V}_i \delta t$, et l'intégrer dans tout le domaine (Ω) ; j'obtiens

$$\text{(20)} \quad \delta t \iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) u + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) v + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \right) w \right] d\omega.$$

Mais, pour les éléments ω voisin de la frontière S du domaine Ω, j'ai tenu compte à tort — puisque ce sont des forces extérieures au corps Ω, — des efforts le long de S ; je dois donc retrancher l'intégrale

$$(21)\qquad \Big[\delta t \iint_S (N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma)\,u + (T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma)\,v + (T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma)\,w\Big]\,d\sigma$$

que je transforme par la formule d'Ostrogradsky en une intégrale triple que je dois retrancher de l'intégrale (20) ; j'obtiens

$$(22)\qquad \delta t \iiint_\Omega \Big[\frac{\partial}{\partial x}(N_1u + T_3v + T_2w) + \frac{\partial}{\partial y}(T_3u + N_2v + T_1w) + \frac{\partial}{\partial z}(T_2u + T_1v + N_3w)\Big]\,d\omega\,;$$

un grand nombre de termes disparaissent dans la soustraction, il reste, pour le travail cherché $\delta\mathcal{T}$, l'expression

$$(23)\qquad \delta\mathcal{T} = -\delta t \iiint_\Omega \big[N_1\varepsilon_1 + N_2\varepsilon_2 + N_3\varepsilon_3 + 2T_1\gamma_1 + 2T_2\gamma_2 + 2T_3\gamma_3\big]\,d\omega,$$

où l'on a posé

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\[2ex] 2\gamma_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\,; \quad 2\gamma_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\,; \quad 2\gamma_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{array}\right.$$

S'il s'agit d'un fluide sans viscosité, les T sont nuls, les N sont égaux à $-p$; la formule se réduit à

$$(25)\qquad \delta\mathcal{T} = +\,\delta t \iiint_\Omega p(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\,d\omega.$$

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ est, comme on le démontre, la vitesse de dilatation cubique au point considéré.

3° *Calcul du travail intérieur dans un fil parfaitement flexible.* — Soit un fil AB, M l'un quelconque de ses points. Dans le déplacement considéré, A, B, M, se déplacent de $\delta\vec{A}$, $\delta\vec{B}$, $\delta\vec{M}$.

Soit T la tension du fil en M dirigée dans le sens de A vers B.

Pour définir le travail, je dois décomposer le fil en petits éléments, soit MM' l'un d'eux et former les produits scalaires de la forme

$$(26)\qquad \left(\overrightarrow{\mathrm{T}_{\mathrm{M'}}}-\overrightarrow{\mathrm{T}_{\mathrm{M}}}\right)\overrightarrow{\delta\mathrm{M}}=\overrightarrow{d\mathrm{T}}\,\overrightarrow{\delta\mathrm{M}}.$$

Le travail cherché est

$$(27)\qquad \delta\mathfrak{C}=\int_{\mathrm{AB}}\overrightarrow{d\mathrm{T}}\,\overrightarrow{\delta\mathrm{M}}-\overrightarrow{\mathrm{T}_{\mathrm{B}}\delta\mathrm{B}}+\overrightarrow{\mathrm{T}_{\mathrm{A}}\delta\mathrm{A}},$$

car, dans les deux éléments extrêmes, les tensions en A et B ne doivent pas entrer en jeu, puisque forces extérieures. Cette expression se réduit à

$$(28)\qquad \delta\mathfrak{C}=-\int_{\mathrm{AB}}\vec{\mathrm{T}}d\left(\overrightarrow{\delta\mathrm{M}}\right)=-\int_{\mathrm{AB}}\vec{\mathrm{T}}\delta\left(\overrightarrow{d\mathrm{M}}\right),$$

par intégration par parties de l'intégrale (27).

Si l'on imagine le fil décomposé en petits éléments de longueurs l_1, l_2, ..., l_n, le travail peut aussi se représenter par l'expression approchée

$$(29)\qquad \delta\mathfrak{C}=-(\mathrm{T}_1\delta l_1+\cdots+\mathrm{T}_n\delta l_n)=-\sum(\mathrm{T}\delta l).$$

Théorème du travail virtuel. — Soit un système matériel S quelconque *en équilibre* ou *en mouvement.*

Je considère sa position à l'instant t.

Les *divers couples ou forces* exercés sur l'un quelconque a_i des petits éléments, dans lesquels j'imagine le système S décomposé, soit par les autres morceaux a qui composent S, soit par les corps étrangers à S et les *forces d'inertie* de a_i, forment des systèmes de vecteurs dont les éléments de réduction en A_i (intérieur à a_i) sont $\vec{r}_i$, $\vec{g}_i$; $\vec{r}_i$, $\vec{g}_i$;... et l'on a d'après la loi fondamentale de la Mécanique appliquée à a_i

$$(30)\qquad \left\{\begin{array}{l}\vec{r}_i+\vec{r}'_i+\vec{r}''_i+\cdots=0,\\ \vec{g}_i+\vec{g}'_i+\vec{g}''_i+\cdots=0.\end{array}\right.$$

Cela posé, j'imagine un *champ arbitraire* de vecteurs $\vec{\mathrm{V}}$ que j'appelle *vitesses virtuelles* dans la région occupée par S à l'instant t, et je suppose qu'on donne à chaque élément de S, à partir de sa position à l'instant t, le déplacement infiniment petit $\vec{\mathrm{V}}d\tau$, déplacement supposé effectué avec vitesse finie, dans le temps infiniment petit $d\tau$ *(temps virtuel).*

Le petit déplacement de a_i résulte de la *translation* $\vec{\mathrm{V}}_i d\tau$ $\left(\vec{\mathrm{V}}_i,\right.$

vitesse virtuelle en A_i), de la *rotation* $\vec{\omega}_i d\tau$ autour d'un axe issu de A_i et de *trois dilatations rectangulaires*.

D'aprés la définition posée du travail, qui ne fait pas mention des trois dilatations rectangulaires, le travail virtuel des forces considérées est l'intégrale limite de l'expression

$$(31) \qquad \sum\left[(\vec{r}_i + \vec{r}'_i + \cdots)\vec{V}_i + (\vec{g}_i + \vec{g}'_i + \cdots)\vec{\omega}_i\right] d\tau.$$

Ce travail est donc nul, puisque chaque parenthèse est nulle.

C'est le théorème du travail virtuel qui s'écrit

$$(32) \qquad d\mathcal{C}_j + d\mathcal{C}_i + d\mathcal{C}_e = 0$$

($d\mathcal{C}_j$, travail virtuel des forces d'inertie ; $d\mathcal{C}_i$ travail virtuel des forces intérieures ; $d\mathcal{C}_e$ travail virtuel des forces extérieures). Il s'énonce :

Un système matériel S *étant en équilibre ou en mouvement, la somme des travaux virtuels de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures auxquelles il est soumis, telles qu'elles existent à l'instant t, et des forces d'inertie à l'instant t de ses éléments, est nulle dans tout déplacement infiniment petit imaginé à partir de la position du système à l'instant t.*

Il est essentiel de considérer que ces déplacements virtuels sont *entièrement arbitraires,* respectant ou non la cohésion ou l'impénétrabilité des corps, l'invariabilité des solides invariables, l'incompressibilité des liquides, etc... conservant ou non les contacts des corps entre eux, etc...

On voit ainsi que le théorème du travail virtuel est d'une *souplesse illimitée.*

On sait que le *théorème de la force vive* est un cas particulier du théorème du travail virtuel ; il suffit de prendre comme vitesses virtuelles, les vitesses à l'instant *t* dans le déplacement réel.

Il est manifeste que *ces théorèmes n'existeraient pas si l'on avait fait intervenir les dilatations rectangulaires mentionnées ci-dessus dans la définition du travail,* en particulier du *travail intérieur.* Cette définition du travail, quelque paradoxale qu'elle puisse paraître se trouve ainsi parfaitement justifiée.

Énoncé sous cette forme absolument générale, le théorème du travail virtuel contient à lui seul toute la Mécanique. C'est un *corollaire* de la loi fondamentale qui, de son côté, peut se déduire très aisément du théorème du travail virtuel. Il est d'ailleurs infiniment plus souple qu'elle et conduit souvent à des solutions très élégantes *si l'on choisit judicieusement les déplacements virtuels* que l'on se propose d'utiliser.

Ce serait *mutiler ce théorème* que le limiter à des systèmes matériels sans frottement et à des déplacements compatibles avec les liaisons, alors qu'il s'applique à tous les systèmes, déformables ou non, et à tous les déplacements, *qu'il soient ou non réalisables pratiquement.*

(Parvenu aux Annales en août 1950.)